

Forschungsbericht

2002/08

Olaf Sylvain Niesner

**Entwicklung einer Prognosesimulation für Zahnprothetiken in der
Zahnmedizin**

Referent

Prof. Dr. Hans Georg Bock

**Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen
der Universität Heidelberg**

Betreuer

Dr. Ekkehard Finkeissen

Abteilung Medizinische Informatik

Institut für Medizinische Biometrie und Informatik

Klinikum der Universität Heidelberg

1 EINLEITUNG.....	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Ziel.....	2
1.3 Fragestellung	2
2 GRUNDLAGEN.....	5
2.1 Zahnmedizinische Grundlagen	5
2.1.1 Topologie des Kiefers.....	5
2.1.2 Zahnersatz	5
2.1.3 Der Kauvorgang und die dabei entstehenden Kräfte	8
2.1.4 Belastbarkeit natürlicher Pfeiler	9
2.1.5 Parameter, die zum Verlust der Brücke führen können	11
2.2 Mathematische Grundlagen.....	12
2.2.1 Vektoren.....	12
2.2.2 Vektorprodukt.....	13
2.2.3 Bogenlänge.....	14
2.3 Physikalische Grundlagen	14
2.3.1 Einführung in die Mechanik	14
2.3.2 Kräfte und Momente.....	15
2.3.3 Körper im Gleichgewicht	17
2.3.4 Lösbarkeit von Gleichgewichten	19
2.3.5 Wichtige Kraftgesetze	21
2.3.6 Eigenschaften der Konusprothese.....	25
2.3.7 Kräfte der Gingiva bei gingivaler Abstützung eines Sattels.....	28
2.4 Informatische Grundlagen.....	37
2.4.1 Softwarespezifikationen mit UML	37
2.4.2 Bestandteile von UML	38
3 ANALYSE UND AUFBAU DES MODELLS	43
3.1 Identifikation der Anwendungsfälle	43
3.2 Anwendungsfall „Gebiß und Prothesendaten erfassen“	44
3.3 Biomechanisches Modell und Berechnungsmethoden	47
3.3.1 Modell zur Bestimmung von Kräften, die auf Prothetik und Zahn wirken	47
3.3.2 Reaktionen der Pfeiler auf Belastungen	49
3.3.3 Beschreibung der Kieferform mittels einer Parabel.....	51
3.3.4 Verhalten des Zahnhalteapparats und der Prothetik.....	53
3.4 Anwendungsfall „Berechnung und Simulation“	61
3.5 Interpretation der Ausgabeparameter	66
3.6 Fachlexikon.....	67
3.7 Aktivitätenmodellierung.....	71

3.7.1 Aktivitätsmodellierung Anwendungsfall „Daten erfassen“	71
3.7.2 Aktivitätsmodellierung Anwendungsfall „Berechnung und Simulation“	74
3.8 Zusammenfassung.....	77
4 ENTWICKLUNG UND DESIGN DES PROTOTYPEN	79
4.1 Design.....	79
4.1.1 Identifikation der Klassen und Methoden	79
4.1.2 Klassenmodell	82
4.1.3 Spezifikation der Klassen und Methoden	83
4.1.4 Objektinteraktionen.....	87
4.2 Implementierung des objektorientierten Designmodells.....	90
4.2.1 Implementierung der Klassen Krone, Zahn, Region und Gebiß	90
4.2.2 Implementierung der mathematischen Klassen.....	92
4.3 Zusammenfassung.....	97
5 EVALUATION.....	99
6 ZUSAMMENFASSUNG, DISKUSSION UND AUSBLICK	103
6.1 Zusammenfassung.....	103
6.2 Diskussion und Ausblick	105

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

In der Abteilung Medizinische Informatik des Instituts für Medizinische Biometrie und Informatik des Klinikums der Universität Heidelberg wird im Rahmen des AIDA-Forschungsprojekts in Kooperation mit der Abteilung MKG-Chirurgie der Kopfklinik der Universität Heidelberg eine wissensbasierte Entscheidungsunterstützung für die Zahnmedizin entwickelt.

Als Grundlage dafür ist eine zahnmedizinische Entscheidungstheorie entwickelt worden, die den gesamten Entscheidungsprozeß in Teilschritte unterteilt.

Sowohl von Seiten der Patienten als auch von Seiten des Gesetzgebers sind die Anforderungen an die Qualität der zahnmedizinischen Behandlung und Informierung ständig gestiegen. Um die Qualitätssicherung in die tägliche Praxis zu integrieren, soll dem Zahnarzt ein Informationssystem an die Hand gegeben werden, das auf Basis der im Rahmen einer Routinebefundung erhobenen Daten, des aktuellen zahnmedizinischen Wissens und mit Hilfe standardisierter Algorithmen eine Zweitmeinung generieren kann. Ein solches System kann somit die Rolle eines „neutralen Sachverständigen“ übernehmen, der dem Zahnarzt zum einen die Richtigkeit einer bestimmten Vorgehensweise bei der Behandlung zu bestätigen vermag, zum anderen aber auch weitere Vorschläge anbieten kann, die er eventuell noch gar nicht in Erwägung gezogen hat. Des weiteren könnten Patienten durch ein derartiges System über aktuelle Methoden der Behandlung sowie über die in ihrem speziellen Fall möglichen Alternativen umfassend informiert werden, was die Selbstbestimmung der Patienten entscheidend fördern würde.

Dabei kann und soll der praktizierende Zahnarzt in seiner Entscheidungsfreiheit nicht eingeschränkt werden. Da ein Computersystem über keine Sensoren verfügt, kann es den Zustand der betreffenden Patienten auch nicht erfassen. Der Computer kann als Informations- und Kommunikationssystem aber das Fachwissen von Zahnärzten strukturiert weiterleiten und so in schwierigen Situationen Hilfestellung bieten.

Im AIDA-Prototyp Version 1.1 wurde bisher die Generierung der Behandlungsalternativen im Bereich der prothetischen Brückenkonstruktionen erfolgreich

implementiert und evaluiert. Ungeklärt ist nach wie vor die Bewertung vorhandener Behandlungsalternativen gegeneinander. Eine wissenschaftlich begründete Systematik ist in diesem Zusammenhang nicht in Sicht, da die Kosten einer Behandlung nur schwer gegen die zu erwartende Behandlungsqualität aufgewogen werden können. Dennoch ist es möglich, die Prognosen zu strukturieren und teilweise zu bewerten. Eine finanzielle Prognose z. B. wird bereits von einigen Abrechnungsprogrammen automatisch aus dem Behandlungsplan abgeleitet.

Ungelöst ist bisher die Frage nach der funktionellen Prognose. Zur Schaffung einer wissenschaftlichen Basis müssen hierfür biomechanische Modelle und deren Lösungen gefunden werden, die zuverlässige Aussagen ermöglichen.

1.2 Ziel

Ziel der Arbeit ist es, die AIDA-Systematik in Richtung einer funktionellen Prognose für die Behandlungsalternativen auszubauen, damit die einzelnen Behandlungsalternativen bewertet werden können. Dazu sollte ein konzeptuelles Modell für Simulation von Zahnprothetiken erstellt werden, das biomechanische Vorgänge erfaßt und zu einem validierbaren Softwareprototypen weiterentwickelt. Validierung kann in diesem Zusammenhang nur in dem Maße erfolgen, wie Vergleichsdaten vorliegen.

Das konzeptuelle Modell und das daraus abgeleitete Designmodell sollen Aufschlüsse darüber bieten, wie eine Prognosesimulation aufgebaut sein sollte. Aus den Ergebnissen soll abgeleitet werden können, wie ein Forschungsansatz zur Prognosengenerierung aus Sicht der Zahnmedizin aufgebaut sein könnte. Der Prototyp soll in diesem Zusammenhang ein Beispiel für die Möglichkeiten der Kommunikation von Forschungsergebnissen liefern, ohne Anspruch auf direkte Übertragbarkeit der gelieferten Ergebnisse auf die heutige Behandlung zu erheben.

1.3 Fragestellung

Folgende Fragen sollten somit im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht werden:

- Welche der zur Zeit gängigen zahnmedizinischen Versorgungsmethoden können in einem biomechanischen Modell erfaßt werden, so daß ableitbare

Aussagen über ihr Verhalten in bestimmten Belastungssituationen und die Auswirkungen auf den Zahnhalteapparat gemacht werden können?

- Wie sehen die biomechanischen Modelle konkret aus?
- Wie lassen sich diese Modelle softwaretechnisch lösen, d. h. welche Algorithmen und Datenstrukturen beschreiben die Modelle?
- Wie muß das Designmodell gestaltet werden, damit eine nachträgliche Anpassung der Modelle möglich ist?
- Wie muß die Benutzerführung gestaltet sein, um eine hohe Akzeptanz zu erhalten?
- Wie sieht die Implementierung konkret aus?

2 Grundlagen

2.1 Zahnmedizinische Grundlagen

Die zahnmedizinischen Grundlagen beziehen sich auf Aussagen von Lenz (1992), Strub (1994) und Hupfaut (1993).

2.1.1 Topologie des Kiefers

Sowohl Ober- als auch Unterkiefer haben im gesunden bleibenden Gebiß 16 Zähne.

Um die Zähne eindeutig zu kennzeichnen, bedarf es einer einheitlichen Benennung. Das verbreitetste Benennungsschema ist das internationale Zahnschema der FDI (Fédération Dentaire Internationale) aus dem Jahr 1970, wonach jeder Zahn mit einer zweistelligen Nummer gekennzeichnet wird. Die erste Ziffer bezeichnet den Quadranten (Bleibendes Gebiß 1-4, Milchgebiß 5-8), wobei die Numerierung im Befund aus Sicht des Behandlers im Uhrzeigersinn von links oben nach links unten erfolgt. Die zweite Ziffer (1-8) bezeichnet den Zahn beginnend bei mesial hin zu distal. Bei Regionen wird eine 0 vorangestellt.

2.1.2 Zahnersatz

Falls in einer Region keine Krone vorhanden ist, obwohl aus ästhetischen oder funktionellen Gründen eine gefordert wäre, läßt sich dies mittels künstlicher Strukturen zumindest annähernd ausgleichen.

Auf die Arten der möglichen Konstruktionen wird hier nicht weiter eingegangen werden. Vielmehr konzentrieren sich die weiteren Ausführungen auf die Brückenkonstruktionen, die sowohl festsitzend als auch abnehmbar angefertigt werden können.

Als Pfeiler können einerseits natürliche oder künstliche Pfeiler dienen. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, die Konstruktion gingival, d. h. über die Schleimhaut, abzustützen.

2.1.2.1 Brückenkonstruktionen

Unter einer Brücke versteht man einen Zahnersatz, durch den verlorene oder nicht angelegte Zähne ersetzt werden. Brücken werden an natürlichen Zähnen oder Implantaten, den sogenannten **Brückenpfeilern**, fixiert, die durch präparative

Maßnahmen für die Aufnahme der Brücke vorbereitet worden sind. Auf diesen sitzt der **Brückenanker** auf, und zwischen den Pfeilern befinden sich die **Brückenzwischenglieder** (vgl. Abb. 1). **Einspannige Brücken** bestehen aus einem Zwischenglied, zweispannige aus zwei Brückengliedern, usw.

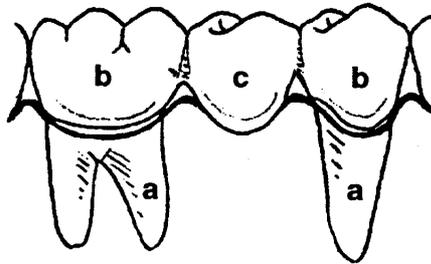


Abb. 1 aus [3]: Einspannige Brücke im Unterkiefer, a Pfeilerzahn (Brückenpfeiler), b Brückenanker, c Brückenzwischenglied.

Hat die Brücke ein freies Ende, so spricht man von einer Extensionsbrücke (Freiendbrücke). Brücken können aus Metall, Keramik oder Kunststoff gefertigt werden.

Weiterhin findet eine Unterteilung in festsitzende und abnehmbare Brücken statt.

2.1.2.2 Festsitzende Brücken

Festsitzende Brücken sind Elemente einer primären Verblockung, bei denen mindestens zwei Zähne fest miteinander verbunden sind. Die Brückenanker sind durch Zement oder spezielle Komposite fest mit dem Pfeilerzahn verbunden. Dabei schränkt die primäre Verblockung weitgehend die Zahnbeweglichkeit ein. Eine Folge dieser unphysiologischen Bewegungseinschränkung kann unter anderem ein Knochenabbau sein.

2.1.2.3 Abnehmbare Brücken

Abnehmbare Brücken sind sekundäre Verblockungen. Sie bestehen aus einem Innenkonus, der auf einem präparierten Pfeiler zementiert wird, und einem Außenkonus, dessen Innenwand im unverformten Zustand exakt auf den Innenkonus paßt und den Zahnersatz integriert.

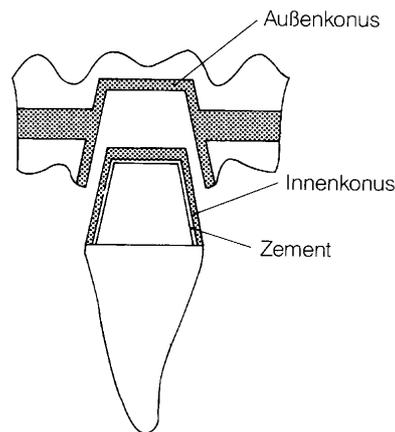


Abb. 2 aus [2]: Kegelkrone vor der Eingliederung.

2.1.2.4 Parodontal und ossal getragener Zahnersatz

Beim parodontal abgestützten Zahnersatz erfolgt die Abstützung ausnahmslos auf dem Restbiß, weshalb die Kraftübertragung ausschließlich auf den Restzähnen bzw. deren Parodontien stattfindet. Daher spricht man von einer physiologischen Abstützung.

Der ossal getragene Zahnersatz wird von Implantaten gestützt. Die Implantate werden im Knochen verankert, wodurch das Bewegungsverhalten der Prothese (aufgrund der geringeren Nachgiebigkeit des Knochens) weniger ausgeprägt gegenüber dem parodontal getragenen Zahnersatz ist.

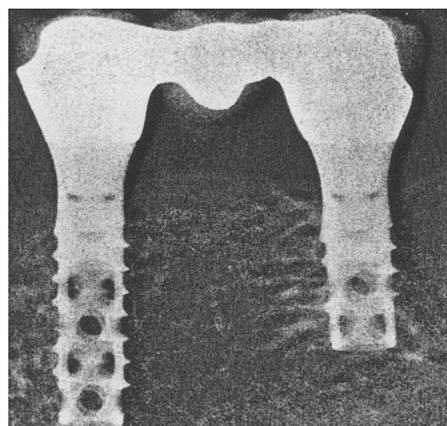


Abb. 3: Röntgenbild einer implantatgetragenen Brücke aus [5].

2.1.2.5 Gingivaler und parodontal- gingivaler Zahnersatz

Beim gingivalen Zahnersatz findet die Abstützung ausschließlich auf Schleimhaut und Kieferkamm statt (unphysiologische Abstützung, unphysiologischer Zahnersatz).

Die Belastbarkeit einer solchen Prothese ist in der Mitte des Prothesesattels am größten und beträgt ungefähr ein Drittel einer natürlichen Zahnreihe.

Beim gingival-parodontal getragenen Zahnersatz ist eine gingivale Prothese mit einem Pfeilerzahn entweder beweglich oder fest verbunden. Dadurch teilen sich die Kräfte zwischen den Pfeilerzähnen und der Schleimhaut auf.

Diese Art der prothetischen Versorgung wird angewendet, wenn nur noch ein Pfeiler vorhanden ist, und ein freies Ende der Prothese verhindert werden soll.

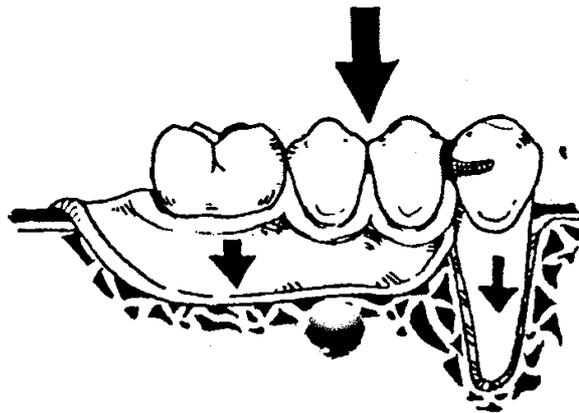


Abb. 4 aus [3]: Parodontal- gingival getragener Zahnersatz.

2.1.3 Der Kauvorgang und die dabei entstehenden Kräfte

Beim Kauvorgang werden durch die Kaumuskelatur Kräfte auf das Kausystem übertragen. Dabei bewegen sich Ober- und Unterkiefer in quasi-periodischer Weise. Bei direktem Kontakt der Kiefer oder indirektem Kontakt über Speisen werden Zähne und Prothesen in unterschiedlicher Weise belastet, und es kommt zu Deformationen an Zahn, Knochen, Parodontium und Gingiva. Der Zahn deformiert nur unmerklich, aber die Deformation nimmt vom Knochen über das Parodontium hin zur Gingiva zu.

Die natürlichen Wurzeln eines Zahns sind im Parodontium durch einen kollagenen Bandapparat verankert, dessen Fasern sich in einem primitiven mechanischen Modell als winzige elastische Federn mit nichtlinearen Kennlinien beschreiben lassen. Auch parodontal geschädigte Wurzeln können durch dieses Modell beschrieben werden, doch ist ihre Bewegung bei gleicher Belastung um den Faktor 10 höher.

Zur Steuerung der Mastikalprozesse (Kauen, Beißen, Schlucken) und zum Schutz vor Überbelastungen enthält der Bandapparat Rezeptoren.

Die eigentlichen Kaukräfte, die zum Zerkleinern und schluckfertigen Aufbereiten der Speisen nötig sind, liegen im Bereich von 5N bis 50 N mit gelegentlichen Maximalwerten von etwa 100N.

Dabei nehmen die Beißkräfte von den Molaren über die Prämolaren und die Eckzähne zu den Schneidezähnen hin ab, so daß nach Untersuchungen die Schneidezähne nur etwa ein Drittel der Kräfteübertragung von Molaren zulassen.

Weitere, die maximale Belastung beim Kauen bestimmende Faktoren, sind Geschlecht, Alter der Personen, der Bezahnungs- und Parodontalstatus, die Anwesenheit und Art des Zahnersatzes und die Stellung der Zähne. Bei einem jungen Mann sind aufgrund des Muskelaufbaus theoretisch Werte von ungefähr 550N möglich, die auch experimentell bestätigt wurden. Dabei wurde die Schmerzgrenze weit überschritten, so daß diese Extremwerte beim Kauen nicht zu erwarten sind.

Aus Untersuchungen und Studien kann folgender Schluß gezogen werden:

Die funktionalen Kräfte werden den Wert von 100N kaum erreichen [2]

Ein rein implantatgetragener Zahnersatz reagiert auf die Kräfte durch Deformation des Knochens, was in einem einfachen mechanischen Modell als elastischer Körper simuliert werden kann. Die Bewegungen bei gleicher Belastung sind gegenüber parodontalen Pfeilern um ein Vielfaches geringer.

Beim zahnlosen Kausystem werden die Kaukräfte über die Vollprothese auf die Schleimhaut übertragen, deren Reaktion durch ein viskoelastisches Modell beschrieben werden kann. Von Natur aus ist diese nicht zur Aufnahme von Kau- und Beißkräften vorgesehen, so daß eine möglichst großflächige Bedeckung der Schleimhaut zu realisieren ist.

Durch den Druck werden Gewebeflüssigkeit und Blut in benachbarte Bereiche verdrängt, wodurch eine zeitlich verzögerte Absenkung stattfindet, die um ein Vielfaches größer als bei rein parodontal getragenen Prothesen ist.

2.1.4 Belastbarkeit natürlicher Pfeiler

Ein Charakteristikum für die Belastbarkeit bei natürlichen Pfeilern ist die Wurzelfläche. Je größer ihre Fläche ist, desto stärker können die Zähne belastet werden. Die Gesamtfläche ergibt sich aus Wurzelzahl, Wurzelform und Wurzel-

größe, jedoch können nur parallel zur wirkenden Kraft gerichtete Flächen Kräfte absorbieren. Da zylinderförmige Wurzeln eine größere Fläche als spitze haben, sind diese belastbarer. Abb. 5 zeigt die Abhängigkeit von Wurzelform und mittlerer Belastbarkeit bei Prämolaren.

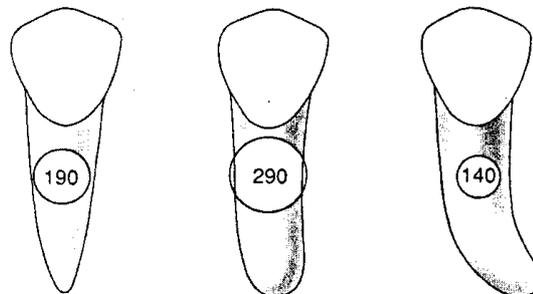


Abb. 5 aus [4]: Mittlere Belastbarkeit in Newton bei Prämolaren.

Bei den Molaren ist die mittlere Belastbarkeit aufgrund größerer Wurzel i.a. höher. Dieses wird in Abb. 6 veranschaulicht.

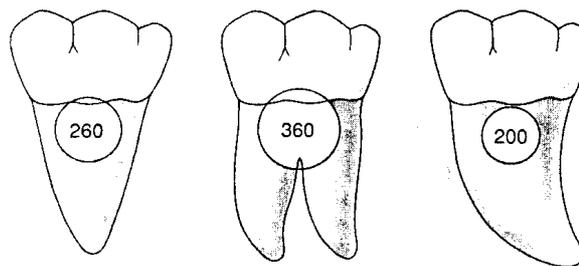


Abb. 6 aus [4]: Mittlere Belastbarkeit in Newton bei Molaren.

Aus (2.1.3) ist bekannt, daß die maximalen Kaukräfte von 100 N kaum überschritten werden, so daß die mittlere Belastbarkeit der Pfeiler, auch unter Einbeziehung in eine Brücke, weit unterhalb einer kritischen Grenze liegt. In der Simulation können diese Faktoren vernachlässigt werden.

Ein weiterer Aspekt für die Belastbarkeit ist die Einbettiefe der Pfeiler. Je geringer die Einbettung ist, desto weniger belastbar sind die Zähne. Dabei besteht ein Zusammenhang zwischen Pfeilerposition, Einbettiefe und Belastbarkeit, der in Abb. 7 veranschaulicht wird.

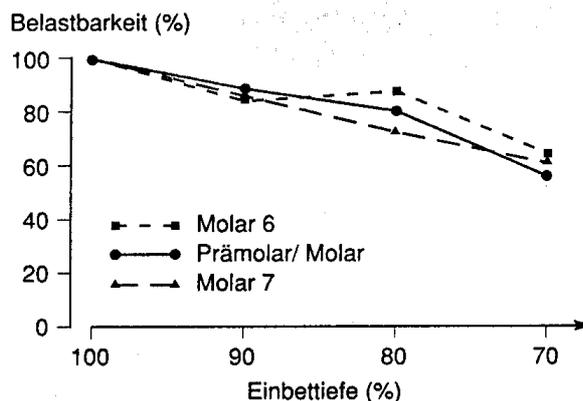


Abb. 7 aus [4]: Abhängigkeit der Belastbarkeit von der Einbettiefe bei Molaren und Prämolaren.

Die angeführten Faktoren bestimmen also die Tragfähigkeit der Pfeiler.

2.1.5 Parameter, die zum Verlust der Brücke führen können

Alle bisher in der Zahnmedizin vorgestellten biomechanischen Modelle erfassen die komplizierten Gewebestrukturen des Kauorgans sowie seine vielfältigen komplexen Funktionen nur lückenhaft. Die Aussage dieser Modelle sollte deshalb nur als Richtlinie dienen und nicht als dogmatisches Rezept verstanden werden. Insbesondere erfassen diese Modelle nicht das langfristige Verhalten, denn es existieren Fälle, die sich bei der Versorgung als undramatisch darstellten wobei der Zahnersatz trotz Einhaltung sämtlicher bekannter biomechanischer Richtlinien bestürzend schnell seine Wirkung verlor, oder daß andererseits eine mit Bangen eingesetzte Prothese erstaunlich lang ihre Funktion erfüllte.

In der folgenden Tabelle sind Ergebnisse aus statistischen Untersuchungen angeführt. Die Werte sind aus [3] entnommen. Einige Werte werden in der Evaluierungsphase für einfache Test herangezogen.

	Verlustrisiko	
Seitenzahnbrücke	0,46 : 1	Frontzahnbrücke
zwei Pfeiler	1 : 1,57	Mehrere Pfeiler
zwei Pfeiler	1 : 2,24	ein Pfeiler
29 Jahre	1 : 1,89	30 bis 49 Jahre
29 Jahre	1 : 2,20	50 bis 69 Jahre
29 Jahre	1 : 5,00	70 Jahre und älter
einspannige Brücke	1 : 1,54	mehrspannige Brücke

Endpfeilerbrücke	1 : 1,43	Freiendbrücke
Unterkiefer	1 : 1,36	Oberkiefer

Tabelle 1: Verlustrisiko einer Zahnprothese. Die Werte sind aus [3].

Anmerkungen zu Tabelle 1: Aus den Werten können nur bedingte Schlüsse gezogen werden, denn in der Publizierung fehlten wichtige Angaben wie z.B. eine Aussage über Studiendauer und weitere aussagefähige Faktoren. Mangels anderer statistischer Daten habe ich mich dennoch entschieden, diese Tabelle unter Vorbehalt anzuführen.

2.2 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden nur die zum Verständnis der Physik und des Simulationsmodells benötigten Grundlagen vermittelt. Dabei wird auf eine Herleitung im Sinne der exakten Mathematik aufgrund der Komplexität verzichtet.

2.2.1 Vektoren

Ein Vektor ist eine Größe, die zusätzlich die Angabe einer Richtung benötigt, wie z.B. die Geschwindigkeit und die Kraft.

Mit dem Ortsvektor können Punkte des euklidischen Raums E_3 bezüglich eines Koordinatenursprungs beschrieben werden.

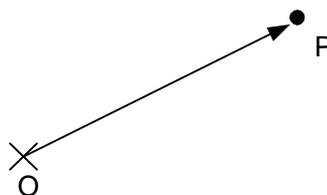


Abb. 8: Ortsvektor des Punktes P bezüglich Ursprung O.

Jeder Vektor besitzt einen Betrag und eine Richtung.

Der Betrag eines Vektors \vec{a} ist: $a = |\vec{a}|$

Weiterhin wird eine Referenzrichtung benötigt - sozusagen ein Bezugssystem.

Ein Beispiel eines Bezugssystems ist das kartesische Koordinatensystem, das aus drei aufeinander senkrecht stehenden Geraden besteht, die sich im Ursprung schneiden.

Die Koordinatenachsen bilden dabei ein Rechtssystem, d.h. dreht man die x-Achse auf kürzestem Weg zur y-Achse, so muß die z-Achse in Richtung einer Rechtsschraube laufen.

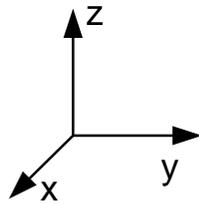


Abb. 9: Kartesisches Koordinatensystem.

2.2.2 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt ordnet zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} einen dritten Vektor \vec{c} zu

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

der folgende Eigenschaften besitzt:

- 1.) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$, α ist der Winkel zwischen a und b .
- 2.) \vec{c} steht senkrecht auf der von a und b aufgespannten Ebene, so daß \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ein Rechtssystem bilden.

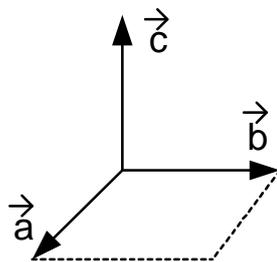


Abb. 10: Vektorprodukt.

Das Vektorprodukt wird zur Definition des Drehmomentes benötigt.

2.2.3 Bogenlänge

Die Bogenlänge ist die Länge einer Raumkurve, gemessen entlang einer gekrümmten Kurve, ausgehend von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt bis zu einem Endpunkt. Die Punkte dieser Kurve werden durch Vektoren beschrieben.

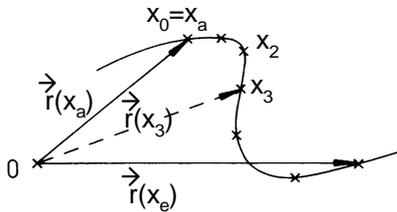


Abb. 11: Bogenlänge einer Kurve.

Für die Bogenlänge mit Anfangspunkt x_a und Endpunkt x_e erhalten wir folgende Gleichung:

$$s(x_a, x_e) = \int_{x_a}^{x_e} \left| \frac{d\vec{r}(x)}{dx} \right| dx$$

Dabei hängt der Vektor \vec{r} vom Parameter x ab; die Funktion $\vec{r}(x)$ wird Vektorfunktion genannt und muß eine glatte Funktion sein, d.h. mindestens eine stetig differenzierbare Parameterisierung $\vec{r} = \vec{r}(x)$ haben, für die gilt:

$$\frac{d\vec{r}}{dx} \neq 0$$

2.3 Physikalische Grundlagen

Die physikalischen Grundlagen basieren auf [6] und [2].

2.3.1 Einführung in die Mechanik

Die Mechanik hat die Aufgabe, die in der Natur vorkommenden Bewegungen zu untersuchen, d.h. diese Bewegungen durch physikalisch – direkt oder indirekt – meßbare Größen in der Sprache der Mathematik zu beschreiben.

Dabei wird die Mechanik in zwei große Teilgebiete aufgespalten: Die *Kinematik* und die *Dynamik*, wobei sich die Kinematik mit der zeitlichen und räumlichen Darstellung der Bewegung eines Körpers befaßt. Die Dynamik spaltet sich in zwei Teilgebiete: Die *Statik* ist die Lehre vom Gleichgewicht, die die Bedingungen untersucht, unter denen sich ein Körper in Ruhe befindet. Die *Kinetik* hat die

Aufgabe, die Bewegung eines Körpers infolge gegebener Kräfte zu bestimmen (darauf geht die Kinematik nicht ein).

Weiterhin hat sich der Begriff *Biomechanik* eingebürgert. Die Biomechanik wendet die Mechanik auf biologische Fragestellungen an, d. h. auf lebende Systeme. Damit erhöht sich jedoch die Komplexität, da Gewebe unter Belastungen starke Verformungen erleidet, diese aber nichtlinearer Natur sind, d. h. gleiche Kraftänderung bewirkt ungleiche Bewegung. Dadurch steigt der mathematische Aufwand zur Schaffung eines Modells.

2.3.2 Kräfte und Momente

Urbilder der Kräfte sind Muskelkraft und Gewichtskraft. Dabei handelt es sich um zwei unterschiedliche Phänomene.

1. Auf die Materie wirkende, räumlich verteilte Kräfte, z. B. die Schwerkraft.
2. Auf der Berührungsfläche zweier Körper auftretende, also flächenhaft verteilte Kräfte.

Um ihre „Stärke“ zu beschreiben, wird ihnen ein **Betrag** zugeschrieben, dessen physikalische Einheit das Newton ist. ($1\text{N}=1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$). Dabei können Kräfte an bestimmten Punkten oder als flächenbehaftete Kräfte an einem Körper angreifen, wie beim Händedruck oder beim Kauen im Mund. Flächenbehaftete Kräfte können oftmals durch resultierende einzelne Punktkräfte idealisiert zusammengefaßt werden, um eine vereinfachte Lösung eines Problems zu erhalten. Dabei darf aber nicht vergessen werden, daß die Richtigkeit der zu lösenden Fragestellung durch die Idealisierung erhalten bleiben muß.

Auf Materie wirkende (massen-volumenbehaftete) Kräfte haben auch einen Betrag und eine Richtung. Die Gravitationskraft ist auf der Erde immer zum Erdmittelpunkt hin gerichtet. Wir können Kräfte deshalb als mathematische Vektoren schreiben. Die Länge des Kraftvektors ist sein Betrag. Die Richtung des Vektorpfeils ist die Krafrichtung, diese wirkt entlang einer Linie, genannt Wirkungslinie. Der Angriffspunkt des Vektorpfeils bestimmt den Punkt, an dem die Kraft angreift.

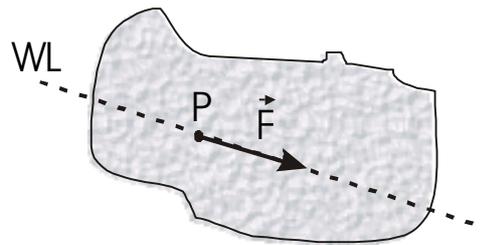


Abb. 12: Einzelkraft, die am Punkt P angreift und entlang ihrer Wirkungslinie WL wirkt.

Ist ein Körper frei beweglich, so wird er in Richtung der Kraft verschoben und zusätzlich noch gedreht, wenn die Wirkungslinie nicht durch den Schwerpunkt verläuft.

Zusammensetzung von Kräften:

Greifen an einem Körper in einem Punkt gleichzeitig zwei oder mehrere Kräfte an, so können diese durch eine einzige Kraft ersetzt werden (Axiom vom Kräfteparallelogramm, vgl. Abb. 13).

$$\vec{F}_G = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

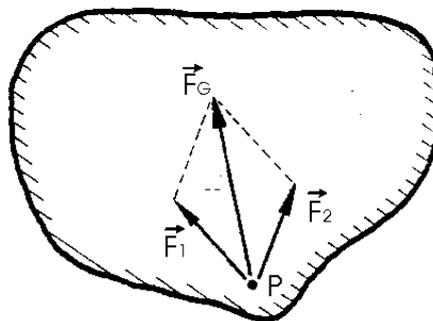


Abb. 13: Addition zweier Kräfte mit gleichem Angriffspunkt.

Drehmomente:

Gegeben sei ein ebener Körper, der drehbar um eine zu ihm senkrechte Achse A durch den Punkt A ist. (siehe Abb. 14)

Greift eine in der Körperebene liegende Kraft F an dem Körper an, deren Wirkungslinie nicht durch den Drehpunkt verläuft, so stellen wir fest, daß die Kraftwirkung proportional zum Abstand von Wirkungslinie und Drehzentrum ist. Weiterhin ist die Kraftwirkung proportional zum Betrag der angreifenden Kraft. Der kürzeste Abstand a zwischen Drehzentrum und WL ist bei gegebenem Ortsvektor \vec{r} : $a = |\vec{r}| \cdot \sin \alpha$, wobei $|\vec{r}|$ die Länge des Vektors \vec{r} ist.

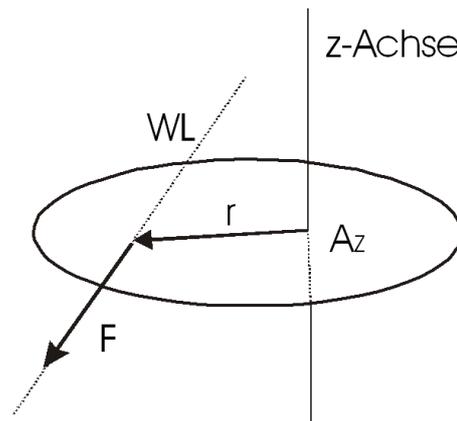


Abb. 14: Erzeugendes Drehmoment der Kraft F bezüglich des Punktes A_z .

Das ergibt für den Betrag des Drehmoments bezüglich des Punktes A_z .

$$M_A = r \cdot F \cdot \sin a$$

Das Drehmoment ist selbst ein Vektor definiert durch das Vektorprodukt

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf der von \vec{r} und \vec{F} aufgespannten Ebene; seine Richtung ist durch die Rechte-Hand-Regel für ein Vektorprodukt eindeutig bestimmt.

2.3.3 Körper im Gleichgewicht

Da Gleichgewichte auf den Newtonschen Axiomen beruhen, werden diese zunächst eingeführt.

1. Newtonsches Trägheitsgesetz:

Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe (oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung), solange er nicht durch eine äußere Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Dieses Gesetz sagt aus, daß ein in Ruhe befindlicher Körper sich weder verschiebt noch dreht, solange keine Kräfte oder Drehmomente auf diesen einwirken. Verschwindet die Summe aller Kräfte und die Summe aller Momente auf den Körper, bleibt er demnach auch in Ruhe.

⇒ Ein starrer Körper bleibt im Gleichgewicht, wenn

1. $\sum_i \vec{F}_i = 0$, d.h. die Summe aller einwirkenden Kräfte null ist.
2. $\sum_i \vec{M}_i = 0$, d.h. die Summe aller Momente bezüglich eines beliebigen aber festen Punktes null ist.

Daraus folgen im ebenen Fall drei Gleichungen:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{und} \quad \sum M_z = 0$$

Die Summe aller Kräfte in x-Richtung, in y-Richtung und die Momente bezüglich eines Punktes auf der z-Achse sind null.

Im räumlichen Fall sind das sechs Gleichgewichtsbedingungen (drei für die Kräfte und drei für die Momente).

Sind diese Gleichungen erfüllt, befindet sich das System im Gleichgewicht und nach dem 1. Newtonschen Axiom in Ruhe.

2. Newtonsches Beschleunigungsgesetz:

Unter der Wirkung einer konstanten Kraft bewegt sich ein Körper gleichmäßig beschleunigt. Die Beschleunigung ist bei konstanter Masse der wirkenden Kraft proportional. Die Kraft \vec{F} , die zur Erteilung der Beschleunigung \vec{a} aufgewendet werden muß, ist der Masse m des Körpers proportional.

Daraus folgt das bekannte Kraftgesetz: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Im Fall der Erdanziehungskraft wird diese zu $F = m \cdot g$, mit

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Erdbeschleunigung}).$$

3. Newtonsches Wechselwirkungsgesetz:

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft \vec{F} , so greift B an A mit der gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft $-\vec{F}$ an (actio = - reactio).

Aus diesem Gesetz können wir folgern, daß auf Körper, die nicht frei bewegbar sind, z. B. eingespannt, verklebt, verschraubt oder gestützt, Reaktionskräfte ausgeübt werden. Diese Stützen, auch *Auflager* genannt, nehmen die Lasten des Körpers auf, schränken aber seine Bewegungsfreiheiten ein. So kann ein Körper durch die *Auflagerkräfte* im Gleichgewicht gehalten werden.

2.3.4 Lösbarkeit von Gleichgewichten

In diesem Abschnitt wird auf die Lösbarkeit von Gleichgewichten eingegangen. Unter Lösbarkeit versteht man die Bestimmung der Lagerkräfte. Können diese aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen aus (2.3.3) bestimmt werden, haben wir ein statisch bestimmtes System, anderenfalls nennen wir es statisch unbestimmt.

Betrachtet wird zunächst der ebene Fall:

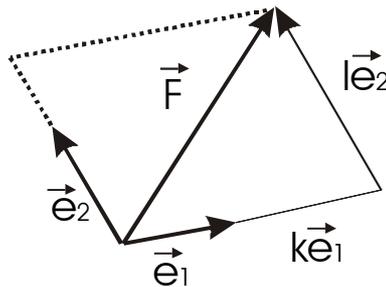


Abb. 15: Zerlegung von \vec{F} in Richtung von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 .

Der eingezeichnete Kraftvektor kann eindeutig in 2 nicht parallele Richtungen zerlegt werden. Diese zwei Vektoren werden linear unabhängig genannt.

Modelle, in denen eine Kraft in der Ebene in mehr als 2 Richtungen zerlegt werden muß (im Raum in mehr als 3), sind nicht mehr eindeutig lösbar und demnach statisch unbestimmt. Eine Lösung kann nur unter Einbeziehung der Deformationen durch Krafteinwirkungen gefunden werden.

Kommen wir noch einmal auf die Auflagerkräfte zu sprechen. Diese sind von vorneherein unbekannt. Sollen diese aus den Gleichgewichtsbedingungen errechnet werden, so muß ihre Anzahl beschränkt sein, so daß die 3 Gleichungen im ebenen Fall bzw. die 6 Gleichungen im räumlichen Fall eindeutig gelöst werden können. Haben wir mehrere Auflager und ein ebenes Problem, so reichen die 3 Gleichungen nicht mehr zur Bestimmung der Auflagerkräfte und Momente aus. Ein solches Problem ist ebenfalls statisch unbestimmt.

Zusammenfassung:

Eingeprägte Kräfte und Momente sind durch ein Kraftgesetz in Richtung und Betrag eindeutig vorgegeben.

Zwangskräfte-Reaktionskräfte werden durch Lager auf den Körper ausgeübt, die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen lassen; sie sind von vorneherein unbestimmt.

Bei statischen Modellen müssen zwei Arten unterschieden werden

1. statisch bestimmte Systeme
2. statisch unbestimmte Systeme

Beispiel:

Betrachtet wird ein Brücke mit einer Spannweite von 6 Zentimetern.

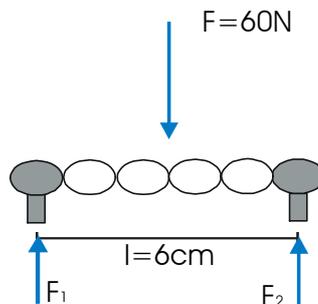


Abb. 16: Schematisch dargestellte Brücke, die mittig durch eine Kraft von 60N belastet wird.

Diese wird in ihrer Mitte durch eine senkrechte Kraft $F=60\text{ N}$ belastet. Uns interessiert die Belastung der einzelnen Pfeiler. Das Eigengewicht der Brücke kann vernachlässigt werden. Es ist ein ebenes Problem, also stehen zur Bestimmung der Zwangskräfte 3 Gleichungen zur Verfügung.

Die Kräftegleichung in horizontaler Richtung ist erfüllt. Die Kräftegleichung in vertikaler Richtung lautet:

$$(1) \quad F - F_1 - F_2 = 0$$

Dabei werden nach unten gerichtete Kräfte positiv gezählt.

Das Momentengleichgewicht bezüglich des linken Pfeilers lautet:

$$(2) \quad F \frac{l}{2} - F_2 \cdot l = 0$$

$$\Leftrightarrow F_2 = F \frac{1}{2} = 30\text{ N}$$

In (1) eingesetzt erhalten wir $F_1 = 60\text{ N} - 30\text{ N} = 30\text{ N}$.

2.3.5 Wichtige Kraftgesetze

2.3.5.1 Die Federkraft

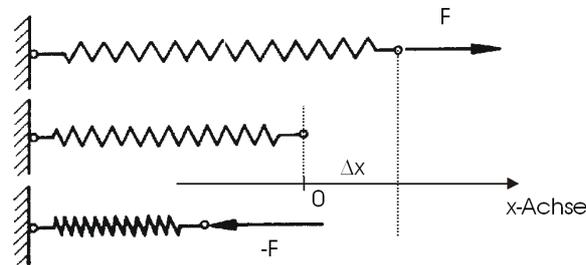


Abb. 17: Die Federkraft.

Es sei eine elastische Spiralfeder gegeben, die an einer Seite fest verankert ist. Diese habe im entspannten Zustand die Länge l . Wird an der Feder gezogen, so daß sie sich um die Strecke Δx dehnt, wird sie versuchen, ihre ursprünglich Länge wiederzugewinnen. Sie übt eine Kraft in Richtung ihrer Ausgangslage aus (vgl. Abb. 17), die abhängig von ihrer Auslenkung ist ($F \sim x$). Damit erhalten wir das Kraftgesetz für eine Feder:

$$F = c \cdot x$$

Die Konstante c ist die **Federkonstante**, die von der Bauart und dem verwendeten Material der Feder abhängt. Auf Federn können sowohl Zugkräfte als auch Druckkräfte ausgeübt werden. Federn haben einen linearen Bereich, in dem dieses Gesetz gilt. Bei zu großen Kräften können sie überdehnt werden. In diesem Bereich ist das Kraftgesetz nicht mehr gültig, und die Feder nimmt nach Entlastung der Kraft ihre Ursprungslage nicht mehr ein.

2.3.5.2 Drehfedermomente

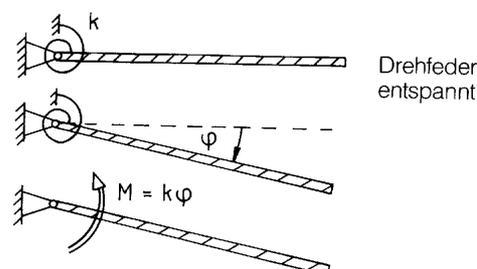


Abb. 18 aus [2]: Das Drehfedermoment einer Drehfeder.

Eine Drehfeder übt bei Auslenkung (siehe Abb. 18) ein rücktreibendes Moment aus, das proportional zum Auslenkungswinkel ist.

$$\text{Momentengesetz: } M = k \cdot j \quad (\text{k ist Drehfederkonstante})$$

Sowohl künstliche als auch natürliche Pfeiler gehorchen bei Drehbewegungen diesem Gesetz, wobei bei natürlichen Pfeilern wieder zwischen Streck- und Dehnphase unterschieden werden muß.

Die folgende Tabelle enthält Drehfederkonstanten für unterschiedliche Pfeilerkonfigurationen. Die Werte beziehen sich auf Studien an Schneidezähnen.

	natürlicher, parodontal gesunder Zahn	natürlicher, parodontal schwer geschädigter Zahn	Implantat
Drehfedersteifigkeit k im Kraftbereich			
$M \leq 8 \text{ Nmm}$	$k = 6,5 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$	$k = 6,5 \cdot 10^2 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$
$M > 8 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$
Federsteifigkeit c im Kraftbereich			
$F \leq 0,7 \text{ N}$	$c = 3,5 \cdot 10^1 \text{ N/mm}$	$c = 3,5 \cdot 10^0 \text{ N/mm}$	$c = 3,5 \cdot 10^4 \text{ N/mm}$
$F > 0,7 \text{ N}$	$c = 3,5 \cdot 10^3 \text{ N/mm}$	$c = 3,5 \cdot 10^2 \text{ N/mm}$	$c = 3,5 \cdot 10^4 \text{ N/mm}$

Tabelle 2: Federkonstanten, gemessen von [2] an Schneidezähnen.

2.3.5.3 Reibungskräfte

Die Betrachtung der Reibungskräfte ist vor allem in bezug auf die Konuskrone von Interesse, da diese Kräfte den Innenkonus und den Außenkonus zusammenhalten.

2.3.5.4 Haftreibung

Liegt ein Körper mit einer ebenen Grundfläche auf einer ebenen Unterlage (das kann eine horizontale Unterlage oder eine schiefe Ebene sein), so nennt man die größte Kraft, die parallel zur Berührungsfläche auf den Körper wirkt, diesen aber noch nicht bewegt, den Haftreibungswiderstand F_H . Dieser ist unabhängig von der Größe der Berührungsfläche, aber proportional zur Normalkraft F_N . Die Normalkraft ist die Kraft, mit der beide Berührungsflächen zusammen gepreßt werden:

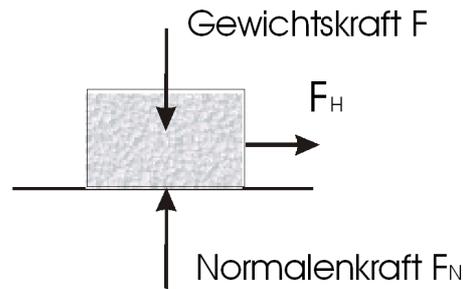


Abb. 19: Körper, der auf horizontale Fläche eine Gewichtskraft ausübt, die gleich der Normalenkraft ist.

$$F_H = m_H \cdot F_N$$

μ_H ist eine dimensionslose Materialkonstante. Sie ist durch die Oberflächenbeschaffenheit der sich berührenden Materialien charakterisiert und wird **Haftreibungszahl** genannt.

Die Haftreibung ist im eigentlichen Sinne keine Reibung, denn Reibung erfordert eine Bewegung und verbraucht Energie. Doch hat sich in der physikalischen Literatur dieser Begriff eingebürgert. Besser wäre die Bezeichnung Haftkraft.

Gleitreibung:

Wird ein Körper mit einer ebenen Grundfläche auf einer ebenen horizontalen Unterlage mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so nennt man die Kraft, die zur Aufrechterhaltung der Bewegung überwunden werden muss, den Gleitreibungswiderstand F_G . Dieser ist, wie der Haftreibungswiderstand, unabhängig von der Größe der Berührungsflächen und annähernd unabhängig von der Geschwindigkeit, aber proportional zur Normalenkraft F_N .

$$F_G = m_G \cdot F_N$$

μ_G ist wie μ_H eine dimensionslose Materialkonstante und durch die Oberflächenbeschaffenheit der sich berührenden Materialien charakterisiert; sie heißt **Gleitreibungszahl**.

Es gilt immer : $m_G < m_H$

2.3.5.5 Beispiel: Schiefe Ebene

Die Gewichtskraft (siehe Abb. 20) kann nach (2.3.2) in eine Komponente senkrecht zur schiefen Ebene (Normalenkraft) und in eine Parallelkomponente (Tangentialkraft) zerlegt werden.

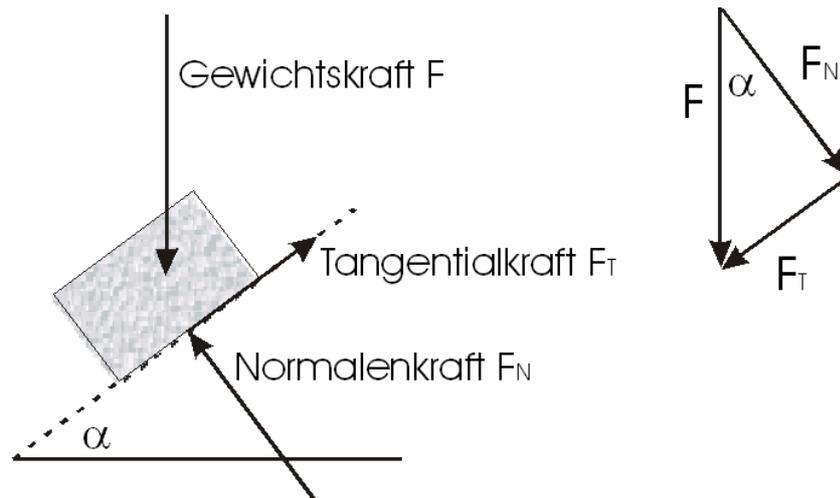


Abb. 20: Kräfteverteilung in der schiefen Ebene und Zerlegung der Gewichtskraft.

Ist der Winkel der Ebene bekannt, ergeben sich die Kraftkomponenten mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus:

$$(3) \quad F_N = F \cdot \cos(\alpha)$$

$$F_T = F \cdot \sin(\alpha)$$

Damit folgt für Haftkraft und Gleitreibung:

$$(4) \quad F_H = m_H \cdot F \cdot \cos(\alpha)$$

$$F_G = m_G \cdot F \cdot \cos(\alpha)$$

Unter welchen Bedingungen haftet der Klotz aus Abb. 20 auf der schiefen Ebene? Die Tangentialkraft muß kleiner als die Haftkraft sein, d.h. es gilt

$$(5) \quad F_T < F_H$$

Setzen wir (3) und (4) in (5), so folgt:

$$F \cdot \sin \alpha < m_H F \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow (6) \quad \boxed{\tan \alpha < m_H}$$

Der maximale Haftungswinkel hängt nur von der Materialkonstanten ab.

2.3.5.6 Dämpfungskraft

Die Dämpfungskraft beruht auf der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen. Sicherlich ist bekannt, daß Wasser, wenn wir hineingleiten, weich ist und kaum

einen Gegendruck ausübt. Doch ein Sprung aus großer Höhe in Wasser kann zu starken Verletzungen führen.

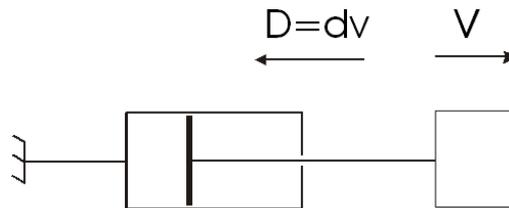


Abb. 21: Der Dämpfungsmechanismus, dargestellt durch einen Kolben.

Ein sich mit der Geschwindigkeit v bewegendes Probekörper ist über seine gesamte Bewegungsstrecke mit einem Kolben verbunden, der mit Öl oder Wasser gefüllt ist. Die Flüssigkeit kann den Kolben überströmen.

Solange keine Wirbelbildung entsteht, ist die Dämpfungskraft proportional zur Kolbengeschwindigkeit.

$$D = d \cdot v$$

d wird **Dämpfungskonstante** genannt und hängt von der Flüssigkeit und dem Kolbenaufbau ab.

Bei Wirbelbildung verliert das Gesetz seine Gültigkeit; die Geschwindigkeit wird in höherer Potenz eingerechnet.

Die Dämpfungskraft in Kombination mit einer Feder gibt gut das Verhalten der Gingiva wieder, wenn diese eine Prothese tragen muß.

2.3.6 Eigenschaften der Konusprothese

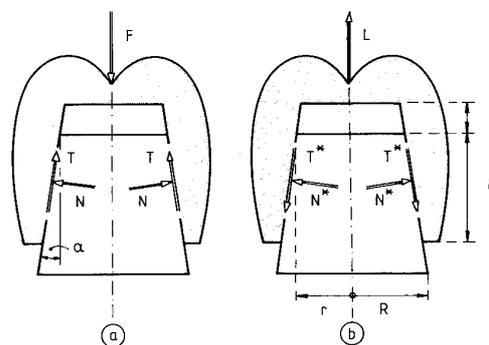


Abb. 22 aus [2]: Konusgeometrie und Bezeichnung für angreifende Kräfte, a) Kräfteverteilung beim Fügen, b) Kräfteverteilung beim Lösen.

Wir nehmen als vereinfachtes Modell einen kegelstumpfförmigen Innen- und Außenkonus an. Das Aufstecken des Außenkonus geschieht mit der Kraft F ,

genannt **Fügekraft**, die senkrecht zum Kegeldeckel erfolgen soll. Durch den Kauprozeß treten weitere senkrechte Fügekräfte auf. Die **Lösekraft** ist die Kraft, die nötig ist, um den Außenkonus von Innenkonus abzulösen.

Beim Abziehen oder Aufstecken teilen sich die Kräfte in **Haftungskräfte**, die tangential zur Konusfläche verlaufen, und in **Normalenkräfte**, die senkrecht zur Konusfläche verlaufen.

Zur Berechnung der Fügekräfte müssen die Kräftegleichungen aufgestellt werden. Das Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung und das Momentengleichgewicht sind aufgrund der Symmetrie automatisch erfüllt. Um das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung zu berechnen, müssen die Zwangskräfte erst in ihre Vertikalkomponenten zerlegt werden.

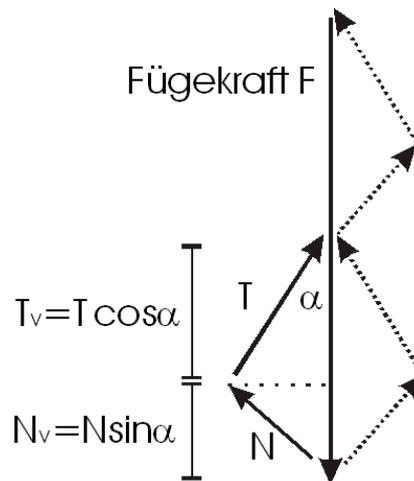


Abb. 23: Kräfteverteilung und Kräftezerlegung in Komponenten parallel zur Fügekraft F .

Der Abbildung entnehmen wir die Vertikalkomponenten T_v und N_v der Tangential- und Normalenkräfte:

$$(7) \quad \begin{aligned} T_v &= T \cdot \cos(\mathbf{a}) \\ N_v &= N \cdot \sin(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Für das Kräftegleichgewicht in Vertikalrichtung gilt, wenn nach unten gerichtete Kräfte positiv gezählt werden:

$$(8) \quad F - 2T_v - 2N_v = 0$$

Daraus folgt mit (7)

$$F - 2T \cdot \cos(\mathbf{a}) - 2N \cdot \sin(\mathbf{a}) = 0.$$

⇔

$$(9) \quad F = 2T \cdot \cos(\mathbf{a}) + 2N \cdot \sin(\mathbf{a})$$

Die Haftungsbedingung aus (2.3.5.3) liefert: $T < m_H N$

Kombiniert man diese Gleichung mit (9), so erhalten wir als Haftbedingung für die Kraft F:

$$(10) \quad F < 2m_H N \cdot \cos(\mathbf{a}) + 2N \cdot \sin(\mathbf{a})$$

Ist die Fügekraft F größer oder gleich, so reicht die Kraft aus, um den Außenkonus weiter einzutreiben.

2.3.6.1 Lösezustand

Die Kräftegleichung der Konusprothese ist bei Lösekräften bis auf das Vorzeichen der Tangentialkraft mit der Fügekraftgleichung identisch. Damit erhalten wir

$$(11) \quad L = 2T^* \cdot \cos(\mathbf{a}) - 2N^* \cdot \sin(\mathbf{a}) .$$

Wenn $T^* < m_H N^*$ ist, haftet der Außenkonus auf dem Innenkonus. Kombiniert man dieses mit (11), liefert das

$$(12) \quad L < 2m_H N^* \cdot \cos(\mathbf{a}) - 2N^* \cdot \sin(\mathbf{a}) .$$

Wenn $L = 2m_H N^* \cdot \cos(\mathbf{a}) - 2N^* \cdot \sin(\mathbf{a}) := L_{Grenz}$ ist oder größer wird, löst sich der Außenkonus. Damit der Außenkonus hält, muß L_{Grenz} größer null sein. Das ist gegeben, wenn

$$m_H \cos(\mathbf{a}) - \sin(\mathbf{a}) > 0$$

ist. Wir erhalten wie im Fall der schiefen Ebene die Haftbedingung für das Konusteleskop:

$$\tan \mathbf{a} < m_H$$

Die Haftung hängt nur vom verwendeten Material und dem Konuswinkel ab.

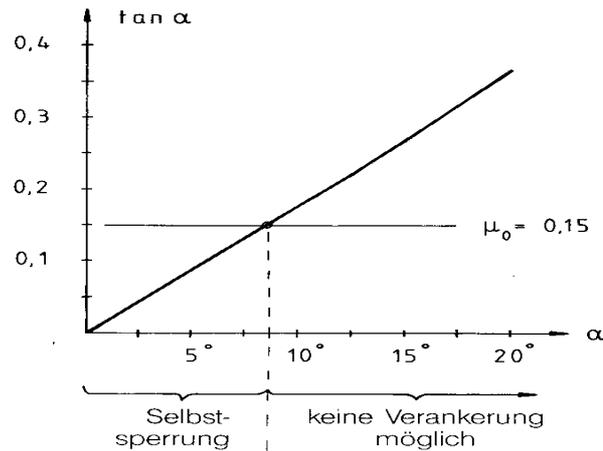


Abb. 24 aus [2]: Geometrische Veranschaulichung des Grenzhftungswinkels und des Selbstsperrungsbereiches.

Bei geschliffenen Stahl–Stahl Konusflächen ist $\mu_h \sim 0,15$.

Die rechnerische Lösung des Grenzwinkels für die Ungleichung

$$\tan \alpha < 0,15$$

liefert $\alpha < 8,53^\circ$. Soll der Winkel größer sein, so muß ein anderes Material gewählt werden.

2.3.7 Kräfte der Gingiva bei gingivaler Abstützung eines Sattels

Die Schleimhäute haben neben elastischen auch viskose Eigenschaften. Ein elastischer Körper verformt sich schlagartig, während ein viskoelastischer Körper sich zeitlich verzögert verformt, d.h. die Ausgangskonfiguration tritt erst nach einer gewissen Zeit ein. Wir bezeichnen mit w die Schleimhautabsenkung, und w_0 ist die Auslenkung unmittelbar nach der Kraftentlastung, die als Nullpunkt ausgezeichnet wird.

Wie in der Einführung bereits erwähnt, ist das Verhalten von Gewebe unter Krafteinwirkung nicht linear. Dennoch liefert für kleine Auslenkungen ein lineares Modell vernünftige Resultate, deshalb wird der Kelvin-Voigt-Körper ausgewählt, der eine Kombination aus parallelgeschalteter Feder und Dämpfer ist.

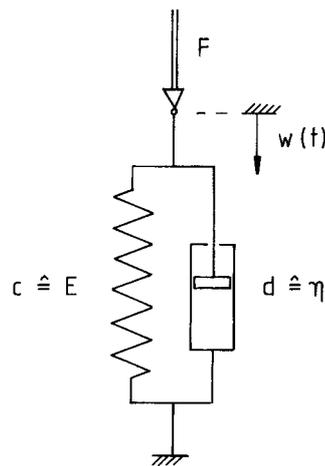


Abb. 25 aus [2]: Kelvin-Voigt-Modell, dargestellt durch Feder und Kolben.

Anstelle der Dämpfungskonstanten tritt die Viskosität η der Flüssigkeit und die Federkonstante c wird durch das Elastizitätsmodul ersetzt, das eine Materialkonstante ist. Ebenso ist die Viskosität eine Materialkonstante, die Faktoren wie innere Reibung, also die Zähigkeit von Flüssigkeiten, berücksichtigt.

Die Parallelschaltung aus Abb. 25 bewirkt eine Kräfteaddition von Federkraft und Dämpfung, das zu dem Kraftgesetz

$$(13) \quad F = c \cdot w + d \cdot v$$

führt, wobei w die Federauslenkung ist. Die Gingiva stellen wir uns als dichte Folge von Kelvin-Voigt-Elementen vor; die Funktionen $w(x,t)$ und $v(x,t)$ beschreiben die Auslenkung bzw. die Auslenkungsgeschwindigkeit des Prothesensattels in Abhängigkeit von der Position x und der Zeit t .

Pro Längeneinheit dx überträgt die Gingiva die infinitesimale Kraft dS , die durch die Kräftegleichung (13) gegeben ist. Dann wirken auf einen Sattel, der Sattellänge l die Kräfte

$$dS = \frac{1}{l} (E \cdot w(x,t) + \mathbf{h} \cdot v(x,t)) dx .$$

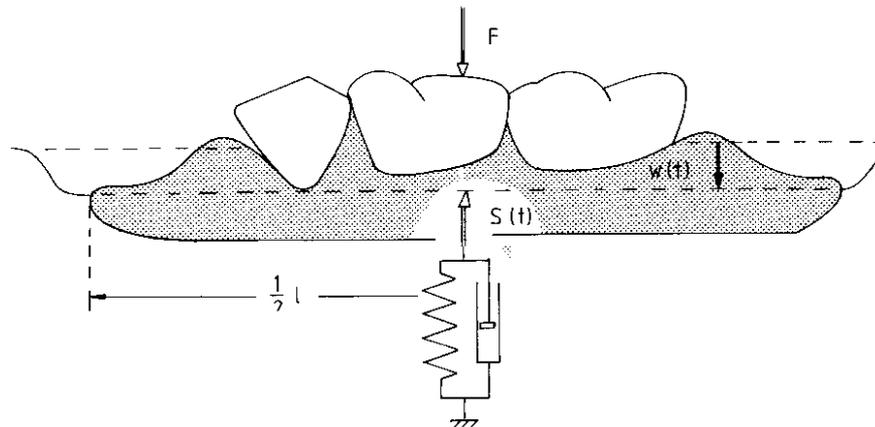


Abb. 26 aus [2]: Absenkung eines rein gingival gebetteten Prothesesattels.

Berücksichtigen wir, daß die Ableitung des Weges nach der Zeit die Geschwindigkeit ist, so erhalten wir

$$dS = \frac{1}{l} (E \cdot w(x,t) + \mathbf{h} \frac{dw(x,t)}{dt}) dx.$$

Die Gesamtkraft wird durch Integration über die Sattellänge erhalten.

$$S(x,t) = \frac{1}{l} \int_0^l (E \cdot w(x,t) + \mathbf{h} \frac{dw(x,t)}{dt}) dx$$

Greift eine konstante Kraft F_0 auf den Prothesesattel, so beginnt er sich abzusenken. Zur einfacheren Berechnung wird die Prothese mittig durch die Kraft F_0 belastet, so daß alle Punkte der Schleimhaut gleichmäßig absinken. Aus Symmetriegründen können die Einzelkräfte durch eine F_0 entgegenwirkende Spiegelkraft zusammengefaßt werden. Die Funktion $w(x,t)$ hängt damit nicht mehr vom Ort ab, sondern nur noch von der Zeit t , und die Gingiva überträgt eine Gesamtkraft

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{l} \int_0^l (E \cdot w(t) + \mathbf{h} \frac{dw(t)}{dt}) dx = \frac{1}{l} (E \cdot w(t) + \mathbf{h} \frac{dw(t)}{dt}) \int_0^l dx \\ &= E \cdot w(t) + \mathbf{h} \frac{dw(t)}{dt} \end{aligned}$$

auf den Sattel. Setzen wir die konstante Kraft F_0 ein, so erhalten wir

$$F_0 = E \cdot w(t) + \mathbf{h} \frac{dw(t)}{dt};$$

das ist eine Differentialgleichung mit folgender Lösung:

$$w(t) = \frac{F_0}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{h}t}\right)$$

Der Quotient η/E wird Retardationszeit τ_{ret} bezeichnet. Die Differentialgleichung wird dann zu

$$(14) \quad w(t) = \frac{F_0}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}}}\right).$$

Der experimentell ermittelte Wert der Retardationszeit der Gingiva beträgt $\tau_{\text{ret}} = 1,4\text{s}$. Nach Erreichen der maximalen Auslenkung w_0 ($w_0 = w(t = \tau_{\text{ret}})$) und dem Wegfall der angreifenden Kraft erholt sich die Gingiva nach dem Gesetz

$$w^*(t) = w_0 e^{-\frac{t - \tau_{\text{ret}}}{\tau_{\text{ret}}}}.$$

Stellen wir uns nun den Kauvorgang vor. Beim Zusammenbeißen werden die Belastungskräfte sicherlich ansteigen, bis ein Maximalwert erreicht ist, dann wird die Belastung schlagartig verschwinden. Dieser Vorgang wird sich während der Kauphase mehrmals wiederholen. Die lineare Funktion

$$F(t) = F_0 \frac{t}{t_B}$$

soll den ansteigenden Belastungen beim Kauen Rechnung tragen und ihren Maximalwert F_0 bei $t = t_B$ erreichen. t_B ist die Belastungszeit und wird in der Literatur mit $t_B = 0,5\text{ s}$ beziffert, die Entlastungszeit mit $\tau_{\text{ret}} = 1,4\text{ s}$.

Die folgende Differentialgleichung berücksichtigt diesen Sachverhalt:

$$F_0 \cdot \frac{t}{t_B} = E \cdot w(t) + h \frac{dw(t)}{dt}$$

Ihre Lösung ist:

$$(15) \quad w(t) = \frac{F_0}{E} \cdot \frac{t_{\text{ret}}}{t_B} \left[\frac{t}{t_{\text{ret}}} - \left(1 - e^{-\frac{t}{t_{\text{ret}}}}\right) \right]$$

Setzen wir $t_B = \tau_{\text{ret}} = 1,4\text{ s}$ in (14) ein, d.h. die Belastungszeit ist gleich der Entlastungszeit, so erhalten wir als Lösung bei konstant angreifender Kraft

$$w(t = t_B = 1,4\text{s}) = \frac{F_0}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1,4\text{s}}{1,4\text{s}}}\right) = 0,63 \cdot \frac{F_0}{E}$$

und bei linear steigender Angriffskraft (vgl. (15))

$$w(t = t_B = 1,4s) = \frac{F_0}{E} \cdot \frac{1,4s}{1,4s} \left(\frac{1,4s}{1,4s} - 1 + e^{-\frac{1,4s}{1,4s}} \right) = 0,367 \cdot \frac{F_0}{E}.$$

In der folgenden Tabelle sind für einige Konfigurationen Werte angegeben.

	bei konstanter Angriffskraft in % zu Maximum, es gilt (14)	bei linear anwachsender Kraft in % zu Maximum, es gilt (15)
$t = \tau_B = \tau_{ret} = 1,4s$	63%	36,7%
$\tau_{ret} = 1,4s, t = \tau_B = 0,5s$	30,7%	15,9%

Tabelle 3: Gingivale Absenkung in Abhängigkeit der Retardationszeit und des Belastungsmodells.

Sofern eine Restbeziehung vorhanden ist, kann der Prothesesattel mit dieser verbunden werden. In Abb. 27 ist ein gelenkig angekoppelter Prothesesattel abgebildet.

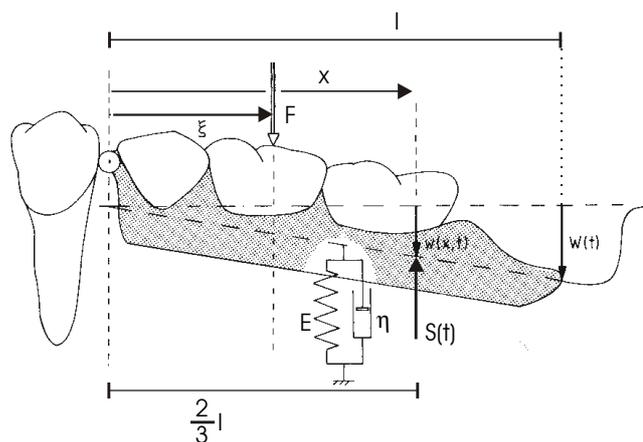


Abb. 27: Gelenkig mit dem Zahn verbundener Prothesesattel.

Der Sattel darf als starr angesehen werden. Unter Krafteinwirkung wird sich die Prothese absenken. Dabei wird unterhalb des Lagers keine und am Ende die größte Absenkung stattfinden. Damit hängt die Funktion zur Beschreibung der Absenkung vom Ort x ab. Die Absenkung ist proportional zu x, und die Funktion ist, wenn l die gesamte Sattellänge ist:

(16) $w(x,t) = \frac{x}{l} \cdot W(t)$

Die Funktion $w(x,t)$ ist in einen orts- und zeitabhängigen Anteil separiert worden. Die infinitesimale Kraft $dS(x,t)$, die auf den Sattel übertragen wird, ist:

$$(17) \quad dS(x,t) = \left[\frac{1}{l} (E \cdot W(t) + \mathbf{h} \cdot \frac{dW(t)}{dt}) \cdot \frac{x}{l} \right] dx$$

Um die Gesamtkraft zu erhalten, muß die Gleichung integriert werden. Der zeitabhängige Anteil kann wie die Konstanten vor das Integral gezogen werden, und die Gleichung (17) wird zu

$$S(t) = \frac{1}{l^2} (E \cdot W(t) + \mathbf{h} \cdot \frac{dW(t)}{dt}) \int_0^l x dx.$$

Das ergibt mit $\int_0^l x dx = \frac{1}{2} l^2$:

$$(18) \quad S(t) = \frac{1}{2} (E \cdot W(t) + \mathbf{h} \cdot \frac{dW(t)}{dt}).$$

Wie wir bereits wissen, ist die Absenkungstiefe $w(x,t)$ vom x -Wert abhängig und proportional zu diesem. Damit steigt die Kraftgegenwirkung auch proportional an. Der Verteilung kann eine im Schwerpunkt des Dreiecks, also an der Stelle $x=(2/3)l$ angreifende, statisch äquivalente Gesamtkraft zugeordnet werden, die bezüglich der Einzelkräfte zum Gelenkpunkt dasselbe Moment erzeugt und dieselbe Wirkung hat.

Sei die Belastung auf die Prothese die senkrecht wirkende Kraft F_0 und die auf das Gelenk übertragenen Zwangskräfte G . Dann ist das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung am Sattel, wenn nach oben gerichtete Kräfte positiv gezählt werden und die Kraft F_0 an der Stelle ξ wirkt:

$$(19) \quad -F_0 + G + S = 0$$

Das Momentengleichgewicht bezüglich des Gelenkpunktes ist:

$$(20) \quad F_0 \cdot \mathbf{x} - S \cdot \frac{2}{3} l = 0$$

Wenn wir (20) in (18) einsetzen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$(21) \quad 3 \cdot F_0 \cdot \frac{\mathbf{x}}{l} = E \cdot W(t) + \mathbf{h} \cdot \frac{dW(t)}{dt}$$

und ihre Lösung ist

$$(22) \quad W(t) = 3 \frac{F_0}{E} \cdot \frac{\mathbf{x}}{l} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{rel}}}).$$

Wenn am Sattelende ($\xi=l$) die Kraft F_0 einwirkt, ist die Absenkung an dieser Stelle um den Faktor 3 größer als bei einer rein gingivalen Abstützung mit mittig angreifender Kraft.

Die Momentengleichung (20) liefert, wenn wir nach S auflösen:

$$(23) \quad S = \frac{3}{2} F_0 \cdot \frac{x}{l}$$

Die Zwangskraft S ist eine Konstante, und damit ist, wenn wir (23) in (19) einsetzen, die Gelenkkraft

$$G = F_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l} \cdot \frac{3}{2}\right)$$

auch eine Konstante.

Nach dem dritten Newtonschen Axiom („actio=reactio“) wird vom Zahn eine gleichgroße, aber entgegengesetzte Kraft übertragen. Ist G kleiner als null, so führt das zu einer Anhebung des Zahnes. Die Kraft ist kleiner null, wenn

$$1 - \frac{3x}{2l} < 0$$

ist, also gilt:

$$\boxed{x < \frac{2}{3}l}$$

Dieses Ergebnis wurde bereits von Kantorowitz (nach [2]) angegeben und besagt: Soll der Ankerzahn nicht auf Extrusion beansprucht werden, so darf die okkludierende Sattellänge $2/3$ der gesamten Sattellänge nicht überschreiten.

In der modernen Prothetikliteratur findet diese Art der gelenkigen Ankopplung kaum noch Befürworter. Allerdings gehorcht eine mit Gußklammern am Zahn verankerte Prothese (die wohl heute am häufigsten gewählte Versorgungsmethode mit lösbarem Zahnersatz) diesem Gesetz, da der Sattel „quasi-gelenkig“ mit der Prothese verbunden ist. Deshalb findet die physikalische Herleitung und die Aufnahme in die Simulation ihre Berechtigung.

Eine Variante der gelenkigen Ankopplung ist eine starre Verbindung des Prothesesattels mittels Konusteleskop (siehe Abb. 28).

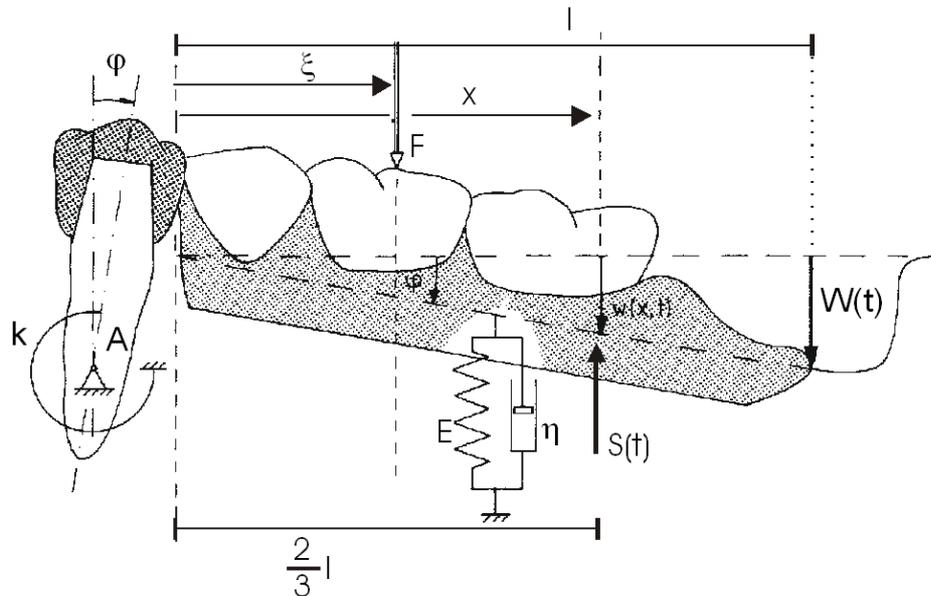


Abb. 28: Über Konuskronenstange mit Zahn verbundener Prothesensattel.

Zur Berechnung der Kräfte verwenden wir ein idealisiertes Modell, bei dem die Prothese tragende Zahn um ein im apikalen Zahndrittel liegendes Drehzentrum kippbar ist. Das Parodontium übt nach der Drehung um den Winkel φ ein rücktreibendes Moment M_A aus, das durch eine Drehfeder mit der Drehfederkonstanten k beschrieben werden kann:

$$(24) \quad M_A(t) = k \cdot \mathbf{j}(t)$$

Für die Schleimhautabsenkung gelte wie beim gelenkig angekoppelten Sattel

$$(25) \quad w(x,t) = \frac{x}{l} \cdot W(t)$$

mit

$$(26) \quad W(t) = l \cdot \mathbf{j}(t).$$

Diese Kräfteverteilung kann wieder durch eine, an der Stelle $x = \frac{2}{3}l$ angreifende, Einzelkraft ersetzt werden, die

$$(27) \quad S(t) = \frac{1}{2} \left(E \cdot W(t) + \mathbf{h} \cdot \frac{dW(t)}{dt} \right)$$

ist. Der Sattel werde durch eine konstante Kraft F_0 an der Stelle ξ belastet. Das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung lautet

$$(28) \quad -F_0 + S + A = 0$$

und die Momentengleichung bezüglich des Gelenkpunktes ist näherungsweise

$$(29) \quad F_0(\mathbf{x} + r) - M_A - S\left(\frac{2}{3} \cdot l + r\right) = 0,$$

dabei ist r der Kronenradius.

Wir erhalten aus den drei Gleichungen (24), (26) und (27) durch Einsetzen in (29) die folgende Differentialgleichung:

$$F_0(\mathbf{x} + r) = \left[\frac{k}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} l + r \right) E \right] \cdot W(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} l + r \right) \cdot \mathbf{h} \frac{dW(t)}{dt}$$

Wenn $r \ll \frac{2}{3}l$ ist folgt

$$F_0(\mathbf{x} + r) = \left(\frac{k}{l} + \frac{1}{3} E \right) W(t) + \frac{1}{3} \mathbf{h} \frac{dW(t)}{dt} \quad | \cdot 3/l$$

$$(30) \quad 3F_0 \frac{\mathbf{x} + r}{l} = \underbrace{\left(E + \frac{3k}{l^2} \right)}_{E^*} W(t) + \mathbf{h} \frac{dW(t)}{dt}.$$

Der direkte Vergleich mit (21) zeigt eine um $\frac{3k}{l^2}$ höhere Steifigkeit E^* bei gleicher Dämpfung.

Ist $t_{ret} = \frac{\mathbf{h}}{E}$ wieder die Retardationszeit der Gingiva, so ist die Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $W(t=0)=0$

$$W(t) = 3 \frac{F_0}{E} \frac{E}{E^*} \cdot \frac{\mathbf{x} + r}{l} \left(1 - e^{-\frac{E^*}{E} t_{ret}} \right).$$

Für eine mittig angreifende Kraft folgt mit $r \ll l$

$$W(t) = \frac{3}{2} \frac{F_0}{E} \frac{E}{E^*} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E^*}{E} t_{ret}} \right).$$

Die Maximalauslenkung sinkt um den Faktor $\frac{E}{E^*}$ im Vergleich zur gelenkigen

Ankopplung. Ebenso sinkt die Retardationszeit um $\frac{E}{E^*}$, d.h. die starre Anbindung

ist weniger belastend für die Gingiva und die Schleimhäute.

2.4 Informatische Grundlagen

Die informatischen Grundlagen sind unentbehrlich für eine computergerechte Umsetzung der formal ermittelten Modelle. Die verwendeten Diagramme sind formal auf [7] zurückzuführen.

2.4.1 Softwarespezifikationen mit UML

In den letzten 20 Jahren wurden zahlreiche Methoden zur Softwarespezifikation propagiert. Diese waren nötig, da die Komplexität der Software aufgrund ereignisorientierter grafischer Benutzeroberflächen, verteilter Datenhaltung, mehrschichtiger Client-Server-Architekturen und des Internets in großem Maße angestiegen ist.

Dabei wurden die Spezifikationen bis etwa 1988 durch Methoden zur strukturierten Analyse verbreitet. Ab diesem Zeitpunkt waren aber die objektorientierten Methoden im Kommen, und es gab eine Vielzahl an Veröffentlichungen, um den Anforderungen derselben gerecht zu werden. Dabei sollten Faktoren wie Kommunikation des Systems mit seiner Umgebung, das Systemverhalten im zeitlichen Ablauf, die Zerlegung des Systems in konzeptuelle Bestandteile und die Kommunikation der Komponenten untereinander in einer allgemein verständlichen Notation zusammengefaßt werden.

Die Unified Modelling Language (UML) erfüllt diese Anforderungen und scheint sich als ein solcher Standard für Softwarebaupläne zu etablieren. Bei ihrer Entwicklung haben Unternehmen wie Digital Equipment, Hewlett-Packard, i-Logix, ICON-Computing, MCI Systemhouse, Microsoft, Oracle, Texas Instruments und Unisys aktiv mitgewirkt. Die Federführung in der Weiterentwicklung liegt bei der Object Management Group (OMG). Mit UML können nicht nur elektronische Schaltpläne oder technische Zeichnungen für Maschinenteile, sondern auch Baupläne für Brücken umgesetzt werden.

UML ist also eine allgemein verständliche Notationssprache für objektorientierte Softwareentwicklung. Objektorientierung heißt, daß real vorstellbare Objekte (genannt Klassen) für die zu programmierende Anwendung modelliert und mit den nötigen Eigenschaften zur Lösung des Problems versehen werden. Als solche sollten von allen an Softwareprojekten beteiligten Personen, wie Entwicklern, Branchenexperten, Methodenspezialisten und vor allem Projektmanagern, zumindest deren Diagramme gelesen werden können.

Da die Phasen eines Softwareprojektes unterschiedliche Darstellungen aus verschiedenen Blickwinkeln erfordern – mit mehr oder weniger hohem Abstraktionsgrad, ist ein umfangreicher Satz an Diagrammen nötig, die in UML zu finden sind.

2.4.2 Bestandteile von UML

Die Modellelemente von UML lassen sich in folgende Typen untergliedern:

- Anwendungsfalldiagramm (zeigt Akteure, Anwendungsfälle und ihre Beziehungen)
- Klassendiagramm (zeigt Klassen und ihre Beziehungen untereinander)
- Verhaltensdiagramme:
 - Aktivitätsdiagramm (zeigt Aktivitäten, Objektzustände, Zustandsübergänge und Ereignisse)
 - Kollaborationsdiagramm (zeigt Objekte und ihre Beziehungen inklusive ihres räumlich geordneten Nachrichtenaustauschs)
 - Sequenzdiagramm (zeigt Objekte und ihre Beziehungen inklusive ihres zeitlich geordneten Nachrichtenaustauschs)
 - Zustandsdiagramm (zeigt Zustände, Zustandsübergänge und Ereignisse)
- Implementierungsdiagramme:
 - Komponentendiagramm (zeigt Komponenten und ihre Beziehungen)
 - Verteilungsdiagramm (zeigt Komponenten, Knoten und ihre Beziehungen)

Dabei liefern die unterschiedlichen Diagrammtypen verschiedene Sichtweisen auf das System.

Die folgenden Diagrammtypen werden bei der Modellierung der Prognose-simulation benutzt und deshalb kurz erklärt:

- Anwendungsfalldiagramm (engl. use cases)
- Aktivitätsdiagramm
- Klassendiagramm
- Sequenzdiagramm

2.4.2.1 Anwendungsfälle

Anwendungsfälle beschreiben das gesamte organisatorische Umfeld, also nicht nur bestimmte Funktionen. Dabei umschließt ein rechteckiger Rahmen die Systemgrenze. In Ellipsen werden die Anwendungsfälle beschrieben, die durch Linien mit den Akteuren verbunden sind. Die Akteure sind für die Abwicklung zuständig - das können also die Anwender der Software, aber auch technische und organisatorische Systeme sein, mit denen das System kommuniziert. Dementsprechend wären eine Wissensdatenbank, auf die die Simulation zugreift, um eine Prognose zu machen, die aber nicht zum System gehört, sowie der zu behandelnde Arzt, der die Daten eingibt, Akteure. Dieser Analyseabschnitt sollte auch ohne EDV-Fachkenntnis nachvollziehbar sein, denn er spielt sich vollständig in der Sprache des Fachgebiets ab.

Da unter „System“ nicht nur Softwaresysteme zu verstehen sind, können Anwendungsfälle sehr gut zur Problembereichsabgrenzung verwendet und über mehrere Abstraktionsebenen so weit vereinfacht, d.h. zerlegt, werden, daß sich die reinen Software-System-Anwendungsfälle herauskristallisieren. Diese können aufgrund logischer oder physischer Zusammenhänge gruppiert werden.

2.4.2.2 Anwendungsfallbeschreibung

In der Anwendungsfallbeschreibung werden softwarerelevante Anwendungsfälle detailliert beschrieben. Hierfür sind in der UML keinerlei formelle Richtlinien festgelegt, aber im Sinne einer brauchbaren Analyse haben sich nach [7] die folgenden Strukturmerkmale in der Praxis bewährt:

- Nummer und Name des Anwendungsfalls
- Kurzbeschreibung
- Beteiligte Akteure
- Auslöser bzw. Vorbedingungen
- Ergebnisse bzw. Nachbedingungen
- Nicht-funktionale Anforderungen
- Ablaufbeschreibung, untergliedert in einzelne Schritte, die wiederum durch eine Kurzbeschreibung repräsentiert werden
- Ausnahmen, Varianten
- Dialoge

- Offene Punkte, Fragen
- Dokumente, Referenzen

Formulierungen wie „Die Daten werden eingegeben.“ sollten vermieden werden, da eine Menge Fragen bezüglich der Verantwortlichkeiten offenbleiben. Besser ist: „Der *Anwender* gibt *Pfeilerkräfte* in das *Pfeilererfassungsfeld* ein.“

Dabei sind Substantive potentielle Anwarter für die benötigten Klassen, Verben dagegen sind häufig Aktivitäten und Adjektive häufig Zustände, in denen sich das Objekt oder das System befindet. Ein Satz ohne eindeutig benannte Objekte oder Akteure ist fast immer ungenau.

In der Prototypentwicklung wurden folgende Punkte umgesetzt:

- Nummer und Name des Anwendungsfalls
- Kurzbeschreibung
- Beteiligte Akteure
- Auslöser bzw. Vorbedingungen
- Ergebnisse bzw. Nachbedingungen
- Dialoge
- Ablaufbeschreibung untergliedert in einzelne Schritte

Die zu erstellenden Anwendungsfallbeschreibungen sollen nur grob in Einzelschritte gegliedert werden, denn für detailliertere Darstellungen stehen andere Diagrammtypen zur Verfügung.

Anwendungsfallbeschreibungen sind zur Anforderungsbeschreibung wichtig, tragen zur Einarbeitung in ein Fachgebiet bei und stellen den Funktionsumfang des Systems dar.

2.4.2.3 Aktivitätsdiagramme

Aktivitätsdiagramme sind Verhaltensdiagramme, die Ablaufmöglichkeiten eines Systems mit Hilfe von Aktivitäten beschreiben. Ein Aktivitätsdiagramm ist eine spezielle Form des Zustandsdiagramms, das vorwiegend oder sogar ausschließlich Aktivitäten enthält.

Eine Aktivität ist ein Zustand mit einer internen Aktion und einer oder mehreren ausgehenden Transaktionen, die automatisch dem Abschluß der internen Aktionen folgen. Eine Aktivität ist ein einzelner Schritt im Ablauf.

2.4.2.4 Sequenzdiagramme

Eine Sequenz zeigt eine Reihe von Nachrichten, die eine ausgewählte Menge von Objekten in einer zeitlich begrenzten Situation austauscht, wobei der zeitliche Ablauf betont wird. Die Objekte werden mit senkrechten Lebenslinien gezeigt, die von oben nach unten verlaufen.

3 Analyse und Aufbau des Modells

Die zugrunde gelegte Anforderung an die vorliegende Arbeit ist die Schaffung eines softwarebasierten Prototyps zur Bestimmung der Kräfte, die durch Zahnprothesen an tragenden Elementen auftreten können. Insbesondere soll dabei Wert auf Transparenz und Verständlichkeit der verwendeten Modelle gelegt werden, so daß diese ohne Grundkenntnisse über Statik oder Informatik nachvollzogen werden können.

Bereits in den Grundlagen wurde festgestellt, daß ein Kräfteproblem mit mehr als zwei Pfeilern ein statisch unbestimmtes System ist. Zur Lösung solcher Probleme sind komplexe Modelle nötig, die ein fundiertes statisches, mathematisches und physikalisches Wissen voraussetzen. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang die Balkentheorie, die Deformationen der beteiligten Komponenten berücksichtigt und Funktionen der Biegelinien liefert. Diese Funktionen werden aus Lösungen komplexer Differentialgleichungen gewonnen, die dann durch numerische Iterationsverfahren angenähert werden können. Ohne diese Gleichungen kann kein sinnvolles statisches Modell kreiert werden. Da die Pfeilerprobleme in keinen gängigen Statik-Formelsammlungen und Tabellenwerken zu finden sind, müßten die Differentialgleichungen hergeleitet und bewiesen werden. Dies steht aber im Widerspruch zu nachvollziehbaren biomechanischen Modellen und geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

In den folgenden Abschnitten werden die Anwendungsfälle identifiziert und anschließend die nötigen Modelle zur deren Lösung spezifiziert.

3.1 Identifikation der Anwendungsfälle

Der Prototyp soll so konzipiert werden, daß Zahnärzte bei der Planung einer Prothese zusätzliche Erkenntnisse über mögliche Kräfteeinwirkungen auf Zähne und Prothesen erhalten, um hiermit ihr aus Erfahrung resultierendes Wissen zu komplettieren. Die Simulation soll dem Arzt die Risiken der Realisationen verschiedener Planungen verdeutlichen, oder eine biomechanische Unbedenklichkeit anzeigen.

Stehen mehrere Alternativkonfigurationen der Prothese zur Debatte, ermöglicht das System eine schnelle Auswahl aufgrund biomechanisch errechneter Daten, so daß der Arzt gezielt die präferierte Prothese planen kann und Zeit bei der Auswahl

spart. Durch schnelle und unkomplizierte Dateneingabe kann er auch in vermeintlich sicheren Fällen eine Simulation durchführen, die ihn auf eventuell nicht zu erwartende oder nicht beachtete Schwachstellen hinweist.

Wir erhalten aufgrund der Problemstellung folgenden Anwendungsfall:

Der Arzt ist der Akteur, der in das System Daten eingibt. Danach führt er mit diesen eine Berechnung durch und erhält Ergebnisse.

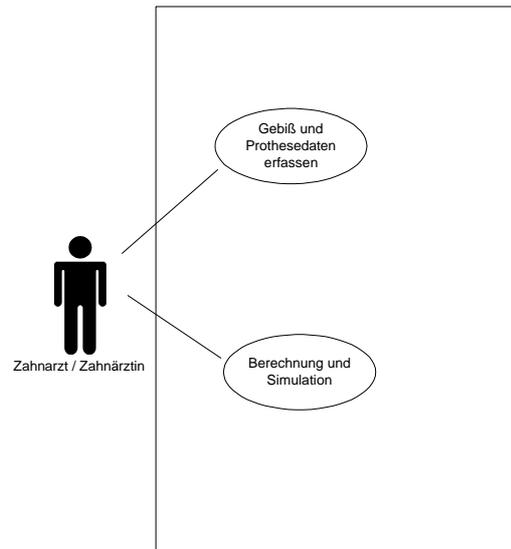


Abb. 29: Anwendungsfall Prothesenplanung und biomechanische Simulation der Konfiguration.

3.2 Anwendungsfall „Gebiß und Prothesendaten erfassen“

Der Anwendungsfall „Gebiß und Prothesendaten erfassen“ ist in einzelne Teilschritte untergliedert, die in Form eines Assistenten die nötigen Eingaben zur korrekten Berechnung ermitteln. Jeder Hauptschritt soll durch ein Eingabefenster umgesetzt werden. In den Unterpunkten ist der Fensterinhalt beschrieben. Dabei wird jede Aktion innerhalb des Diagramms erläutert.

Af1	Gebiß und Prothesendaten erfassen
Kurzbeschreibung	Der Zahnarzt bzw. die Zahnärztin erfaßt Gebiß und Prothesendaten. Die Gebißdaten enthalten die zur Berechnung gewünschte Pfeilerkonfiguration mit maximal zwei Pfeilern. Die Prothesendaten enthalten Art und Region der Prothese.
Beteiligte Akteure	Zahnarzt / Zahnärztin

Auslöser, Vorbedingungen	Zahnarzt bzw. Zahnärztin benötigt Unterstützung bei der Prothesenplanung. Befund des Patienten liegt vor, gesucht ist eine möglichst ideale Prothese mit möglichst hoher Lebensdauer.	
Ergebnisse, Nachbedingungen	Vollständiger Datensatz mit Gebiß und Prothesenmodell	
Dialoge	Assistent, der kontinuierlich Daten sammelt	
Ablauf		
1.	Kiefer erfassen: Der Zahnarzt entscheidet sich für den Kiefer, der prothetisch versorgt werden soll. a) Oberkiefer oder b) Unterkiefer	
2.	Prothesenmodell wählen: Der Arzt wählt ein Prothesenmodell aus: a) Ausschließlich Pfeilergetragene Prothese <i>oder</i> b) Gingival- parodontal getragene Prothese	
	bei Auswahl einer ausschließlich Pfeilergetragenen Prothese	bei Auswahl einer gingival- parodontal getragenen Prothese
3.	Pfeiler erfassen:	
3.1	FDI-Code erfassen: Der Arzt bestimmt durch Eingabe des FDI-Codes des Zahnes die Pfeilerposition für: ➤ mindestens einen Pfeiler ➤ maximal zwei Pfeiler (Beispiel: 11 ist der Schneidezahn im ersten Quadranten)	FDI-Code erfassen: Der Arzt bestimmt durch Eingabe des FDI-Codes des Zahnes die Pfeilerposition für genau einen Pfeiler.
3.2	Wurzeltyp erfassen: Der Arzt bestimmt die Art der Wurzeln: a) natürliche und gesunde Wurzel b) natürliche, aber parodontal geschädigte Wurzel c) implantierte Wurzel	Wurzeltyp erfassen: Der Arzt bestimmt die Art der Wurzeln: a) natürliche und gesunde Wurzel b) natürliche, aber parodontal geschädigte Wurzel c) implantierte Wurzel
3.3	Kronentyp erfassen: Der Arzt kann die Wurzeln mit Konuskronen überkronen.	Kronentyp erfassen: Der Arzt kann die Wurzeln mit Konuskronen überkronen.
3.4	Plausibilität prüfen: Überprüfung der Eingabe auf syntaktische und logische Fehler.	Plausibilität prüfen: Überprüfung der Eingabe auf syntaktische und logische Fehler.

4.	Brückenspanne erfassen:	Gingivalen Sattelbereich erfassen:
4.1	Erstes Brückenglied erfassen: ➤ Durch Eingabe des FDI-Codes des ersten Brückengliedes	Okkludierten Bereich erfassen: ➤ Durch Eingabe des FDI-Codes der letzten okkludierten Sattelregion
4.2	Letztes Brückenglied erfassen: ➤ Durch Eingabe des FDI-Codes des letzten Brückengliedes	Nicht okkludierten Sattelbereich erfassen: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Durch optionale Eingabe der letzten nicht okkludierten Sattelregion ➤ Die Zwischenregionen werden automatisch zu okkludierten bzw. nicht okkludierten Sattelteilen, so daß ein zusammenhängender Sattel entsteht. ➤ Befindet sich der Pfeiler zwischen okkludierter und nicht okkludierter Region, so wird eine Warnmeldung ausgegeben; der Dialog kann erst fortgesetzt werden, wenn eine korrekte Eingabe erfolgt.
4.3		Verbindungselement erfassen: Der Arzt bestimmt die Art der Verbindung zwischen Sattel und Pfeiler: <ul style="list-style-type: none"> a) Der Sattel ist fest mit der Konuskrone auf dem Pfeiler verbunden. b) Der Sattel ist über ein Gelenk oder eine Halteklammer verbunden.
4.4	Plausibilität prüfen: Überprüfung der Eingabe auf syntaktische und logische Fehler.	Plausibilität prüfen: Überprüfung der Eingabe auf syntaktische und logische Fehler.
Die folgenden Punkte gelten für ausschließlich pfeilergetragene Prothesen und Gingivalprothesen. Sind keine Konuskronen vorhanden, weiter bei 6 .		
5.	Konuskronendaten erfassen:	
5.1	Konuswinkel erfassen: Der Arzt legt den Konuswinkel für Konuskronen fest. <ul style="list-style-type: none"> ➤ Standardwert ist auf 6,9° gesetzt ➤ Bei zwei Pfeilern können beide Winkel individuell eingestellt werden. 	

5.2	Materialkonstante erfassen: Der Arzt legt die zu verwendenden Werkstoffe der Konuskronen fest: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Wenn zwei Pfeiler vorhanden sind, müssen beide aus dem gleichen Werkstoff sein ➤ Innen- und Außenkonus können unterschiedliche Werkstoffe haben ➤ Der Standardwert ist ein hochgoldhaltiger Innen- und Außenkonus
5.3	Plausibilität prüfen: Überprüfung der Eingabe auf syntaktische und logische Fehler
6	Simulation starten: Alle Eingaben werden zusammengefaßt dargestellt. Der Arzt kann sofort die Simulation starten, oder er speichert die Eingabedaten für spätere Berechnungen oder zur Versendung via E-Mail.

3.3 Biomechanisches Modell und Berechnungsmethoden

Im folgenden Abschnitt wird ein Modell zur Beschreibung der Kaukräfte gebildet. Im Anschluß werden unter Einbeziehung der Wurzeln und/ oder der Implantate die Auswirkungen der Kräfte auf Prothese und Zahnkronen untersucht. Damit kann das Verhalten des in die Prothese eingebundenen Zahnhalteapparats ermittelt werden, wobei auch Implantate zum Zahnhalteapparat gehören sollen. Abb. 30 gibt eine Übersicht über den Verlauf.

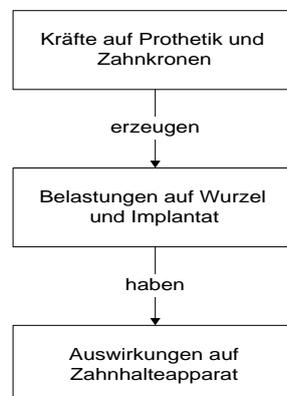


Abb. 30: Argumentation zu Ermittlung der Wirkung einer Prothese.

3.3.1 Modell zur Bestimmung von Kräften, die auf Prothetik und Zahn wirken

Trockenfleisch:	ca. 35 N
Gummibärchen:	ca. 30 N
Kleine Nüsse:	ca. 17 N

Pudding:	ca. 3 N
----------	---------

Tabelle 4: Kaukräfte, gemessen von [2].

Das Modell baut darauf auf, daß beim Kauen ein Druck auf die Zahnflächen und Prothesenelemente entsteht, der durch eine punktförmig angreifende Kraft vereinfacht dargestellt werden kann. Diese Kraft wirkt vorwiegend senkrecht auf die Zahnflächen und die Prothesenelemente, so daß die parallelen Kraftkomponenten vernachlässigt werden. Die senkrechten Komponenten erreichen in Ausnahmefällen maximal 100N in der molaren Gebißregion, wobei beim normalen Kauen Höchstwerte von etwa 35N (vgl. **Tabelle 4**) gemessen wurden. Eine funktionale Maximalbelastung von 50N kann für diese Region als realistisch angesehen und im Simulationsmodell verwendet werden.

Dabei nehmen die Kaukräfte zu den Schneidezähnen hin ab, so daß im Modell eine vereinfachte Kräfteeinteilung wie in **Tabelle 5** verwendet wird.

Bereich	Zähne und Region	max. zu erwartende Kräfte
1	Schneidezähne, 11, 12, 21, 22, 31, 32, 41, 42	30 N
2	Eckzähne 13, 23, 33, 43	40 N
3	Prämolare 14, 15, 24, 25, 34, 35, 44, 45	50 N
	Molare 16, 17, 18, 26, 27, 28, 36, 37, 38, 46, 47, 48	50 N

Tabelle 5: In der Simulation verwendete Kräfte.

Die maximale Kraft beim Kauen resultiert aus einem Druck, der aufgrund der Ausdehnung der Nahrung auf eine gewisse Mindestfläche verteilt ist. Diese Mindestfläche wird im verwendeten Modell der Zahngröße entsprechen. Dadurch kann der Druck durch eine im Zentrum des Zahn angreifende Punktkraft dargestellt werden. Die Maximalbelastung der Zahnkrone ist 30 bis 50N; die anderen Zähne sind dann aber unbelastet.

Um biomechanische Extremwerte an den Pfeilern erzeugen zu können, müssen signifikante Punkte mit diesen Maximalkräften belastet werden. Dazu gehören die Prothesenenden, die Prothesenmitte und die Pfeiler selbst.

Die Kräfte werden über die Kronen oder die Pfeilergetragenen Prothesen an die im Parodontium verankerten Wurzeln oder im Knochen verankerten Implantate weitergegeben, was zu Reaktionen in Form von Zahnbewegungen führt.

3.3.2 Reaktionen der Pfeiler auf Belastungen

Die Pfeiler reagieren bei senkrecht wirkenden Kräften, je nach Art (mit natürlichen und gesunden Wurzeln, mit parodontal geschädigten Wurzeln, mit Implantaten) und Position verschieden auf die Belastungen. Diese können in starker Vereinfachung durch lineare Federgesetze beschrieben werden. In **Tabelle 6** sind die Bewegungen der Pfeiler in Abhängigkeit der Belastungskraft für unterschiedliche Pfeilertypen mit entsprechenden Gültigkeitsbereichen angeführt.

Gültigkeitsbereich	natürlicher Pfeiler	parodontal geschädigter Pfeiler	Implantat
$(0 < 1) \text{ N}$	$z = \frac{F_{\max}}{35 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$	$z = \frac{F_{\max}}{3,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$	$z = \frac{F_{\max}}{35000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$
$\geq 1 \text{ N}$	$z = \frac{F_{\max}}{3500 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$	$z = \frac{F_{\max}}{350 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$	$z = \frac{F_{\max}}{35000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$

Tabelle 6: Modellparameter der Pfeilerbewegung in Abhängigkeit der Belastung bei Schneidezähnen.

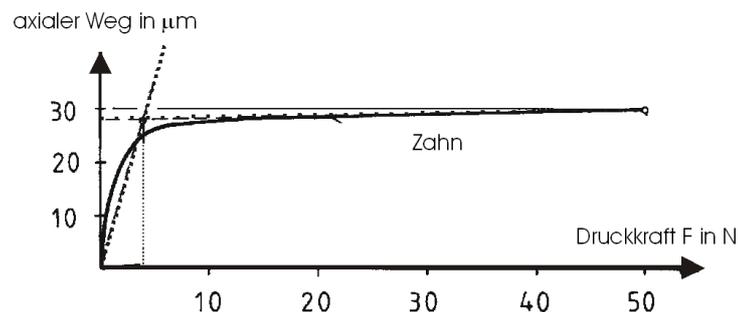
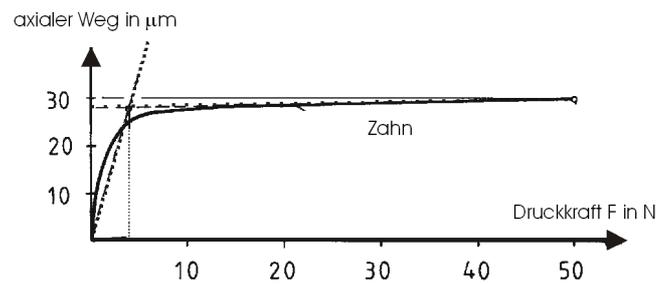


Abb. 31: Typisches Federungsverhalten eines natürlichen Zahns.

Dabei sind folgende Vereinfachungen im Modell gemacht worden:

Das nichtlineare Kraft-Weg-Verhalten der natürlichen Pfeiler wird durch zwei lineare Bereiche approximiert (vgl.



- 1.) **Abb. 31).** Bei Berechnungen mit einer nichtlinearen Kraft-Weg-Kurve würden sich verhältnismäßig kleine Änderungen ergeben, so daß auch in einer späteren Version dieses Verhalten nicht berücksichtigt zu werden braucht.
- 2.) Für alle Pfeiler werden aufgrund mangelnder Literaturdaten dieselben Konstanten verwendet, unabhängig von ihrer Position. Diese Vereinfachung kann durchaus größere Abweichungen verursachen, da die Wurzelzahl und Fläche stark mit der Position im Gebiß variiert. Deshalb müssen im zu verwendenden Klassenmodell für jeden Pfeiler eigene Konstanten vorgesehen werden, so daß nach Ermittlung dieser Werte die Berechnungen verfeinert werden können und das Modell erweitert werden kann.
- 3.) Das Verhalten bei Extrusion und Intrusion wird mangels Literaturdaten symmetrisiert, obwohl keine medizinische Rechtfertigung gegeben ist. Dieses Verfahren wird aber in [2] angewendet mit dem Hinweis, daß dieses Modell nicht nachgewiesen sei, jedoch für näherungsweise Berechnungen ausreicht.
- 4.) Bei Implantaten muß nicht, wie bei natürlichen Wurzeln, eine Einteilung in zwei Kraftbereiche vorgenommen werden (vgl. **Abb. 32**), da sie in etwa lineare Kennlinien haben. Dennoch werden die Kennlinien bei verschiedenen Implantaten unterschiedlich sein. Im verwendeten Modell haben alle dieselbe Federsteifigkeit, jedoch sind die Abweichungen nicht so signifikant wie bei natürlichen Pfeilern, da der Kieferknochen in allen Regionen eine ähnliche Elastizität hat. Dabei bleiben individuelle Faktoren der Implantate unberücksichtigt, da diese kaum in das Modell einbezogen werden können.
- 5.) Weiterhin muß darauf hingewiesen werden, daß selbst nach einer Umsetzung der Feinheiten eine nahezu exakte Berechnung nicht möglich sein wird, da jedes Gebiß individuelle biomechanische Eigenschaften besitzt, die zwar angenähert werden können, aber nie exakt vorbestimmbar sind.

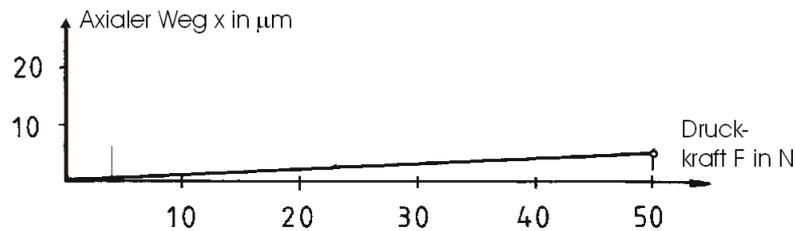


Abb. 32: Typisches Federverhalten eines Implantates.

3.3.3 Beschreibung der Kieferform mittels einer Parabel

Um sinnvolle Aussagen über das Verhalten des Zahnhalteapparates machen zu können, müssen jeder Pfeiler und jedes Prothesenelement eindeutig im Raum gekennzeichnet werden. Da der Zahnbogen in einer Ebene liegt, reduziert sich das Problem auf zwei Dimensionen, wobei die natürliche Form des Gebisses durch die mathematische Funktion eine Parabel beschrieben werden kann.

Da in der Literatur keine allgemein verwendbare Parabelgleichung explizit angegeben wurde, habe ich meinen eigenen Gebißbogen als Grundlage verwendet (vgl. Abb. 33) und daraus folgende Gleichung ermittelt: $f(x)=0,5 \cdot x^2$, die im Bereich: $-3,5 \leq x \leq 3,5$ definiert ist, d.h. ihre äußersten Punkte sind die Weisheitszähne.

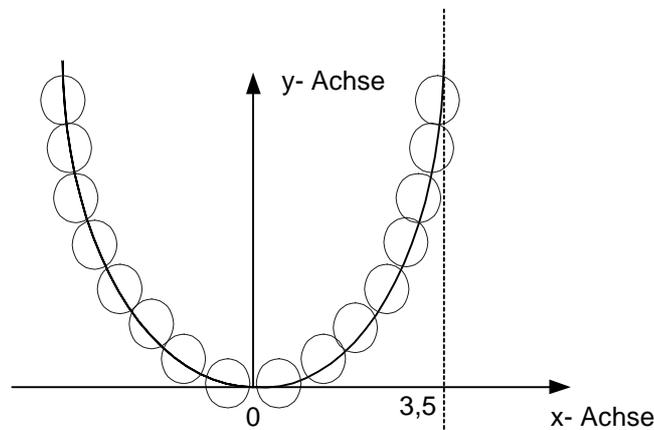


Abb. 33: Kieferform dargestellt durch eine Parabel.

Um jeden Punkt als Ortsvektor schreiben zu können und die Bogenlänge der Parabel zu bestimmen, kann die Funktion in Vektorschreibweise dargestellt werden.

$\vec{r}(x) = (x, \frac{1}{2}x^2)$ ist die Parabel, dargestellt in Vektorschreibweise.

Der Parabelscheitel liegt im Ursprung. Um die Bogenlänge zu ermitteln, muß diese nach x abgeleitet werden, und wir erhalten

$$\frac{\vec{r}(x)}{dx} = \left(1, \frac{1}{2} \cdot 2x\right) = (1, x).$$

Der Betrag der Ableitung ist

$$\left| \frac{\vec{r}(x)}{dx} \right| = \sqrt{1^2 + x^2} = \sqrt{1+x^2}$$

und damit haben wir das folgende Integral gefunden.

$$s(x_a, x_e) = \int_{x_a}^{x_e} \sqrt{1+x^2} dx$$

Eine Lösung ist in [1] zu finden, und wir erhalten:

$$s(x_a, x_e) = \int_{x_a}^{x_e} \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_{x_a}^{x_e}$$

Mit den eingesetzten Randwerten erhalten wir:

$$(31) \quad s(-3.5, 3.5) = \int_{-3.5}^{3.5} \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_{-3.5}^{3.5} \approx 14,7$$

Die Bogenlänge meines Kiefers beträgt etwa 14,7cm.

Weiterhin wird das Modell so vereinfacht, daß sich alle Zähne im gleichen Abstand befinden. Bei 16 Zähnen nimmt jeder Zahn einen Platz z von

$$z = \frac{s}{16} = \frac{14,7cm}{16} = 0,92cm$$

ein. Die Pfeiler der einzelnen Zähne sollen vereinfacht die Koordinaten des Mittelpunkts ihres Streckenabschnitts haben. Dabei ist der Parabelbogen achsensymmetrisch, so daß immer zwei Pfeiler die gleiche Bogenlänge zum Ursprung haben. Wenn Ober- und Unterkiefer durch dieselbe Parabelgleichung beschrieben werden, gilt das für alle vier Pfeiler.

Die x -Werte werden iterativ berechnet, da die Gleichung (31) nicht ohne weiteres nach x aufzulösen ist. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle 7 zusammengefaßt.

Region im FDI-Code	s in cm	x	y
11, 21, 31, 41	0,46	0,45; -0,45	0,10
12, 22, 32, 42	1,38	1,16; -1,16	0,67

13, 23, 33, 43	2,3	1,69; -1,69	1,42
14, 24, 34, 44	3,22	2,11; -2,11	2,24
15, 25, 35, 45	4,14	2,48; -2,48	3,08
16, 26, 36, 46	5,06	2,81; -2,81	3,94
17, 27, 37, 47	5,98	3,10; -3,10	4,81
18, 28, 38, 48	6,9	3,37; -3,37	5,69

Tabelle 7: Koordinaten der Pfeiler.

Durch dieses Modell ist eine Lokalisierung der Pfeiler und Prothesenelemente anhand einer x- und y-Koordinate möglich, so daß nun das Verhalten des Zahnhalteapparates analysiert werden kann.

3.3.4 Verhalten des Zahnhalteapparats und der Prothetik

Dabei wird in der Simulation die an meinem Kiefer gemessene Parabelgleichung verwendet. Bei Bedarf können aber individuelle Parameter gebraucht werden. Da die Anpassungen lediglich sehr geringe Auswirkungen auf die Ergebnisse haben, werden die Parameter nicht über den Eingabedialog aufgenommen, damit der Anwender nicht zu viele Eingaben tätigen muß.

Als zweite Vereinfachung haben alle Zähne die gleiche Größe und äquidistante Abstände, so daß der Parabelbogen innerhalb seines Definitionsbereiches gleichmäßig mit Zähnen besetzt ist. Die Berechnung erfolgt wie in den mathematischen Grundlagen beschrieben.

Aufgrund der in den Eingaben ermittelten Daten können folgende Prothesenkonfigurationen auftreten:

- Ein Pfeiler mit fester Brücke, die freie Enden haben kann.
- Zwei Pfeiler, überspannt mit einer fester Brücke, die freie Enden haben kann.
- Eine Gingivalprothese, die fest oder gelenkig mit dem Pfeiler verbunden ist.
- Jeder Pfeiler kann eine Konuskronen aus einem bestimmten Material haben.

Diese Konfigurationen erfordern mathematische und physikalische Lösungen, um die an den Pfeilern auftretenden Kräfte zu ermitteln, ihre Bewegungen zu berechnen und Aussagen über die Prothesenhaltbarkeit zu machen. Tabelle 8 zeigt die in der Simulation erfaßten und durch entsprechende Modelle gelösten Problemfälle mit den entsprechenden Lösungsformeln. Dabei interessieren nur die Kaukräfte, die extremale Pfeilerbelastungen hervorrufen. Um den Rechenaufwand gering zu halten, überlegen wir uns im Vorfeld diese Positionen und belasten nicht

alle Prothesenpunkte mit den dazugehörigen Kaukräften. An diesen Stellen sind in der Tabelle abwärtsgerichtete rote Vektorpfeile eingezeichnet. Die zur Auswertung benötigten Parameter sind in der Spalte „zu berechnende Werte“ angeführt. Dabei ist M_{\max} das auftretende Maximalmoment am Pfeiler, F_{\max} die maximale Extrusionskraft, i_{\max} die maximale Intrusionsstrecke, e_{\max} die maximale Extrusionsstrecke, L die Lösekraft der Konuskronen und $W(t)$ die gingivale Absenkung in Abhängigkeit von der Kauzeit.

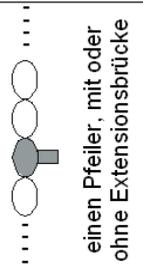
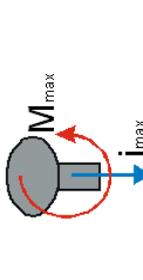
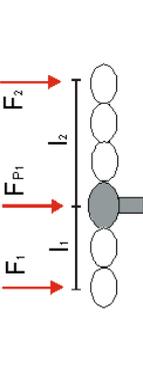
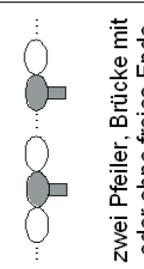
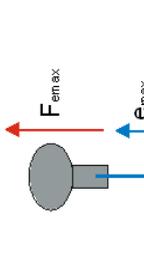
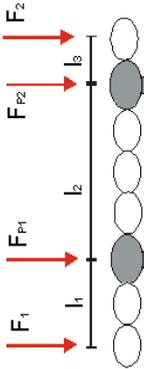
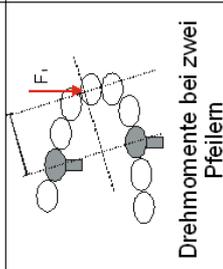
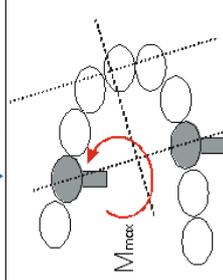
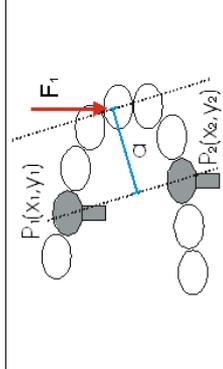
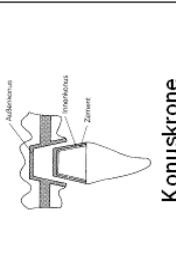
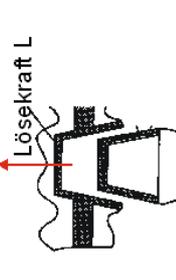
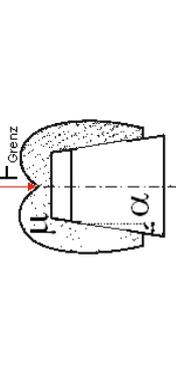
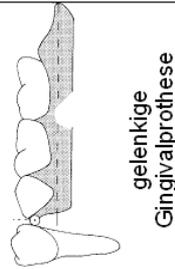
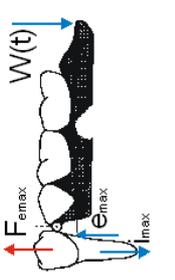
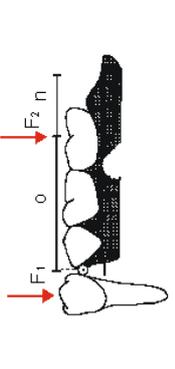
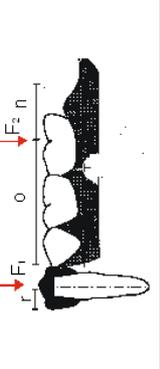
Modell für	zu berechnende Werte	Modellparameter	Herkunft der Modellparameter	Lösungsformeln
 <p>einen Pfeiler, mit oder ohne Extensionsbrücke</p>			<p>F_1, F_2, F_{P1} sind aus Kräftemodell, l_1, l_2 werden errechnet aus Eingabeparametern für Brückenspanne, c ist Federkonstante des Pfeilers.</p>	$i_{\max} = \frac{F_{\max}}{c}$ $F_{\max} = \max(F_1, F_2, F_{P1})$ $M_{\max} = \max(F_1 l_1, F_2 l_2)$
 <p>zwei Pfeiler, Brücke mit oder ohne freies Ende</p>			<p>F_1, F_2, F_{P1} und F_{P2} sind aus Kräftemodell, l_1, l_2 und l_3 werden errechnet aus Eingabeparametern für Brückenspanne und Pfeilerpositionen.</p>	<p>für den linken Pfeiler:</p> $F_{\max} = \max\left(\frac{F_1(l_1 + l_2)}{l_2}, F_{P1}\right) \quad i_{\max} = \frac{F_{\max}}{c}$ $F_{e\max} = \frac{F_2 \cdot l_3}{a}, \quad e_{\max} = \frac{F_{\max}}{c}$
 <p>Drehmomente bei zwei Pfeilern</p>			<p>F_1 ist aus Kräftemodell, a errechnet sich aus Parabelgleichung und Position der Pfeiler, P_1 und P_2 errechnen sich aus Pfeilerposition, Angriffspunkt von F_1 wird aus der Parabelgleichung gewonnen.</p>	<p>Die Gleichungen werden im Anschluss an die Tabelle hergeleitet.</p>
 <p>Konuskrone</p>			<p>$F_{Grenz} = F_{e\max}$ wenn zwei Pfeiler. $F_{Grenz} = F_{\max}$ wenn ein Pfeiler. $L = \frac{F_{Grenz}(\mu - \tan \alpha)}{\mu + \tan(\alpha)}$</p>	<p>$F_{Grenz} = F_{e\max}$ wenn zwei Pfeiler. $F_{Grenz} = F_{\max}$ wenn ein Pfeiler. $L = \frac{F_{Grenz}(\mu - \tan \alpha)}{\mu + \tan(\alpha)}$</p>
 <p>gelenkige Gingivalprothese</p>			<p>F_1 und F_2 sind aus Kräftemodell, o und n errechnen sich aus den Eingabewerten für okkludierten und nicht-okkludierten Bereich, E ist die Elastizität der Gingiva, $t_{ret} = 1,4s$ (Retardationszeit)</p>	$W(t) = 3 F_2 \frac{o}{E \cdot (o+n)} [1 - \exp(-\frac{t}{t_{ret}})]$ $i_{\max} = \frac{F_1}{c}, \quad F_{e\max} = \frac{o \cdot F_2}{2(o+n)}, \quad e_{\max} = \frac{F_{e\max}}{c}$ <p>$F_{e\max} = 0$, wenn $1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{o}{n+o} < 0$</p>
 <p>fest verankerte Gingivalprothese</p>			<p>F_1, F_2, o, n, E und t_{ret} wie bei gelenkiger Verbindung, r ist der Kronenradius und wird gleich dem Zahnradius gesetzt, k ist die Drehfederkonstante des Pfeilers.</p>	$W(t) = 3 F_2 \frac{o+r}{E \cdot (o+n) + \frac{3k}{(o+n)}} \cdot [1 - \exp(-\frac{t}{t_{ret}} \cdot (1 + \frac{3k}{(o+n)^2})]$

Tabelle 8: Übersicht der verwendeten Modelle.

Erläuterungen zu **Tabelle 8**:

Durch die Krümmung des Kiefers kommt es, wenn zwei Pfeiler eine Brücke tragen, zu Hebelkräften, die Drehmomente wie an freien Prothesenenden an einem Pfeiler erzeugen. Aus **Tabelle 8** entnehmen wir die folgende Abbildung, aus der wir den Abstand a herleiten.

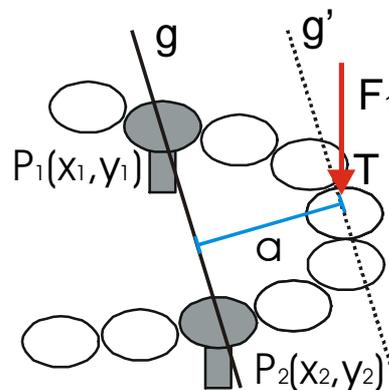


Abb. 34: Ermittlung der Hebelwirkung.

1. Ermittlung der Geradengleichung durch P_1 und P_2

$$g : y = \underbrace{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}_{:=m_g} + y_1 - \underbrace{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1}_{:=c_g}$$

2. Ermittlung des Parabelpunktes mit maximalem Abstand zu g .

Aus **Abb. 34** entnehmen wir, daß der gesuchte Abstand a , der Abstand der Geraden g von der zu g parallelen Geraden g' ist. g' ist die Tangente an die Parabel, die die gleiche Steigung wie g hat.

⇒ $m_{g'} = f'(x)$, dabei ist $m_{g'}$ die Steigung von g' , und die Gleichung hat eine eindeutige Lösung, so daß wir den Punkt T erhalten, der bei Belastung das größte Moment erzeugt. Seine Koordinaten sind:

$$T(m_g / \frac{1}{2} m_g^2)$$

An dieser Stelle wird mit der Kaukraft F belastet. Jetzt muß noch eine Hilfsgerade h gesucht werden, die orthogonal zu g' ist und mit g geschnitten werden muß, um den Schnittpunkt S von h und g zu bestimmen.

3. Bestimmung des Schnittpunktes S .

Die zu g und g' senkrechte Gerade h durch T hat die Steigung $m_h = -\frac{1}{m_g}$.

Ihre Gleichung ist:

$$h: y = -\frac{1}{m_g}x + \frac{1}{2}m_g^2 + 1$$

Wenn wir h mit g schneiden, erhalten wir den Punkt S.

$$S \left(\frac{\frac{1}{2}m_g^2 + 1 - c_g}{m_g + \frac{1}{m_g}} / -\frac{\frac{1}{2}m_g^2 + 1 - c_g}{m_g^2 + 1} \right)$$

4. Berechnung des Abstands von S und T.

Dabei nutzen wir den Satz des Pythagoras aus und erhalten:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}m_g^2 + 1 - c_g}{m_g + \frac{1}{m_g}} - m_g \right)^2 + \left(-\frac{\frac{1}{2}m_g^2 + 1 - c_g}{m_g^2 + 1} - \frac{1}{2}m_g^2 \right)^2}$$

Auf das Einsetzen der x- und y- Werte wird aufgrund der Übersichtlichkeit der Gleichung verzichtet.

Auf jeden Pfeiler wirkt somit ein Moment von:

$$M = \frac{1}{2}a \cdot F, \text{ wobei der Faktor } \frac{1}{2} \text{ durch die Symmetrie des Zweipfeilerproblems}$$

begründet ist.

Die Formel für eine Zweipfeilerbrücke mit freiem Ende wird anhand eines Beispiels erläutert.

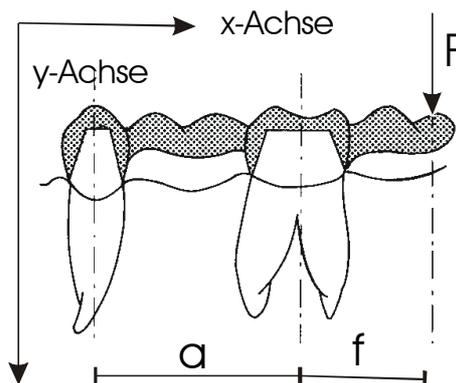


Abb. 35: Modell einer Freidendprothese.

Eine Zahnprothese sei auf zwei Pfeilern abgestützt. Der Abstand der Pfeiler sei a und die Länge des Freientendes f (vgl. **Abb. 35**).

In unserem vereinfachten Modell (vgl. **Abb. 36**) ist die Prothese ein starrer, unverformbarer Körper, der Zahnhalteapparat eine in y-Richtung angebrachte Feder. Die Pfeiler haben die Federkonstanten c_1 und c_2 , die mit den Kräften F_1 und F_2 wirken. Weiterhin seien die Federn gelenkig an die Prothese angekoppelt, die wie ein masseloser Balken behandelt wird. Reibungskräfte werden nicht berücksichtigt. Uns interessiert das Verhalten von Prothese und Zahnhalteapparat unter Belastung mit einer senkrechten, punktförmig angreifenden Kraft F am freien Ende.

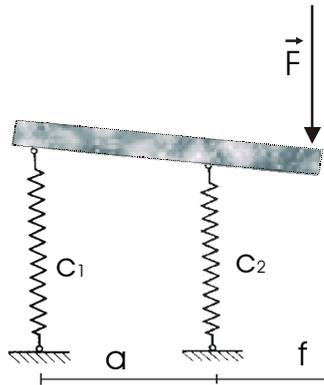


Abb. 36: Vereinfachtes mechanisches Modell einer belasteten Freiidprothese.

Da die Druckkraft durch die Idealisierung innerhalb des Modells keine Horizontalkomponente besitzt, ist die Kraftgleichung in x-Richtung erfüllt.

Betrachten wir also die Kräftegleichung für Vertikalkräfte.

Dabei sind die Kräfte in Richtung der y-Achse positiv und entgegengesetzt gerichtete negativ.

$$(32) \quad F + F_1 + F_2 = 0$$

Die Momentengleichung bezieht sich auf den linken Konus.

Für sie gilt:

$$F(a + f) + F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow (33) \quad F_2 = -\frac{F(a + f)}{a}. \text{ Die Feder drückt also der Kraft } F \text{ entgegen.}$$

Setze (33) in (32):

$$(34) \quad F_1 = F \frac{f}{a}$$

Das ist ein erstaunliches Ergebnis, denn die Kraft des linken Pfeilers hat die gleiche Richtung wie F , d.h. sie wurde gedehnt und nicht - wie man vermuten könnte - zusammengedrückt. Aus medizinischer Sicht können zu starke Hebekräfte den Halteapparat schädigen, denn das Parodontium ist von Natur aus auf Druckkräfte ausgelegt und nicht auf extrudierende Kräfte (Zugkräfte).

Ist die Prothese eine Konuskrone, so führen zu starke Kräfte zur Ablösung, so daß eine Schädigung des Halteapparates verhindert werden kann. Sie hat bei ungünstigen Kräftewirkungen eine schützende Funktion.

Auswirkungen der Prothesenkräfte auf die Pfeiler:

Dazu verwenden wir das Federgesetz aus (2.3.5.1) und müssen die wirkenden Kräfte unter Verwendung der Proportionalitätskonstanten in eine Wegstrecke umrechnen. Wir setzen für die Kaukraftbelastung eine Kraft $F=35N$ (Trockenfleisch) an, für $a=24mm$ und $f=16mm$.

Die Werte in (34) eingesetzt ergeben

$$F_1 = F \frac{f}{a} = 35N \frac{16mm}{24mm} = 23,33N \text{ (Zugkraft).}$$

F_1 und F in (32) eingesetzt liefern:

$$F_2 = -F - F_1 = -35N - 23,33N = -58,33N \text{ (Druckkraft)}$$

Die Belastung für den Pfeiler zwei ist größer als die wirkende Kraft des Bisses.

Die Formeln für die Pfeilerbewegungen erhalten wir aus **Tabelle 6** und damit ergibt sich für künstliche Pfeiler eine Bewegung von:

$$x_1 = \frac{F_1}{c_1} = \frac{23,33N}{35000 \frac{N}{mm}} = 0,66mm \text{ (Extrusion von Pfeiler 1),}$$

$$x_2 = \frac{F_2}{c_1} = \frac{-58,33N}{35000 \frac{N}{mm}} = -1,66mm \text{ (Intrusion von Pfeiler 2).}$$

Für natürliche Pfeiler seien nur die Ergebnisse angeführt. Die Berechnung erfolgt wie bei natürlichen Pfeilern unter Hinzunahme einer zweiten Proportionalitätskonstanten ab einer Kraft von 1N.

$$x_1 = 34,95mm \text{ (Extrusion)}$$

$$x_2 = -44,95mm \text{ (Intrusion)}$$

3.3.4.1 Vereinfachungen am Modell

Es seien nun die Vereinfachungen des verwendeten Modells in bezug zur Realität angeführt:

- Bei allen angeführten Prothesen wird vorausgesetzt, daß sie starr und nicht deformierbar sind. Diese Voraussetzung im Modell ist nicht mit der Realität vereinbar, liefert aber dennoch sinnvolle Ergebnisse.
- In den ersten zwei Modellen für einen und zwei Pfeiler bleibt die parabelförmige Krümmung des Zahnbogens unberücksichtigt. Diese verfälscht die Ergebnisse insofern, als daß die auftretenden Momente in beiden Fällen bei großen Brückenspannen höher errechnet werden als diese tatsächlich sind. Dies wirkt sich direkt auf die Extrusions- und Intrusionsbewegung aus, die dadurch ansteigen werden. Die ermittelten Werte sind somit die obere Schranke.
- Die Richtungen der an den Pfeilern auftretenden Drehmomente, die durch die Prothese erzeugt werden, bleiben unbeachtet, obwohl sie sich mit Hilfe einer Tangenten an die Parabel bestimmen lassen würden. Dazu wären aber richtungsabhängige Drehfederkonstanten nötig. Die im Modell verwendeten Konstanten sind aus [2] und an Schneidezähnen gemessen worden. Diese werden in **Tabelle 9** angeführt. Aufgrund mangelnder Literaturdaten werden diese für alle Pfeiler, unabhängig von ihrer Position, gesetzt. Im Klassenmodell sollen individuell gestaltete Parameter verankert werden.
- Bei der Konuskronen wird sowohl beim Fügen als auch beim Lösen eine starre Krone vorausgesetzt. Die verwendeten Materialkonstanten sind in **Tabelle 10** angegeben.
- Die Herleitung der Formel für die gingival getragene Prothesenbewegung benötigt eine Elastizitätskonstante. Diese war nicht in der Literatur angegeben. Unter Zuhilfenahme von bekannten Prothesemaßen mit dazugehöriger Absenkung wurde diese abgeschätzt und soll in der Simulation verwendet werden. Sie wird festgesetzt auf $E=5000\mu\text{m/N}$
- Für die Retardationszeit wird $t_{\text{ret}}=1,4\text{s}$ gesetzt, und der Kauvorgang soll acht Sekunden betragen.

Bereich	natürlicher Pfeiler	künstlicher Pfeiler	Implantat
$M \leq 8 \text{ Nmm}$	$k = 6,5 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$	$k = 6,5 \cdot 10^2 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$
$M > 8 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$	$k = 5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$

Tabelle 9: Verwendete Drehfederkonstanten für verschiedene Pfeiler.

Werkstoffpaarung	Haftungsnummer μ
Stahl – Stahl	0,15
Stahl – Grauguß	0,20
Holz – Holz	0,70
Gold – Gold	0,10
Dentallegierung – Dentallegierung	0,20
Gold – Stahl	0,13

Tabelle 10: Haftungsnummern einiger Materialpaarungen aus [2].

3.4 Anwendungsfall „Berechnung und Simulation“

Anwendungsfälle beschreiben grundsätzlich die Aktivitäten eines Systems aus Sicht seiner Akteure, d.h. vom Anwender durchgeführte Tätigkeiten führen zu für den Anwender sichtbaren Ergebnissen. Das folgende Anwendungsfalldiagramm zeigt die Aktivitäten, die zur Bestimmung der Ausgabedaten nötig sind. Bei späteren Punkten wurden Erläuterungen hinzugefügt, die normalerweise nicht in Anwendungsfalldiagrammen wiederzufinden sind, denn sie schildern systeminterne Abläufe, die nach strikter UML-Spezifikation dort nicht stehen dürften. Dennoch tragen sie zur allgemeinen Verständlichkeit des Systemablaufs bei, so daß ich diese Abweichung vom UML-Standard vertreten kann. Im folgenden sei der zweite Anwendungsfall „Berechnung und Simulation“ angeführt.

Af2	Berechnung und Simulation
Kurzbeschreibung	Auf Basis der Eingabe, d.h. der ermittelten Prothesen und Gebißdaten, wird eine Simulation durchgeführt, die Kräfte auf und Bewegungen der Zähne beschreibt.
Beteiligte Akteure	Zahnarzt / Zahnärztin
Auslöser, Vorbedingungen	Der Zahnarzt bzw. die Zahnärztin hat Gebiß- und Prothesendaten erfaßt.
Ergebnisse, Nachbedingungen	Kräfteverteilung, Zahn- und Prothesenbewegungen.
Dialoge	Ausgabefenster mit allen Ergebnissen.
Ablauf	
1.	Datenherkunft prüfen: Stammen die Daten aus dem zuvor durchlaufenen Eingabeassistenten, weiter bei 3.

1.1	Eingabedatei einlesen: Der Arzt bestimmt den Pfad der Datei und öffnet diese.
1.2.	Datei auf individuelle Gebißparameter überprüfen: Sind individuelle Kräfteverteilungen oder spezielle Kieferformen spezifiziert, wird ein spezielles Gebiß modelliert; ansonsten wird ein Standardgebiß erzeugt.
2.	Gebißdaten setzen:
2.1	Pfeilerdaten auf Plausibilität prüfen: Dabei wird geprüft, ob die spezifizierten Pfeiler gültige FDI-Codes haben. Ist das nicht der Fall, wird die Simulation abgebrochen und eine Fehlermeldung ausgegeben.
2.2	Prothesenelemente auf Plausibilität prüfen: Die Prothesenelemente und Pfeiler werden verglichen. Dabei muß sich eine gültige Prothese ergeben, d.h. es dürfen keine Elemente innerhalb einer Spanne fehlen und keine gleichzeitig mesial und distal unverankerten Elemente auftreten. Gingivalelemente müssen an einen Pfeiler anschließen. Innerhalb eines okkludierten Bereichs dürfen keine nicht okkludierten Elemente vorhanden sein (und umgekehrt). Wird einer dieser Punkte verletzt, führt das zum Abbruch der Simulation, und eine Fehlermeldung wird ausgegeben.
2.3	Pfeiler- und Prothesedaten im Gebiß setzen: Die Pfeiler und Prothesenelemente werden im Gebiß gesetzt.
3.	Berechnungen durchführen:
3.1	Gingivalprothese ermitteln: Das Gebiß wird auf das Vorhandensein einer Gingivalprothese überprüft.
3.2	Entscheidung: Wenn keine Gingivalprothese vorhanden, weiter bei 3.4.
3.3	Gingivalberechnungen durchführen:
3.3.1	Wurzelposition ermitteln: Es wird die Region ermittelt, in der die die Gingivalprothese tragende Wurzel liegt.
3.3.2	Okkludierten Bereich ermitteln: Die Breiten aller zusammenhängenden, okkludierten Prothesenelemente werden aufsummiert und festgehalten.
3.3.3	Maximale Kraft auf okkludierten Bereich ermitteln: Das pfeilerentfernteste okkludierte Prothesenelement wird, mit der dem Bereich zugeordneten Kraft, belastet und der Wert festgehalten.

3.3.4	Nicht okkludierten Bereich ermitteln: Die Breiten aller zusammenhängenden, nicht- okkludierten Prothesenelemente werden aufsummiert und festgehalten.
3.3.5	Sattellänge ermitteln: Die Gesamtlänge des Prothesensattels wird berechnet und festgehalten.
3.3.6	Verankerung ermitteln:
3.3.7	Entscheidung: Wenn in 3.3.6 feste Verankerung ermittelt, weiter bei 3.3.9
3.3.8	Berechnung für Gingivalprothese mit Halteklammer oder Drehgelenk durchführen:
3.3.8.1	Prothesenbewegung berechnen: Die Prothesenbewegung wird mit der Lösung der Differentialgleichung einer losen Verankerung, unter Hinzunahme der festgehaltenen Werte aus der Sattelbestimmung, berechnet.
3.3.8.2	Wurzelkräfte berechnen: Die indirekten Belastungen durch den Prothesesattel und die direkten Belastungen des Pfeilers werden durch Modellgleichungen berechnet.
3.3.8.3	Wurzelbewegung berechnen: Die Bewegungen werden aus den resultierenden Kräften berechnet.
3.3.8.4	Ergebnisse in Wurzel setzen: Die Ergebnisse werden in der Wurzel gespeichert.
3.3.9	Berechnungen für fest verbundene Gingivalprothese durchführen: Die Berechnungen werden nur durchgeführt, wenn in Schritt 3.3.7 eine feste Verankerung ermittelt wurde.
3.9.9.1	Berechnungen bei fest verankerter Gingivalprothese durchführen:
3.9.9.2	Prothesenbewegung bei fester Verankerung berechnen: Die Prothesenbewegung wird mit der Lösung der Differentialgleichung für die feste Verankerung, unter Hinzunahme der festgehaltenen Werte aus der Sattelbestimmung, berechnet.
3.3.9.3	Wurzelkräfte berechnen: Die indirekten Belastungen durch den Prothesesattel und die direkten Belastungen des Pfeilers werden durch Modellgleichungen berechnet.
3.3.9.4	Wurzelmomente berechnen: Die Drehmomente werden aus der okkludierten Sattellänge und der festgehaltenen Belastungskraft berechnet.
3.3.9.5	Wurzelbewegung berechnen: Die Bewegungen werden aus den resultierenden Kräften berechnet.
3.3.9.6	Ergebnisse in Wurzel setzen: Die Ergebnisse werden in der Wurzel gespeichert.

3.4	Pfeilergetragene Prothesenberechnungen durchführen: Wurde in Schritt 3.2 eine Gingivalprothese ermittelt, weiter bei 3.5.
3.4.1	Wurzelzahl ermitteln: Die Anzahl der Wurzeln im Kiefer wird bestimmt.
3.4.2	Wurzelposition ermitteln: Es werden alle Regionen ermittelt, in denen Wurzeln liegen und die zu einer festen Prothese gehören. Die Positionen werden festgehalten.
3.4.3	Kräfte in Wurzelregion ermitteln: Die in den Wurzelregionen auftretenden Kräfte werden ermittelt und festgehalten.
3.4.4	Prothesenlänge berechnen: Jedes Prothesenelement befindet sich in einer Region, der über die Bogenlänge der Parabel eine Breite zugeordnet ist. Die einzelnen Längen werden aufsummiert.
3.4.5	Kräfte auf Prothesenränder ermitteln: Die an den Prothesenrändern wirkenden Kräfte werden aus der entsprechenden Region ausgelesen und festgehalten.
3.4.6	Maximales Moment berechnen und in Wurzel setzen: Unter Verwendung der Prothesenlänge und der Pfeilerposition werden die auftretenden Momente berechnet. Bei zwei Pfeilern wird das Hebelmoment, das aufgrund einer zweidimensionalen Betrachtung entsteht, errechnet. Die errechneten Werte werden in der Wurzel gespeichert.
3.4.7	Extrusionskraft berechnen und in Wurzel setzen: Diese Kraft tritt nur bei zwei Pfeilern mit Extensionsbrücke auf und wird unter Verwendung der Prothesenlänge und der festgehaltenen Kräfte auf die Prothesenränder errechnet. Die Ergebnisse werden in den entsprechenden Wurzel festgehalten.
3.4.8	Maximale Intrusionskraft berechnen und in Wurzel setzen: Die direkten Belastungen des Pfeilers und die indirekten Belastungen durch die Prothese werden durch Modellgleichungen berechnet und in der Wurzel gespeichert.
3.4.9	Wurzelbewegung berechnen und in Wurzel setzen: Die Bewegungen werden aus den resultierenden Kräften berechnet und in der Wurzel festgehalten.
3.5	Konuskronen ermitteln:
3.6	Entscheidung: Wenn keine Konuskrone vorhanden, weiter bei 4.
3.7	Konuskrone berechnen:

3.7.1	Lösekraft berechnen: Die Maximalkraft, die auf die Wurzel wirkt, wird ausgelesen, und mit der entsprechenden Modellgleichung wird die Lösekraft errechnet.
3.7.2	Lösekraft in Krone setzen: Die Lösekraft wird als Eigenschaft der Krone festgehalten.
3.7.3	Idealen Konuswinkel berechnen: Aus den zugrundeliegenden Kräften auf die Konuskrone und dem allgemeingültigen Richtwert für Lösekräfte bei Konuskronen wird der ideale Konuswinkel errechnet.
3.7.4	Idealen Konuswinkel in Krone setzen: Der ideale Konuswinkel wird als Eigenschaft der Krone festgehalten.
4.	Datenausgabe generieren:
4.1	Ausgabe Lösekräfte:
4.1.1	Bei allen Konuskronen Lösekräfte mit Grenzwerten vergleichen: Mit vorher festgelegten Grenzwerten werden die errechneten Ergebnisse verglichen und die daraus resultierenden Schlüsse gezogen.
4.1.2	Für alle Konuskronen Ausgabe Lösekräfte generieren: Im Ausgabefenster wird der Bereich Konuskronen erzeugt.
4.2	Ausgabe Wurzelkräfte:
4.2.1	Für alle Wurzeln Wurzelkräfte mit Grenzwerten vergleichen: Mit vorher festgelegten Grenzwerten werden die errechneten Ergebnisse verglichen und die daraus resultierenden Schlüsse gezogen.
4.2.2	Für alle Wurzeln Ausgabe Wurzelkräfte generieren: Im Ausgabefenster wird der Bereich Wurzelkräfte erzeugt.
4.3	Ausgabe Wurzelmomente: Mit vorher festgelegten Grenzwerten werden die errechneten Ergebnisse verglichen und die daraus resultierenden Schlüsse gezogen.
4.3.1	Für alle Wurzeln Drehmomente mit Grenzwerten vergleichen:
4.3.2	Für alle Wurzeln Ausgabe Wurzelmomente generieren: Im Ausgabefenster wird der Bereich Wurzelmomente erzeugt.
4.4	Gingivalprothese ermitteln:
4.5	Entscheidung : Wenn keine Gingivalprothese in Schritt 4.4 ermittelt wurde, weiter bei 5.
4.6	Ausgabe Gingivalprothese:

4.6.1	Gingivalbewegung mit Grenzwerten vergleichen: Mit vorher festgelegten Grenzwerten werden die errechneten Ergebnisse verglichen und die daraus resultierenden Schlüsse gezogen.
4.6.2	Ausgabe Gingivalbewegung generieren: Im Ausgabefenster wird der Bereich Wurzelmomente erzeugt.
5.	Alle Ergebnisse im Fenster darstellen: Das Ausgabefenster wird aufgebaut und die Ergebnisse werden dargestellt.

3.5 Interpretation der Ausgabeparameter

Für die Ausgabeparameter müssen Grenzwerte gefunden werden, anhand derer Prothesenmodelle verworfen bzw. angenommen werden können. Diese Grenzwerte sind in der folgenden Tabelle angeführt:

	kritischer Wert	Grenzwert überschritten
Extrusionskräfte	>0 N	> 12 N
Intrusionskräfte	keine Grenzwerte bekannt	keine Grenzwerte bekannt
Moment bei Zweipfeilerbrücke	5 Ncm	10 Ncm
Momente durch freies Ende	25 Ncm	40 Ncm
Lösekräfte für Konusprothese	<6 N	>10 N oder <3 N
Extrusionskräfte-Lösekräfte	> 0 N	>5 N
Gingivalbewegung	>150 mm	> 200 mm

Tabelle 11: Festgesetzte Grenzwerte im Modell.

In der Gesamtübersicht sollen die überschrittenen Grenzwerte farblich gekennzeichnet werden. Befinden sich die Werte in einem kritischen Bereich, sollen sie gelb, bei Überschreitung der Grenzwerte rot hinterlegt werden. Zusätzlich soll ein Begründungstext ausgegeben werden, so daß dem Arzt die Möglichkeit gegeben wird, eine verbesserte Planung zu erstellen und zu berechnen. Wenn eine Korrektur durch die Anpassung des Konuswinkels möglich ist, wird der verbesserte Konuswinkel angegeben und gleichzeitig werden die damit errechneten Werte dargestellt.

Begründung der festgesetzten Werte:

- Das Vorhandensein von Extrusionskräften führt zur Lockerung der Verankerung von Wurzel und Parodontium. Nach allgemeingültigen Erkenntnissen liegt der Grenzwert bei 10 N. Da in der Simulation mit Maximalkräften operiert wird, ist eine Erhöhung auf 12 N sinnvoll und vertretbar.
- Die Auswirkungen von Intrusionskräften sind stark abhängig von der Pfeilerposition. Da die Werte aus der Literatur sehr hoch angesetzt sind, würden bei gesunden Wurzeln die Grenzwerte nie überschritten werden. Für geschädigte Wurzeln und Implantate fehlten leider Angaben in der Literatur, so daß zur Zeit noch keine Grenzwerte festgesetzt werden können.
- Konuskronen dürfen sich nicht von selbst lösen und müssen einen gewissen Halt haben, so daß [2] eine Mindestkraft von 6 N empfiehlt. Ab 10 N verursacht der Lösevorgang kritische Extrusionskräfte, außerdem kann dann ein problemloses Lösen der Krone durch den Patienten nicht mehr möglich sein.
- Sind die Extrusionskräfte größer als die Lösekräfte, so kann es während des Kauens zu einer Ablösung des Außenkonus kommen. Da die Kaukräfte sehr hoch angesetzt sind, führt der Bereich zwischen 0N und 5N noch nicht zu einer Überschreitung der Grenzwerte.

Zur Gingivalbewegung sei erwähnt, daß keine Grenzwerte in der mir zur Verfügung stehenden Literatur angegeben sind. Die Grenzwerte sind aus angegebenen Prothesenkonfigurationen errechnet worden, die qualitativ als gut, bzw. als schlecht gekennzeichnet waren. Dadurch ist die Ausbeute der Ergebnisse bei der Ginivalprothese vergleichbar gering.

3.6 Fachlexikon

Während der Anwendungsfallanalyse und des Modellaufbaus ist die Konfrontation mit Fachbegriffen unabdingbar. Oftmals sind Begriffe innerhalb eines Fachgebietes unklar definiert, woraus bei der technischen Umsetzung Verständigungsprobleme auftreten können und Projekte unnötig verzögert werden. Deshalb sollten an dieser Stelle der Implementation Fachbegriffe verbindlich - sowohl für Anwenderseite, als auch für Entwicklerseite - definiert werden, damit rechtzeitig Anpassungen vorgenommen werden können und nicht ein korrekt funktionierendes, aber letztendlich das falsche System implementiert wird.

Während dieses Projektes sind bislang folgende mehrdeutige Begriffe aufgetreten:

- Der Begriff „Krone“ kann sowohl im Sinne einer natürlichen Zahnkrone als auch einer Ersatzkrone verstanden werden.
- Der Begriff „Zahn“ kann sich nur auf die Krone beziehen oder auf Krone und Wurzel.
- Der Begriff „Pfeiler“ kann sich entweder auf einen ganzen Zahn, also Krone und Wurzel beziehen, der eine Brückenkonstruktion trägt oder nur auf die Wurzel.

Hier nun das im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstellte Fachlexikon:

Brücke	Gesamtheit aller Komponenten einer Brücke. Dazu gehören der Brückenanker, die Brückenzwischenglieder sowie zur Befestigung eingebrachte Implantate.
Brückenanker	Ersatzkrone, an der mesial und/oder distal Brückenglieder befestigt sind.
Brückenglied / Brücken- zwischen- glied	Ersatzkrone, die mesial und/ oder distal befestigt ist. Dabei ist sie nicht apikal an einem Pfeiler angebracht.
Brückenpfeiler	Pfeiler, an dem ein Brückenanker befestigt ist.
Brückenspanne	Eine Brückenspanne besteht aus zwei Brückenankern und den zwischen ihnen liegenden Brückengliedern.
Extensions- brücke	Brücke, bei der mindestens ein Brückenglied nur mesial oder nur distal befestigt ist.
FDI- Code	siehe Zahnschema
Gingivalprothese	Vom Parodontium getragener Zahnersatz.
Implantat	siehe Wurzel (künstlich).
Konuskrone	Ein Doppelkronensystem, bestehend aus einem einzementierten Hohlkegelstumpf und einem Außenkonus, ebenfalls ein Hohlkegelstumpf, dessen Innenwand im unverformten Zustand exakt auf den Innenkonus paßt und den in den Zahnersatz fest integriert ist.

Krone (allgemein)	Der Teil eines Zahnes, der in der Mundhöhle sichtbar ist. Eine Krone kann künstlich, teilweise künstlich oder natürlich sein. Sie hat eine Kronennummer, die der FDI-Kennzeichnung des Zahnes entspricht, den sie gemeinsam mit ihrer Wurzel bildet.
Krone (künstlich)	Eine künstliche Krone (Ersatzkrone) kann mesial und/oder distal an künstlichen/ teilweise künstlichen Kronen und apikal an einem natürlichen/künstlichen Pfeiler befestigt sein. Mindestens eine dieser Befestigungen muß bestehen.
Krone (natürlich)	Eine natürliche Krone ist apikal mit einer natürlichen Wurzel verbunden. Es existieren keine Verbindungen zu benachbarten Kronen.
Krone (teilweise künstlich)	Eine teilweise künstliche Krone ist apikal mit einem natürlichen Pfeiler verbunden. Mesial und/oder distal kann sie mit künstlichen/teilweise künstlichen Kronen verbunden sein.
Nicht okkludierter Bereich	Unbezahnter Teil einer Gingivalprothese.
Oberkiefer	Teil des Gesichtsschädels, in dem die Zähne des oberen Zahnbogens befestigt sind.
Okkludierter Bereich	Bezahnter Teil einer Gingivalprothese.
Pfeiler	Wurzel, an der eine Ersatzkrone befestigt werden soll. Dabei kann es sich um eine natürliche Wurzel oder um ein Implantat handeln.
Region	Stelle auf dem Kiefer, die einem Zahn vorbehalten ist. Ober- und Unterkiefer haben jeweils 16 Regionen. Jede Region hat eine dreistellige Nummer. Diese setzt sich zusammen aus der FDI-Kennzeichnung des Zahnes, der sich im Regelfall an der betreffenden Stelle befindet, sowie einer vorangestellten Null (z.B. „011“). Grund für die Unterscheidung zwischen Regionen und Zähnen ist die Tatsache, daß Zähne

	nicht immer an ihrer Standardposition sitzen. Beispiel: Der Zahn 12 fehlt und durch Lückenschluß sitzt der Zahn 13 in der Region 012.
Unterkiefer	Teil des Gesichtsschädels, in dem die Zähne des unteren Zahnbogens befestigt sind.
Wurzel (allgemein)	Der Teil eines Zahnes, mit dem dieser im Kiefer befestigt ist. Der Bereich des Zahnhalses wird hier der Wurzel zugeordnet. Eine Wurzel kann künstlich oder natürlich sein und ist koronal mit einer Krone verbunden.
Wurzel (künstlich)	Eine künstliche Wurzel (Implantat) wird operativ in den Kiefer eingebracht und ist mit diesem starr verbunden. Es existiert kein Zahnhalteapparat. Die künstliche Wurzel ist koronal mit einer künstlichen Krone verbunden.
Wurzel (natürlich)	Eine natürliche Wurzel kann koronal mit einer künstlichen, einer teilweise künstlichen oder einer natürlichen Krone verbunden sein. Mit dem Kiefer ist sie über einen Zahnhalteapparat verbunden.
Zahn	Gebilde, bestehend aus einer Krone und einer Wurzel.
Zahnschema	Das Zahnschema dient der eindeutigen Kennzeichnung der Zähne. Am weitesten verbreitet ist heute das internationale Zahnschema der FDI (Fédération Dentaire Internationale) aus dem Jahr 1970, wonach jeder Zahn mit einer zweistelligen Nummer gekennzeichnet wird. Die erste Ziffer bezeichnet den Quadranten (Bleibendes Gebiß 1-4, Milchgebiß 5-8), wobei die Numerierung im Befund aus Sicht des Behandlers von links oben im Uhrzeigersinn nach rechts unten verläuft. Dabei ist der rechte Oberkiefer des Patienten aus seiner Sicht der erste Quadrant und die Numerierung erfolgt gegen den Uhrzeiger.

Tabelle 12: Fachlexikon, verwendet zum Teil Definitionen von [8].

3.7 Aktivitätenmodellierung

Die Aktivitätsmodellierung dient der detaillierten Beschreibung der Systemabläufe und leitet über zur Designphase. Dabei können auch die Anwendungsfallbeschreibungen komplettiert werden.

3.7.1 Aktivitätsmodellierung Anwendungsfall „Daten erfassen“

Das erste Aktivitätsdiagramm gibt eine Übersicht über den Anwendungsfall Datenerfassung. In den folgenden Diagrammen sind Einzelheiten an ausgewählten Fenstern in ihren Feinheiten beschrieben, um allgemeingültige Ableitungen für die restliche Dateneingabe machen zu können und eine Orientierung bei der Implementierung zu erhalten.

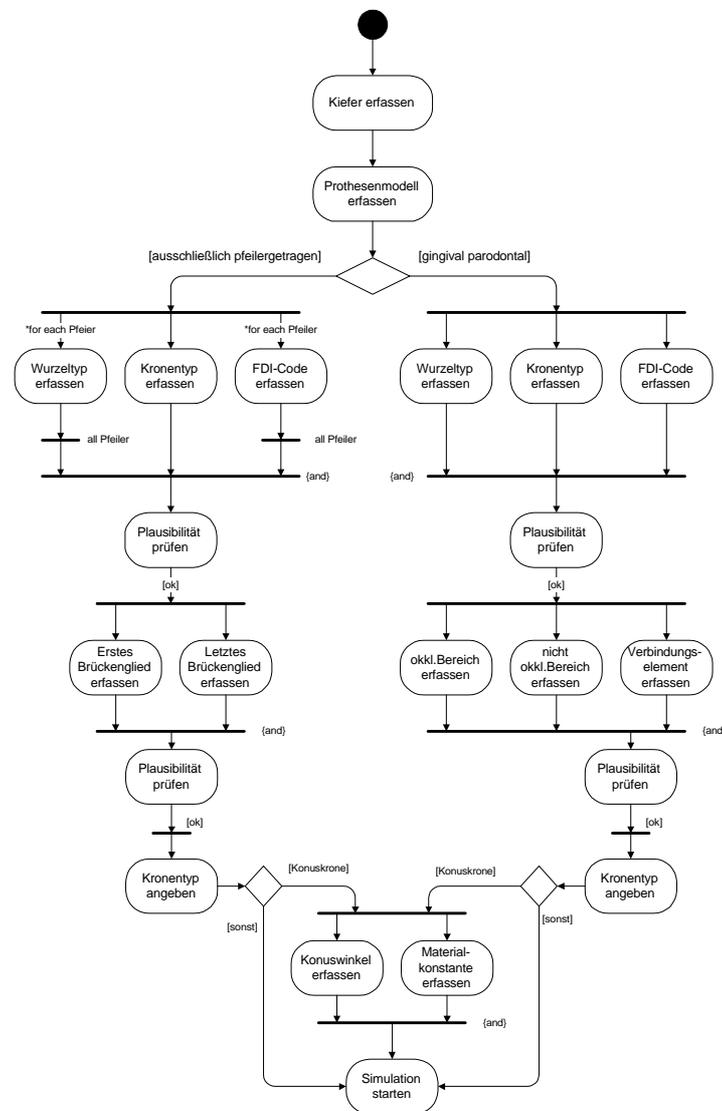


Abb. 37: Übersicht der Aktivitäten zu Anwendungsfall eins.

Das folgende Aktivitätsdiagramm ist exemplarisch für die Plausibilitätsprüfung angeführt. Es zeigt im Detail die Aktivitäten der Plausibilitätsprüfung nach der Spezifizierung der Brückenspanne.

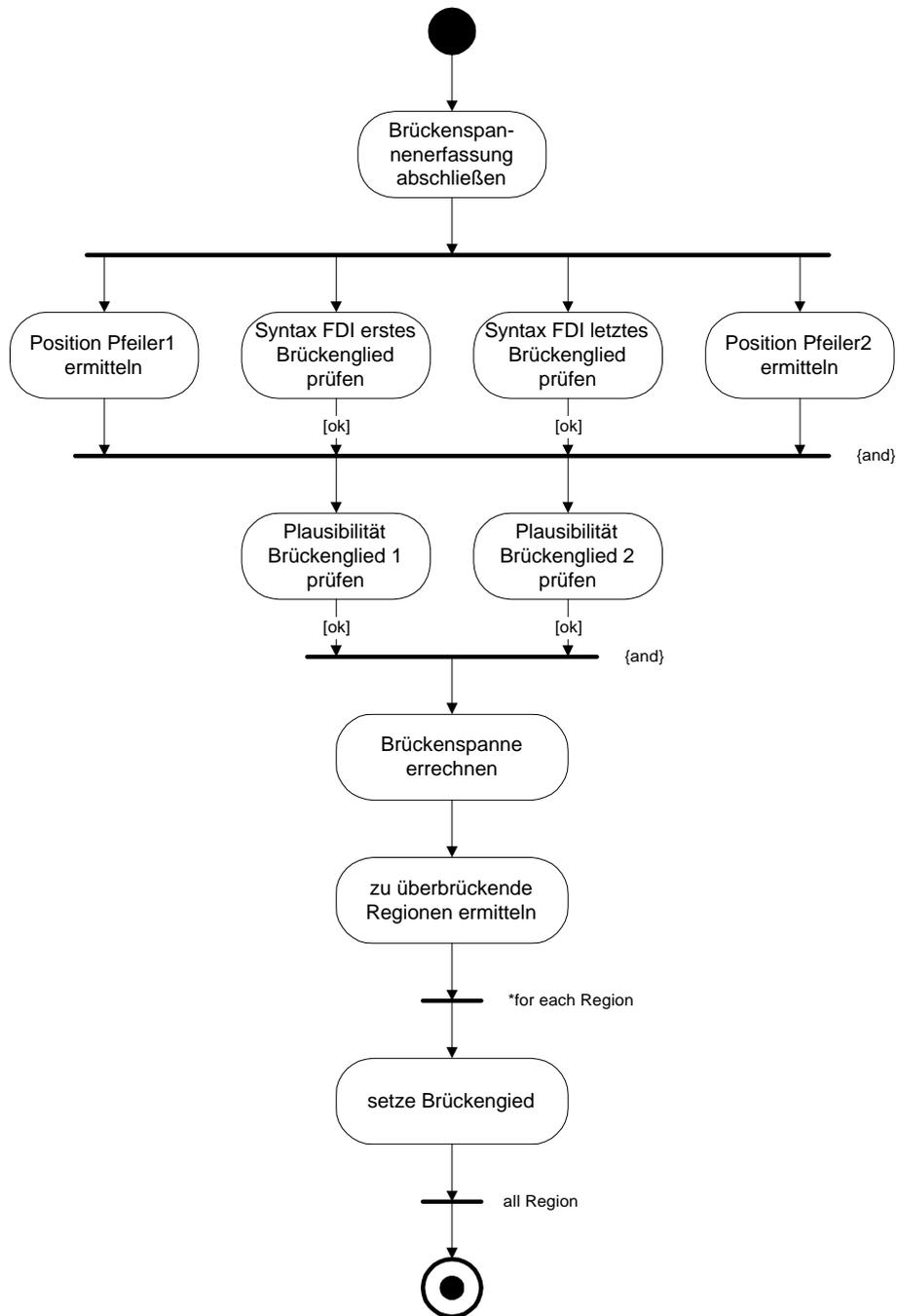


Abb. 38: Aktivitätsdiagramm der Plausibilitätsprüfung.

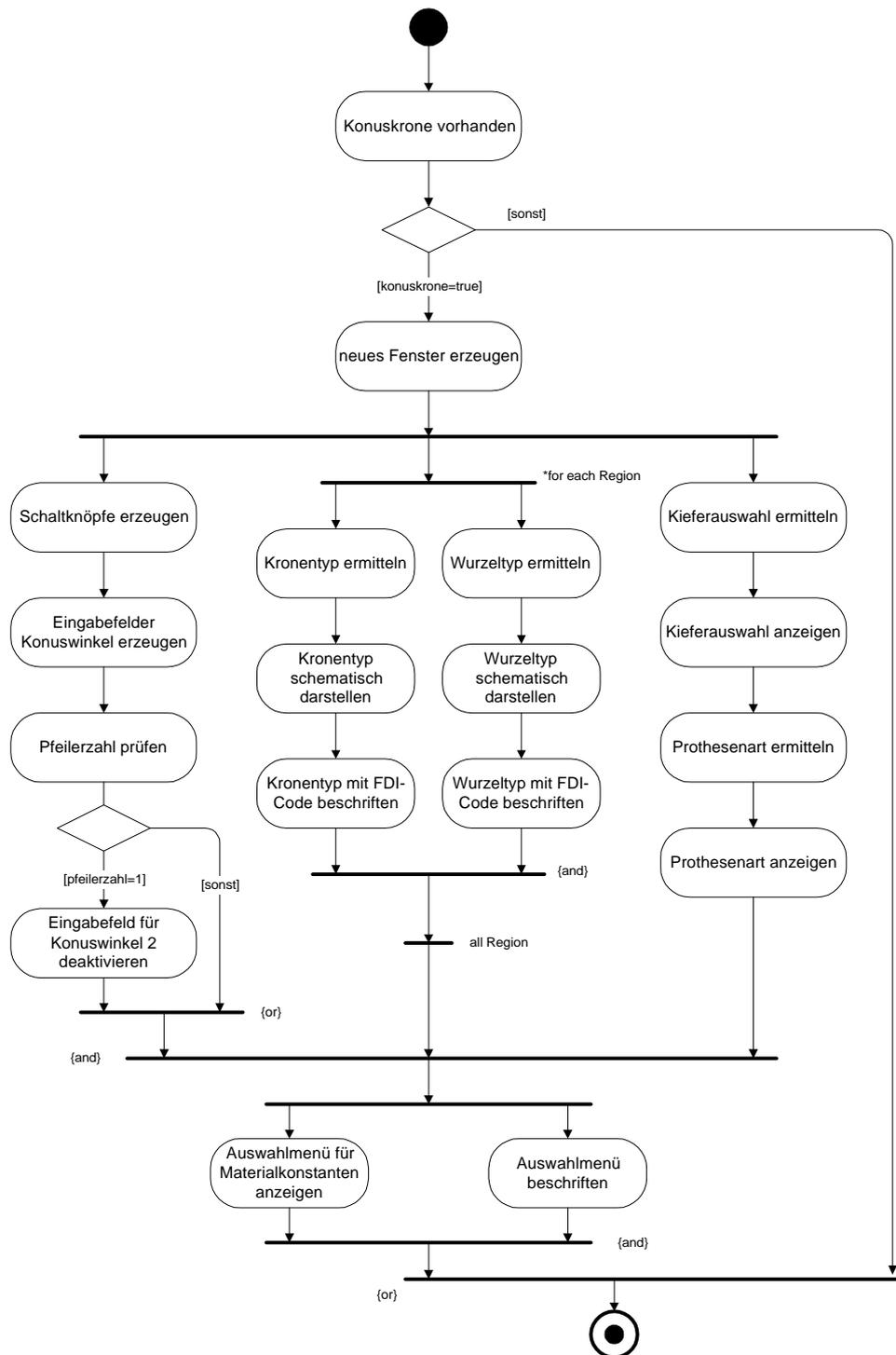


Abb. 39: Aktivitätsdiagramm zur Beschreibung des Fensteraufbaus.

In Abb. 39 ist exemplarisch für alle Fenster die Aktivität bei ihrer Erstellung angeführt. Dabei sind die Abläufe zusammenfassend dargestellt. Bei der Implementierung sind aber noch weitere, in der Abbildung nicht aufgeführte Einzelheiten zu erwarten, auf die aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird.

Weitere Aktivitätsdiagramme werden für den Anwendungsfall Gebißdaten- und Prothesenerfassung nicht aufgeführt, denn sie ähneln den exemplarisch ange-

fürten Diagrammen vom Aufbau her und würden nur unwesentlich zum Gesamtverständnis beitragen.

3.7.2 Aktivitätsmodellierung Anwendungsfall „Berechnung und Simulation“

Nachfolgend sind die Aktivitätsdiagramme zum Anwendungsfall „Berechnung und Simulation“ angegeben.



Abb. 40: Aktivitätsdiagramm zur Beschreibung des Dateneinlesevorgangs.

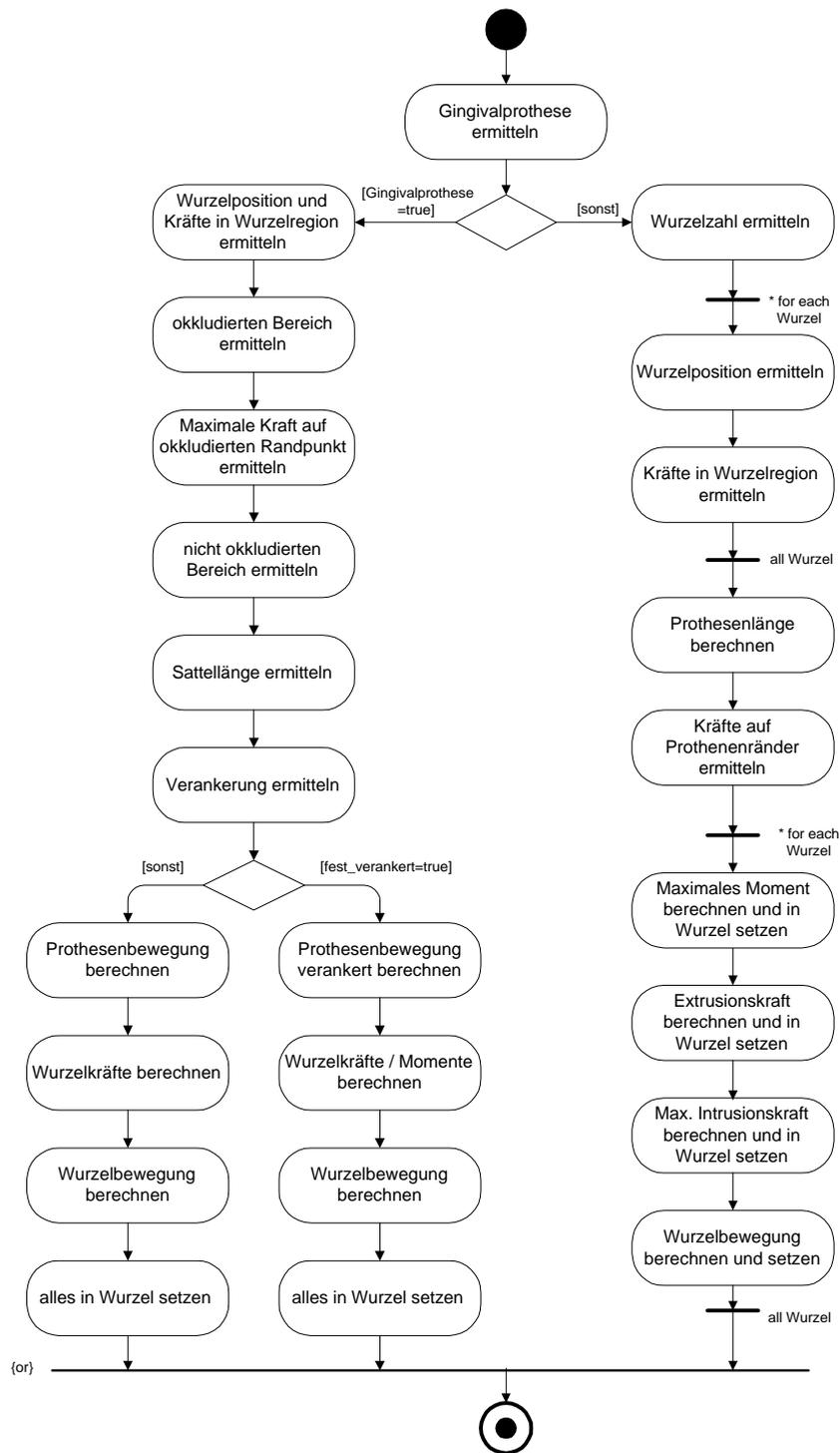


Abb. 41: Aktivitätsdiagramm zur Datenberechnung.

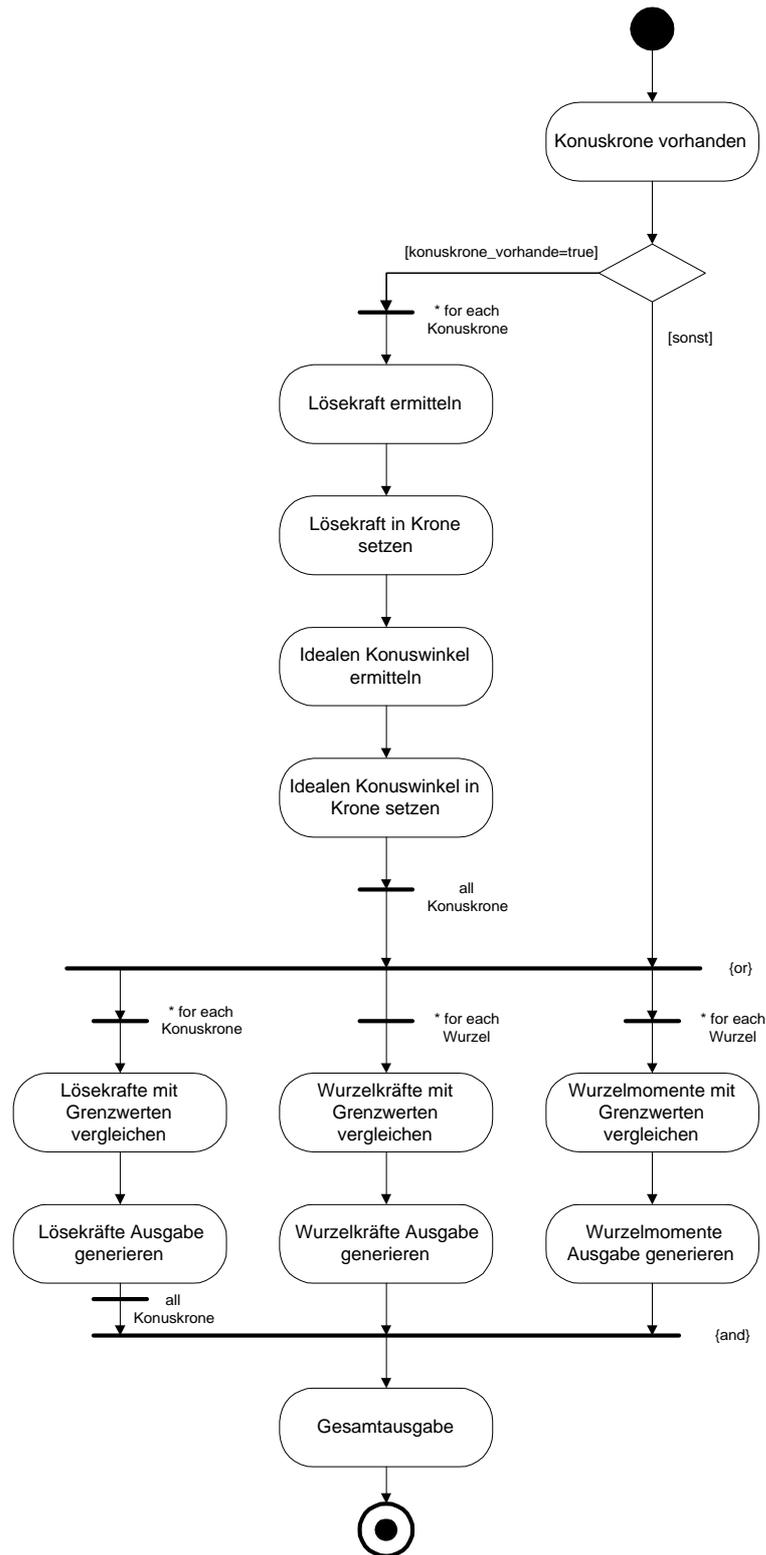


Abb. 42: Aktivitätsdiagramm zur Datenausgabe.

3.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel konnten die Anwendungsfälle „Gebiß und Prothesendaten erfassen“ und „Berechnung und Simulation“ erfolgreich identifiziert werden.

Um eine computergerechte Simulation der Anwendungsfälle durchzuführen, wurden folgende Modelle spezifiziert und mathematisch gelöst:

- Ein Kräftemodell, um Kaukräfte zu erfassen,
- ein Kräftemodell, um Pfeilerbewegungen zu erhalten,
- Drehmomtenmodelle, um auftretende Drehmomente an den Pfeilern zu erfassen,
- ein Kräftemodell, um die Lösekräfte bei Konuskronen zu erhalten,
- ein Bewegungsmodell für Gingivalprothesen.

Dazu wurden folgende Konstanten festgesetzt:

- Konstanten für Kaukräfte,
- Federkonstanten der Pfeiler,
- Drehfederkonstanten der Pfeiler,
- Retardationszeit der Gingiva,
- Viskoelastizität der Gingiva,
- Materialkonstanten für Konuskronen.

Durch Aktivitätsdiagramme wurden die verschiedenen Ablaufmöglichkeiten der Simulation ausgedrückt, so daß jetzt die Implementierungsphase eingeleitet werden kann.

4 Entwicklung und Design des Prototypen

Anhand der ermittelten Anwendungsfälle, für die mathematische und biomechanische Modelle hergeleitet wurden, konnte ein schlüssiges Gesamtkonzept zur Simulationsberechnung spezifiziert werden. Die nötigen Aktivitäten zur Durchführung sind in den dazugehörigen Diagrammen festgehalten worden.

In den folgenden Abschnitten erfolgt schrittweise die Umsetzung zu einem lauffähigen Programm. Dazu werden die Klassen identifiziert, anschließend deren Beziehungen analysiert, um schließlich ein vollständig spezifiziertes Klassenmodell zu erhalten. Durch Sequenzdiagramme wird die Kommunikation der einzelnen Objekte veranschaulicht. Danach erfolgt die Umsetzung in ein lauffähiges Softwaresystem.

4.1 Design

4.1.1 Identifikation der Klassen und Methoden

Zur Identifikation der Klassen wird die Technik der CRC-Karten (Class Responsibilities Collaborators) angewendet. Anhand der Anwendungsfallbeschreibungen und der Aktivitätsmodellierungen, die für die Systemanforderungen verantwortlich sind, werden die verschiedenen Aufgaben auf Klassen verteilt, die dann die Verantwortung für diese Aufgabe übernehmen. Dabei muß darauf geachtet werden, daß Klassen gegenüber ihrer Systemumgebung abgegrenzt werden, über wohl definierte Schnittstellen mit ihrer Außenwelt in Verbindung treten und für die Konsistenz ihrer Daten möglichst selbst verantwortlich sein sollen. Werden Klassen zu groß, d. h. erledigen sie sehr viele Aufgaben, sollte eine Aufteilung in mehrere Klassen in Erwägung gezogen werden; ebenso sollte bei kleinen Klassen mit wenigen Aufgaben die Machbarkeit einer Zusammenfassung zu einer gemeinsamen Klasse geprüft werden.

Dabei müssen nicht alle Aktivitäten durch eigene Aufgaben festgelegt werden. So wurde z. B. aus den Aktivitäten „erstes Brückenglied setzen“ und „letztes Brückenglied setzen“ die Aufgabe „Brückenspanne setzen“.

Bei den folgenden CRC-Karten steht in der Überschrift der Klassenname (Class), in der linken Spalte stehen ihre Aufgaben (Responsibilities) und in der rechten Spalte ihre Beziehungen (Collaborations).

Gebiß	
Krone in Region setzen (Art der Krone)	Region
Krone in Region vernichten	Parabel
Wurzel in Region vernichten	
Wurzel in Region setzen (Art der Wurzel)	
Wurzelparameter in Region setzen (Dazu gehören z.B. Intrusion, Extrusion, usw.)	
Wurzelparameter von Region angeben	
Kronenparameter in Region setzen (Dazu gehören Konuswinkel, Materialkonstante, usw.)	
Kronenparameter von Region angeben	
Oberkiefer setzen	
Oberkiefer angeben	
Gingivalprothese setzen	
Gingivalprothese angeben	
Brückenspanne setzen	
Verbindungselement setzen	
Verbindungselement angeben	
FDI-Code prüfen	
Regionenzahl des FDI-Codes angeben	
Standardgebiss erzeugen	

Region	
Krone setzen	Krone
Wurzel setzen	Wurzel
Krone vernichten	
Wurzel vernichten	
Krone angeben	
Wurzel angeben	
Wurzelparameter in Wurzel setzen	
Wurzelparameter aus Wurzel angeben	
Kronenparameter in Krone setzen	
Kronenparameter in Krone angeben	

Parabel	
Standardparabel setzen	
Definitionsbereich setzen	
Parabelgleichung setzen	
Kräfte in Region angeben	
Kräfte bei x-Koordinate angeben	
Größten Abstand von einer Gerade durch zwei Parabelpunkte zu Parabelpunkt innerhalb der von Gerade und Parabel einbeschriebenen Fläche angeben	
x- Koordinate von FDI-Code angeben	
y- Koordinate zu x- Koordinate angeben	
x- Koordinate von Region angeben	
Bogenlänge berechnen	

Wurzel	
Wurzeltyp (natürlich/ geschädigt/ Implantat) setzen	
Federkonstante 1 setzen	
Federkonstante 2 setzen	
Drehfederkonstante 1 setzen	
Drehfederkonstante 2 setzen	
maximale Extrusion setzen	
maximale Intrusion setzen	
maximale Intrusionskraft setzen	
maximale Extrusionskraft setzen	
maximales Moment setzen	
Wurzelart (natürlich/ geschädigt/ Implantat) angeben	
Federkonstante 1 angeben	
Federkonstante 2 angeben	
Drehfederkonstante 1 angeben	
Drehfederkonstante 2 angeben	
maximale Extrusion angeben	
maximale Intrusion angeben	
maximale Intrusionskraft angeben	
maximale Extrusionskraft angeben	
maximales Moment angeben	

Krone	
Kronentyp setzen	
Konuswinkel setzen	
Materialkonstante setzen	
Lösekraft setzen	
Idealen Konuswinkel setzen	
Kronentyp angeben	
Konuswinkel angeben	
Materialkonstante angeben	
Idealen Konuswinkel angeben	
Lösekraft angeben	

4.1.2 Klassenmodell

Durch die Identifizierung der Klassen können jetzt die Beziehungen untersucht werden, indem Assoziationen, Aggregationen und Vererbungsbeziehungen ermittelt werden, die aus CRC-Karten hervorgehen, so daß folgendes Klassenmodell ermittelt wurde.

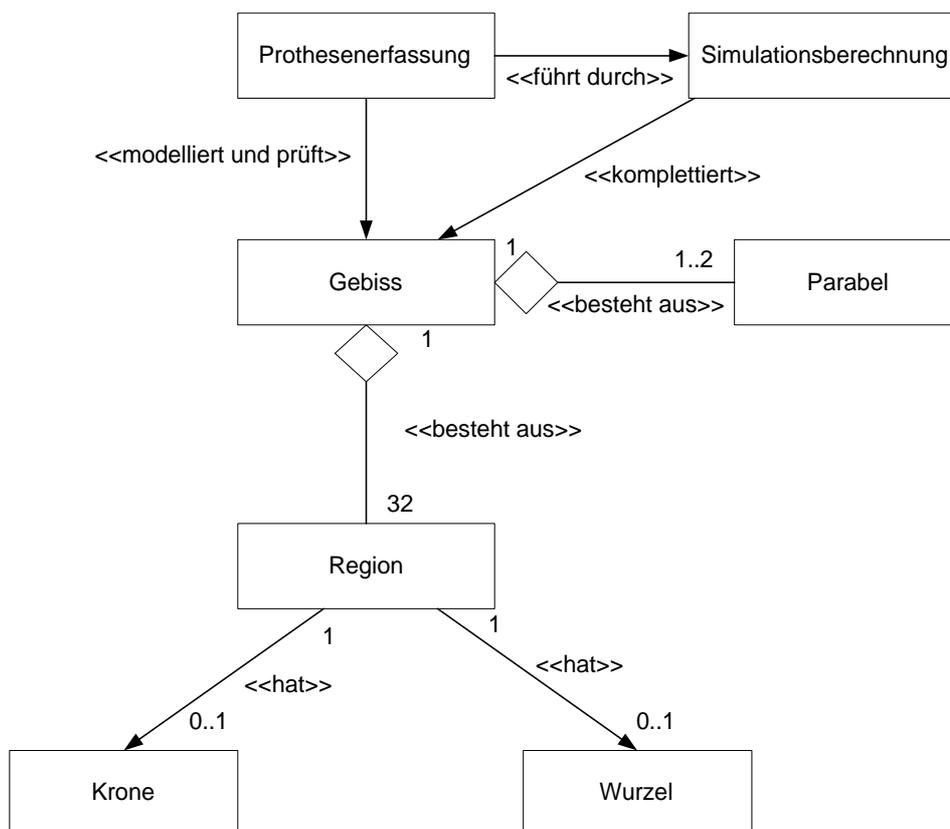


Abb. 43: Klassenmodell der Prognosesimulation.

4.1.3 Spezifikation der Klassen und Methoden

Ausgehend von den identifizierten Klassen und Methoden der CRC-Karten und den Beziehungen im Klassenmodell können jetzt die Operationen spezifiziert und die Verantwortlichkeiten bestimmt werden. Da die Verantwortlichkeiten für einzelne Operationen teilweise komplex sind, müssen weitere Zerlegungen durchgeführt werden. Dabei entstehen kleinere Teilprobleme, die vollständig durch folgenden Operationen erfaßt werden:

Gebiß

```
erzeugeGebiss()
prüfeFdi(fdi: int): bool
setzeBrückenspanne(von_fdi: int, bis_fdi: int): String
setzeGingivalbewegung(gingivalbewegung: double)
setzeGingivalprothese(gingivalprothese: bool)
setzeGingivalprothese(okkludiert_fdi: int, nichtOkkludiert_fdi: int): String
setzeFestVerbundeneGingivalprothese(festVerbundeneGingivalprothese: bool)
setzeKonuskrone()
setzeKonuswinkel(konuswinkel1: double, konuswinkel2: double)
setzeKonuswinkel(konuswinkel1: double)
setzeKroneIdealerKonuswinkel(regionenkennzahl: int, idealerKonuswinkel: double)
setzeKroneLösekraft(regionenkennzahl: int, lösekraft: double)
setzeMaterialkonstante(materialkonstante: double)
setzeOberkiefer(oberkiefer: bool)
setzeWurzel(fdi: int, wurzeltyp: int)
setzeWurzelExtrusion(regionenkennzahl: int, extrusion: double)
setzeWurzelExtrusionskraft(regionenkennzahl: int, extrusionskraft: double)
setzeWurzelIntrusion(regionenkennzahl: int, intrusion: double)
setzeWurzelIntrusionskraft(regionenkennzahl: int, intrusionskraft: double)
setzeWurzelMoment(regionenkennzahl: int, moment: double)
getKräfteInRegion(regionenkennzahl: int): double
getKroneIdealerKonuswinkel(regionenkennzahl: int): double
getKroneInRegion(regionenkennzahl: int): boolean
getKroneKonuswinkel(regionenkennzahl: int): double
getKroneKronentyp(regionenkennzahl: int): int
getKroneLösekraft(regionenkennzahl: int): double
getKroneMaterialkonstante(regionenkennzahl: int): double
```

```
getRegionAusFdi(fdi: int): int
getRegionVonWurzel(wurzel: int): int
getWurzelDrehfederkonstante1(regionenkennzahl: int): double
getWurzelDrehfederkonstante2(regionenkennzahl: int): double
getWurzelExtrusion(regionenkennzahl: int): double
getWurzelExtrusionskraft(regionenkennzahl: int): double
getWurzelFederkonstante1(regionenkennzahl: int): double
getWurzelFederkonstante2(regionenkennzahl: int): double
getWurzelIntrusion(regionenkennzahl: int): double
getWurzelIntrusionskraft(regionenkennzahl: int): double
getWurzelInRegion(regionenkennzahl: int): boolean
getWurzelMoment(regionenkennzahl: int): double
getWurzelWurzeltyp(regionenkennzahl: int): int
vernichtProthese()
vernichteZähne()
vernichteZahn(fdi: int)
```

Parabel

```
berechneBogenlänge()
erzeugeKräfte()
erzeugeStandardparabel()
getBogenlänge(x1: double, x2: double): double
getKraftAufRegion(regionenkennzahl: int): double
getKräfteAufX(x: double): double
getMomentDurchParabel(x1: double, x2: double): double
getXAusBogenlänge(bogenlänge): double
getXAusFdi(fdi: int): double
getXAusRegion(regionenkennzahl: int): double
getY(x: double): double
setzeDefinitionsbereich(x1: double, x2: double)
setzeParabelgleichung(koeffizient: double)
```

Simulationsberechnung

berechneEinPfeilerproblem(regionenkennzahl: int)
berechneGingivalprothese(regionenkennzahl: int)
berechneKräfte(gebiss: Gebiss)
berechneLösekraft(regionenkennzahl: int)
berechnePfeilerbewegung(regionenkennzahl: int)
berechneZweiPfeilerproblem(regionenkennzahl: int)
getWerte(regionenkennzahl: int): Region

Region

setzeFdi(fdi: int)
getFdi(): int
setzeKraft(kraft: double)
getKraft(): double
setzeX(x: double)
getX(): double
setzeWurzel(wurzelvorhanden: boolean)
setzeWurzelDrehfederkonstante1(drehfederkonstante1: double)
setzeWurzelDrehfederkonstante2(drehfederkonstante2: double)
setzeWurzelExtrusion(extrusion: double)
setzeWurzelExtrusionskraft(extrusionskraft: double)
setzeWurzelFederkonstante1(federkonstante1: double)
setzeWurzelFederkonstante2(federkonstante2: double)
setzeWurzellIntrusion(intrusion: double)
setzeWurzellIntrusionskraft(intrusionskraft: double)
setzeWurzelMoment(moment: double)
setzeWurzelWurzeltyp(wurzeltyp: int)
getWurzel(): boolean
getWurzelDrehfederkonstante1(): double
getWurzelDrehfederkonstante2(): double
getWurzelExtrusion(): double
getWurzelExtrusionskraft(): double
getWurzelFederkonstante1(): double
getWurzelFederkonstante2(): double
getWurzellIntrusion(): double
getWurzellIntrusionskraft(): double

```
getWurzelMoment(): double  
getWurzelWurzeltyp(): int  
setzeKrone(kronevorhanden: boolean)  
setzeKroneIdealerKonuswinkel(idealerKonuswinkel: double)  
setzeKroneKonuswinkel(konuswinkel: double)  
setzeKroneKronentyp(kronentyp: int)  
setzeKroneLösekraft(lösekraft: double)  
setzeKroneMaterialkonstante(materialkonstante: double)  
getKrone(): boolean  
getKroneIdealerKonuswinkel(): double  
getKroneKonuswinkel(): double  
getKroneKronentyp(): int  
getKroneLösekraft(): double  
getKroneMaterialkonstante(): double
```

Wurzel

```
setzeDrehfederkonstante1(drehfederkonstante1: double)  
setzeDrehfederkonstante2(drehfederkonstante2: double)  
setzeExtrusion(extrusion: double)  
setzeExtrusionskraft(extrusionskraft: double)  
setzeFederkonstante1(federkonstante1: double)  
setzeFederkonstante2(federkonstante2: double)  
setzeIntrusion(intrusion: double)  
setzeIntrusionskraft(intrusionskraft: double)  
setzeMoment(moment: double)  
setzeWurzeltyp(wurzeltyp: int)  
getDrehfederkonstante1(): double  
getDrehfederkonstante2(): double  
getExtrusion(): double  
getExtrusionskraft(): double  
getFederkonstante1(): double  
getFederkonstante2(): double  
getIntrusion(): double  
getIntrusionskraft(): double  
getMoment(): double  
getWurzeltyp(): int
```

Krone

```
setzeIdealerKonuswinkel(idealerKonuswinkel: double)
setzeKonuswinkel(konuswinkel: double)
setzeKronentyp(kronentyp: int)
setzeLösekraft(lösekraft: double)
setzeMaterialkonstante(materialkonstante: double)
getIdealerKonuswinkel(): double
getKonuswinkel(): double
getKronentyp(): int
getLösekraft(): double
getMaterialkonstante(): double
```

4.1.4 Objektinteraktionen

Die folgenden Sequenzdiagramme zeigen, wie eine ausgewählte Menge an Objekten in einer zeitlich begrenzten Situation Nachrichten austauscht. Dabei wird möglichst auf die Angabe von Bedingungen verzichtet, denn die verschiedenen Ablaufmöglichkeiten werden in den Aktivitätsdiagrammen bereits beschrieben. So liegt in den Sequenzdiagrammen der Schwerpunkt im zeitlichen Ablauf, und die Zusammenarbeit der Objekte steht im Vordergrund. In den folgenden Diagrammen wird gezeigt, wie das Objekt Gebiß im zeitlichen Ablauf kreiert wird und Werte erhält.

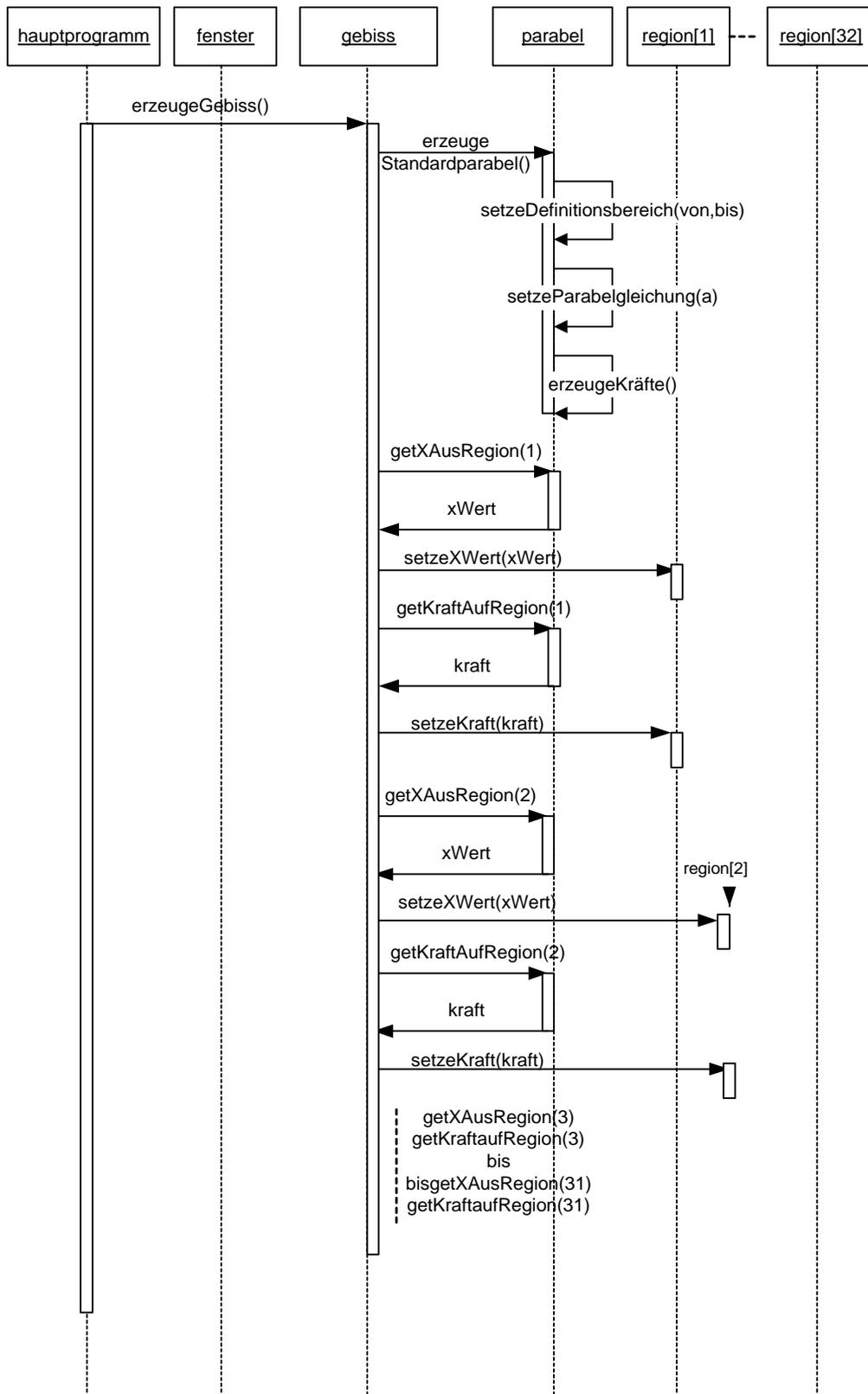


Abb. 44: Sequenzdiagramm, das den zeitlichen Ablauf bei der Erzeugung eines Standardgebisses zeigt.

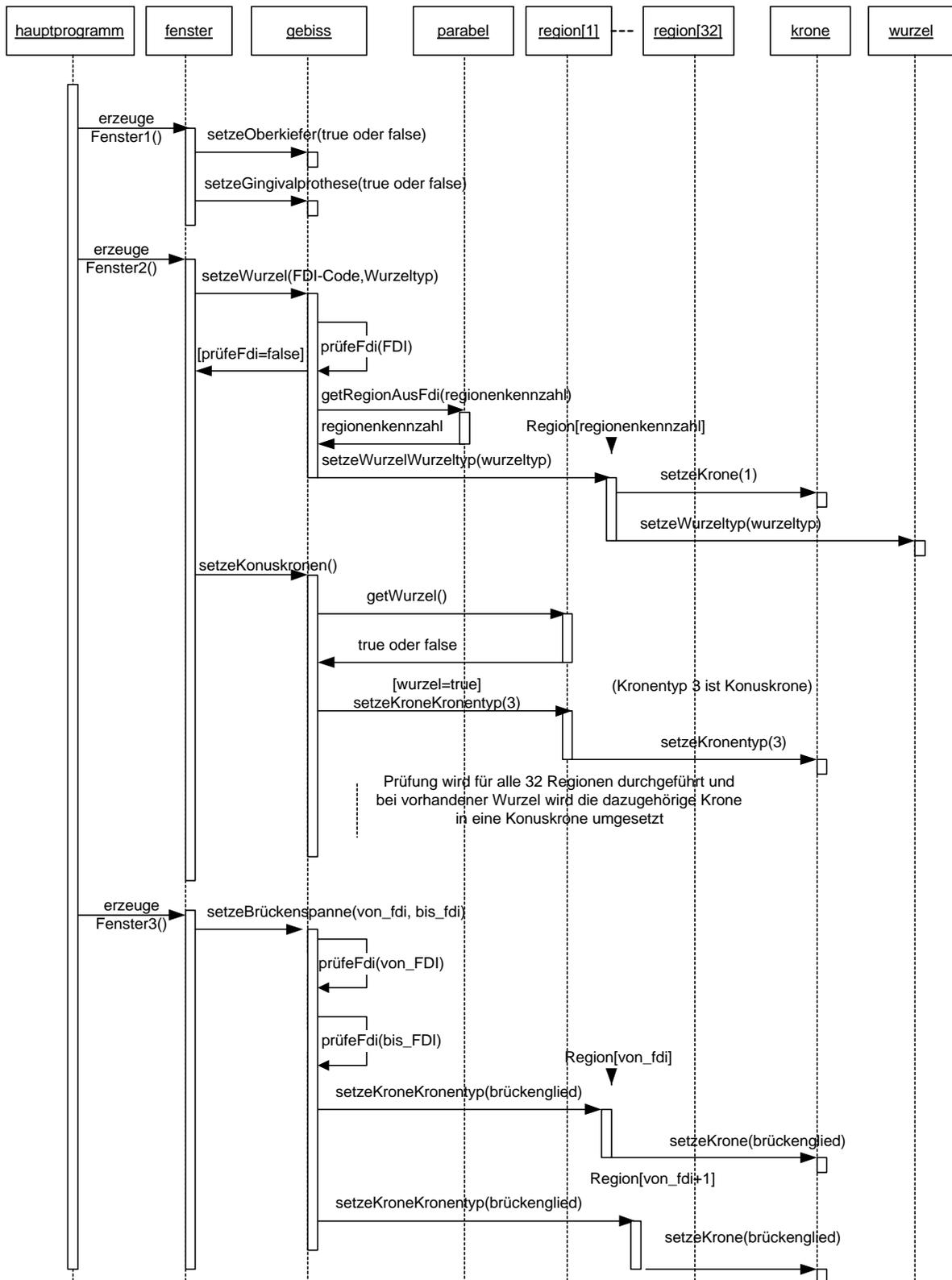


Abb. 45: Mögliche Sequenzen im Programmablauf innerhalb der ersten drei Eingabefenster.

4.2 Implementierung des objektorientierten Designmodells

4.2.1 Implementierung der Klassen Krone, Zahn, Region und Gebiß

Die Implementierung erfolgte anhand der zuvor ermittelten Klassen, die als Methoden soweit möglich - Aktivitäten aus der Aktivitätsmodellierung enthielten.

Zunächst wurden nicht aktive Klassen mit einfachen Methoden implementiert und in ihrer Funktion getestet.

Im folgenden ist der Deklarationsteil der Klasse Wurzel angegeben, in dem alle, die Wurzeln beschreibenden Eigenschaften als Variablen auftauchen. Auffällig ist, daß die Wurzelart als Integervariable angegeben ist, und damit die Wurzelarten nicht durch boolesche Eigenschaften beschrieben werden. Das hat den Vorteil, daß einige Methoden und Variablen eingespart werden und der Programmcode somit sich auch in anderen Klassen reduziert. Dieses sollte aber zur besseren Nachvollziehbarkeit vermieden werden. In einer nächsten Version könnte dies in boolesche Variablen „natürlicheWurzel“, „parodontalGeschädigteWurzel“ und „implantat“ geändert und durch Methoden zum Setzen und Auslesen ergänzt werden.

```
public class Wurzel {
    double intrusion, extrusion, intrusionskraft, extrusionskraft, moment;
    double federkonstante1, federkonstante2;
    double drehfederkonstante1, drehfederkonstante2;
    int wurzeltyp; // 1= natürliche Wuzel, 2=natürlich, parodontal
                  geschädigte Wurzel, 3=Implantat
}
```

Nachfolgend sind die Methoden zum Setzen der Wurzeleigenschaften angeführt:

```
public void setzeIntrusion(double setze){
    intrusion=setze;
}
public void setzeExtrusion(double setze){
    extrusion=setze;
}
public void setzeIntrusionskraft(double setze){
    intrusionskraft=setze;
}
public void setzeExtrusionskraft(double setze){
    extrusionskraft=setze;
}
```

```
public void setzeMoment(double setze){
moment=setze;
}
public void setzeFederkonstantel(double setze){
federkonstantel=setze;
}
public void setzeFederkonstante2(double setze){
federkonstante2=setze;
}
public void setzeDrehfederkonstantel(double setze){
drehfederkonstantel=setze;
}
public void setzeDrehfederkonstante2(double setze){
drehfederkonstante2=setze;
}
public void setzeWurzeltyp(int setze){
wurzelart=setze;
}
```

Nachfolgend stehen die Methoden zum Auslesen der Wurzeleigenschaften:

```
public double getIntrusion(){
return(intrusion);
}
public double getExtrusion(){
return(extrusion);
}
public double getIntrusionskraft(){
return(intrusionskraft);
}
public double getExtrusionskraft(){
return(extrusionskraft);
}
public double getMoment(){
return(moment);
}
public double getFederkonstantel(){
return(federkonstantel);
}
public double getFederkonstante2(){
return(federkonstante2);
}
public double getDrehfederkonstantel(){
return(drehfederkonstantel);
}
public double getDrehfederkonstante2(){
return(drehfederkonstante2);
}
```

```
public int getWurzeltyp(){
    return(wurzelart);
}
}
```

Die Klasse Krone entspricht in etwa der Klasse Wurzel, mit dem Unterschied, daß hier Kroneneigenschaften gesetzt und ausgelesen werden können. Sie wird deshalb nicht explizit angegeben. Der Test dieser Klassen erwies sich als trivial. Problemlos konnten Wurzel- und Kroneneigenschaften ausgelesen werden.

Der nächste Schritt war die Implementierung der Klasse Region, die eine Wurzel und eine Krone als Objekte hat und anderen Instanzen den Zugriff auf diese ermöglichen muß. Dabei wird wieder auf die Angabe des Programmcodes verzichtet; nur die deklarierten Variablen seien angeführt.

```
public class Region {
    Krone krone=new Krone();
    Wurzel wurzel=new Wurzel() ;
    double belastungskraft, xKoordinate;
    int fdi;
    boolean wurzelvorhanden ;
    boolean kronevorhanden;
```

Die booleschen Variablen „wurzelvorhanden“ und „kronevorhanden“ geben Aufschluß über das Vorhandensein einer Wurzel oder Krone. Da im Gebiß 32 Regionen über ein eindimensionales Array erzeugt werden, wird zusätzlich der FDI-Code der Regionen und die x-Koordinate gespeichert. Die dadurch erzeugte Redundanz wurde aus didaktischen und logischen Gründen in Kauf genommen. Der Test der Klasse Region verlief ohne Komplikationen. Es konnten mühelos durch ein Testprogramm Kronen und Wurzeln erzeugt werden, so daß mit der Implementation der Klasse Gebiß begonnen werden konnte.

4.2.2 Implementierung der mathematischen Klassen

Die Klasse Parabel soll alle Informationen und Methoden, die nötig sind um die einzelnen Regionen im Gebiß abzubilden und alle nötigen Rechenoperation an der Parabel durchzuführen, erhalten. Da die Kräfte unwiderruflich an die Parabelpunkte gekoppelt sind, soll die Klasse Parabel die Verantwortung für die Kräfte erhalten. Deshalb sind im Deklarationsteil die entsprechenden Variablen wiederzufinden.

```
public class Parabel {
    double koeffizient, bogenlänge, definiert_von, definiert_bis;
```

```
double bereich1, bereich2, bereich3;
double kraft1, kraft2, kraft3;
```

Die ersten Methoden dienen der Initialisierung eines Standardparabelbogens, wobei Definitionsbereich und Parabelkoeffizient gesetzt werden, die Bogenlänge berechnet wird und Standardkräfte den entsprechenden Punkten zugeordnet werden.

```
public void erzeugeStandardparabel() {
    setzeDefinitionsbereich(-3.5,3.5);
    setzeParabelgleichung(0.5);
    berechneBogenlänge();
    erzeugeKräfte();
}
public void setzeParabelgleichung(double neu_koeffizient) {
    koeffizient=neu_koeffizient;
}

public void setzeDefinitionsbereich(double neu_definiert_von, double
neu_definiert_bis){
    definiert_von=neu_definiert_von;
    definiert_bis=neu_definiert_bis;
}
```

Die folgenden Methoden dienen der Ermittlung der Bogenlänge einer Standardparabel, bzw. deren Übergabe an andere Klassen.

```
public void berechneBogenlänge() {
    double x;
    x=definiert_bis;

    bogenlänge=0.5*(x*Math.sqrt(1+Math.pow(x,2))+Math.log(x+Math.sqrt(1+Math
    .pow(x,2))));
    x=definiert_von;
    bogenlänge=bogenlänge-
    0.5*(x*Math.sqrt(1+Math.pow(x,2))+Math.log(x+Math.sqrt(1+Math.pow(x,2))))
    );
}

public double getBogenlänge() {
    return(bogenlänge);
}
```

Die folgende Methode ermittelt die Bogenlänge zweier Punkte innerhalb des Definitionsbereiches:

```
public double getBogenlänge(double xa, double xe) {
```

```

return(0.5*(xe*Math.sqrt(1+Math.pow(xe,2))+Math.log(xe+Math.sqrt(1+Math.
pow(xe,2))))-
0.5*(xa*Math.sqrt(1+Math.pow(xa,2))+Math.log(xa+Math.sqrt(1+Math.pow(xa,
2)))));
}

```

Die nächsten Methoden sind für die verschiedenen Umrechnungen unterschiedlicher Kennzeichnung der Pfeiler- und Wurzelpositionen; dabei wird für die Umrechnung von Bogenlänge in die x-Koordinate ein einfaches Iterationsverfahren verwendet.

```

public double getXAusFdi(int fdiCode) {
    double zahnbreite ,s;
    int signum;

    zahnbreite=bogenlänge/16;
    s=(fdiCode%10)*zahnbreite-(zahnbreite/2);
    if ((int)(fdiCode/10)==1 | (int)(fdiCode/10)==4) signum=-1;
        else signum=-1;
    return(getXAusBogenlänge(s)*signum);
}

public double getXAusRegion(int region){
    double zahnbreite ,s;
    zahnbreite=bogenlänge/16;
    if (1<=region & region<=8) return(-getXAusBogenlänge((8.5-
region)*zahnbreite));
    else if (9<=region & region<=16) return(getXAusBogenlänge((region-
8.5)*zahnbreite));
        else if(17<=region & region<=24) return(-getXAusBogenlänge((24.5-
region)*zahnbreite));
            else if (25<=region & region<=32)
return(getXAusBogenlänge((region-24.5)*zahnbreite));
                else return(0);

}

public double getXAusBogenlänge(double s){
    double untere_schranke, obere_schranke, x_näherung, s_näherung;
    untere_schranke=0;

    obere_schranke=Math.max(Math.abs(definiert_von),Math.abs(definiert_bis))
;
    x_näherung = 2;
    s_näherung=getBogenlänge(0,x_näherung);
}

```

```

while (Math.abs(s_näherung - s) > 0.0001)
{
    s_näherung = getBogenlänge(0,x_näherung);
    if (s_näherung < s) untere_schranke = x_näherung;
    if (s_näherung > s) obere_schranke = x_näherung;
    x_näherung = (obere_schranke + untere_schranke) / 2 ;
}
return(x_näherung);
}

```

Die folgende Methode dient der Berechnung des Hebelmoments im Falle des Zweipfeilerproblems.

```

public double getMomentDurchParabel(double x1, double x2){
    double mg, cg, y1, y2, lösung;
    lösung=0;
    y1=getY(x1);
    y2=getY(x2);
    if (x1 != x2) {
        mg=(y1-y2)/(x1-x2);
        cg=y1-mg*x1;
        lösung=Math.sqrt( (-cg/(mg+(1/mg))-0.5*(Math.pow(mg,2)/(mg+1/mg)))*(-
cg/(mg+(1/mg))-0.5*(Math.pow(mg,2)/(mg+1/mg)))+
(cg/(Math.pow(mg,2)+1)+0.5*(mg/(mg+1/mg)))*(cg/(Math.pow(mg,2)+1)+0.5*(m
g/(mg+1/mg)) ) );
        lösung=lösung*getKräfteAufX(mg);
    }
    return(lösung);
}

public double getY(double x){
    return(koeffizient*Math.pow(x,2));
}

public void erzeugeKräfte(){
    bereich1=getXAusBogenlänge(2*bogenlänge/16);
    kraft1=30;
    bereich2=getXAusBogenlänge(3*bogenlänge/16);
    kraft2=40;
    bereich3=definiert_bis;
    kraft3=60;
}

```

Zuletzt sind die Methoden, die verantwortlich für die Kaukräfte sind, angegeben.

```

public double getKräfte(int fdiCode){
    double bereich, rückgabe;
    bereich=Math.abs((fdiCode));
}

```

```

    if (bereich<bereich1)
        rückgabe=kraft1;
    else if (bereich<bereich2)
        rückgabe=kraft2;
    else rückgabe=kraft3;
    return(rückgabe);
}

public double getKräfteAufX(double bereich){
    double rückgabe;
    if (Math.abs(bereich)<bereich1)
        rückgabe=kraft1;
    else if (Math.abs(bereich)<bereich2)
        rückgabe=kraft2;
    else rückgabe=kraft3;
    return(rückgabe);
}

public double getKraftAufRegion(int region){
    if (region<=4 | (12<=region & region<=21) | 28<=region)
return(kraft3);
    else if (region==5 | region==11 | region==22 | region==27)
return(kraft2);
        else return(kraft1);
    }
}

```

Diese Klasse wurde eingehend getestet, denn von ihren Ergebnissen hängen alle weiteren Berechnungen ab. Dazu wurde ein Testprogramm geschrieben, das nur die Parabelklasse benötigt und autark Werte ausgibt, die sofort nachprüfbar sind.

Des weiteren sei die Klasse Simulationsberechnung angeführt, die für ein bestehendes Gebiß Kräfte, Zahnbewegungen, Konuswinkel und Prothesenbewegungen berechnet.

Die folgende Methode berechnet für einen Pfeiler und eine feste Prothese die entstehenden Kräfte. Dabei sind f1 und f2 die Längen der freien Prothesenenden.

```

public void berechneEinPfeilerproblem(int p1){
    double f1,f2,F1,F2,zahnbreite;
    int i;
    zahnbreite=gebiss.getBogenlänge()/16;
    F1=F2=f1=f2=0;
    i=1;
    gebiss.setzteWurzelIntrusionskraft(p1,gebiss.getKräfteInRegion(p1));
    while(i<p1){
        if (gebiss.getKroneInRegion(i)) {

```

```
gebiss.setzeWurzelIntrusionskraft(p1,Math.max(gebiss.getKräfteInRegion(p1),gebiss.getKräfteInRegion(i)));
}
if (gebiss.getKroneInRegion(i) & f1==0) F1=getFräfteInRegion(i);
if (gebiss.getKroneInRegion(i)) f1=f1+zahnbreite;
i++;
}
i=p1+1;
while(gebiss.getKroneInRegion(i)) {
if (f2==0) F2= gebiss.getKräfteInRegion(i);
f2=f2+zahnbreite;
i++;
}
gebiss.setzeWurzelMoment(p1,Math.max(F1*f1,F2*f2));
if (gebiss.getKroneKronentyp(p1)==3) gebiss.setzeKroneKonuswinkel(p1,
berechneLösekraft(p1));
}
```

Die Einfeilerproblematik hat die trivialste Lösungsmethode. Für andere Probleme sehen die Methoden jedoch ähnlich aus und sind deshalb nicht explizit angegeben.

Es bleiben noch die Klassen zur Dateneingabe und Fensterdarstellung zu implementieren. Es handelt sich dabei um eigene Fensterklassen und Standardklassen in Java. Auf eine Erläuterung dieser Klassen wurde verzichtet, da das Simulationsprinzip im Mittelpunkt der Arbeit steht.

4.3 Zusammenfassung

In Kapitel 4 wurden anhand der ermittelten Anwendungsfälle und Aktivitätsdiagramme folgende Klassen zur Beschreibung der Modelle identifiziert:

- Gebiß,
- Parabel,
- Region,
- Krone und Wurzel,
- Simulationsberechnung.

Durch die Analyse ihrer Beziehungen konnten die Klassen spezifiziert werden. Die anschließende Programmierung erfolgte in Java. Dabei wurden zuerst nicht aktive Klassen umgesetzt und getestet, bevor die aktiven Klassen implementiert wurden. In eingehenden Tests konnte die korrekte Funktion des Gesamtsystems festgestellt werden, so daß mit der Evaluation der Ergebnisse begonnen werden kann.

5 Evaluation

Die Evaluation erfolgte in zwei Teilschritten. Zuerst wurden anhand einiger Beispielfälle die Simulationsergebnisse mit Tabelle 1 verglichen.

Zur Erinnerung: Tabelle 1 enthält Wahrscheinlichkeiten über das Verlustrisiko von Zahnprothesen, abhängig von ihrer Position und Konfiguration. Jedoch fehlten für eine hinreichend genaue Interpretation der Wahrscheinlichkeiten unter anderem Angaben über jeweilige Studiendauer.

In der zweiten Phase wurde mit Zahnärzten das fertige Softwaresystem diskutiert.

Tabelle 13: Vergleich von Seitenzahn- und Frontzahnbrücke für Simulationsergebnisse und Tabelle 1.

Konfiguration	Seitenzahnbrücke	Frontzahnbrücke
Natürliche Pfeiler	18, 16	12, 21
Brückenspanne	18 bis 16	12 bis 21
Maximales Moment berechnet durch Simulation	Pfeiler 16: 0.29 Ncm Pfeiler 18: 0.29 Ncm	Pfeiler 12: 3.83 Ncm Pfeiler 21: 3.83 Ncm
Verlustrisiko der Prothese aus Tabelle 1	0,46	1

Die höhere Wahrscheinlichkeit des Verlusts einer Frontzahnbrücke wird in der Simulation durch die wesentlich höheren Drehmomente deutlich.

Konfiguration	Zweipfeilerbrücke	Einpfeilerbrücke
Natürliche Pfeiler	18, 16	16
Brückenspanne	18 bis 16	17 bis 16
Maximales Moment, berechnet durch Simulation	Pfeiler 1: 0.29 Ncm Pfeiler 2: 0.29 Ncm	Pfeiler 1: 41.34 Ncm
Werte aus Tabelle 1	1	2,24

Das stark erhöhte Verlustrisiko einer Einpfeilerbrücke wird in der Simulation durch ein extrem hohes Drehmoment wiedergegeben. Zusätzlich generierte die Software einen Warnhinweis.

Konfiguration	Einspannige Brücke	Mehrspannige Brücke
Natürliche Pfeiler	18, 16	18, 14
Brückenspanne	18 bis 16	18 bis 14
Maximales Moment	Pfeiler 1: 0,29Ncm Pfeiler 2: 0,29Ncm	Pfeiler 1: 1,62Ncm Pfeiler 2: 1,62Ncm
Werte aus Tabelle 1	1	1,54

Wieder wird der Zusammenhang zwischen maximalem Moment und Verlustrisiko deutlich. Noch auffälliger ist aber, daß nicht nur Aussagen qualitativer Art ableitbar sind, wie: Eine einspannige Brücke hat ein geringeres Verlustrisiko als, sondern ein geordneter Zusammenhang zwischen Verlustrisiko und Moment bezüglich Simulation und Tabelle 1 besteht. Dieser wird durch Tabelle 14 verdeutlicht. Dazu wurden die Konfigurationen der vorangegangenen Tabellen verwendet, die den Ausgangspunkt zu den in Spalte 1 angegebenen Konfigurationen bilden. In Spalte 3 der Tabelle ist die erhöhte Verlustrate der Prothese angegeben, jedoch konnte wegen fehlender Angaben in Tabelle 1 nicht festgestellt werden, wo die mehrspannige Brücke anzusiedeln ist oder in welcher Gebißregion sich die Einpfeilerprothese befindet.

Ausgangskonfiguration: Einspannige Seitenzahnbrücke mit zwei Pfeilern und einem Drehmoment von 0,29 Ncm haben ein Verlustrisiko von 1.

Tabelle 14: Direkter Vergleich von Simulationsergebnissen und der Wahrscheinlichkeit eines Prothesenverlusts.

Konfiguration	Moment	Verlustrisiko
Mehrspannig	1,62 Ncm	1,5
Frontzahnbrücke	3,83 Ncm	2,1
Einpfeilerbrücke	41,34 Ncm	2,2

Leider reichen die vorhandenen statistischen Daten nicht aus, um diesen Zusammenhang durch eine Funktion zu beschreiben. Lägen genauere Studien vor, bestünde vielleicht die Möglichkeit, mit Hilfe der auftretenden Momente eine unverbindliche Aussage über die Haltbarkeit der Prothese zu machen. Jedoch sollten wegen der Vielzahl biologischer und medizinischer Faktoren derartige Parameter nicht dazu mißbraucht werden, Aussagen wie: „Eine Prothese, bei der Drehmomente von x Ncm wirken, halten y Jahre.“, zu machen.

Dennoch sollte eine eingehendere Studie durchgeführt werden.

Konfiguration	Endpfeilerbrücke	Freiendbrücke
Natürliche Pfeiler	18, 16	18, 16
Brückenspanne	18 bis 16	18 bis 15
Extrusionskraft	Pfeiler 1: 0 N Pfeiler 2: 0 N	Pfeiler 1 (18): 25N
Werte aus Tabelle 1	1	1,43

Das höhere Verlustrisiko ist im Falle einer Freiendbrücke in der erhöhten Extrusionskraft wiederzufinden.

Damit ist die Evaluation basierend auf Tabelle 1 abgeschlossen. Trotz mangelhafter Datenlage konnten Parallelen festgestellt werden, die einen biomechanischen Ansatz rechtfertigen könnten. Jedoch sind diesbezüglich intensivere Studien mit detaillierten Pfeilerkonfigurationen nötig. Diese können leider nicht im Rahmen einer wissenschaftlichen Arbeit durchgeführt werden, da aufgrund der eingeschränkten Bearbeitungszeit kein Spielraum für weiterreichende Tests gegeben ist, denn die Testphase konnte erst nach vollständigem Abschluß der Programmierarbeiten eingeleitet werden.

Die übrigen Tests wurden in Zusammenarbeit mit Zahnärzten durchgeführt. Dabei bestätigte sich die Gültigkeit der Ergebnisse. Nicht sinnvolle Konstruktionen wurden sowohl von Zahnarzt als auch vom System identifiziert. Als besonders hilfreich erwies sich die Konuswinkelberechnung. Dabei konnten die Werte nicht nur bestätigt werden, sondern die Ärzte empfanden die gefundenen Winkel sogar als exakter als die von ihnen vermuteten Winkel. Jedoch fällt die Winkelbestimmung eher in den Aufgabenkreis eines Zahntechnikers, so daß in diesem Zusammenhang weitere Studien nötig sind.

Bei den Gingivalbewegungen konnten die Ärzte keine Erfahrungswerte benennen, da ihnen keine geläufig waren. Aus diesem Grund sollten die Gingivalbewegungen mit Vorsicht behandelt werden. Um dies zu erreichen wurde in dem ersten Prototyp eine entsprechende Hinweismeldung integriert.

Das Fehlen der Mehrpfeilerberechnung stellte sich als größtes Manko des Prototypen heraus, denn dadurch wird der Großteil kritischer Konstruktionen unberechenbar.

Die zur Verfügung gestellte Benutzerumgebung wurde durchweg positiv angenommen. Die Software konnte ohne Erklärung vom Benutzerkreis bedient werden, so daß diesbezüglich zur Zeit keine Änderungen nötig sind.

6 Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Prototyp eines Softwaresystems entwickelt, der auf einem konzeptuell schlüssigen, biomechanischen Modell zur Kräfte- und Bewegungssimulation an Zähnen und Zahnprothesen basiert.

Ausgehend von einem Ein- oder Zweipfeilerproblem können alle gängigen prothetischen Versorgungsmethoden, wie z.B. Gingivalprothesen, feste Brücken mit freien Enden und Konuskronen, in die Prothese integriert werden. Zur Dateneingabe ist eine benutzergerechte grafische Eingabeschnittstelle implementiert.

Die berechneten Daten werden dem Anwender übersichtlich dargestellt und die Ergebnisse interpretiert.

Bedingt durch die Aufgabenstellung wurden biomechanische Modelle gesucht, die mit mathematischen Methoden einen zahnmedizinischen Sachverhalt durch physikalische Gesetze beschreiben sollen. Dazu wurden statische Modelle hergeleitet und zu medizinischen Studien in Beziehung gesetzt.

Um ein breites Spektrum an Problemfällen abzudecken, wurden die zur Zeit gängigen zahnmedizinischen Versorgungsmethoden recherchiert und ohne Vorselektion deren Abbildbarkeit auf bestehende statische Modelle überprüft.

Nach Erfassung der Modelle erfolgte die Analyse über deren Lösbarkeit unter Einbeziehung der derzeitigen biomechanischen Forschung. Dabei stellte sich schnell heraus, daß die Lösung von Mehrpfeilerproblemen nur durch komplexe statische Gesetze realisierbar ist, die zusätzlich tiefgreifende mathematische Methoden erfordern. Da bei der Vorgehensweise, einen medizinischen Sachverhalt durch biomechanische Lösungsansätze zu beschreiben, von vorneherein kein Erfolg garantiert ist - die Überprüfung ist ein Aufgabenteil der Arbeit - wäre dieser Aufwand sicherlich nicht gerechtfertigt gewesen. Deshalb wurde der Problemkreis auf maximal zwei Pfeiler eingeschränkt, mit der Auflage, bei der Implementierung die zu erwartende Erweiterung der Funktionalitäten zu berücksichtigen.

Für Ein- und Zweipfeilerprobleme wurden alle Parameter spezifiziert, Lösungsgleichungen gesucht und zeitgleich über eine mögliche Erfassung der daraus

resultierenden Eingabewerte nachgedacht, die durch standardisierte Methoden aus der projektbezogenen Softwareentwicklung fixiert wurden.

Danach konnten die gefundenen Modelle und die Vorgehensweise begründet werden, wobei wegen mangelnder Literaturangaben Parameter homogenisiert werden mußten und Ergänzungen an den Modellen vorgenommen wurden.

Erst danach konnten weitere Schritte in der Softwareentwicklung angegangen werden.

Daraus gingen ein Modell zur Beschreibung der auftretenden Kaukräfte, ein Modell zur Beschreibung der Pfeilerbewegungen und ein Modell zur Lokalisierung und Abbildung der Pfeiler hervor. Dabei wurden flexible mathematische Funktionen gefunden, die der unterschiedlichen Topologie menschlicher Kiefer gerecht werden können.

Weitere Modelle berücksichtigen die einzelnen Prothesenkonfigurationen und berechnen die Auswirkungen auf den Zahnhalteapparat.

Bei der Umsetzung der Modelle in ein Softwaresystem wurden programmiersprachenunabhängige Notationen der UML verwendet, um Abläufe schematisch festzuhalten. Durch exemplarische Darstellung spezieller Sachverhalte durch konkrete Aktivitäten konnten Klassen beziehungsweise deren Objekte identifiziert und spezifiziert werden.

Die eigentliche Implementierung erfolgte in Java, einer objektorientierten und plattformübergreifenden Programmiersprache, so daß der Prototyp im Internet verbreitet und so einem großen Benutzerkreis zugänglich gemacht werden kann. Dabei wurde sowohl bei den selbst programmierten als auch bei den von Sun für Java bereitgestellten und zur Darstellung der Eingabefenster verwendeten Klassen darauf geachtet, daß der Programmcode in den gängigen Webbrowsern lauffähig ist und eine geringe Anzahl an Bibliotheken geladen werden müssen.

Um spätere Änderungen und Erweiterungen so einfach wie möglich realisieren zu können, sind kritische Stellen am Programmcode mit Anmerkungen versehen und die Klassen mit allen zur Verfügung stehenden Methoden dokumentiert worden.

Nach Abschluß der Implementierung erfolgte ein eingehender Test, bei dem die Ergebnisse unter anderem mit Studien über die Prothesenhaltbarkeit verglichen wurden. Dabei zeigten sich weitgehende Übereinstimmungen. Durch Gespräche mit Zahnärzten konnte im Bereich der Konuswinkelberechnung, bei der vorwiegend mechanische Faktoren eine Rolle spielen, die Genauigkeit der Winkel nachgewiesen werden.

Damit wurde gezeigt, daß durch ein biomechanisches Modell qualitative Aussagen über die Auswirkung einer Prothese auf den Zahnhalteapparat gemacht werden können. Weiterhin konnte festgestellt werden, daß die Qualität der Ergebnisse vom Verhältnis biologischer zu mechanischen Faktoren abhängt, d. h. je mehr mechanische Parameter das Modell enthält, desto genauer sind die Werte.

6.2 Diskussion und Ausblick

Zum jetzigen Zeitpunkt kann das System für beliebige Brückenkonstruktionen mit maximal zwei Pfeilern oder bei gingival-parodontal getragenen Prothesen die auftretenden Kräfte und Pfeilerbewegungen berechnen.

Die Ergebnisse werden vom System interpretiert und die unterschiedlichen Konfigurationen aufgrund ihrer biomechanischen Eigenschaften klassifiziert. Dabei können derzeit weder Aussagen über die voraussichtliche Haltbarkeit noch über die Kostenfrage gemacht werden. Der primäre Verwendungszweck besteht darin, unter mehreren alternativen Prothesenkonfigurationen die biomechanisch verträglichste zu identifizieren, welche die höchste Lebenserwartung hat.

Da Konfigurationen mit zwei Pfeilern das Anwendungsfeld erheblich eingrenzen, sollte das Modell hin zur Lösung von Mehrpfeilerproblemen erweitert werden. Dadurch wäre für jede Pfeilerkombination eine Bewertung möglich, und zusätzliche Faktoren wie das Materialverhalten könnten einbezogen werden. Dazu müßten allerdings neue Berechnungsmethoden entwickelt und die Eingaberoutine erweitert werden.

Hilfreich hierfür ist die Balkentheorie aus der Statik, die es in Verbindung mit Differentialgleichungssystemen ermöglicht, Biegelinien zu berechnen. Dadurch werden die Deformationen der Prothesen durch Funktionen erfaßt, womit eine detaillierte Kräfteverteilung auf die einzelnen Pfeiler gegeben wird. Allerdings stehen dazu keine Modellgleichungen zur Verfügung, so daß diese erst hergeleitet und numerische Iterationsverfahren zur Lösung gesucht werden müßten. Damit ließe sich aber, ohne Veränderungen an den bestehenden Klassen vorzunehmen, eine Umrechnung der Kräfte in die entsprechenden Pfeilerbewegungen durchführen. Auch die Interpretation der Ergebnisse bleibt von dieser Erweiterung unberührt, d. h. die Software müßte nicht grundlegend geändert, sondern nur erweitert werden. Weitere Vorteile der Erweiterung durch Biegelinien bestünden in einer Aussagemöglichkeit über Materialhaltbarkeit (z. B. bei Keramikverblendungen oder Ermüdungserscheinungen des Prothesenmaterials) oder in der

Einbeziehung der Prothesenkosten, so daß die biomechanische Verträglichkeit mit den entstehenden Kosten gewichtet werden könnte.

Das hauptsächliche Anwendungsfeld bei festen Brücken wird die Objektivierung der Zusammenhänge in AIDA sein, für die das System die nötigen Daten zur Verfügung stellt.

Anders verhält es sich in Bezug auf die Konuskronen, da Löse- und Fügeverhalten auf rein physikalische Gesetze zurückzuführen und nur wenige der einzusetzenden Parameter biologischer Natur sind. Deshalb kann durch die verwendeten mathematischen Methoden eine sehr genaue Beschreibung realisiert werden. In Verbindung mit der Kräftesimulation können so exakt an die Prothese und den Patienten angepaßte Winkel ermittelt werden, deren Genauigkeit im Rahmen einer ersten Evaluation gezeigt werden konnte. Demnach kann im Anwendungsfall „Zahntechniker“ das System in seiner jetzigen Form hilfreiche Dienste leisten.

Ganz anders sieht es bei Gingivalprothesen aus, denn dort sind entscheidende Faktoren wie die Elastizitäts- und Viskositätskonstanten weiterhin unbestimmt. Um dieser Simulation die nötige Aussagekraft zu verleihen, wären Studien am Zahnfleisch nötig, mittels derer man diese Konstanten bestimmen könnte. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten und die mathematische Beschreibung sind in der Arbeit enthalten und im Prototypen implementiert, wobei die zur Zeit verwendeten Parameter auf einer Grenzwertberechnung anhand eines Literaturbeispiels beruhen. Ihre Überprüfung in der Praxis war nicht möglich.

Da die Programmierung in einer zeitgemäßen, objektorientierten Programmiersprache durchgeführt wurde, ist eine Anpassung des Programms aufgrund seines modularen Aufbaus und seiner hohen strukturellen Transparenz sehr leicht durchzuführen. Eine Erweiterung um die anfangs erwähnten Zusätze sollte damit problemlos möglich sein.

Literatur

- [1] I. N. Bronstein / K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, 1979
- [2] J. Lenz / H.J. Schindler / H. Pelka, Die keramikverblendete NEM-Konuskronen, Quintessenz Verlags-GmbH, 1992
- [3] Jörg Rudolf Strub, Curriculum Prothetik, Quintessenz- Verlags- GmbH, 1994
- [4] L. Hupfaut, Praxis der Zahnheilkunde, Bd.5 Festsitzender Zahnersatz, Urban & Schwarzenberg, 1993
- [5] Klaus H. Rateitschak, Farbatlant der Zahnmedizin, Kronen- und Brückenprothetik, Georg Thieme Verlag, 1993
- [6] István Szabó, Einführung in die Technische Mechanik, Springer-Verlag 1984
- [7] Bernd Oestereich, Objektorientierte Softwareentwicklung: Analyse und Design mit der Unified Modeling Language, 4. aktualisierte Auflage, Oldenbourg, 1998
- [8] Ralf Weber, Diplomarbeit über eine Objektorientierte Entwicklung eines Prototypen für ein Softwaresystem zur Unterstützung der Entscheidungsfindung für die prothetische Behandlung in der Zahnmedizin