

INAUGURAL - DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

NATURWISSENSCHAFTLICH-MATHEMATISCHEN

GESAMTFAKULTÄT

DER

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT

HEIDELBERG

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Michael Metzner

aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 25.11.2003

MEHRGITTERVERFAHREN FÜR DIE KOMPRESSIBLEN
EULER- UND NAVIER-STOKES-GLEICHUNGEN
MIT BESONDERER BETRACHTUNG DES
SCHWACH KOMPRESSIBLEN FALLES

Gutachter:

Prof. Dr. Gabriel Wittum
Prof. Dr. Peter Bastian

Quand on est sur le bord de sa tombe

On regarde en arrière et se dit:

J'ai aimé

Alfred de Musset

Für Caroline

Vorwort

Die vorliegende Arbeit begann während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Computeranwendungen der Universität Stuttgart und wurde am Institut für Informatik der Universität Heidelberg fertig gestellt. Eine wesentliche Voraussetzung zur Realisierung dieser Arbeit stellte während des gesamten Zeitraumes die Förderung im Rahmen des Schwerpunktprogrammes “ANumE - Analysis und Numerik von Erhaltungsgleichungen” der Deutschen Forschungsgemeinschaft dar.

Meinem Betreuer Prof. Dr. Gabriel Wittum möchte ich sehr herzlich danken für die Überlassung der Aufgabenstellung. Er gab mir an entscheidenden Stellen wertvolle Hilfe zum Gelingen dieser Arbeit und gewährte mir gleichwohl großen Freiraum bei der Durchführung. Nur so konnte der Spagat zwischen der Promotion und meinem außeruniversitären Engagement als IT-Berater gelingen.

Ein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Claus-Dieter Munz, der mit seinem fachlichen Rat beistand und durch wichtige Gespräche diese Arbeit förderte.

Nicht vergessen möchte ich an dieser Stelle, den Kollegen am Iff in Heidelberg und am IAG in Stuttgart meinen Dank auszusprechen. Besonders hervorheben möchte ich in diesem Zusammenhang die Kollegen im “Navier-Stokes-Zimmer” Sandra Nägele und Achim Gordner. Sie haben mich durch anregende und humorvolle Diskussionen immer wieder aufs Neue angetrieben und motiviert.

Ein weiterer Dank gilt meiner Familie für die Geduld und liebevolle Unterstützung, die ich von ihr erfahren habe.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Verlobten Caroline danken, die alle Höhen und Tiefen dieser Arbeit miterlebt und mitgelebt hat.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Symbolverzeichnis	vii
Einführung	1
1 Grundlegende Gleichungen	5
1.1 Euler-Gleichungen	5
1.2 Navier-Stokes-Gleichungen	7
1.3 Referenzgrößen	8
1.4 Dimensionslose Navier-Stokes-Gleichungen	10
1.5 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen	12
2 Asymptotik	15
2.1 Einskalenasymptotik	15
2.2 Mehrskalenasymptotik	20
2.3 Akustische Gleichungen	25
2.4 Ergebnisse der asymptotischen Analyse	27
3 Problemstellung	29
3.1 Kompressible Gleichungen	29
3.2 Schwach kompressible Gleichungen	30
3.3 Randbedingungen	31

4	Numerische Verfahren	33
4.1	Übersicht	33
4.2	Finite Volumen	35
4.2.1	Knotenbasierte Finite Volumen	41
4.3	Zeitdiskretisierung	45
4.3.1	BDF-Verfahren	47
4.3.2	Runge-Kutta-Verfahren	48
4.4	Ortsdiskretisierung	51
4.4.1	Upwind-Strategien	54
4.4.2	Stabilisierung	62
4.4.3	Randbedingungen	63
4.5	Nichtlineare Iterationsverfahren	66
4.5.1	Newton-Iteration	66
4.5.2	Berechnung der Jacobi-Matrix	67
4.5.3	Defektberechnung	69
4.6	Lineare Iterationsverfahren	70
4.6.1	Klassische Iterationsverfahren	70
4.6.2	ILU-Verfahren	72
4.6.3	Blockverfahren	73
4.6.4	Mehrgitterverfahren	75
4.6.5	Krylovraum-Verfahren	80
5	Numerische Ergebnisse	85
5.1	Kanal mit Beule	85
5.1.1	Inkompressible Strömung	87
5.1.2	Subsonische Strömung	90
5.1.3	Transonische Strömung	96
5.1.4	Supersonische Strömung	101
5.1.5	Schwach kompressible Strömung in drei Raumdimensionen . .	107

5.2	Kanal mit Rampe	110
5.3	Backstep	112
6	Zusammenfassung und Ausblick	117
	Literaturverzeichnis	119

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

c	Schallgeschwindigkeit $\sqrt{p/\rho}$
d	Dimension des Raumes
e	Nach innen gerichteter Einheitsvektors auf die Erdoberfläche
g	Gravitationskonstante
g_i	Gravitation in x_i -Richtung
m	Massenfluss
n_i	i -te Komponente des nach außen gerichteten Normalenvektors
p	Druck
r	Residuum
u_i	Geschwindigkeit in x_i -Richtung
v	Geschwindigkeit
t	Zeit
t_i	i -te Komponente eines Tangentialvektors
x_i	Kartesische Koordinate
E	Totalenergie
G	Graph
I	Indexmenge
L	Länge
T	Temperatur

Griechische Symbole

δ_{ij}	Kronecker-Symbol
ε	Innere Energie

γ	Adiabatischer Koeffizient
μ	Dynamische Viskosität
ν	Kinematische Viskosität
ω	Relaxationsparameter
ρ	Dichte
τ_{ij}	Komponenten des Spannungs-Tensors
Φ	Skalare Größe
Δt	Zeitschrittweite
$\nabla\Phi$	Gradient einer Größe Φ
$\Delta\Phi$	Laplace-Operator einer Größe Φ
Ω	Gebiet
$\partial\Omega$	Rand eines Gebietes
$\int_{\Omega} dx$	Volumenintegral
$\int_{\partial\Omega} ds$	Oberflächenintegral

Dimensionslose Kennzahlen

Fr	Froudezahl
M	Globale Machzahl
Ma	Lokale Machzahl
Pe	Pecletzahl
Pr	Prandtlzahl
Re	Reynoldszahl

Abkürzungen

CV	Kontrollvolumen
SCV	Teilkontrollvolumen
SCVF	Teilkontrollvolumenseite
UDS	Upwind Difference Scheme
CDS	Central Difference Scheme
LPS	Linear Profile Skewed Upwinding
MWS	Mass Weighted Skewed Upwinding
REG	Reguläres Upwinding
POS	Positives Upwinding

PAC Physical Advection Correction

Indizes

<i>ip</i>	Integrationspunkt
<i>bip</i>	Randintegrationspunkt
<i>co</i>	Knotenpunkt
<i>up</i>	Upwindpunkt
<i>dn</i>	Downwindpunkt
0	Wert aus der letzten Iteration
–	Wert aus dem letzten Zeitschritt

Einführung

Für eine Vielzahl von technischen Problemen ist die Simulation kompressibler Strömungen kleiner Machzahl von Bedeutung. Typische Beispiele sind Detonationsprozesse und aeroakustische Phänomene.

Im Falle eines Verbrennungsprozesses kann eine anfangs niedrige Strömungsgeschwindigkeit durch eine Detonation so stark beschleunigt werden, dass die Strömung vom schwach kompressiblen ins voll kompressible Regime übergeht. Die Simulation solch eines Vorganges muss daher beiden Effekten Rechnung tragen können. Wichtig ist dabei die Erkenntnis, dass vor allem akustische Druckwellen zur Flammenbeschleunigung beitragen, die mit der Flammenfront interagieren. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von akustisch gezündeten Detonationsvorgängen.

Ein besonders gut verständliches Beispiel für aeroakustische Phänomene stellt die Berechnung der Schallemission einer Windturbine dar. Die Umfangsgeschwindigkeit der Blattspitzen beträgt bis zu 65m/s , es handelt sich also um eine schwach kompressible Strömung mit kleiner Machzahl. Die Schallemission großer Anlagen liegt jedoch im Bereich von 100dB , was die Akzeptanz solcher Windturbinen stark beeinträchtigt. Es ist deshalb eine Untersuchung der Blattgeometrie unter dem Blickwinkel der Schallabstrahlung vonnöten. Dies ist nur mit einem entsprechenden numerischen Werkzeug möglich, das zum einen die schwach kompressiblen Gleichungen löst und gleichzeitig eine direkte Kopplung zur akustischen Feldberechnung zulässt. Methoden, die zuerst die Strömung simulieren und anschließend das Schallfeld berechnen, sind aus dem letztgenannten Grund nicht geeignet. Das numerische Schema muss die Wechselwirkung der physikalischen Phänomene gekoppelt auflösen.

Die physikalischen Phänomene bei der Entstehung von Schall in einer Strömung treten auf sehr unterschiedlichen Skalen auf. Für die Strömung sind in der Regel sehr kleinskalige Strukturen dominierend, wie sie etwa bei der Turbulenz entstehen. Dagegen spielen bei der akustischen Schallausbreitung große Distanzen und Wellen-

längen eine dominierende Rolle. Charakterisierend für die Skalenunterschiede ist die Machzahl, die das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Schallausbreitungsgeschwindigkeit angibt. Bei aeroakustisch relevanten Simulationen kann die Machzahl sehr klein werden, sodass im schwach kompressiblen Regime eine Genauigkeit bis etwa $Ma = 10^{-6}$ erforderlich ist. Einen sehr guten Überblick über aeroakustische Fragestellungen und die spezifischen Methoden gibt der Vortrag von Költzsch [53] zum Thema Strömungsakustik.

Diese angeführten Beispiele zeigen den Bedarf für numerische Simulationswerkzeuge zur Lösung der kompressiblen Strömungsgleichungen, die sowohl bei kleinen als auch bei großen Machzahlen genau und effizient sind. Es stellt jedoch nach wie vor ein nicht unerhebliches Problem dar, den Grenzübergang vom Kompressiblen ins Inkompressible numerisch zu behandeln. Mehr noch, man kann sagen, dass die Welt der numerischen Strömungssimulation regelrecht in zwei Lager gespalten ist: Es gibt eine Vielzahl von Lösungen für das inkompressible Regime und ebenso viele grundlegend andere Ansätze für stark kompressible Strömungen. Inkompressible Lösungsverfahren werden in der Regel angewendet, wenn die Machzahl im ganzen zu untersuchenden Gebiet unterhalb von etwa $Ma = 0.3$ liegt. Das physikalische Modell für inkompressible Strömungen berücksichtigt jedoch keine kompressiblen Effekte. Dies macht es unmöglich, mit Hilfe eines inkompressiblen Verfahrens Strömungssimulationen durchzuführen, die sowohl kompressible als auch inkompressible Phänomene beinhalten. Umgekehrt haben kompressible Standardmethoden starke Schwierigkeiten bei der Lösung im schwach kompressiblen Regime oder sie versagen sogar ganz.

Ein Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt nun darin, ein neuartiges Diskretisierungsschema vorzustellen, das die Berechnung schwach kompressibler Strömungen zulässt, gleichzeitig aber auch in der Lage ist, Schocks und andere vollkompressible Effekte korrekt wiederzugeben. Zudem ist es möglich, sowohl reibungsfreie als auch reibungsbehaftete Strömungen zu simulieren. Der reibungsfreie Fall wird durch die Euler-Gleichungen beschrieben, wohingegen im reibungsbehafteten Fall die Navier-Stokes-Gleichungen das physikalische Modell bilden. Zur Simulation von schwach kompressiblen Strömungen wird der Mehrskalenansatz von Klein und Munz [52] eingesetzt. Dieser basiert auf einer asymptotischen Analyse der Strömungsgleichungen und führt auf ein modifiziertes Gleichungssystem. Das mathematische Modell der Euler-Gleichungen ist ein System hyperbolischer nichtlinearer Gleichungen, die Gleichungen des inkompressiblen Grenzfalles sind jedoch vom hyperbolisch-elliptischen Typ.

Die Modelle für die inkompressiblen, schwach kompressiblen und kompressiblen Gleichungen sowie für die reibungsbehafteten und reibungslosen Strömungen haben zwar grundlegend verschiedene physikalische und numerische Eigenschaften, unterscheiden sich jedoch nur in wenigen Termen. Aus diesem Grunde wird als Ziel die Entwicklung eines einheitlichen Softwarecodes für alle Gleichungstypen angestrebt. Die Implementierung erfolgt dabei unter Verwendung des am Institut für Informatik der Universität Heidelberg entwickelten Softwaretools *UG* [8]. Der Schwerpunkt von *UG* liegt auf der Bereitstellung standardisierter Werkzeuge für numerische Verfahren basierend auf unstrukturierten Gittern. Ein großer Vorteil ist die Integration von Simulationen in zwei und drei Raumdimensionen auf einer Abstraktionsebene. Zudem unterstützt *UG* die Parallelisierung und die Verwendung von lokal adaptiv verfeinerten Gittern.

Das aus der Diskretisierung entstehende Gleichungssystem wird mit einem linearen Mehrgitterverfahren gelöst. Obwohl ein Großteil der Konvergenztheorie nur bei Anwendung auf elliptische Differentialgleichungen Gültigkeit hat, so erweist sich das Mehrgitterverfahren in der Praxis für eine weitaus größere Klasse von Problemstellungen als effiziente Methode. In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Mehrgitterverfahren für kompressible und inkompressible Strömungen, zu denen an dieser Stelle ein kurzer Überblick gegeben werden soll.

Die ersten Mehrgitterverfahren zur schnellen Lösung der kompressiblen Euler-Gleichungen wurden von Jameson [43], Dick [22] und Hemker [37] vorgestellt. Im Wesentlichen basieren diese Verfahren auf der Verwendung von Standard-Mehrgitterkomponenten. Spätere Arbeiten von Mulder [64], [65] analysieren die Problematik der mangelnden Glättungseigenschaft bei hyperbolischen Gleichungen genauer. Die dabei eingeführte Semicoarsening-Strategie, die später von Oosterlee [75] zu einem algebraischen Mehrgitterverfahren verfeinert wurde, bleibt jedoch auf strukturierte Gitter beschränkt. Die erfolgreiche Anwendung von stromab nummerierten unvollständigen Zerlegungen als robuste Glättungsverfahren auf unstrukturierten Gittern demonstriert Haag [34]. Weitere Arbeiten auf unstrukturierten, adaptiv verfeinerten Gittern in drei Raumdimensionen haben vor allem Mavriplis und seine Arbeitsgruppe [62], [102] vorgelegt.

Für den inkompressiblen Grenzfall existiert ebenso eine Reihe verschiedener Ansätze. Zu nennen sind hier etwa die Arbeiten von Raw [85], Oosterlee [74] und Turek [99]. Grundlegend für die vorliegende Arbeit sind die ausführlichen Untersuchungen von Rentz-Reichert [88], [90] zur Konstruktion geeigneter Glätter für die inkompress-

siblen Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen. Desweiteren wurden in der Arbeitsgruppe von Wittum Mehrgitterverfahren für inkompressible turbulente Strömungen analysiert. Dabei werden bei Huurdeman [41] k - ε -Modelle in zwei Raumdimensionen verglichen, wohingegen Nägele [72] Mehrgitterverfahren für die Large-Eddy-Simulationen in zwei und drei Raumdimensionen entwickelt. Einen stark vereinfachten Ansatz für inkompressible Strömungen kleiner Machzahl verwendet Paxion [79] zur Simulation laminarer Flammen.

Schon dieser kurze Abriss gibt ein Gefühl für das große Spektrum der Anwendung von Mehrgitterverfahren für die kompressiblen und inkompressiblen Gleichungen. Für das schwach kompressible Regime liegen zwar eine Reihe unterschiedlicher Diskretisierungen vor, die Untersuchungen der Löser für Strömungen kleiner Machzahlen kommen aber nicht über die Anwendung von Standard-Krylovraumverfahren wie CGS oder GMRES hinaus. Diese Lücke soll nun in der vorliegenden Arbeit geschlossen werden.

Der Aufbau dieser Arbeit sieht in Kapitel 1 eine Einführung in die zugrunde liegenden Gleichungen der Strömungsmechanik vor. In Kapitel 2 werden verschiedene asymptotische Ansätze vorgestellt, mit deren Hilfe der Grenzübergang vom Kompressiblen ins Inkompressible mathematisch analysiert werden kann. Die endgültige Formulierung der zu betrachtenden Gleichungen wird in Kapitel 3 zur besseren Übersicht noch einmal notiert, bevor in Kapitel 4 die zur numerischen Behandlung der Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen angewandte Diskretisierung sowie die eingesetzten numerischen Lösungsverfahren beschrieben werden. Die Güte des vorgestellten numerischen Schemas wird anhand ausgewählter Testfälle in Kapitel 5 diskutiert. Es werden dabei Strömungen verschwindender, kleiner und großer Machzahl simuliert. Desweiteren wird die Fähigkeit des Verfahrens für reibungsbehaftete und reibungslose Strömungen aufgezeigt. Das letzte Kapitel 6 dient schließlich der Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit.

1 Grundlegende Gleichungen

Die elementaren physikalischen Modelle der Strömungsmechanik sind die Euler- und die Navier-Stokes-Gleichungen. Die Euler-Gleichungen beschreiben konvektionsdominierte Strömungen und kommen vor allem bei kompressiblen Strömungen höherer Machzahl zum Einsatz. Jedoch ist auch das inkompressible Limit von Interesse. Ist die Dissipation nicht mehr vernachlässigbar, so müssen zusätzliche Diffusionsterme berücksichtigt werden. Diese Effekte beschreibt das System der Navier-Stokes-Gleichungen. In den folgenden Abschnitten werden nun diese beiden Gleichungssysteme in der für das weitere Vorgehen notwendigen Notation eingeführt.

1.1 Euler-Gleichungen

Die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie einer kompressiblen reibungsfreien Strömung werden als Euler-Gleichungen der Strömungsmechanik bezeichnet. In Differentialform können sie bei Verwendung der Einsteinschen Summationskonvention

$$a_j b_j = a_1 b_1 + \dots + a_d b_d \quad \text{in einem Raum der Dimension } d$$

in folgender Form notiert werden:

Kontinuitätsgleichung

$$(1.1) \quad \frac{\partial \varrho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \varrho^* u_j^*}{\partial x_j^*} = 0$$

Impulsgleichung

$$(1.2) \quad \frac{\partial \varrho^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \varrho^* u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} = \varrho^* g^* e_i$$

Dabei ist $i = 1, 2$ für zweidimensionale und $i = 1, 2, 3$ für dreidimensionale Strömungen.

Energiegleichung

$$(1.3) \quad \frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(E^* + p^*)u_j^*}{\partial x_j^*} = \varrho^* g^* e_j u_j^*$$

Das hochgestellte Sternchen kennzeichnet die dimensionsbehafteten Größen, das sind die Zeit t^* , die Dichte ϱ^* , der Druck p^* und die Geschwindigkeitskomponenten u_i^* in den kartesischen Koordinaten x_i^* . Die totale Energie wird mit E^* bezeichnet. Sie setzt sich zusammen aus der inneren Energie ε^* , der kinetischen Energie und der potenziellen Energie. Das heißt, es ist

$$(1.4) \quad E^* = \varrho^* \varepsilon^* + \frac{1}{2} \varrho^* u_i^* u_i^* + \varrho g^* z.$$

Zusätzlich wurde in dem obigen Gleichungssystem die Gravitation berücksichtigt. Die Schwerkraft wirkt in Richtung des nach innen weisenden Normaleneinheitsvektors e auf die Erdoberfläche. Die Gravitationskonstante nimmt den Wert $g^* = 9.81 \frac{m}{s^2}$ an. Dabei bezeichne z die potenzielle Höhe über einem Bezugsniveau. Die hydrostatische Druckänderung ist durch die Zeitableitung der potenziellen Energie gegeben. Diese ist in der Gasdynamik in der Regel unbedeutend, sodass für die Ableitung der totalen Energie

$$(1.5) \quad \frac{\partial E^*}{\partial t} = \frac{\partial \varrho^* \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho^* u_i^* u_i^*}{\partial t}$$

gilt. In vielen Fällen kann die Gravitation auch vernachlässigt werden. Es ist in diesem Falle dann $g^* = 0$ zu setzen und die rechten Seiten in den Gleichungen (1.2) und (1.3) sowie der letzte Term in der Beziehung (1.4) verschwinden.

Die Euler-Gleichungen bilden ein System von hyperbolischen Gleichungen. Um dieses System zu schließen wird eine Zustandsgleichung benötigt, die den Zusammenhang zwischen den thermodynamischen Größen herstellt. Im Folgenden soll immer von einem kalorisch perfekten Gas ausgegangen werden. Für solch ein Gas gilt die Beziehung

$$(1.6) \quad p^* = (\gamma - 1) \varrho^* \varepsilon^*.$$

Dabei bezeichnet γ den adiabatischen Koeffizienten, der sich aus dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität c_p^* bei konstantem Druck und der spezifischen Wärmekapazität c_v^* bei konstanter Geschwindigkeit

$$\gamma = \frac{c_p^*}{c_v^*}$$

ergibt. Bei allen Rechnungen in dieser Arbeit wird Luft als Medium angenommen und es ist dann $\gamma = 1.4$.

1.2 Navier-Stokes-Gleichungen

Ist die Strömung reibungsbehaftet, so müssen zusätzliche Diffusionsterme berücksichtigt werden. Die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie einer kompressiblen viskosen Strömung sind als Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungsmechanik bekannt.

In vielen Anwendungen bleibt die Temperatur in dem zu simulierende Gebiet konstant. In einer physikalisch gesehen vollständigen Diskussion der Navier-Stokes-Gleichungen sind jedoch auch Effekte zu berücksichtigen, die sich aus einer Temperaturänderung ergeben. Aus diesem Grunde werden im Weiteren auch Terme für den Temperaturtransport und für Wärmequellen angegeben.

Unter diesen Voraussetzungen lauten dann die Navier-Stokes-Gleichungen in Differentialform wie folgt:

Kontinuitätsgleichung

$$(1.7) \quad \frac{\partial \varrho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \varrho^* u_j^*}{\partial x_j^*} = 0$$

Impulsgleichung

$$(1.8) \quad \frac{\partial \varrho^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \varrho^* u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*} = \varrho^* g^* e_i$$

Der im Vergleich zu (1.2) hinzugekommene Diffusionsterm ist durch den Spannungstensor

$$\tau_{ij}^* = \mu^* \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \mu^* \delta_{ij} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}$$

einer Newtonschen Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität $\mu^* = \varrho^* \nu^*$ gegeben. Die Viskosität ist von der Temperatur T^* abhängig.

Energiegleichung

$$(1.9) \quad \frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (E^* + p^*) u_j^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial \tau_{ij}^* u_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial \left(\kappa^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \right)}{\partial x_j^*} = \varrho^* g^* e_j u_j^* + \varrho^* q^*$$

In der Energiegleichung der Navier-Stokes-Gleichungen tritt also ebenso wie in der Impulsgleichung auf der linken Seite ein Diffusionsterm auf. Dieser beschreibt den Energieanteil, der durch Reibung in Wärme umgewandelt wird. Zumeist ist dieser Term sehr klein und wird deshalb auch oft vernachlässigt. Hinzu kommt der Term für den Wärmetransport. Dieser unterliegt dem Gesetz von Fourier, sodass der Koeffizient κ^* von der Temperatur T^* abhängig ist. Auf der rechten Seite ist zusätzlich zur Gravitationskraft aus (1.3) eine Wärmequelle modelliert. Die Wärmequelle wirkt mit einer Rate q^* und kann zum Beispiel aufgrund chemischer Reaktionen entstehen. Die Temperatur ist bei einem kalorisch perfekten Gas mit der Energie durch die Zustandsgleichung

$$\varepsilon^* = c_v^* T^*$$

gekoppelt. Setzt man diese Beziehung in die Zustandsgleichung (1.6) für den Druck ein, so erhält man

$$(1.10) \quad p^* = (\gamma - 1) \varrho^* \varepsilon^* = (c_p^* - c_v^*) \varrho^* T^* = \varrho^* R^* T^*.$$

Dabei bezeichnet $R^* = c_p^* - c_v^*$ die spezifische Gaskonstante.

Wie man sofort sieht, ergeben sich die Euler-Gleichungen als Spezialfall der Navier-Stokes-Gleichungen durch Vernachlässigung von Reibung und Temperaturänderungen, also für $\mu^* \equiv 0$ und $\kappa^* \equiv 0$. Ein grundlegender Unterschied besteht jedoch darin, dass sich durch Hinzunahme der Diffusionsterme der Charakter der Navier-Stokes-Gleichungen ändert. Bilden die Euler-Gleichungen ein rein hyperbolisches Gleichungssystem, so stellen die Navier-Stokes-Gleichungen ein hyperbolisch-elliptisches System dar. Eine genauere Betrachtung dieser Tatsache kann zum Beispiel in dem grundlegenden Buch von Kreiss und Lorenz [55] über die Navier-Stokes-Gleichungen gefunden werden.

1.3 Referenzgrößen

Die dieser Arbeit zugrunde liegenden Gleichungen werden mit Hilfe geeigneter Referenzgrößen dimensionslos gemacht. Die in der Literatur gängigen dimensionslosen Formulierungen verwenden hierzu Referenzgrößen für die Länge des physikalischen Gebietes, den Druck und die Dichte. Alle anderen Referenzwerte, unter anderem der für die Geschwindigkeit, ergeben sich dann aus der physikalischen Beziehung der dimensionsbehafteten Größen. Bei dieser Wahl haben die Strömungs- und die

Schallausbreitungsgeschwindigkeit dieselben Referenzwerte. Für mittlere und große Machzahlen ist diese Wahl adäquat. Für verschwindende Machzahlen wird diese Skalierung jedoch zunehmend ungeeignet, da sich dann die charakteristischen Werte dieser beiden Geschwindigkeiten um Größenordnungen unterscheiden. Aus diesem Grunde wird eine weitere Referenzgröße für die Geschwindigkeit eingeführt. Durch eine geeignete Wahl bleiben dann auch im Limit verschwindender Machzahl die dimensionslose Geschwindigkeit und die dimensionslose Schallgeschwindigkeit von derselben Größenordnung $O(1)$.

Im Folgenden wird somit zwischen der charakteristischen Strömungsgeschwindigkeit u_∞ und der charakteristischen Geschwindigkeit $c_\infty = \sqrt{p_\infty/\varrho_\infty}$ der Schallausbreitung unterschieden. Das Verhältnis der Strömungs- zur Schallausbreitungsgeschwindigkeit wird als globale Machzahl

$$M = \frac{u_\infty}{c_\infty} = \frac{u_\infty}{\sqrt{p_\infty/\varrho_\infty}}$$

bezeichnet. Diese dient als Maß für die Kompressibilität der Strömung. Für $M \rightarrow 0$ ergibt sich das inkompressible Limit, wohingegen $M \approx 1$ den kompressiblen Fall charakterisiert. Die globale Machzahl M ist von der lokalen Machzahl

$$Ma = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma p_\infty/\varrho_\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot M$$

zu unterscheiden. Wenn nicht explizit anders erwähnt, ist im Folgenden immer die globale Machzahl gemeint, wenn von der Machzahl gesprochen wird.

Schließlich wird die Referenzzeit t_∞ als charakteristische Zeit der Strömung definiert und nicht als charakteristische Zeit der akustischen Wellenausbreitung.

Im Einzelnen werden die folgenden Referenzgrößen verwendet:

l_∞	Referenzlänge
p_∞	Referenzdruck
ϱ_∞	Referenzdichte
u_∞	Referenzgeschwindigkeit
(1.11) $c_\infty = \sqrt{p_\infty/\varrho_\infty}$	Referenzschallgeschwindigkeit
$t_\infty = l_\infty/u_\infty$	Referenzzeit
$T_\infty = p_\infty/(\varrho_\infty R^*)$	Referenztemperatur
μ_∞	Referenzviskosität
κ_∞	Referenzwärmekoeffizient

1.4 Dimensionslose Navier-Stokes-Gleichungen

Die folgenden Umformungen werden nur anhand der Navier-Stokes-Gleichungen (1.7) - (1.9) aufgezeigt, da die Euler-Gleichungen (1.1) - (1.3) lediglich einen Spezialfall darstellen, der durch Vernachlässigen der Diffusions- und Wärmetransportterme in Impuls- und Energiegleichung entsteht.

Unter Verwendung der Gleichung (1.4) und der Zustandsgleichung (1.6) wird die Energiegleichung (1.9) umformuliert in den primitiven Variablen Dichte, Druck und Geschwindigkeit. Zudem wird, wie schon in Formel (1.5) angegeben, die hydrostatische Druckänderung vernachlässigt. Die Energiegleichung lautet dann:

$$(1.12) \quad \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho^* u_i^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial p^* u_j^*}{\partial x_j^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho^* (u_i^*)^2 u_j^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial \tau_{ij}^* u_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial \left(\kappa^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \right)}{\partial x_j^*} = \varrho^* g^* e_j u_j^* + \varrho^* q^*.$$

Subtrahiert man das u_i^* -fache der Kontinuitätsgleichung (1.7) von der Impulsgleichung (1.8), so vereinfacht sich die Impulsgleichung zu

$$(1.13) \quad \varrho^* \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \varrho^* u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*} = \varrho^* g^* e_i.$$

Ebenso vereinfacht sich die Energiegleichung (1.12), wenn man das $\frac{1}{2}(u_i^*)^2$ -fache der Kontinuitätsgleichung (1.7) und das u_i^* -fache der Impulsgleichung (1.13) abzieht. Die Energiegleichung lautet dann

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial p^* u_j^*}{\partial x_j^*} - u_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \tau_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial \left(\kappa^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \right)}{\partial x_j^*} = \varrho^* q^*.$$

Durch Zusammenfassen gleicher Terme erhält man schließlich

$$(1.14) \quad \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} + \gamma p^* \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*} - (\gamma - 1) \tau_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} - (\gamma - 1) \frac{\partial \left(\kappa^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \right)}{\partial x_j^*} = (\gamma - 1) \varrho^* q^*.$$

Die Umrechnung der dimensionsbehafteten in die dimensionslosen Größen geschieht

mit Hilfe der Referenzgrößen (1.11) durch das folgende Schema:

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{\varrho^*}{\varrho_\infty}, & p &= \frac{p^*}{p_\infty}, & u_i &= \frac{u_i^*}{u_\infty} \\
 x_i &= \frac{x_i^*}{l_\infty}, & t &= \frac{t^*}{t_\infty} = \frac{t^*}{l_\infty/u_\infty} \\
 E &= \frac{E^*}{p_\infty/\varrho_\infty}, & T &= \frac{T^*}{T_\infty} = \frac{T^*}{p_\infty/(\varrho_\infty R^*)} \\
 \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_\infty}, & \kappa &= \frac{\kappa^*}{\kappa_\infty}.
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Mit Hilfe dieses Schemas (1.15) ist es nun ein Leichtes, die Navier-Stokes-Gleichungen in dimensionsloser Formulierung anzugeben. Sie lauten:

Kontinuitätsgleichung (Dichtegleichung)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_j}{\partial x_j} = 0
 \tag{1.16}$$

Impulsgleichung (Geschwindigkeitsgleichung)

$$\varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \varrho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{Fr^2} \varrho e_i
 \tag{1.17}$$

Hierbei ist $Re = \frac{\varrho_\infty l_\infty u_\infty}{\mu_\infty}$ die Reynoldszahl der Strömung. Der dimensionslose Spannungs-Tensor τ_{ij} ist durch

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

gegeben. Die Froudezahl $Fr = \frac{u_\infty}{\sqrt{g^* l_\infty}}$ charakterisiert das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit der Schwerewellen.

Energiegleichung (Druckgleichung)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{M^2}{Re} (\gamma - 1) \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\gamma}{Re Pr} \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}{\partial x_j} = (\gamma - 1) \varrho q
 \tag{1.18}$$

Als weitere dimensionslose Kennzahl erscheint die Prandtlzahl $Pr = \frac{c_p \mu_\infty}{\kappa_\infty}$. Die dimensionslose Wärmequelle ist gegeben durch

$$q = \frac{l_\infty \varrho_\infty}{u_\infty p_\infty} q^*.$$

Die Kopplung zwischen Druck, Dichte und Temperatur, wie sie durch die Zustandsgleichung (1.10) beschrieben wird, lautet in dimensionsloser Formulierung

$$(1.19) \quad T = \frac{p}{\varrho}$$

Mit Hilfe von Sutherland's Gesetz

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\mu c_p^*}{Pr} \\ \mu &= T^{\frac{3}{2}} \frac{1+S}{T+S}, \end{aligned}$$

in das die Konstante $S = \frac{110.5K}{T_\infty}$ eingeht, kann eine Beziehung zwischen der dynamischen Viskosität μ und dem Wärmeleitkoeffizienten κ hergestellt werden. Nimmt man dabei an, dass für die Prandtlzahl $Pr^* = \frac{c_p^* \mu^*}{\kappa^*} = Pr$ gilt, so erhält man die Gleichheit

$$\kappa = \mu.$$

In den meisten Rechnungen, insbesondere ohne Turbulenz, kann jedoch die dynamische Viskosität und somit auch der Wärmeleitkoeffizient als konstant angenommen werden. Es ist dann in der dimensionslosen Formulierung $\kappa = \mu = 1$. In den obigen Gleichungen vereinfachen sich dann die dissipativen Terme und der Wärmeleitungsterm, der sich zum Laplace-Operator der Temperatur reduziert.

1.5 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Viel diskutiert werden in der Literatur die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. In technischen Anwendungen werden sie zumeist als vereinfachtes Modell verwendet, wenn die Machzahl $Ma \leq 0.3$ ist und auf Wärmetransport verzichtet werden kann. Im Spezialfall einer inkompressiblen Strömung können die Navier-Stokes-Gleichungen so weit vereinfacht werden, dass die Energiegleichung keine neue Bedingung liefert und sich das Gleichungssystem somit um eine Gleichung reduziert.

Man spricht von inkompressiblen Strömungen, wenn Dichteänderungen eines Strömungspartikels vernachlässigbar sind. Mit dem Begriff Strömungspartikel ist dabei ein infinitesimal kleiner Teil der Strömung gemeint. Mathematisch korrekt lässt sich eine inkompressible Strömung somit dadurch beschreiben, dass die totale Ableitung der Dichte verschwindet:

$$(1.20) \quad \frac{D\varrho}{Dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + u_j \frac{\partial\varrho}{\partial x_j} = 0.$$

In diesem Falle vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (1.16) zur Divergenzbedingung

$$(1.21) \quad \varrho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Zu beachten ist hierbei, dass aus der Bedingung (1.20) an die Dichte nicht zwangsläufig folgt, dass diese konstant im Gebiet ist. Es muss lediglich die Dichte eines jeden Partikels konstant bleiben.

Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lauten nach Verwendung der Beziehung (1.20) und nach Einsetzen der Divergenzbedingung (1.21) in die Impulsgleichung wie folgt:

Kontinuitätsgleichung

$$(1.22) \quad \varrho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Impulsgleichung

$$(1.23) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varrho M^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{Fr^2} e_i$$

Der Spannungs-Tensor einer Newtonschen Flüssigkeit mit der kinematischen Viskosität ν vereinfacht sich zu

$$\tau_{ij} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Unter Annahme einer konstanten Temperatur ist bei einem idealen Gas die Energiegleichung automatisch erfüllt, wenn (1.20) gilt.

Bei Berücksichtigung von Temperaturschwankungen kann die Energiegleichung auch in eine Temperaturgleichung umgeformt werden. Man erhält die Transportgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{\gamma}{\varrho Re Pr} \frac{\partial \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}}{\partial x_j} = 0.$$

2 Asymptotik

In der Literatur finden sich mehrere Ansätze zur Beschreibung von Strömungen kleiner Machzahl. Die meisten davon beruhen dabei auf einer asymptotischen Analyse der Gleichungen. Diese Analyse dient dazu, einen Einblick in das Verhalten der Gleichungen im singulären Limit $M = 0$ zu erhalten.

Sehr grundlegende Arbeiten für diesen Ansatz stammen von Klainerman und Majda [48], [49]. Die Autoren können mit Hilfe einer Einskalenasymptotik zeigen, dass in offenen Gebieten die Lösung der Euler-Gleichung im Limit $M \rightarrow 0$ gegen die Lösung der inkompressiblen Euler-Gleichungen strebt. Akustische Störungen werden in dieser Untersuchung ausgeschlossen.

Um zusätzlich langwellige akustischen Störungen berücksichtigen zu können, entwickelte Klein [50] in Zusammenarbeit mit Munz [52] eine asymptotische Analyse, die auf zwei Längenskalen und einer Zeitskala beruht.

Ein weiterer asymptotischer Ansatz stammt von Müller [66]. Dieser verwendet im Unterschied zu Klein eine Längenskala und zwei Zeitskalen. Diese Vorgehensweise wird in dieser Arbeit jedoch nicht näher diskutiert werden.

Im Folgenden soll nun die asymptotische Analyse von Klein vorgestellt werden. Zunächst wird jedoch der Ansatz von Klainerman und Majda besprochen, da dieser bereits wesentliche Erkenntnisse enthält. Dabei wird die Notation von Klein verwendet, sodass ein einfacher Vergleich möglich ist.

2.1 Einskalenasymptotik

Bei Strömungen, die von der Temperatur getrieben werden oder bei Verbrennungen kleiner Machzahl ist ein asymptotischer Ansatz mit einer Längenskala und einer Zeitskala adäquat. Jede Variable wird dann bezüglich der Machzahl in einer formalen

Entwicklung geschrieben, um den Grenzübergang $M \rightarrow 0$ analysieren zu können. Der asymptotische Ansatz lautet dann

$$(2.1) \quad f(x, t, M) = f^{(0)}(x, t) + M f^{(1)}(x, t) + M^2 f^{(2)}(x, t) + O(M^3)$$

mit $f = (\varrho, u_i, p)$.

Zunächst wird am Beispiel des Impulses ϱu_i die Vorgehensweise bei den nichtlinearen Termen veranschaulicht. Es ist

$$(\varrho u_i) = \varrho \cdot u_i$$

und somit nach Einsetzen des asymptotischen Ansatzes auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} (\varrho u_i)^{(0)} + M(\varrho u_i)^{(1)} + M^2(\varrho u_i)^{(2)} + O(M^3) \\ = (\varrho^{(0)} + M\varrho^{(1)} + M^2\varrho^{(2)} + O(M^3)) \cdot (u_i^{(0)} + M u_i^{(1)} + M^2 u_i^{(2)} + O(M^3)). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich der Terme gleicher Ordnung in der Machzahl ergibt dann die folgenden Beziehungen:

$$(2.2) \quad (\varrho u_i)^{(0)} = \varrho^{(0)} u_i^{(0)}$$

$$(2.3) \quad (\varrho u_i)^{(1)} = \varrho^{(0)} u_i^{(1)} + \varrho^{(1)} u_i^{(0)}$$

$$(2.4) \quad (\varrho u_i)^{(2)} = \varrho^{(0)} u_i^{(2)} + \varrho^{(1)} u_i^{(1)} + \varrho^{(2)} u_i^{(0)}.$$

Analog hierzu wird nun der asymptotische Ansatz (2.1) in die Navier-Stokes-Gleichungen (1.16) - (1.18) eingesetzt. Sortiert man die Terme nach Termen gleicher Ordnung in der Machzahl, so lässt sich die Kontinuitätsgleichung schreiben als

$$\frac{\partial \varrho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u_j)^{(0)}}{\partial x_j} + M \left(\frac{\partial \varrho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u_j)^{(1)}}{\partial x_j} \right) + O(M^2) = 0.$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn alle Koeffizienten verschwinden, das heisst wenn

$$(2.5) \quad \frac{\partial \varrho^{(l)}}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u_j)^{(l)}}{\partial x_j} = 0$$

für $l = 0, 1$ gilt. Dies sind die Kontinuitätsgleichungen führender und erster Ordnung.

Unter Verwendung der Beziehung (2.2) lautet die Impulsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{1}{M} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} \\ + \varrho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \varrho^{(0)} u_j^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} - \frac{1}{Fr^2} \varrho^{(0)} e_i \\ + O(M) = 0. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man somit die Impulsgleichungen führender, erster und zweiter Ordnung:

$$(2.6) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} = 0$$

$$(2.8) \quad \varrho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \varrho^{(0)} u_j^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{1}{Fr^2} \varrho^{(0)} e_i.$$

Dieselbe Argumentation wird schließlich bei der Energiegleichung angewendet. Mit Hilfe des asymptotischen Ansatzes und unter Verwendung der Beziehungen (2.2) sowie (2.3) lautet sie wie folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} - C^{(0)} \\ & + M \left(\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_j} + u_j^{(1)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} - C^{(1)} \right) \\ & + O(M^2) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$(2.9) \quad C^{(l)} = \frac{\gamma}{RePr} \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(l)}}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \varrho^{(l)} q.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert dann die Bedingungen

$$(2.10) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = C^{(0)}$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_j} + u_j^{(1)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = C^{(1)}$$

für die Energiegleichung führender und erster Ordnung.

Betrachtet man nun die einzelnen Bedingungen genauer, so erkennt man aus der Impulsgleichung führender Ordnung (2.6), dass der Druck führender Ordnung konstant im Raum sein muss. Das bedeutet, es ist

$$(2.12) \quad p^{(0)} = p^{(0)}(t).$$

Mit derselben Schlussfolgerung impliziert die Impulsgleichung erster Ordnung (2.7), dass der Druck erster Ordnung ebenso konstant im Raum ist. Es gilt also

$$(2.13) \quad p^{(1)} = p^{(1)}(t).$$

Mit Hilfe der Beziehungen (2.12) und (2.13) vereinfachen sich dann die Energiegleichungen führender (2.10) und erster Ordnung (2.11). Sie lauten somit

$$(2.14) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = C^{(0)}$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = C^{(1)}.$$

Multipliziert man die Navier-Stokes-Gleichungen erster Ordnung (2.5), (2.7) und (2.11) mit der Machzahl M und addiert sie zu den Navier-Stokes-Gleichungen führender Ordnung (2.5), (2.6) und (2.10), so erhält man gerade die Navier-Stokes-Gleichungen führender Ordnung für den asymptotischen Ansatz mit

$$\tilde{f}^{(0)} = f^{(0)} + M f^{(1)}.$$

Das bedeutet, dass man aus der Entwicklung erster Ordnung $f^{(1)}$ keine neue Information gewinnt. Es ist also vollkommen ausreichend, von einer Entwicklung der Form

$$f = f^{(0)} + M^2 f^{(2)} + O(M^3)$$

auszugehen.

Mit Hilfe der asymptotischen Analyse ist es somit möglich, das Limit der Navier-Stokes-Gleichungen für kleine Machzahlen anzugeben. Es sind dies die Gleichungen führender Ordnung, die hier noch einmal zusammengefasst werden sollen

$$(2.16) \quad \frac{\partial \varrho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \varrho^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j} = 0$$

$$(2.17) \quad \varrho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \varrho^{(0)} u_j^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{1}{Fr^2} \varrho^{(0)} e_i$$

$$(2.18) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} - \frac{\gamma}{RePr} \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)}}{\partial x_j} = (\gamma - 1) \varrho^{(0)} q.$$

Dieses Gleichungssystem ist in der Literatur unter der Bezeichnung *Gleichungen kleiner Machzahl* zu finden.

Integriert man die Energiegleichung führender Ordnung (2.18) über das Rechengebiet Ω , berücksichtigt die Beziehung (2.12) und wendet das Gauß'sche Theorem an, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung für den Druck führender Ordnung $p^{(0)}$:

$$(2.19) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} u_j^{(0)} n_j ds + \frac{\gamma}{RePr|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)} n_j ds + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varrho^{(0)} q dx.$$

Liegen im Rechengebiet keine Wärmequellen vor, so ist der Druck $p^{(0)}$ lediglich durch die Randbedingungen bestimmt. Dies bedeutet, dass der Druck führender Ordnung nur durch globale Kompressionseffekte beeinflusst wird. Solche Effekte können zum Beispiel durch Kolbenbewegungen, Kompressionseffekte aufgrund von vorgeschriebenen Massenflüssen oder Temperaturschwankungen durch beheizte Wände entstehen. Aus der Gleichung (2.18) ergibt sich eine verallgemeinerte Divergenzbedingung an die Geschwindigkeit:

$$(2.20) \quad \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{p^{(0)} RePr} \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma T^{(0)}} q.$$

Dies bedeutet, dass die Divergenz der Geschwindigkeit durch eine Hintergrundkompression, durch Wärmetransport und durch Wärmequellen beeinflusst wird. Setzt man diese verallgemeinerte Divergenzbedingung in die Kontinuitätsgleichung führender Ordnung (2.16) ein, so erhält man eine Beschreibung der Kompression entlang von Partikelpfaden:

$$(2.21) \quad \frac{D\varrho^{(0)}}{Dt} = \frac{\varrho^{(0)}}{\gamma p^{(0)}} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} - \frac{1}{T^{(0)} RePr} \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)}}{\partial x_j} - \frac{(\gamma - 1)\varrho^{(0)}}{\gamma T^{(0)}} q.$$

Unter der Annahme einer konstanten Hintergrundkompression und bei Vernachlässigung von Wärmeeffekten, das heißt $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} = 0$ und $C^{(0)} = 0$, erhält man die Bedingung für eine inkompressible Strömung (1.20) und die Divergenzbedingung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (1.21).

Die Divergenz von $u^{(0)}$ ist in der Regel ungleich Null. Die Bedeutung der Geschwindigkeit führender Ordnung $u^{(0)}$ und des Druckes zweiter Ordnung $p^{(2)}$ ist jedoch analog zu Geschwindigkeit und Druck in einer inkompressiblen Strömung. Setzt man die Dichte $\varrho^{(0)}$ und den Druck $p^{(0)}$ als bekannt voraus, so ist die rechte Seite

in (2.20) vollständig bestimmt. Die Geschwindigkeit $u^{(0)}$ lässt sich also alleine aus der Divergenzbedingung berechnen. Nimmt man $u^{(0)}$ und $\rho^{(0)}$ als glatte Funktionen an, so kann die Impulsgleichung führender Ordnung (2.17) differenziert werden und es ergibt sich eine Poisson-Gleichung für den Druck zweiter Ordnung $p^{(2)}$. An dieser Stelle treten dann die Reibungs- und Gravitationsterme auf. Zudem hat der Druck $p^{(2)}$ in den Gleichungen kleiner Machzahl eine wichtige Gemeinsamkeit mit dem Druck in den inkompressiblen Gleichungen. Er ist entkoppelt von Dichteschwankungen, die in der Zustandsgleichung beschrieben werden. Es ist somit naheliegend, numerische Methoden für die inkompressiblen Gleichungen auch für die Gleichungen kleiner Machzahl zu verwenden.

Entscheidend für die Entwicklung eines numerischen Codes ist hierbei die Erkenntnis, dass die Divergenzbedingung der inkompressiblen Gleichungen, die ja nur den Spezialfall bei konstanter Hintergrundkompression und vernachlässigter Temperatur darstellen, aus der Energiegleichung hergeleitet wurde und nicht wie bei den inkompressiblen Gleichungen aus der Kontinuitätsgleichung.

2.2 Mehrskalenasymptotik

Die Einskalenasymptotik von Klainerman und Majda liefert schon sehr wesentliche Erkenntnisse für das Verhalten von Strömungen kleiner Machzahl. Es ist jedoch mit ihrer Hilfe nicht möglich, akustische Effekte zu modellieren. Da die Schallausbreitungsgeschwindigkeit sich um Größenordnungen von der Strömungsgeschwindigkeit unterscheidet, benötigt man zumindest zwei Skalen. Man kann dies erreichen, indem man weiterhin eine Längenskala x benutzt, aber für die Schallausbreitung und die Strömung zwei unterschiedliche Zeitskalen τ und t annimmt. Dieser Ansatz wurde von Müller [66], [67], [68] entwickelt. Er eignet sich für die Modellierung kurzweiliger Akustik.

Will man die Effekte einer langwelligen Akustik auf die Strömung untersuchen, wie sie zum Beispiel bei der Wechselwirkung der Akustik mit der Flammenausbreitung bei einer Detonation vorkommen, so ist ein anderer Ansatz sinnvoller, der von Klein [50] in Zusammenarbeit mit Munz [52] erforscht wurde. Der grundlegende Gedanke beider Autoren ist die Verwendung einer Zeitskala t und zweier räumlicher Skalen x und ξ für die Strömung und die Schallausbreitung. Auf diesem Ansatz basieren diverse andere Veröffentlichungen und auch die hier vorliegende Arbeit. In der ursprünglichen Arbeit von Klein [50], der Arbeit von Schneider et al. [95] und der

Dissertation von Geratz [26] wurde eine Asymptotik basierend auf den konservativen Variablen Druck, Impuls und Energie vorgestellt, da die Autoren einen Löser für kompressible Strömungen erweitert haben. In Munz et al. [70] und Roller et al. [91] wird dagegen die Asymptotik für die primitiven Variablen Dichte, Druck und Geschwindigkeit durchgeführt.

Dieser zweite Ansatz wird auch in dieser Arbeit gewählt, da die später vorgestellte Diskretisierung auf den primitiven Variablen basiert. Im Gegensatz zu den oben genannten Quellen wird jedoch im Folgenden die asymptotische Analyse für die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen besprochen. So wird dem interessierten Leser ein besserer Vergleich zu dem anderen Mehrskalensatz von Müller [67] ermöglicht.

Im Unterschied zur Entwicklung (2.1) lautet der Ansatz nun

$$(2.22) \quad f(x, \xi, t, M) = f^{(0)}(x, \xi, t) + Mf^{(1)}(x, \xi, t) + M^2 f^{(2)}(x, \xi, t) + O(M^3).$$

Dabei wird die akustische Längenskala ξ gerade so gewählt, dass

$$x = M\xi$$

gilt. Da die Längenskalen als unabhängig voneinander betrachtet werden, erhält man mit der Kettenregel die folgende Beziehung für die Raumableitungen

$$(2.23) \quad \nabla f = \nabla_x f^{(0)} + M\nabla_\xi f^{(0)} + M\nabla_x f^{(1)} + M^2\nabla_\xi f^{(1)} + M^2\nabla_x f^{(2)} + O(M^3)$$

mit den räumlichen Gradienten bezüglich der x - und ξ -Skala.

Die formale Entwicklung (2.22) wird in die Navier-Stokes-Gleichungen (1.16) - (1.18) eingesetzt. Unter Verwendung der Beziehung (2.23) über die Raumableitungen erhält man für die Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + M \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} \\ & + \frac{\partial(\rho u_j)^{(0)}}{\partial x_j} + M \frac{\partial(\rho u_j)^{(0)}}{\partial \xi_j} + M \frac{\partial(\rho u_j)^{(1)}}{\partial x_j} \\ & + O(M^2) = 0. \end{aligned}$$

Die Impulsgleichung wird zu

$$\begin{aligned}
& \varrho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \varrho^{(0)} u_j^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{M^2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{1}{M} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{M} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} \\
& - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} - \frac{1}{Fr^2} \varrho^{(0)} e_i \\
& + O(M) = 0.
\end{aligned}$$

Und schließlich ergibt sich aus der Energiegleichung die Beziehung

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + M \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} \\
& + \left(u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)^{(0)} + M \left(u_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \right)^{(0)} + M \left(u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)^{(1)} \\
& + \left(\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^{(0)} + M \left(\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial \xi_j} \right)^{(0)} + M \left(\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^{(1)} \\
& - C^{(0)} - MC^{(1)} - M \frac{\gamma}{RePr} \left(\frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial \xi_j} \right)^{(0)}}{\partial x_j} \right) \\
& + O(M^2) = 0
\end{aligned}$$

mit $C^{(l)}$ aus Beziehung (2.9).

Analog zu der Vorgehensweise bei der Einskalenasymptotik werden Terme mit gleicher Ordnung in der Machzahl M zusammengefasst. Mit denselben Argumenten müssen wiederum die Koeffizienten verschwinden, sodass man die folgenden Navier-Stokes-Gleichungen führender, erster, beziehungsweise zweiter Ordnung erhält:

Kontinuitätsgleichung führender und erster Ordnung

$$(2.24) \quad \frac{\partial \varrho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_j)^{(0)}}{\partial x_j} = 0$$

$$(2.25) \quad \frac{\partial \varrho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_j)^{(1)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial(\varrho u_j)^{(0)}}{\partial x_j} = 0$$

Impulsgleichung führender, erster und zweiter Ordnung

$$(2.26) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0$$

$$(2.27) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} = 0$$

$$(2.28) \quad \varrho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \varrho^{(0)} u_j^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{1}{Fr^2} \varrho^{(0)} e_i$$

Energiegleichung führender und erster Ordnung

$$(2.29) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \left(u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)^{(0)} + \left(\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^{(0)} = C^{(0)}$$

$$(2.30) \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \left(u_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \right)^{(0)} + \left(u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)^{(1)} + \left(\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial \xi_j} \right)^{(0)} + \left(\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^{(1)} = \tilde{C}^{(1)}$$

Hierbei ergibt sich die rechte Seite der Energiegleichung erster Ordnung zu

$$\tilde{C}^{(1)} = C^{(1)} + \frac{\gamma}{RePr} \left(\frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial \xi_j} \right)^{(0)}}{\partial x_j} \right)$$

Diese Gleichungen sollen nun diskutiert werden. Aus der Impulsgleichung führender Ordnung (2.26) folgt sofort, dass der Druck führender Ordnung $p^{(0)}$ unabhängig von der Längenskala der Strömung ist. Das bedeutet, es ist

$$(2.31) \quad p^{(0)} = p^{(0)}(\xi, t)$$

Bei der Betrachtung der Impulsgleichung erster Ordnung (2.27) kann man bekannte Techniken der Mehrskalenasymptotik anwenden, insbesondere Mittelungstechniken: Die x - und ξ -Variablen sind im Limit $M \rightarrow 0$ als unabhängig zu betrachten. Man mittelt nun die Gleichung (2.27) bezüglich der lokalen Strömungsstrukturen. Multipliziert man die Gleichung mit einem beliebigen Einheitsvektor b und integriert über ein Gebiet Ω bezüglich x , so erhält man

$$\int_{\Omega} b_i \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_i} dx + \int_{\Omega} b_i \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} dx = 0$$

Der Integrand im ersten Integral ist aufgrund der Beziehung (2.31) konstant in Ω in Bezug auf x . Mit Hilfe dieser Erkenntnis und des Gauß'schen Satzes lässt sich die Gleichung vereinfachen zu

$$(2.32) \quad b_i \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} b_i p^{(1)} n_i ds = 0$$

Um einen konsistenten asymptotischen Entwicklungsansatz mit $Mp^{(1)} \ll p^{(0)}$ für beliebige x und ξ zu haben, muss $p^{(1)}$ in x beschränkt sein oder zumindest schwächer als linear anwachsen. Ein mathematisch rigoroser Beweis dieses Argumentes findet sich in Meister [63]. Die Gleichung (2.32) muss für beliebige Gebiete Ω gelten, also insbesondere auch für Gebiete, bei denen $1/|\Omega| \rightarrow 0$ strebt. Somit verschwindet der zweite Term in (2.32) und es muss

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_i} = 0$$

gelten. Daraus ergibt sich, dass $p^{(0)}$ auch unabhängig von der Längenskala ξ der akustischen Wellenausbreitung ist. Aus Gleichung (2.27) erhält man dann sofort, dass der Druck erster Ordnung $p^{(1)}$ unabhängig von der Längenskala x der Strömung ist. Zusammengefasst gilt also

$$(2.33) \quad p^{(0)} = p^{(0)}(t)$$

$$(2.34) \quad p^{(1)} = p^{(1)}(\xi, t).$$

Die nächste in den Überlegungen zu betrachtende Gleichung ist die Energiegleichung führender Ordnung (2.29). Mit Hilfe der Beziehung (2.2) lässt sich diese schreiben als

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = C^{(0)}.$$

Aufgrund der Gleichung (2.33) ist der zweite Term gleich Null und es ergibt sich

$$(2.35) \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} - \frac{\gamma}{RePr} \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)}}{\partial x_j} = (\gamma - 1) \varrho^{(0)} q.$$

Es wird wiederum über ein Gebiet Ω gemittelt, sodass die folgende Beziehung entsteht:

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} = & -\frac{\gamma p^{(0)}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} u_j^{(0)} n_j ds \\ & + \frac{\gamma}{RePr |\Omega|} \int_{\partial\Omega} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)} n_j ds + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varrho^{(0)} q dx. \end{aligned}$$

Wie mit einem Blick zu erkennen ist, stimmt Gleichung (2.36) mit der Gleichung (2.19) der Einskalenasymptotik überein. Es ergibt sich somit vollkommen analog eine verallgemeinerte Divergenzbedingung an die Geschwindigkeit:

$$(2.37) \quad \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{p^{(0)} RePr} \frac{\partial \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma T^{(0)}} q.$$

Bis hierhin unterscheiden sich die Einskalenasyptotik und der Mehrskalenansatz nicht allzu sehr. Die nun folgenden Überlegungen dienen der Behandlung langwelliger akustischer Moden, die mit Hilfe der Einskalenasyptotik nicht erklärt werden können.

2.3 Akustische Gleichungen

Die entscheidende Größe auf der langwelligen Skala ξ ist der Druckterm $p^{(1)}$. Dieser tritt in der Impulsgleichung zweiter Ordnung (2.28) und der Energiegleichung erster Ordnung (2.30) auf. Die Impulsgleichung wird in konservativer Formulierung geschrieben und die Energiegleichung wird unter Verwendung der Beziehungen (2.33) und (2.34) vereinfacht. Sie lauten mit Hilfe dieser Umformungen

$$(2.38) \quad \frac{\partial(\varrho u_i)^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_i u_j)^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{1}{Fr^2} \varrho^{(0)} e_i$$

$$(2.39) \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial \xi_j} + \gamma p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} = \tilde{C}^{(1)}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann ein System von akustischen Gleichungen mit Hilfe der Mittelungstechnik hergeleitet werden.

Für die Mittelung über ein Gebiet auf der x -Skala wird die abkürzende Notation

$$\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx$$

eingeführt. Wie schon mehrfach verwendet, soll auch hier das sublineare Wachstum von $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $\varrho^{(0)}$ sowie $p^{(2)}$ angenommen werden. Mittelt man nun die obigen beiden Gleichungen bezüglich der x -Skala, so erhält man das akustische Gleichungssystem

$$(2.40) \quad \frac{\partial \overline{(\varrho u_i)^{(0)}}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} = \frac{1}{Fr^2} \overline{\varrho}^{(0)} e_i$$

$$(2.41) \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial \overline{u_j^{(0)}}}{\partial \xi_j} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem beschreibt die Ausbreitung akustischer Wellen mit kleiner Amplitude und großer Wellenlänge. Das Verschwinden der viskosen Terme und der Terme des Temperaturtransportes in diesem System soll an dieser Stelle noch etwas ausführlicher betrachtet werden: Beschränkt man sich auf die Euler-Gleichungen, so sind diese identisch Null, sodass keine weiteren Probleme auftreten. Im Fall der

Navier-Stokes-Gleichungen muss man zusätzlich sublineares Wachstum für die Ableitungen der Größen voraussetzen, insbesondere für $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sowie $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial T}{\partial \xi_j}$. Unter dieser Annahme verschwinden die Terme mit dem üblichen Argument bei der Mittelung.

Problematisch ist jedoch, dass das System nicht geschlossen ist. In der ersten Gleichung (2.40) tritt der gemittelte Impuls $\overline{(\rho u_i)}^{(0)}$ führender Ordnung auf, während in der zweiten Gleichung (2.41) die gemittelte Geschwindigkeit $\overline{u_j}^{(0)}$ führender Ordnung vorkommt. Um Abhilfe zu schaffen, wird nun die Geschwindigkeit aufgespalten in den gemittelten Anteil, der nur auf der akustischen ξ -Skala lebt und den Anteil der kleinskaligen Schwankungen, die auf der x -Skala auftreten:

$$u_i = \overline{u_i}(\xi, t) + \tilde{u}_i(x, \xi, t).$$

Die Zeitableitung des Impulses in Gleichung (2.40) kann daher umgeformt werden zu

$$(2.42) \quad \frac{\partial \overline{(\rho u_i)}^{(0)}}{\partial t} = \overline{\rho}^{(0)} \frac{\partial \overline{u_i}^{(0)}}{\partial t} + \overline{u_i}^{(0)} \frac{\partial \overline{\rho}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}^{(0)} \tilde{u}_i^{(0)}}{\partial t}.$$

Mittelt man die Kontinuitätsgleichung führender Ordnung (2.24) bezüglich der x -Skala, so erhält man die Beziehung

$$\frac{\partial \overline{\rho}^{(0)}}{\partial t} = 0.$$

Der zweite Term in (2.42) verschwindet somit.

Der besseren Lesbarkeit halber wird im Folgenden auf den Ordnungsindex der Dichte- und Geschwindigkeitsterme verzichtet, da dieser eindeutig ist. Das akustische Gleichungssystem liest sich somit jetzt wie folgt:

$$(2.43) \quad \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{\rho \tilde{u}_i}}{\partial t} + \frac{1}{Fr^2} e_i$$

$$(2.44) \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \gamma p^{(0)} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial \xi_j} = 0.$$

Betrachtet man die rechte Seite in (2.43) als Quellterm, so beschreibt das akustische Gleichungssystem eine Wellengleichung. Dieser inhomogene Quellterm sorgt für die Kopplung der kleinskaligen Strömung mit der überlagerten langwelligen Akustik.

Verschwindet der Quellterm und ist keine Hintergrundkompression vorhanden, so lässt sich das akustische Gleichungssystem in der üblichen Form einer Wellengleichung schreiben

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(c_0^2 \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} \right) = 0$$

mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

$$c_0^2 = \frac{\gamma p^{(0)}}{\bar{\rho}}.$$

2.4 Ergebnisse der asymptotischen Analyse

Mit Hilfe der asymptotischen Analyse wird erkennbar, dass die Druckterme führender, erster und zweiter Ordnung $p^{(0)}$, $p^{(1)}$ sowie $p^{(2)}$ die Geschwindigkeit $u^{(0)}$ und die Dichte $\rho^{(0)}$ führender Ordnung beeinflussen. Umgekehrt haben jedoch die Terme höherer Ordnung der Geschwindigkeitsexpansion keinen Einfluss auf diese Druckterme. Man kann also davon ausgehen, dass im Limit $M \rightarrow 0$ die oben genannten fünf Variablen die einzig relevanten sind. Alle anderen Terme höherer Ordnung werden deshalb vernachlässigt. Das bedeutet aber, dass lediglich eine Druckaufspaltung der Form

$$p = p^{(0)}(t) + Mp^{(1)}(\xi, t) + M^2p^{(2)}(x, \xi, t)$$

vonnöten ist. Jedem der einzelnen Terme dieser Druckaufspaltung kann eine konkrete physikalische Bedeutung zugeordnet werden.

- Der Druck führender Ordnung $p^{(0)}$ ist räumlich konstant auf beiden Längenskalen x und ξ . Er wirkt als thermodynamische Druckvariable, die entweder durch eine Hintergrundkompression über die Berandung des Gebietes oder durch Aufprägen des Druckes $p^{(0)}$ auf die Berandung geändert werden kann. Auch Temperaturunterschiede am Rande und Wärmequellen können diese Druckvariable beeinflussen.
- Der Druck erster Ordnung $p^{(1)}$ ist räumlich konstant auf der Längenskala x der Strömung und variiert auf der akustischen Längenskala ξ . Er wird deshalb auch als akustische Druckvariable bezeichnet. Der Term $p^{(1)}$ beschreibt dabei eine langwellige akustische Druckwelle, die das Geschwindigkeitsfeld beeinflusst. Diese Variable ist notwendig, um die Interaktionen zwischen der akustischen Skala und der kleinsten Skala zu modellieren.
- Der Druck zweiter Ordnung $p^{(2)}$ variiert auf beiden Skalen. Da er die Interaktionen zwischen den lokalen Strömungsverhältnissen und dem Druck modelliert, wird er als Schwankungsdruck bezeichnet. Man nennt ihn auch inkompressiblen Druck, da er wie die Druckvariable der inkompressiblen Gleichungen die Einhaltung der Divergenzbedingung garantiert.

Von besonderem Interesse ist das formale Limit $M \rightarrow 0$. In diesem Grenzfall verschwindet die akustische Skala $\xi = Mx$ und die akustischen Gleichungen werden bedeutungslos. Ebenso reduziert sich das Gleichungssystem für die Strömung auf die schwach kompressiblen Gleichungen (2.16), (2.17) und (2.18), die bereits mit Hilfe der Einskalenasymptotik gewonnen werden konnten. Um einen Vergleich mit den inkompressiblen Gleichungen (1.22) und (1.23) anstellen zu können, werden die schwach kompressiblen Gleichungen ohne Wärmetransport formuliert. Zudem wird die Energiegleichung durch die verallgemeinerte Divergenzbedingung (2.37) ersetzt. Man erhält somit das folgende inkompressible Gleichungssystem mit variabler Dichte und Kompression vom Rand im Limit verschwindender Machzahl:

$$(2.45) \quad \frac{\partial \varrho^{(0)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial \varrho^{(0)}}{\partial x_j} + \varrho^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = 0$$

$$(2.46) \quad \varrho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \varrho^{(0)} u_j^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{1}{Fr^2} \varrho^{(0)} e_i$$

$$(2.47) \quad \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}.$$

Ist keine Hintergrundkompression vorhanden, so folgt aus Gleichung (2.47) die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit. Der letzte Term in der Kontinuitätsgleichung (2.45) ist Null und die Kontinuitätsgleichung reduziert sich zu einer reinen Transportgleichung für die Dichte.

Im Limit $M \rightarrow 0$ entkoppeln die drei Druckterme. Man erkennt aus den obigen Gleichungen, dass jedoch mindestens zwei Druckvariablen vonnöten sind, um sowohl die Kompressionseffekte als auch die Strömungsfuktuationen beschreiben zu können. Ersteres geschieht über den Druckterm $p^{(0)}$, der Term $p^{(2)}$ hingegen garantiert die Einhaltung der Divergenzbedingung.

3 Problemstellung

In den beiden vorigen Kapiteln wurde eine sehr allgemein gehaltene Einführung in die grundlegenden Gleichungen der Strömungsmechanik gegeben und eine vollständige Diskussion des schwach kompressiblen Grenzfalles durchgeführt. Ziel dieser Arbeit ist es, einen schnellen Löser für die kompressiblen Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen mit Hilfe eines Mehrgitterverfahrens zu entwickeln, der insbesondere im schwach kompressiblen Regime seine Stärken hat. Hierzu ist es zunächst nicht sinnvoll, die Gleichungen in der bisher besprochenen Komplexität zu betrachten. Im Folgenden wird deshalb von einer isothermen, turbulenzfreien Strömung ohne Quellterme und Gravitation ausgegangen, die auf einem Gebiet Ω zu bestimmen ist.

3.1 Kompressible Gleichungen

Für das weitere Vorgehen ist es sinnvoll, auf die dimensionslose Formulierung der Gleichungen (1.7) - (1.9) zurückzugreifen. In dem zu betrachtenden Spezialfall lassen sich die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen dann wie folgt notieren:

$$(3.1) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$(3.3) \quad \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{M^2}{2} \frac{\partial \varrho u_i u_i}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{M^2}{2} \frac{\partial \varrho u_i u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{M^2}{Re} \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} = 0.$$

Die Euler-Gleichungen ergeben sich durch Vernachlässigung der dissipativen Terme, die den Spannungs-Tensor

$$(3.4) \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

beinhalten.

3.2 Schwach kompressible Gleichungen

Wie die asymptotische Analyse aufzeigt, ist es im schwach kompressiblen Regime notwendig, den Druck in mehrere Terme in Abhängigkeit der Machzahl aufzuspalten:

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)}.$$

Der räumlich konstante thermodynamische Druck $p^{(0)}$ ergibt sich aus Mittelung des Gesamtdrucks über das Rechengbiet Ω . Wird die akustische Druckvariable $p^{(1)}$ über das akustische Gleichungssystem (2.43) und (2.44) bestimmt, so ergibt sich der Schwankungsdruck $p^{(2)}$ als skalierte Differenz

$$(3.5) \quad p^{(2)} = \frac{1}{M^2} (p - p^{(0)} - Mp^{(1)}).$$

Bei dieser Vorgehensweise kann das kompressible Gleichungssystem (3.1) - (3.3) umgeformt werden in ein Gleichungssystem mit den Unbekannten Dichte ϱ , Geschwindigkeit u_1, \dots, u_d und Schwankungsdruck $p^{(2)}$. Die anderen Druckanteile $p^{(0)}$ und $p^{(1)}$ treten dann lediglich als Quellterme auf der rechten Seite auf. Bei der Entwicklung eines schnellen Lösers für die schwach kompressiblen Gleichungen ist es somit zunächst entscheidend, das System der schwach kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$(3.6) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$(3.8) \quad \frac{M^2}{\gamma - 1} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + \frac{M^2}{2} \frac{\partial \varrho u_i u_i}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0)} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + M^2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial p^{(2)} u_j}{\partial x_j} \\ + \frac{M^2}{2} \frac{\partial \varrho u_i u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{M^2}{Re} \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}$$

in den Griff zu bekommen. Bei obigem Ansatz kann der akustische Druckanteil $p^{(1)}$ vernachlässigt werden, wenn - wie in dieser Arbeit - nur auf der Bewertung des Lösungsverhaltens eines schwach kompressiblen Verfahrens das Hauptaugenmerk liegt. Eine Erweiterung mit Berücksichtigung der akustischen Moden, wie sie für aeroakustische Simulationen unablässlich ist, geht über den Schwerpunkt dieser Arbeit hinaus.

Diese schwach kompressiblen Gleichungen unterscheiden sich von den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.1) - (3.3) in den folgenden Punkten:

- Die unbekannte Druckvariable im Gleichungssystem ist $p^{(2)}$ anstatt p .
- Alle Druckterme in der Impuls- und der Energiegleichung sind mit dem Faktor M^2 skaliert.
- In der Energiegleichung erscheint ein zusätzlicher Quellterm, der die zeitliche Änderung von $p^{(0)}$ beschreibt.
- In der Energiegleichung tritt als zusätzlicher Fluss die Divergenz der Geschwindigkeit auf.

Dieser Vergleich legt nahe, dass es sinnvoll ist, sowohl die schwach kompressiblen als auch die voll kompressiblen Gleichungen in einem Softwarecode zu implementieren. Lässt man die numerischen Schwierigkeiten außer acht, so entsteht im Wesentlichen der Löser für das kompressible System aus dem Löser für das schwach kompressible System durch Wegfall zweier Terme und durch Umskalierung der Druckterme.

Die im nächsten Kapitel beschriebenen numerischen Verfahren werden - soweit nicht anders erwähnt - immer für die schwach kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.6) - (3.8) angegeben. Mit dem eben beschriebenen Zusammenhang ergibt sich dann das numerische Verfahren für die kompressiblen Gleichungen.

3.3 Randbedingungen

Um das kompressible beziehungsweise schwach kompressible Problem auf einem geschlossenen Gebiet Ω vollständig zu definieren, sind geeignete Bedingungen am Rand $\partial\Omega$ des Gebietes zu erfüllen. Für die Euler-Gleichungen kann man, wie zum Beispiel in der Dissertation von Haag [34] zu finden, eine einfache Theorie der erforderlichen Randbedingungen aufstellen. Durch Betrachtung der Charakteristiken des Systems ergeben sich im Wesentlichen fünf zu unterscheidende Bedingungen.

- **Supersonische Einflussrandbedingung**

Im Fall einer Überschalleinströmung in das Gebiet hinein sind am Einflussrand Dirichlet-Randbedingungen für alle Größen notwendig, das heißt, dass Dichte, Geschwindigkeit und Druck durch feste Werte vorgegeben werden. Im schwach kompressiblen Fall ergibt sich der benötigte Dirichletwert für den Schwankungsdruck $p^{(2)}$ anhand der Formel (3.5) und dem Dirichletwert für den Gesamtdruck p .

- **Supersonische Ausflussrandbedingung**

Bei einer Überschallströmung sind am Ausflussrand keine speziellen Randbedingungen nötig.

- **Subsonische Einflussrandbedingung**

Im Gegensatz zur Überschalleinströmung müssen bei einer Unterschalleinströmung lediglich drei (beziehungsweise in drei Raumdimensionen vier) Dirichletwerte vorgegeben werden. Die letzte Unbekannte ist dann bereits bestimmt. Es werden deshalb am Einflussrand die Dichte ϱ und die Geschwindigkeiten u_1, \dots, u_d fixiert.

- **Subsonische Ausflussrandbedingung**

Passend zu den Bedingungen am Einstromrand ändern sich auch die Bedingungen am subsonischen Ausflussrand. Dort muss nun der Druck p als Dirichletwert vorgegeben werden. Im schwach kompressiblen Regime ergibt sich der Dirichletwert für den Druckterm $p^{(2)}$ wie am supersonischen Einströmrand aus dem Dirichletwert des Gesamtdruckes mit Hilfe der Formel (3.5).

- **Wandrandbedingung (Euler)**

An einer reibungslosen Wand muss die Geschwindigkeit in Normalenrichtung verschwinden. Es ist also

$$u_j n_j = 0$$

die charakterisierende Eigenschaft einer Wand im Falle der Euler-Gleichungen.

Nicht ganz so einfach ist die Herleitung physikalischer Randbedingungen im Falle einer reibungsbehafteten Strömung. Es müssen jedoch im Grenzfall verschwindender Viskosität die Randbedingungen für die Navier-Stokes-Gleichungen mit den Randbedingungen für die Euler-Gleichungen kompatibel sein. Es hat sich in vielen numerischen Untersuchungen herausgestellt, dass am Ein- und Ausflussrand dieselben Randbedingungen wie bei einer reibungsfreien Strömung verwendet werden können. Unterschiedlich ist jedoch die Bedingung für eine Wand:

- **Wandrandbedingung (Navier-Stokes)**

Im viskosen Fall haftet die Strömung an der Wand. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass die Strömungsgeschwindigkeit dort Null ist. Es ist somit

$$u_1 = \dots = u_d = 0$$

als Dirichletwert zu setzen.

4 Numerische Verfahren

4.1 Übersicht

In der Literatur finden sich die unterschiedlichsten Ansätze zur numerischen Behandlung der kompressiblen Euler-Gleichungen (1.1) - (1.3) beziehungsweise der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (1.7) - (1.9). Gruppiert man die Gleichungen in zeitabhängige Terme und Terme mit einer Ableitung nach einer räumlichen Koordinate, so lassen sich die betrachteten Gleichungssysteme in der folgenden Kurzform notieren

$$(4.1) \quad \frac{\partial \mathcal{T}(y)}{\partial t} + \mathcal{R}(y) = 0 \quad y = y(x, t)$$

mit dem zeitlichen Operator \mathcal{T} , dem nichtlinearen Operator \mathcal{R} der Ableitungen nach dem Ort und den Unbekannten y .

Verfahren für das schwach kompressible Regime werden zumeist aus bereits bestehenden Verfahren abgeleitet. Neben der unterschiedlichen Anpassung des Gleichungssystems an das singuläre Verhalten im schwach kompressiblen Regime kann man hierbei generell zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Vorgehensweisen differenzieren: Die Erweiterung eines kompressiblen Strömungslösers für das inkompressible Limit oder den umgekehrten Weg der Realisierung eines kompressiblen Strömungslösers auf Basis eines inkompressiblen Ansatzes.

In den zuerst genannten Verfahren sind in der Regel die konservativen Variablen Dichte, Impuls und Energie die zu bestimmenden Größen y in Gleichung (4.1). Bei inkompressiblen Verfahren werden dagegen gerne die primitiven Variablen Dichte, Geschwindigkeit und Druck als Unbekannte y verwendet, sodass alleine aus diesem Grund die Erweiterung eines inkompressiblen Verfahrens zu einer grundlegend unterschiedlichen Vorgehensweise führt.

Den ersten der beiden Wege gehen Schneider et al. [95] in der Erweiterung eines kompressiblen Strömungslösers, der auf einer Finite Volumen Diskretisierung basiert. Die schwach kompressiblen Gleichungen werden mit Hilfe der Mehrskalanalyse von Klein hergeleitet. Ähnlich verfährt Geratz in seiner Dissertation [26]. Er erweitert einen bestehenden Godunov-Typ-Löser für die kompressiblen Gleichungen. Dabei werden die numerischen Flüsse mit einem Prädiktor-Korrektor-Schritt bestimmt: In einem ersten diskreten, hyperbolischen System der konvektiven Anteile werden die Flüsse mit Hilfe des kompressiblen Lösers geschätzt und in einem zweiten diskreten System der Schallterme so korrigiert, dass die Divergenzbedingung schwach kompressibler Strömungen erfüllt wird.

In der Arbeitsgruppe von Munz wird ebenfalls die Mehrskalanalyse mit einer Zeit- und zwei Raumskalen verwendet. In den Arbeiten von Munz et al. [70] und Roller et al. [91] wird jedoch die Erweiterung eines SIMPLE-Verfahrens für die inkompressiblen Gleichungen propagiert. Die grundlegende Idee ist hier die Verwendung einer Druckkorrekturmethode in einem Finite Differenzen Verfahren auf einem kartesischen staggered grid. Zudem wird von diesen Autoren der für die Aeroakustik notwendige Druckanteil $p^{(1)}$ bestimmt, sodass die Überlagerung einer Strömung mit langwelliger Akustik simuliert werden kann.

Einen gänzlich neuen Weg beschreitet Bijl in ihrer Dissertation [12] und in der Arbeit mit Wesseling [13]. Sie löst die schwach kompressiblen Gleichungen ohne Berücksichtigung der Akustik. Um die schwach kompressiblen Gleichungen lösen zu können, verwendet sie eine modifizierte Druckvariable, was in etwa der Einskalenasymptotik von Klainerman und Majda entspricht. Zur Diskretisierung verwendet sie ein explizites Finite Volumen Verfahren auf einem staggered grid. Das staggered grid bringt den Vorteil eines stabilen Verfahrens, hat jedoch den Nachteil, auf kartesische Gitter beschränkt zu sein. Dies wird jedoch durch die Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten behoben, wie sie bei Wesseling [108] beschrieben ist. Diese Diskretisierung erlaubt die Behandlung beliebiger Gitter, die auf ein kartesisches Rechtecksgitter abbildbar sind.

Neben diesen Verfahren werden in der Literatur auch Verfahren mit Vorkonditionierung des kontinuierlichen Gleichungssystems beschrieben. Einen Überblick über diese Methoden findet der Leser zum Beispiel in den Arbeiten von Van Leer [57] und Koren et al. [54]. Hiermit sind Verfahren gemeint, die das Problem (4.1) wie folgt modifizieren:

$$(4.2) \quad \frac{\partial \mathcal{T}(y)}{\partial t} + \mathcal{P}\mathcal{R}(y) = 0$$

mit einer an das schwach kompressible Regime angepassten Vorkonditionierungsmatrix \mathcal{P} . Da diese nur auf den Operator \mathcal{R} angewendet wird, ist das Verfahren somit nicht mehr zeitgenau. Es kann nur dazu dienen, ähnlich wie ein Verfahren mit lokaler Zeitschrittsteuerung die stationäre Lösung eines Problems anzunähern.

In der hier vorliegenden Arbeit wird nun ein weiterer Weg beschrieben. Die Grundidee ist ein implizites Finite Volumen Verfahren, das die schwach kompressiblen Gleichungen diskretisiert. Das so entstehende gekoppelte Gleichungssystem wird mit einem Mehrgitteralgorithmus gelöst.

4.2 Finite Volumen

Sowohl die Euler-Gleichungen als auch die Navier-Stokes-Gleichungen stellen ein System von Differentialgleichungen der Form

$$(4.3) \quad \frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} - q_i = 0$$

für $i = 1 \dots d+2$ mit der räumlichen Dimension d dar. Gesucht ist die kontinuierliche Lösung b des Gleichungssystems.

Aus der Differentialgleichung (4.3) erhält man die schwache Formulierung durch Multiplikation mit Testvektoren v aus einem Testraum V

$$(4.4) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} - q_i \right) \cdot v dx = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Bei hinreichenden Glattheitsvoraussetzungen an die Lösung b kann die Ableitung nach der Zeit mit der Integration vertauscht werden. Zudem kann das Integral über den Gradienten mit Hilfe des Gauß'schen Satzes teilweise als Integral über den Rand $\partial\Omega$ des Gebietes umgeschrieben werden:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} \right) \cdot v dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial b_{ij} v}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} b_{ij} v n_j ds - \int_{\Omega} b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich die schwache Formulierung (4.4) zu

$$(4.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} b_i v dx + \int_{\partial\Omega} b_{ij} v n_j ds - \int_{\Omega} b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} q_i v dx = 0$$

für alle $v \in V$ und $i = 1 \dots d + 2$.

Dieses Problem kann daher auch so gestellt werden: Suche eine hinreichend glatte kontinuierliche Funktion $b \in B$, sodass

$$a(b, v) = (q, v) \quad \text{für alle } v \in V$$

mit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ gilt. Über den Funktionenraum B , die Forderungen an q sowie die Existenz und die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung soll hier keine weitere Diskussion geführt werden. Es sollen lediglich die Prinzipien zur Konstruktion einer Diskretisierung dargestellt werden.

Die Diskretisierung des kontinuierlichen Problems (4.6) besteht nun aus der Suche nach einer diskreten Lösung b_h aus einem Ansatzraum B_h . Die Testfunktionen stammen dann aus einem ebenfalls diskreten Testraum V_h , der nicht notwendigerweise mit dem Ansatzraum für die Lösung übereinstimmt. Gesucht ist somit eine diskrete Lösung $b_h \in B_h$, sodass

$$a(b_h, v_h) = (q_h, v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

gilt.

Bei der Wahl des Testraumes V kann man grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze unterscheiden. Eine Möglichkeit ist die Verwendung von Funktionen v_h mit

$$v_h(x) \equiv 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Bei diesem Ansatz für die Testfunktionen ist das Randintegral in (4.5) identisch Null. Haben die Testfunktionen v_h zudem nur einen lokalen Träger, so spricht man von einer Diskretisierung mit Finiten Elementen. Die Literatur zu den Finite Elemente Verfahren ist geradezu unermesslich groß. Es besteht eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Wahl der Testräume und der Ansatzräume. Zudem können konforme und nicht konforme Ansätze gewählt werden. An dieser Stelle sei exemplarisch auf das einführende Buch von Braess [18] verwiesen, das auch einen Abschnitt über die Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen mit Hilfe von Finite Elementen enthält.

Eine weitere Möglichkeit zur Wahl des Testraumes V_h besteht in der Wahl des Raumes der stückweise konstanten Funktionen, die dann zu den sogenannten Finite Volumen Verfahren führt. Zur genauen Definition dieser Verfahren ist es jedoch zunächst notwendig, den Begriff einer zulässigen Triangulierung einzuführen. Zerlegt man das Rechengebiet Ω mit Hilfe einer Triangulierung, so entsteht dabei ein unstrukturiertes

Gitter T mit n abgeschlossenen, konvexen Polygonen mit m Knoten:

$$T := \{T_k | T_k \text{ ist ein } m\text{-Polygon für } k = 1, \dots, n\}.$$

In zwei Raumdimensionen sind dabei Zerlegungen in Dreiecks- und Viereckselemente und Mischungen aus beiden Formen sinnvoll. In drei Raumdimensionen lässt das zur Implementierung verwendete Programmpaket *UG* die Grundelemente Tetraeder, Pyramide, Prisma sowie Hexaeder zu. Sind die beiden Bedingungen

- Die Triangulierung überdeckt das ganze Rechengebiet:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n T_k.$$

- Für $T_k \neq T_l$ gilt entweder

$$T_k \cap T_l = \{\}$$

$$T_k \cap T_l = \text{ein gemeinsamer Knoten von } T_k, T_l \text{ oder}$$

$$T_k \cap T_l = \text{eine gemeinsame Kante von } T_k, T_l \text{ oder}$$

$$T_k \cap T_l = \text{eine gemeinsame Seite von } T_k, T_l \text{ (nur in 3D)}.$$

erfüllt, so spricht man von einer zulässigen oder konformen Triangulierung. Im Kontext von Finite Volumen Verfahren werden die Polygone als sogenannte Kontrollvolumen CV bezeichnet; bei den Ecken des Gitters spricht man von Knoten.

Bei einer zulässigen Triangulierung lässt sich ein Integral über das Rechengebiet Ω als Summe der Integrale über die Kontrollvolumen CV_k schreiben.

$$\int_{\Omega} dx = \sum_{k=1}^n \int_{CV_k} dx.$$

Die schwache Formulierung (4.4) lautet dann

$$\sum_{k=1}^n \int_{CV_k} \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} - q_i \right) \cdot v dx = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Dies ist erfüllt, wenn für alle $v \in V$ auf jedem Kontrollvolumen CV_k die Beziehung

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV_k} b_i v dx + \int_{\partial CV_k} b_{ij} v n_j ds - \int_{CV_k} b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \int_{CV_k} q_i v dx = 0$$

gilt. Hierbei wurde der Gauß'sche Satz lokal auf jedem Kontrollvolumen angewendet.

Die Menge $\{\Psi_k\}_{k=1\dots n}$ mit

$$\Psi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in CV_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine Basis des Testraumes V_h der stückweise konstanten Funktionen. Bei dieser Wahl des Testraumes verschwindet das dritte Integral in (4.7), da der Gradient der Testfunktion auf jedem Kontrollvolumen CV_k identisch Null ist.

Unter Ausnutzung dieser Beziehungen wird das Ausgangsproblem in die sogenannte Finite Volumen Formulierung

$$(4.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV_k} b_i dx + \int_{\partial CV_k} b_{ij} n_j ds - \int_{CV_k} q_i dx = 0 \quad \text{für alle } CV_k$$

umgewandelt.

Finite Volumen Methoden haben sich nicht nur wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit in der Strömungsmechanik etabliert. Zudem können zur physikalischen Herleitung der Grundgleichungen der Strömungsmechanik infinitesimal kleine geschlossene Volumen betrachtet werden, in denen die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie gelten müssen. Die Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen in der Integralform (4.8) ist somit ein "natürlicher" Ansatz, bei dem die Erhaltung der Größen auf jedem Kontrollvolumen explizit gefordert wird. Ein weiterer Vorteil dieser Formulierung liegt in der Zulässigkeit von unstetigen Lösungen, die zum Beispiel bei den stark kompressiblen Euler-Gleichungen auftreten können: Schocks und Kontaktunstetigkeiten sind die insbesondere bei supersonischen Strömungen vorkommenden physikalischen Formen von Unstetigkeiten.

Da die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen eine Finite Volumen Methode darstellt, sollen an dieser Stelle noch einmal explizit die schwach kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.6) - (3.8) in Integralform notiert werden. Die Gleichungen lauten dann auf jedem Kontrollvolumen CV_k für $k = 1, \dots, n$:

Kontinuitätsgleichung

$$(4.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV_k} \varrho dx + \int_{\partial CV_k} \varrho u_j n_j ds = 0$$

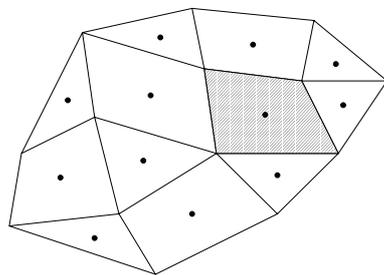
Impulsgleichung

$$(4.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV_k} \varrho u_i dx + \int_{\partial CV_k} \varrho u_i u_j n_j ds + \int_{\partial CV_k} p^{(2)} n_i ds - \frac{1}{Re} \int_{\partial CV_k} \tau_{ij} n_j ds = 0$$

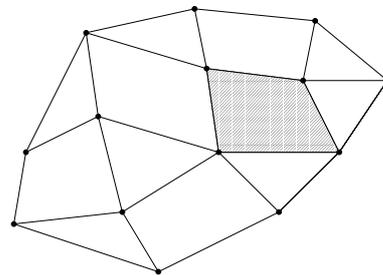
Energiegleichung

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad & \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}_k} p^{(0)} dx + \frac{M^2}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}_k} p^{(2)} dx + \frac{M^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}_k} \varrho u_i u_i dx \\
 & + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0)} \int_{\partial \text{CV}_k} u_j n_j ds + M^2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_{\partial \text{CV}_k} p^{(2)} u_j n_j ds \\
 & + \frac{M^2}{2} \int_{\partial \text{CV}_k} \varrho u_i u_i u_j n_j ds - \frac{M^2}{Re} \int_{\partial \text{CV}_k} \tau_{ij} u_i n_j ds = 0
 \end{aligned}$$

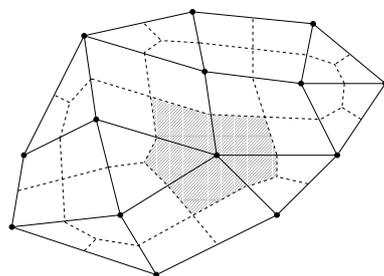
Es bleibt nun noch die Wahl des Ansatzraumes für die Lösung b_h der schwachen Formulierung (4.8). Eine naheliegende Möglichkeit ist die Wahl des Ansatzraumes $B_h = V_h$ der stückweise konstanten Funktionen. Jedem Kontrollvolumen wird dann genau ein Träger der Unbekannten zugewiesen. Man spricht auch von Zellen-zentrierten Finite Volumen. Nachteil dieser gängigen Methode ist die schlechte Approximationsgüte der stückweise konstanten Interpolation. In Abbildung 4.1 ist dieser Ansatz skizziert. Es ist das Gitter der Triangulierung sowie die Lage der Unbekannten als Punkt dargestellt; ein Kontrollvolumen ist schraffiert hervorgehoben.



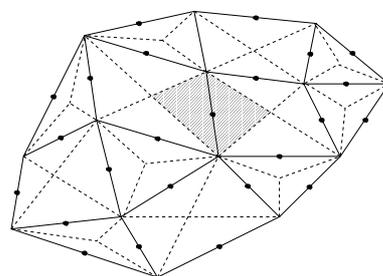
(a) Zellen-zentrierte FV



(b) Zell-Knoten FV



(c) Knotenbasierte FV



(d) Gestaffelte FV

Abbildung 4.1: Verschiedene Finite Volumen Ansätze

Will man eine stückweise lineare beziehungsweise bilineare Interpolation erhalten, so kann man ein Zell-Knoten Finite Volumen verwenden, bei dem die Unbekannten in den Knoten lokalisiert werden. Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass es keine eindeutige Zuordnung zwischen Kontrollvolumen und Knoten gibt.

Eine weitere Möglichkeit ist die Konstruktion von Knotenbasierten Finiten Volumen. Ausgehend von einer zulässigen Triangulierung des Gebietes in Elemente wird ein duales Gitter gebildet. Hierzu werden in zwei Raumdimensionen die Seitenmittelpunkte mit dem Schwerpunkt der zugehörigen Elemente verbunden. In drei Raumdimensionen werden noch zusätzlich die Verbindungen der Kantenmittelpunkte mit den Seitenmittelpunkten benötigt. Dieses duale Gitter stellt dann ebenfalls eine zulässige Triangulierung dar. Ein anschauliches Beispiel für diese Konstruktion ist ebenfalls der Abbildung 4.1 zu entnehmen. Das duale Gitter definiert die Kontrollvolumen. Die Unbekannten sitzen hingegen auf den Knoten des ursprünglichen Gitters. Ebenso wird das Ausgangsgitter dazu verwendet, die linearen Ansatzräume zu definieren. Diese stimmen mit den Ansatzräumen der Finite Elemente überein, das heißt es werden auf jedem Element des Ausgangsgitters die "Hütchenfunktionen" mit der Eigenschaft

$$(4.12) \quad \varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ ist Knoten } k \\ 0 & \text{für alle anderen Knoten} \end{cases}$$

gebildet. Auf Dreieckselementen sind die Ansatzfunktionen linear auf jedem Element, bei Viereckselementen dagegen bilinear. In drei Raumdimensionen sind die Ansatzfunktionen trilinear.

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der universellen Einsetzbarkeit auf unstrukturierten Gittern und der einfachen Entwicklung von Upwind-Verfahren. Zudem ist die Erweiterbarkeit auf drei Raumdimensionen ohne allzu großen Aufwand gegeben.

Alle bisher besprochenen Methoden haben die Eigenschaft, dass die Unbekannten Dichte, Geschwindigkeit und Druck gemeinsam in einem Knoten lokalisiert sind und für alle Größen dieselben Kontrollvolumen gewählt werden. Andere Finite Volumen Verfahren gehen von unterschiedlichen Kontrollvolumen für die Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichung aus. In dem von Bijl et al. [13] propagierten Schema dienen zum Beispiel die Zellmittelpunkte des Ausgangsgitters als Träger für die Dichte und den Druck. Die Geschwindigkeit u_1 in x_1 -Richtung ist dagegen in den Mittelpunkten der Zellkanten in x_2 -Richtung lokalisiert und umgekehrt für die

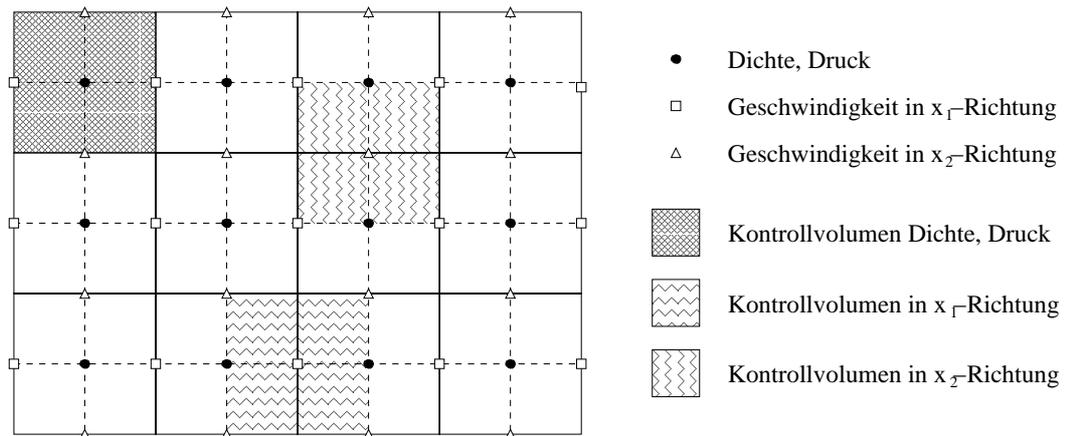


Abbildung 4.2: Staggered grid bei Finiten Volumen

Geschwindigkeit u_2 in x_2 -Richtung. Diese Konstruktion ist in Abbildung 4.2 veranschaulicht. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist die Beschränkung auf Gitter, die sich durch Transformation aus kartesischen Rechtecksgittern ergeben müssen. Eine Beschreibung dieser Vorgehensweise findet sich bei Wesseling [108]. Zudem ist die Erweiterung auf drei Raumdimensionen nicht trivial.

Die Diskretisierung bei Bijl et al. lehnt sich an das *staggered grid* Schema an, das im Kontext der Finite Differenzen Verfahren aufgrund seiner guten Eigenschaften insbesondere im inkompressiblen Grenzfall häufig eingesetzt wird. Die Idee der Konstruktion eines unstrukturierten gestaffelten Gitters im Kontext eines Finite Volumen Verfahrens findet sich auch in der Arbeit von Ginzburg und Wittum [28] sowie der Studienarbeit von Raichle [82]. Es handelt sich hierbei um einen nichtkonformen Ansatz, bei dem die Freiheitsgrade für den Druck und die Dichte in den Zellmittelpunkten, die Freiheitsgrade für die Geschwindigkeit dagegen in den Elementkanten liegen. Für diese Vorgehensweise steht jedoch noch eine eingehende Untersuchung hinsichtlich der Stabilität und der Lösungseigenschaften - insbesondere für Mehrgitterverfahren - aus. In Abbildung 4.1 ist dieser interessante Finite Volumen Ansatz am Beispiel der Geschwindigkeit und den zugehörigen Kontrollvolumen ebenfalls dargestellt.

4.2.1 Knotenbasierte Finite Volumen

Da insbesondere die Möglichkeit zur einfachen Erweiterung der Diskretisierung auf drei Raumdimensionen eine zentrale Rolle in der Überlegung zur Wahl eines geeig-

neten Verfahrens spielte, wird im Folgenden auf die knotenbasierte Finite Volumen Methode zurückgegriffen. Diese findet sich aufgrund der im vorigen Abschnitt besprochenen Konstruktion der Kontrollvolumen mit Hilfe des dualen Gitters in der Literatur gelegentlich auch unter dem Namen Duales Finite Volumen Verfahren. Die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Diskretisierung für die schwach kompressiblen Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen basiert dabei auf der Arbeit von Schneider und Raw [94], die in den Folgearbeiten von Karimian et al. [92], [46], [47] sowie Darbandi et al. [21] modifiziert und erweitert wurde. Ein großer Teil der Implementierung konnte von der für inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen im Rahmen des Programmpaketes *UG* [8] geschriebenen Diskretisierung von Rentz-Reichert [88] übernommen werden.

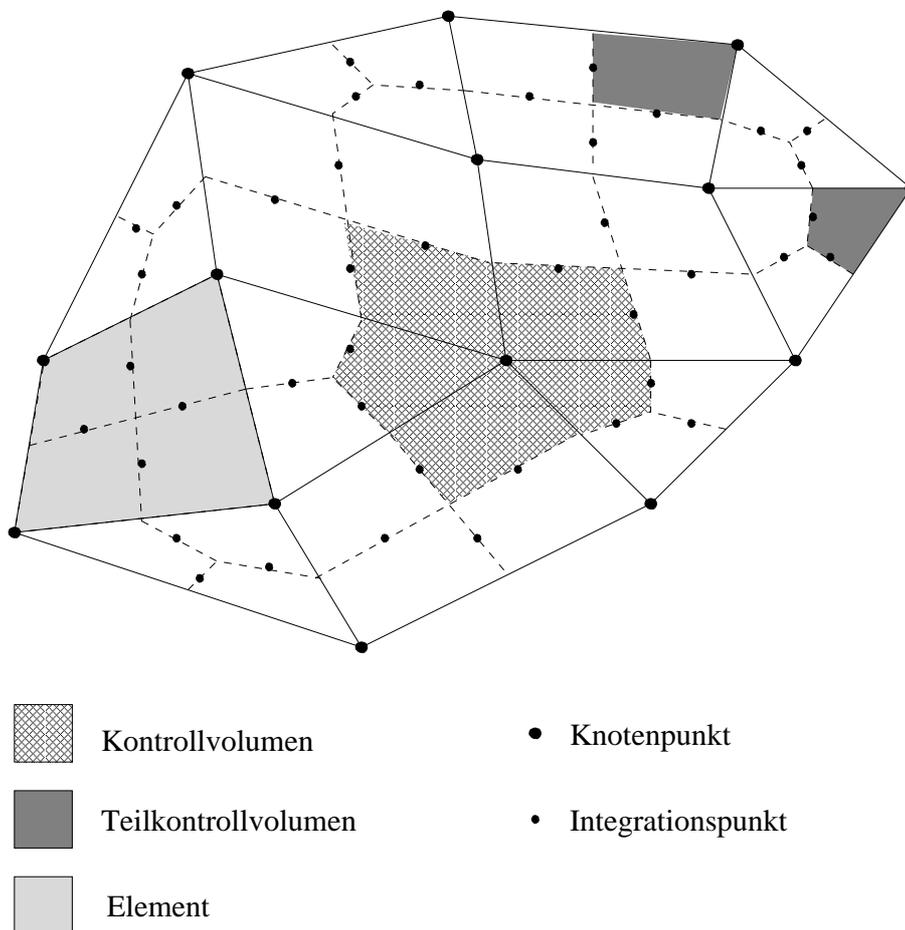


Abbildung 4.3: Kontrollvolumen bei knotenbasierten FV

Die zu bestimmenden diskreten Werte der Unbekannten ϱ , u_i und $p^{(2)}$ sind in den Gitterpunkten lokalisiert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von kollo-

kierten Variablen und die Gitterpunkte werden als Knoten (*corners*) co bezeichnet. Die spezielle Konstruktion des dualen Gitters hat zur Folge, dass jeder Knoten von einer Box des dualen Gitters umschlossen wird. Somit kann jedem Knoten genau ein Kontrollvolumen (*Control Volume*) CV zugeordnet werden. Eine schematische Darstellung ist der Abbildung 4.3 zu entnehmen.

Die Oberflächenintegrale in den Gleichungen (4.9) - (4.11) geben die Flüsse über die Seiten des Kontrollvolumens wieder. Um die diskreten Flüsse zu bestimmen, wird das Integral über jede einzelne Seite numerisch approximiert. Mit Hilfe von numerischen Integrationsformeln führt dies gerade zu der Bestimmung des numerischen Flusses an den Seitenmittelpunkten. Diese werden deshalb auch Integrationspunkte (*integration point*) ip genannt. In Abbildung 4.3 sind sie als kleine Punkte eingezeichnet.

Die Kontrollvolumen CV werden durch die Seiten des Elementgitters in kleine Teile zerlegt: In zwei Raumdimensionen sind dies immer Vierecke, in drei Raumdimensionen Hexaeder. Diese Teile werden als Teilkontrollvolumen (*Sub Control Volume*) SCV , die zugehörigen Oberflächen als Teilkontrollvolumenseiten (*Sub Control Volume Faces*) $SCVF$ bezeichnet. Ein Element besitzt somit für jeden seiner Knoten ein Teilkontrollvolumen SCV . Diese Tatsache wird bei der Implementierung verwendet, denn sie ermöglicht die elementweise Assemblierung der Matrix, wie dies auch bei Finite Elemente Verfahren üblich ist. Es werden alle Elemente durchlaufen und die dort lokal bestimmten Flüsse den entsprechenden Kontrollvolumen zugeordnet. Der numerische Fluss, der an einem Integrationspunkt berechnet wurde, wird mit unterschiedlichem Vorzeichen den beiden assoziierten Kontrollvolumen beziehungsweise Knotenpunkten zugewiesen. Somit ist die numerische Flusserhaltung exakt gesichert. Die Größen in den Zeit- und Quelltermen werden in den Knotenpunkten ermittelt und mit dem Integrationsvolumen der Teilkontrollvolumen multipliziert. Das elementweise Vorgehen ist daher auch für diese Terme durch Verwendung der SCV möglich.

Mit Hilfe dieser Begrifflichkeiten ist es nun möglich, die diskrete Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen (4.9) - (4.11) bezüglich der Kontrollvolumen anzugeben. Die Oberflächenintegrale werden als Summe der Integrale der Teilflächen des Kontrollvolumens bestimmt. Die aus den Zeit- und den Quelltermen resultierenden Volumenintegrale werden durch Summation der Volumenintegrale über die Teilkontrollvolumen ermittelt. Es ergibt sich somit auf jedem Kontrollvolumen die folgende diskrete Finite Volumen Formulierung:

Kontinuitätsgleichung

$$(4.13) \quad \sum_{\text{SCV}} |\text{SCV}| \left. \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right|_{co} + \sum_{\text{SCVF}} \varrho u_j n_j |_{ip} = 0$$

Impulsgleichung

$$(4.14) \quad \sum_{\text{SCV}} |\text{SCV}| \left. \frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} \right|_{co} + \sum_{\text{SCVF}} \varrho u_i u_j n_j |_{ip} + \sum_{\text{SCVF}} p^{(2)} n_i |_{ip} - \frac{1}{Re} \sum_{\text{SCVF}} \tau_{ij} n_j |_{ip} = 0$$

Energiegleichung

$$(4.15) \quad \begin{aligned} & \frac{M^2}{\gamma - 1} \sum_{\text{SCV}} |\text{SCV}| \left. \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} \right|_{co} + \frac{M^2}{2} \sum_{\text{SCV}} |\text{SCV}| \left. \frac{\partial \varrho u_i u_i}{\partial t} \right|_{co} \\ & + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0)} \sum_{\text{SCVF}} u_j n_j |_{ip} + M^2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{\text{SCVF}} p^{(2)} u_j n_j |_{ip} \\ & + \frac{M^2}{2} \sum_{\text{SCVF}} \varrho u_i u_i u_j n_j |_{ip} - \frac{M^2}{Re} \sum_{\text{SCVF}} \tau_{ij} u_i n_j |_{ip} \\ & = -\frac{1}{\gamma - 1} \sum_{\text{SCV}} |\text{SCV}| \left. \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \right|_{co} \end{aligned}$$

Mit $|\text{SCV}|$ wird hierbei die Fläche beziehungsweise das Volumen des Teilkontrollvolumens bezeichnet. Der Normalenvektor am Integrationspunkt n_{ip} ist der aus dem Teilkontrollvolumen heraus gerichtete Normalenvektor mit der Länge der Teilkontrollvolumenseite: $|n_{ip}| = |\text{SCVF}|$.

In den folgenden Abschnitten wird die spezielle Diskretisierung der einzelnen Terme aus den Gleichungen (4.13) - (4.15) behandelt. Dabei erfordern die Zeit- und Ortsableitungen aufgrund ihres unterschiedlichen Charakters verschiedene Diskretisierungen.

Die in der Literatur zu findenden Ansätze unterscheiden sich darin, ob zuerst die Zeit- oder die Ortsdiskretisierung durchgeführt wird. In dieser Arbeit wird die erste Variante gewählt: Die in Abschnitt 4.3 beschriebene Zeitdiskretisierung führt auf ein nichtlineares Problem, das anschließend - wie in Abschnitt 4.4 aufgezeigt - im Ort diskretisiert wird.

4.3 Zeitdiskretisierung

Die erste grundlegende Entscheidung bei der Wahl einer Strategie zur Zeitdiskretisierung besteht in der Wahl eines Zeitschrittverfahrens für die zeitabhängigen Terme. Die in diesem Abschnitt verwendete Formulierung der Zeitschrittverfahren für die instationären Navier-Stokes-Gleichungen bezieht sich noch einmal auf das kontinuierliche Problem (4.9) - (4.11), da die Notation einfacher gewählt werden kann. Der Leser möge sich jedoch immer die zugehörige diskrete Formulierung (4.13) - (4.15) der Finite Volumen Approximation vor Augen halten.

Wie auch schon in der Übersicht 4.1 kurz angedeutet, können die Gleichungen in Terme mit einer Ableitung nach der Zeit und Terme mit einer Ableitung nach den räumlichen Koordinaten gruppiert werden. Das Gleichungssystem lässt sich dann in der folgenden Kurzform notieren

$$(4.16) \quad \frac{\partial \mathcal{T}(y)}{\partial t} + \mathcal{R}(y) = 0 \quad y = y(x, t)$$

mit dem zeitlichen Operator \mathcal{T} , dem nichtlinearen Operator \mathcal{R} und den an den Knoten $co = 1, \dots, K$ sitzenden Unbekannten $y = (\varrho, u_1, \dots, u_d, p^{(2)})_{co=1, \dots, K}$. \mathcal{T} wird in diesem Zusammenhang auch als Massenmatrix und \mathcal{R} als Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Dabei gilt in drei Raumdimensionen (und in zwei Raumdimensionen vollkommen analog) für den Operator \mathcal{T} :

$$(4.17) \quad \mathcal{T}(y) = \begin{pmatrix} \int \varrho dx \\ \int \varrho u_1 dx \\ \int \varrho u_2 dx \\ \int \varrho u_3 dx \\ \frac{M^2}{\gamma-1} \int p^{(2)} dx + \frac{M^2}{2} \int \varrho u_i u_i dx \end{pmatrix}.$$

In \mathcal{R} sind die restlichen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen zusammengefasst:

$$(4.18) \quad \mathcal{R}(y) = \begin{pmatrix} \int \varrho u_j n_j ds \\ \int \varrho u_1 u_j n_j ds + \int p^{(2)} n_1 ds - \frac{1}{Re} \int \tau_{1j} n_j ds \\ \int \varrho u_2 u_j n_j ds + \int p^{(2)} n_2 ds - \frac{1}{Re} \int \tau_{2j} n_j ds \\ \int \varrho u_3 u_j n_j ds + \int p^{(2)} n_3 ds - \frac{1}{Re} \int \tau_{3j} n_j ds \\ \frac{\gamma p^{(0)}}{\gamma-1} \int u_j n_j ds + \frac{M^2 \gamma}{\gamma-1} \int p^{(2)} u_j n_j ds + \frac{M^2}{2} \int \varrho u_i u_i u_j n_j ds - \frac{M^2}{Re} \int \tau_{ij} u_i n_j ds \end{pmatrix}.$$

Bei stationären Berechnungen wird explizit $\frac{\partial \mathcal{T}(y)}{\partial t} = 0$ gefordert, sodass lediglich das nichtlineare Gleichungssystem $\mathcal{R}(y) = 0$ stehen bleibt. In diesem Falle kann dieser

Abschnitt übersprungen werden, um mit der im nächsten Abschnitt besprochenen Diskretisierung der Terme in \mathcal{R} fort zu fahren.

Bei der Diskretisierung der zeitlichen Terme stellt sich grundsätzlich die Wahl eines expliziten oder eines impliziten Ansatzes. Ein explizites Verfahren hat den Vorteil, weniger aufwändig zu sein. Dafür ist jedoch die maximale Größe der anwendbaren Zeitschrittweite durch die CFL-Bedingung nach oben beschränkt. Bei den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ist sie durch

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(c + |v|) \leq 1$$

gegeben. Im schwach kompressiblen Regime wird die Schallgeschwindigkeit c dominant und zwingt ein explizites Verfahren zu sehr kleinen, ineffizienten Zeitschrittweiten. In Munz et al. [70] ist beschrieben, wie mit Hilfe des auch in dieser Arbeit verwendeten Mehrskalensatzes dieses Problem soweit umgangen werden kann, dass lediglich die CFL-Bedingung

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |v| \leq 1$$

zu erfüllen ist. Implizite Verfahren kennen diese Einschränkung nicht, sodass größere Zeitschrittweiten möglich sind. Insbesondere wenn es darum geht, mit Hilfe eines instationären Verfahrens eine stationäre Lösung zu berechnen, ist ein implizites Verfahren in der Regel dem expliziten Verfahren überlegen. Zudem hat es den Vorteil, die Diagonalterme der zu lösenden Matrix zu stärken. Aus diesen Gründen werden in dieser Arbeit nur implizite Verfahren untersucht, die nun im Folgenden vorgestellt werden sollen.

Zeitschrittverfahren für das Problem (4.16) werden von numerischen Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen hergeleitet. Eine gewöhnliche Differentialgleichung wird üblicherweise in der Form

$$(4.19) \quad y'(t) - f(y, t) = 0 \quad y(0) = y_0$$

geschrieben. In dieser Arbeit werden sowohl BDF- als auch Runge-Kutta-Verfahren verwendet. Die grundsätzlichen Ideen hinter diesen Methoden werden in den nächsten Unterabschnitten erläutert. Um die Herleitung übersichtlich zu halten, wird dabei von äquidistanten Zeitschritten $t_n = n \cdot \Delta t$ ausgegangen. Die in UG zur Verfügung stehenden Verfahren arbeiten jedoch mit einer Zeitschrittweitensteuerung.

4.3.1 BDF-Verfahren

Zeitschrittverfahren, die auf der numerischen Differentiation beruhen, werden BDF-Verfahren (backwards difference formulas) genannt. Es sei $p(t)$ ein Interpolationspolynom der Lösungswerte $y_{n+1}, \dots, y_{n-k+1}$ der letzten k Schritte. Es gilt dann

$$(4.20) \quad p(t) = p(t_n + \tau\Delta t) = y_{n+1} + (\tau - 1)\nabla y_{n+1} + \frac{(\tau - 1)\tau}{2!}\nabla^2 y_{n+1} + \dots \\ + \frac{(\tau - 1) \cdot \dots \cdot (\tau + k - 2)}{k!}\nabla^k y_{n+1}.$$

Als abkürzende Schreibweise dient hierbei $\nabla^k y_{n+1}$ für die Rückwärtsdifferenzen. Es ist also zum Beispiel

$$\nabla y_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \quad \nabla^2 y_{n+1} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{(\Delta t)^2}.$$

Für die impliziten BDF-Verfahren wird nun gefordert, dass

$$p'(t_{n+1}) = f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

gilt. Diese Forderung führt mittels Koeffizientenvergleich auf die Formel

$$(4.21) \quad \delta_1 \nabla y_{n+1} + \delta_2 \nabla^2 y_{n+1} + \dots + \delta_k \nabla^k y_{n+1} = \Delta t f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

mit den Koeffizienten

$$(4.22) \quad \delta_j = \left. \frac{d}{d\tau} \frac{(\tau - 1) \cdot \dots \cdot (\tau + j - 2)}{j!} \right|_{\tau=1} = \frac{1}{j} \quad j = 1, \dots, k.$$

Ein k -Schritt BDF-Verfahren ist von der Ordnung k . Anwendung findet das Verfahren vor allem für die Fälle $k = 1$ und $k = 2$:

Implizites Rückwärts-Euler-Verfahren ($k = 1$)

$$y_{n+1} - y_n = \Delta t \cdot f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

BDF(2)-Verfahren ($k = 2$)

$$y_{n+1} - \frac{4}{3}y_n + \frac{1}{3}y_{n-1} = \frac{2}{3}\Delta t \cdot f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Übertragen auf die Formulierung (4.1) ergibt sich beim BDF-Verfahren zweiter Ordnung das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$(4.23) \quad \mathcal{N}(y_{n+1}) = \frac{4}{3}\mathcal{T}(y_n) - \frac{1}{3}\mathcal{T}(y_{n-1})$$

mit dem nichtlinearen Operator

$$\mathcal{N}(y) = \mathcal{T}(y) + \frac{2}{3}\Delta t \mathcal{R}(y).$$

Dieses Gleichungssystem wird mit einer der in Abschnitt 4.5 beschriebenen Methoden iterativ gelöst.

4.3.2 Runge-Kutta-Verfahren

Einen anderen Ansatz der zeitlichen Diskretisierung stellt die Klasse der Runge-Kutta-Verfahren dar. Diese beruhen im Gegensatz zu den aus der numerischen Differentiation konstruierten BDF-Verfahren auf numerischen Verfahren zur Integration. Auf die Gleichung

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt$$

wird eine Quadraturformel mit den Knoten c_1, \dots, c_s und den Gewichten b_1, \dots, b_s angewendet. Dies ergibt die Formel

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^s b_i y'(t_n + c_i \Delta t).$$

Unter Verwendung der Differentialgleichung (4.19) und den abkürzenden Schreibweisen $t_{n,i} = t_n + c_i \Delta t$ beziehungsweise $y_{n,i} = y(t_{n,i})$ erhält man die Formel

$$(4.24) \quad y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^s b_i f(y_{n,i}, t_{n,i}).$$

Zur Berechnung der $y_{n,i}$ wird ebenso eine Quadraturformel auf denselben Knoten verwendet. Es ist dann

$$(4.25) \quad y_{n,i} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n,i}} y'(t) dt = y_n + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_{n,j}, t_{n,j}).$$

Die Formeln (4.24) und (4.25) bilden zusammen eine Runge-Kutta-Methode. Für gewöhnlich wird diese in einem matrixartigen Schema der Koeffizienten notiert.

$$(4.26) \quad \begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

Für $s = 1$ und $s = 2$ sind zwei Verfahren hervorzuheben. Die Wahl von

$$(4.27) \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

führt wiederum zum Impliziten Rückwärts-Euler-Verfahren von erster Ordnung

$$(4.28) \quad y_{n+1} - y_n = \Delta t \cdot f(y_{n+1}, t_{n+1}).$$

Das Crank-Nicolson-Verfahren zweiter Ordnung ergibt sich mit Hilfe des Ansatzes

$$(4.29) \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Die zeitliche Iteration lautet dann

$$(4.30) \quad y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2} \Delta t \cdot f(y_n, t_n) + \frac{1}{2} \Delta t \cdot f(y_{n+1}, t_{n+1}).$$

Generell hat man bei einem Runge-Kutta-Verfahren das Problem, wie die $s^2 + 2s$ Koeffizienten gewählt werden sollen. Ziele sind eine Approximation möglichst hoher Ordnung sowie die Stabilität des Verfahrens. Im Allgemeinen stellen die Gleichungen (4.24) und (4.25) zudem ein nichtlineares System dar, das es algebraisch zu lösen gilt.

Eine häufig verwendete Variante ist die Klasse der expliziten Runge-Kutta-Methoden, bei denen gefordert wird, dass $a_{ij} = 0$ ist für $i \leq j$. Dies hat zur Folge, dass die $y_{n,i}$ aus (4.25) sich nur aus den bereits vorher berechneten $y_{n,j}$ ergeben. Der Wert von y_{n+1} kann somit in s Schritten bestimmt werden. Bekannte Vertreter der expliziten Methoden sind die klassischen Methoden zweiter Ordnung von Runge

$$(4.31) \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

und vierter Ordnung von Kutta

$$(4.32) \quad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

die sich aus der Mittelpunkts- beziehungsweise der Simpsonregel herleiten.

Implizite Runge-Kutta-Verfahren mit einer vollen Matrix (4.26) benötigen das simultane Lösen von s nichtlinearen Gleichungssystemen pro Zeitschritt. Dieser gravierende Nachteil führt zumeist zu ineffizienten Zeitlösern. Eine Besserung tritt erst auf, wenn man sich auf die Klasse der sogenannten semi-impliziten Verfahren beschränkt, bei denen die (a_{ij}) in (4.26) eine untere Dreiecksmatrix bilden. Bei diesem Ansatz kann das implizite Runge-Kutta-Schema auf einen Algorithmus in s Stufen reduziert werden. Die in dieser Arbeit verwendete Methode von Alexander [2] benutzt eine semi-implizite Formel mit der zusätzlichen Einschränkung, dass alle Diagonaleinträge (a_{ii}) gleich sind, sodass in allen s Schritten die gleiche Matrix zu lösen ist. Das Schema

$$(4.33) \quad \begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 1-\alpha & \alpha \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist von zweiter Ordnung und stabil.

Solche Methoden nennt man diagonal implizite Runge-Kutta-Verfahren, weshalb das Verfahren von Alexander in der Literatur auch oft unter der Bezeichnung DIRK(2) zu finden ist. Zum besseren Verständnis soll dieses Verfahren hier noch einmal in der Formulierung (4.1) algorithmisch zusammengefasst werden. Es sind die beiden nichtlinearen Gleichungssysteme

$$(4.34) \quad \begin{aligned} \mathcal{N}(y_{n+\alpha}) &= \mathcal{T}(y_n) \\ \mathcal{N}(y_{n+1}) &= \mathcal{T}(y_n) - (1-\alpha)\Delta t\mathcal{R}(y_{n+\alpha}) = \mathcal{T}(y_{n+\alpha}) - (1-2\alpha)\Delta t\mathcal{R}(y_{n+\alpha}) \end{aligned}$$

zu lösen mit dem nichtlinearen Operator

$$\mathcal{N}(y) = \mathcal{T}(y) + \alpha\Delta t\mathcal{R}(y).$$

Ein weiteres verbreitetes Verfahren ist das Fractional-Step-Schema, das in dem Buch von Turek [100] übersichtlich dargestellt ist. Das Schema lautet

$$(4.35) \quad \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 1-3\theta & 4\theta-1 & 0 & 0 \\ 1-\theta & 1-3\theta & 1-2\theta & 4\theta-1 & 0 \\ 1 & 1-3\theta & 1-2\theta & \theta & 4\theta-1 \\ \hline & 1-3\theta & 1-2\theta & \theta & 4\theta-1 \end{array}$$

mit dem Parameter θ , der aus dem Intervall $(0, 1)$ gewählt werden kann. Für die Wahl $\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ konnte Müller-Urbaniak in seiner Dissertation [69] zeigen, dass das Verfahren angewendet auf die Navier-Stokes-Gleichungen von zweiter Ordnung und stabil ist.

4.4 Ortsdiskretisierung

In diesem Abschnitt soll nun die Diskretisierung der einzelnen Terme in der Steifigkeitsmatrix \mathcal{R} aus (4.16) erörtert werden. Es kann allgemein zwischen den folgenden Termen unterschieden werden:

- **Approximation einer Größe am Integrationspunkt**

Die Approximation eines Integrals der Form

$$\int_{\partial CV} \Phi n_i ds = \sum_{SCVF} \Phi n_i|_{ip}$$

erfordert die Bestimmung der Größe Φ am Integrationspunkt. Dies kann mit Hilfe der sogenannten zentralen Differenzen geschehen.

Auf jedem Element sind wie bereits beschrieben die stückweise linearen beziehungsweise bilinearen Ansatzfunktionen $\varphi(x)$ definiert. Es gilt

$$\varphi_{co}(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ist Knoten } co \\ 0 & x \text{ ist ein anderer Knoten} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Ansatzfunktionen ist es möglich, die Interpolation

$$(4.36) \quad \Phi|_{ip} = \sum_{co} \varphi_{co}(ip) \cdot \Phi_{co}$$

anzugeben. Die Näherung an die gesuchte Größe Φ am Integrationspunkt mittels zentraler Differenzen ist von zweiter Ordnung. Die Summation in (4.36) muss hierbei nur über die Knoten des den Integrationspunkt umfassenden Elementes erfolgen, da außerhalb des Elementes $N_{co}(ip) = 0$ gilt. So entsteht bei einem Vierecksgitter in zwei Raumdimensionen ein 9-Punkt-Stern für die Matrixeinträge eines Knotens. Ist das Gitter zudem kartesisch, so verschwindet bei dem oben angegebenen Transportterm der Matrixeintrag für den Knoten selbst. Gerade bei den Euler-Gleichungen treten nur konvektive Terme auf,

sodass in diesem Falle eine stationäre Simulation der zu betrachtenden Gleichungen zu einer Null auf der Diagonalen führt. Ohne den stabilisierenden Zeitterm kann dann aus diesem Grund keine Interpolation mit zentralen Differenzen durchgeführt werden.

Stattdessen wird für konvektionsdominante Strömungen erfolgreich eine alternative Strategie angewendet, die das zuletzt genannte Problem umgeht und zudem die physikalischen Begebenheiten einer Konvektion besser beschreibt. Bei einer Upwind-Strategie wird zur Approximation einer Größe Φ am Integrationspunkt diese durch die Größe an einem geeignet zu bestimmenden Upwindpunkt ersetzt:

$$(4.37) \quad \Phi|_{ip} = \Phi_{up}.$$

Dieses Vorgehen hat den Vorteil einer erhöhten Stabilität in der Matrix; die oben beschriebenen Probleme bei einer stationären Berechnung treten nicht auf. Erkauft wird dieser Vorteil durch eine schlechtere Approximationseigenschaft, die bei diesem Ansatz in der Regel nur eine Näherung erster Ordnung zulässt. Einige Upwind-Strategien werden in Abschnitt 4.4.1 besprochen.

- **Approximation eines Gradienten am Integrationspunkt**

Bei der Finite Volumen Diskretisierung eines Diffusionstermes

$$\int_{\partial CV} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j ds = \sum_{SCVF} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j \Big|_{ip}$$

wie er in der Impuls- und der Energiegleichung vorkommt, wird die Ableitung einer Größe am Integrationspunkt benötigt. Diese wird mit Hilfe der Ableitung der Ansatzfunktionen $\varphi(x)$ wie folgt bestimmt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \Big|_{ip} = \sum_{co} \frac{\partial \varphi_{co}(ip)}{\partial x_j} \cdot \Phi_{co}.$$

Die Summation erfolgt ebenfalls lokal auf jedem Element. Diese Approximation ist für beliebige Gitter von erster Ordnung, bei orthogonalen Gittern sogar von zweiter Ordnung.

- **Approximation eines Gradienten am Knoten**

Die Ableitung einer Größe am Knoten kann nicht mehr wie am Integrationspunkt durch die Ableitung der Ansatzfunktionen bestimmt werden, da diese

durch die Unstetigkeit über Elementgrenzen hinweg am Knoten nicht eindeutig ist. Stattdessen wird ausgenutzt, dass

$$\int_{CV_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} dx = \int_{\partial CV_k} \Phi n_j ds$$

und somit nach Diskretisierung beider Seiten

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right|_{co} = \frac{1}{|CV_k|} \sum_{ip} \Phi_{ip} n_{j,ip}$$

gilt.

- **Approximation eines Quelltermes**

Ein Quellterm wird durch einfache Mittelung bestimmt.

$$\int_{CV} Q dx = \sum_{SCV} |SCV| Q|_{SCV}$$

Man hat die Wahl, ob der Wert von Q im Schwerpunkt des Teilkontrollvolumens SCV oder im zugehörigen Knoten ausgewertet wird.

- **Harmonische Interpolation**

Anstatt eine lineare Interpolation (4.36) mit Hilfe der Ansatzfunktionen zu verwenden, kann es sinnvoll sein, eine Größe am Integrationspunkt mit Hilfe einer harmonischen Interpolation zu bestimmen. Diese ist nicht mehr von zweiter Ordnung wie die Interpolation mit zentralen Differenzen, trägt jedoch zur Stabilisierung bei. Insbesondere bei starken Schwankungen eines Gradienten, zum Beispiel bei Unstetigkeiten aufgrund von Schockwellen, kann die harmonische Interpolation zum Einsatz kommen.

Man unterscheidet zwischen der gewichteten harmonischen Interpolation

$$(4.38) \quad \Phi|_{ip}^{HI} = \frac{1}{\sum_{co} \frac{N_{co}(ip)}{\Phi_{co}}}$$

und der absoluten harmonischen Interpolation (AHI). Bei der zweiten Form wird zwischen dem Upwind- und dem Downwindpunkt interpoliert. Dabei wird der betragsmäßig kleinere von beiden Werten stärker gewichtet:

$$(4.39) \quad \Phi|_{ip}^{AHI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\Phi_{dn}| \Phi_{up} + |\Phi_{up}| \Phi_{dn}}{\frac{L_1}{L_1+L_2} |\Phi_{up}| + \frac{L_2}{L_1+L_2} |\Phi_{dn}|}.$$

L_1 und L_2 bezeichnen in dieser Formel den Abstand vom Upwind- respektive vom Downwind- zum Integrationspunkt. Eine Herleitung der AHI findet sich

in der Dissertation von Karimian [45]. Eine einfache harmonische Interpolation findet sich auch in der Arbeit von Ogawa et al. [73] zur Interpolation der Viskosität einer reibungsbehafteten Strömung, die aufgrund einer starken Temperaturabhängigkeit großen Schwankungen unterlegen ist.

Beschreibt die Größe Φ einen Gradienten, so bedeutet die stärkere Gewichtung der kleineren Werte, dass zur Interpolation die Werte aus relativ glatten Regionen bevorzugt werden. In der Nähe von Unstetigkeiten, die gerade durch sehr große Gradienten gekennzeichnet sind, führt diese Vorgehensweise zur Vermeidung eines Überschießens bei der Interpolation. In Regionen mit einer glatten Lösung entspricht die harmonische Interpolation in etwa einer geometrischen Mittelung, so dass auch in solch einem Bereich der Einsatz sinnvoll ist.

4.4.1 Upwind-Strategien

Wie bereits im vorigen Abschnitt kurz erwähnt, kann die Verwendung der Ansatzfunktionen bei der Diskretisierung der konvektiven Terme eine Null auf der Diagonalen erzeugen. Dieses Problem wird bei instationären Rechnungen durch den Zeitterm aufgefangen, solange der Zeitschritt nach oben hinreichend beschränkt bleibt. Zudem sorgen die diffusiven Terme für eine weitere Stabilisierung der diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen. Möchte man jedoch stationär rechnen, so wird bei zunehmend konvektionsdominanten Problemen das entstehende Gleichungssystem schwer zu lösen und erzeugt Oszillationen in der Lösung. Die stationären Euler-Gleichungen, die keinen diffusiven Anteil besitzen, liefern bei Diskretisierung der konvektiven Terme am Integrationspunkt gemäß (4.36) sogar eine singuläre Matrix.

Physikalisch betrachtet ist der Grund für dieses schlechte Verhalten naheliegend. Bei Berechnung des Wertes am Integrationspunkt mit Hilfe der bilinearen Ansatzfunktionen erfolgt eine gleichmäßige Gewichtung der Knoten in und entgegen der Strömungsrichtung. Diese Gewichtung widerspricht jedoch dem Transportcharakter eines konvektiven Termes $u_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$. Eine Methode, die nun die stromaufwärts liegenden Knoten stärker gewichtet, wird als Upwind-Verfahren bezeichnet.

Mathematisch kann man sich eine Vielzahl solcher Verfahren mit Hilfe der Taylor-Entwicklung der Größe Φ herleiten:

$$(4.40) \quad \Phi_{ip} = \Phi_{up} + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{up} + O(\Delta x^2).$$

Es bezeichne Δx den Abstand zwischen Integrations- und Upwindpunkt.

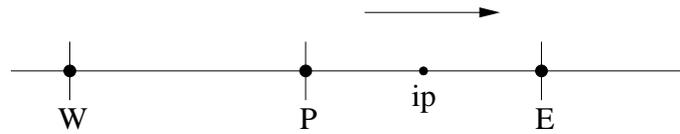


Abbildung 4.4: Upwind-Schema in 1D

Der einfachste Ansatz ist die bereits in (4.37) angegebene Wahl der Auswertung am Upwindpunkt. Wie aus der Taylor-Entwicklung (4.40) sofort zu sehen ist, ist dieses Verfahren nur von erster Ordnung. Eine naheliegende Wahl für den Upwindpunkt, die zugleich zu einem sehr stabilen Verfahren führt, ist die folgende: Es wird der Knoten als Upwindpunkt gewählt, der zu dem entgegen der Strömungsrichtung liegenden Teilkontrollvolumen gehört. Man spricht hierbei auch von Vollem Upwinding oder Upwind Differencing Scheme (UDS). Der Nachteil dieses Verfahrens liegt an der hohen Ungenauigkeit, die durch einen großen Anteil numerischer Diffusion zustande kommt.

Verfahren, die formal von zweiter Ordnung sind, ergeben sich bei Erweiterung von Beziehung (4.37) um einen zusätzlichen Korrekturterm:

$$(4.41) \quad \Phi_{ip} = \Phi_{up} + \Delta \Phi_{ip}.$$

Wie aus der Taylor-Entwicklung von Φ ersichtlich ist, muss der Korrekturterm $\Delta \Phi_{ip}$ die erste Ableitung von Φ mindestens mit der Genauigkeit erster Ordnung annähern. Auch hier gibt es eine Vielzahl von Varianten, die in den folgenden Abschnitten besprochen werden sollen.

Finite Differenzen Upwind-Verfahren

Diese Klasse von Upwind-Verfahren soll anhand des eindimensionalen, äquidistanten Falles kurz erläutert werden, wie er in Abbildung 4.4 skizziert ist.

Das UDS erhält man durch die Wahl

$$\Phi_{ip} = \Phi_P$$

Die Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ kann durch eine Kombination aus einem links- und einem rechtsseitigen Finite Differenzen Schema approximiert werden.

$$(4.42) \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{up} = \frac{\partial \Phi_P}{\partial x} = a \cdot \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x} + (1 - a) \cdot \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x}$$

Für die Wahl von $a = 0$ erhält man

$$\Phi_{ip} = \frac{1}{2}\Phi_P + \frac{1}{2}\Phi_E$$

Dies ist das sogenannte Zentrale Differenzen Schema (CDS). Wie bereits weiter oben besprochen führt die starke Gewichtung der stromabwärts liegenden Größe Φ_E zu unphysikalischen Ergebnissen und einer Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften.

Setzt man in (4.42) $a = 1$, so ergibt sich das Second Order Upwind Schema (SOU)

$$\Phi_{ip} = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_W.$$

Die Einflussgrößen sind bei diesem Verfahren im Gegensatz zum CDS richtig lokalisiert, jedoch kann der negative Koeffizient bei Φ_W zu Problemen beim iterativen Lösen des Gleichungssystem führen.

Eine weitere Variante ist das QUICK-Verfahren von Leonard [58], [115] bei dem $a = 0.25$ gewählt wird. Es ist dann

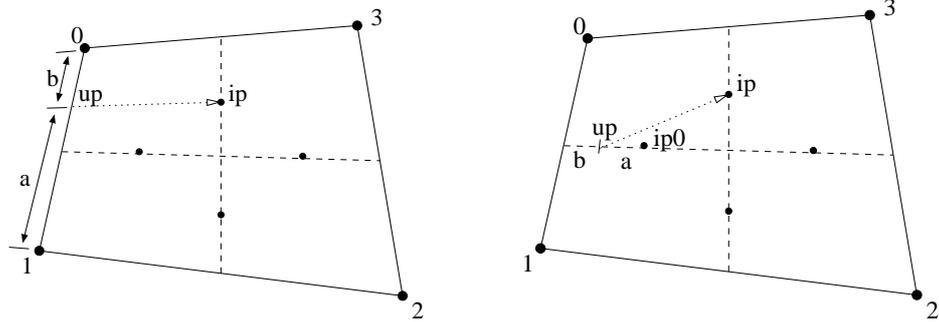
$$\Phi_{ip} = \frac{3}{8}\Phi_E + \frac{3}{4}\Phi_P - \frac{1}{8}\Phi_W$$

Hier tritt - allerdings mit kleineren Koeffizienten - die unphysikalische Abhängigkeit zu Φ_E und der negative Koeffizient bei Φ_W auf. Es sind also ähnliche Probleme wie bei CDS und SOU, jedoch in abgeschwächter Form zu erwarten.

Ein nicht zu vernachlässigendes Problem bei dem SOU- und QUICK-Schema stellt insbesondere bei unstrukturierten Gittern die Abhängigkeit zu Werten im Nachbar-element (hier Φ_W) dar. Die Implementierung eines Verfahrens zweiter Ordnung, das den Ansatz (4.42) verwendet, ist somit im allgemeinen Fall sehr schwierig.

Schiefe Upwind-Verfahren

Aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten bei den Finite Differenzen Upwind-Verfahren kommen in dieser Arbeit nur sogenannte schiefe (*skewed*) Upwind-Verfahren zum Einsatz, die den erstgenannten Verfahren in der Regel überlegen sind. Schiefe Upwind-Verfahren wurden in der Literatur zunächst nur im Zusammenhang mit den im nächsten Abschnitt besprochenen Physical Advection Correction Verfahren erwähnt. Sie können jedoch auch als eigenständige Verfahren betrachtet werden. Im Einzelnen sind dies:



(a) LPS Upwinding

(b) REG Upwinding

Abbildung 4.5: LPS und REG Upwind-Verfahren

- **Skewed Upwinding**

Die Gerade in Strömungsrichtung wird bis zum Schnittpunkt mit der Elementseite zurückverfolgt. Der Knoten, der am nächsten zu diesem Schnittpunkt liegt, wird als Upwind-Punkt gewählt.

- **Linear Profile Skewed Upwinding (LPS)**

Analog zum Skewed Upwind wird der Schnittpunkt in Strömungsrichtung mit der Elementseite gesucht. Die umliegenden Knoten der Elementseite werden dann mit Hilfe der Ansatzfunktionen linear gewichtet. Im zweidimensionalen Beispiel aus Abbildung 4.5 ergibt sich die Formel

$$\Phi_{up} = \frac{a}{a+b} \Phi_0 + \frac{b}{a+b} \Phi_1.$$

Bei LPS kann es vorkommen, dass bei ungünstigen Verhältnissen zwischen Strömungsrichtung und Gitter ein Diagonalterm mit negativen Koeffizienten erzeugt wird. In solch einem Fall gehen die durch Upwinding erzielten guten Matrixeigenschaften des konvektiven Terms verloren. Dennoch stellt LPS eine sehr einfache und in vielen Fällen stabile Upwind-Strategie dar.

- **Reguläres Upwinding (REG)**

Die Idee ist ähnlich wie bei LPS und wird in der Dissertation von Raw [86] beschrieben. Es wird der Schnittpunkt der Gerade in Strömungsrichtung mit den Seiten des zugehörigen Teilkontrollvolumens bestimmt. Die lineare Interpolation erfolgt dann zwischen den entsprechenden Integrationspunkten oder den Knoten. Abbildung 4.5 veranschaulicht diese Vorgehensweise und liefert

im Beispiel die Formel

$$\Phi_{up} = \frac{a}{a+b} \left(\frac{1}{2}\Phi_0 + \frac{1}{2}\Phi_1 \right) + \frac{b}{a+b}\Phi_{ip0}.$$

Wenn die Gerade zuerst eine Elementseite schneidet, so stimmt REG mit LPS überein. Das Problem der negativen Koeffizienten bleibt also weiterhin bestehen. Aufgrund der möglichen Interpolation mit Hilfe von Integrationspunkten ist lokal auf dem Element ein Gleichungssystem zu lösen, um die korrekten Koeffizienten des Upwindpunktes in Abhängigkeit der Knoten darzustellen. Als sehr aufwändig erweist sich allerdings die Übertragung auf drei Raumdimensionen. Da Vergleichsrechnungen in zwei Raumdimensionen keine allzu gravierenden Verbesserungen im Vergleich zu LPS zeigen, wurde im Rahmen dieser Arbeit auf eine Implementierung in 3D verzichtet.

- **Positives Upwinding (POS)**

Raw beschreibt in seiner Dissertation [86] noch ein weiteres Upwind-Schema, das das Problem der negativen Koeffizienten behandelt. Es ist dem Mass weighted skewed Upwind-Verfahren aus [20] bzw. [93] sehr verwandt. Die Grundidee hierbei ist, dass Größen, die aus einem Teilkontrollvolumen SCV hinausströmen nur durch Größen, die in das SCV hineinströmen beeinflusst werden dürfen. An jedem Integrationspunkt, der zum SCV gehört, wird der Massenfluss

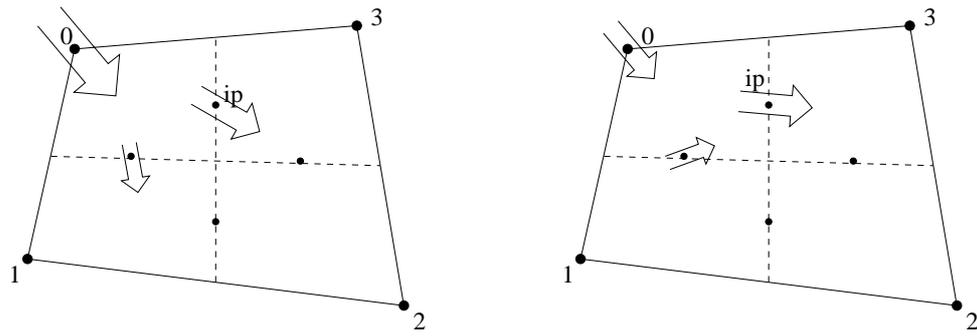
$$m_{\text{SCVF}} = (u_j n_j)|_{\text{SCVF}}$$

mit der nach außen gerichteten Normalen bestimmt. Bei negativem Vorzeichen liegt eine Einströmung, bei positivem Vorzeichen eine Ausströmung der zu betrachtenden Größe Φ vor. Bei Ausströmung an einer Seite des SCV würde beim Vollen Upwinding die zu interpolierende Größe lediglich am zu diesem SCV gehörenden Knoten bestimmt werden:

$$\Phi_{ip} = \Phi_{\text{SCV}}.$$

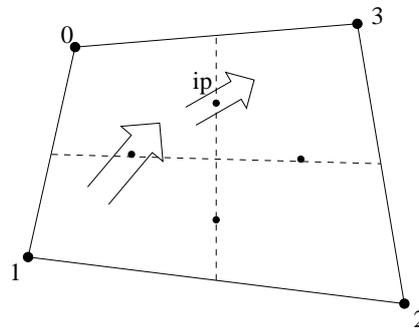
Beim positiven Upwinding werden jedoch zusätzlich alle Seiten berücksichtigt, an denen eine Einströmung vorliegt:

$$(4.43) \quad \Phi_{ip} = (1 - \alpha)\Phi_{\text{SCV}} + \alpha \sum_{\substack{\text{SCVF} \\ m_{\text{SCVF}} < 0}} \omega_{\text{SCVF}} \Phi_{\text{SCVF}}.$$



1. Fall: $m_{in} = 0$

2. Fall: $0 < m_{in}/m_{out} < 1$



3. Fall: $m_{in}/m_{out} \geq 1$

Abbildung 4.6: Positives Upwinding

Zur Berechnung der Gewichte in Gleichung (4.43) wird zunächst die Summe m_{out} aller Ausflüsse und der Betrag m_{in} alle Einflüsse bestimmt:

$$m_{out} = \sum_{\substack{SCVF \\ m_{SCVF} > 0}} m_{SCVF} \quad m_{in} = \sum_{\substack{SCVF \\ m_{SCVF} < 0}} |m_{SCVF}|.$$

Die Werte von α und ω ergeben sich dann mit Hilfe der Formeln

$$(4.44) \quad F = \max(m_{in}, m_{out})$$

$$(4.45) \quad \omega_{SCVF} = -\frac{m_{SCVF}}{F}$$

$$(4.46) \quad \alpha = \frac{m_{in}}{F}.$$

In diesem Schema sind alle der folgenden drei Fälle beinhaltet, die physikalisch gesehen auftreten können. Liegt an allen Seiten des SCV eine Ausströmung vor, ist also $m_{in} = 0$, so kann die Größe nur aus Richtung des Knotens transportiert werden. Das ist der Fall, in dem das Positive Upwinding mit dem Vollen

Upwinding übereinstimmt. Gilt dagegen $0 < \frac{m_{in}}{m_{out}} < 1$, so strömt ein Teil über die Seiten des SCV ein und eine restliche Abhängigkeit kommt vom Inneren des Kontrollvolumens, das heisst vom zugehörigen Knoten. Ist schließlich $\frac{m_{in}}{m_{out}} \geq 1$, so erfolgt der Transport der Größe Φ nur über die Seiten des SCV und es ergibt sich keine Abhängigkeit zum Knoten. Die drei Fälle sind für zwei Raumdimensionen noch einmal in Abbildung 4.6 graphisch dargestellt.

Bei dieser Konstruktion eines Upwind-Verfahrens können keine negativen Koeffizienten auftreten. Erkauft wird dieser Vorteil durch den Verlust an Genauigkeit, da das Positive Upwinding nur noch von erster Ordnung ist. Die dadurch entstehende numerische Diffusion ist jedoch nicht so groß wie beim Vollen Upwind-Verfahren.

Physical Advection Correction

Die sogenannte Physical Advection Correction (PAC) wurde erstmals bei den von Raithby [83] vorgeschlagenen schiefen Upwind-Verfahren erwähnt. Ähnlich wie bei der Berechnung des Korrekturtermes $\Delta\Phi_{ip}$ aus (4.41) mit Hilfe von Finite Differenzen Approximationen in Gleichung (4.42) wird bei den PAC-Verfahren versucht, die erste Ableitung von Φ zu approximieren. Es werden jedoch die lokalen physikalischen Transporteigenschaften berücksichtigt. Ein Konvektionsterm kann mit Hilfe der Ableitung $\partial/\partial s$ in Strömungsrichtung

$$(4.47) \quad u_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = |v| \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

umgeformt werden. Dabei ist $s = \frac{u_j x_j}{|v|}$ und $|v|$ bezeichnet den Betrag der Geschwindigkeit.

Die Änderung von Φ zwischen dem Upwindpunkt up und dem Integrationspunkt ip wird aus den nicht konvektiven Anteilen der jeweiligen Transportgleichung bestimmt.

So ergibt sich für die Konvektion der Dichte in der Massenerhaltung die Gleichung

$$(4.48) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial s} \Big|_{ip} = -\frac{1}{|v_{ip}|} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \Big|_{ip}$$

und hieraus das PAC-Upwind-Verfahren

$$(4.49) \quad \varrho_{ip} = \varrho_{up} + \Delta\varrho_{ip} = \varrho_{up} - \frac{L}{|v_{ip}|} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \Big|_{ip}$$

mit der Abkürzung L für den Abstand zwischen Upwind- und Integrationspunkt. Die einzelnen Terme in der Korrektur $\Delta \varrho_{ip}$ werden dann mit Finite Differenzen Approximationen diskretisiert. Zur Bestimmung des Upwindpunktes können alle bisher besprochenen Upwind-Verfahren wie LPS oder REG verwendet werden. Der Einsatz eines PAC-Upwind-Verfahrens für die Dichte empfiehlt sich insbesondere bei supersonischen Strömungen. In diesen Fällen treten jedoch in Bereichen von Stößen große Gradienten der lokalen Größen auf, sodass eine Diskretisierung von (4.49) mit Finiten Differenzen zu Oszillationen der Lösung führt. Die Wahl einer harmonischen Interpolation des Gradienten der Geschwindigkeit umgeht diese Schwierigkeit. In dieser Arbeit wird deshalb das folgende Schema verwendet:

$$(4.50) \quad \varrho_{ip} = \varrho_{up} - \frac{L}{|v_{ip}^0|} \left(\frac{\varrho_{ip} - \bar{\varrho}_{ip}}{\Delta t} + \varrho_{ip} \cdot \frac{\partial u_j^0}{\partial x_j} \Big|_{ip}^{(A)HI} \right).$$

Ebenso ergibt sich analog das PAC-Upwind-Schema für die konvektierte Geschwindigkeit aus der Impulsgleichung:

$$(4.51) \quad \frac{\partial u_i}{\partial s} \Big|_{ip} = -\frac{1}{\varrho|v|} \left(\varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) \Big|_{ip}.$$

Diese Gleichung wird linearisiert, indem die Dichte ϱ durch die Dichte aus der letzten nichtlinearen Iteration ϱ^0 ersetzt wird.

Gewichtete Upwind-Verfahren

Bei Rechnungen mit Viskosität wird oft ein gewichtetes Schema verwendet. Dieses in Anlehnung an das Upstream Weighted Differencing Scheme (UWDS) von Raitby und Torrance [84] konstruierte Verfahren hat die Form

$$\Phi_{ip} = \alpha(\Phi_{up} + \Delta \Phi_{ip}) + (1 - \alpha) \sum_{co} N_{co}(ip) \Phi_{co}.$$

Es wird also zwischen einem reinen Upwind-Verfahren und der Interpolation mit zentralen Differenzen gewichtet. Die Funktion α kann zum Beispiel durch

$$\alpha = \frac{Pe^2}{5 + Pe^2}, \quad Pe = \frac{u_j n_j L}{\nu}$$

mit der Pecletzahl Pe bestimmt werden. Die verwendeten Parameter sind die lokalen Größen für die Geschwindigkeit, der Normalenvektor, die Länge L der Seite, auf der ip liegt, sowie den Diffusionskoeffizienten ν . Die Pecletzahl dient dabei als Maß für das Verhältnis von Konvektion zur Diffusion.

4.4.2 Stabilisierung

Der knotenbasierte kollokierte Finite Volumen Ansatz führt bei stationärer Rechnung im inkompressiblen Limit $M \rightarrow 0$ zu einer Verletzung der LBB-Bedingung [19]. Im schwach kompressiblen Regime ist der Einfluss der zusätzlichen Terme nicht allzu groß, sodass auch in diesem Falle das diskrete System eine zusätzliche Stabilisierung benötigt. Diese wird durch eine spezielle Wahl der Interpolation am Integrationspunkt erzielt. Die grundlegende Idee zu einem solchen Verfahren wurde von Schneider und Raw [94] entwickelt und von Rentz-Reichert [88] untersucht. Eine Modifikation wurde von Karimian und Schneider [47] eingeführt. Die Impulsgleichung wird mit Hilfe eines Finite Differenzen Ansatzes an jedem Integrationspunkt approximiert, was gerade dem weiter oben beschriebenen Vorgehen bei der Realisierung eines PAC-Upwind-Verfahrens für die Geschwindigkeit (4.51) entspricht. Die Finite Differenzen Approximation führt auf jedem Element zu einem Gleichungssystem, das von den Geschwindigkeiten am Integrationspunkt und an den Knoten sowie vom Druck an den Knoten abhängt. Dieses System wird lokal auf jedem Element gelöst und ergibt dann eine spezielle Interpolation für die Geschwindigkeit am Integrationspunkt. Raw et al. verwenden diese Interpolation der Geschwindigkeit in der Kontinuitätsgleichung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Durch die zusätzliche Kopplung der Geschwindigkeit am Integrationspunkt mit den Druckwerten an den Knoten entsteht in der Kontinuitätsgleichung ein künstlicher Term. Dieser entspricht bei einem uniformen Gitter mit Gitterweite h einer Finite Volumen Diskretisierung von $Ch^2\Delta p$. Nägele [71] zeigt dabei auf, dass die Konstante C von der Finite Differenzen Diskretisierung der restlichen Terme in (4.51) abhängt. Diese Idee gilt es nun auf das schwach kompressible Regime zu übertragen. Die Kontinuitätsgleichung entspricht im inkompressiblen Grenzfall der Divergenzbedingung an die Geschwindigkeit. In dieser Arbeit wurde bereits gezeigt, dass im schwach kompressiblen Limit die Energiegleichung zur verallgemeinerten Divergenzbedingung wird. Eine Stabilisierung des Systems kann somit bei Verwendung des PAC-Upwindings für die Geschwindigkeit in der Energiegleichung erzielt werden. Der künstliche Druckterm hat dann bei uniformem Gitter die Gestalt $Ch^2\Delta p^{(2)}$ mit dem Schwankungsdruckanteil $p^{(2)}$. Auf den Gesamtdruck p hat dieser Ansatz aufgrund der Skalierung mit M^2 nahezu keinen Einfluss.

Karimian et al. [46] haben aufgezeigt, dass der Ansatz von Raw et al. in manchen Fällen Oszillationen der Lösung nicht verhindern kann. Um diese Problematik zu umgehen, schlagen die Autoren vor, beim Aufstellen des lokalen Systems für die Ge-

schwindigkeit außer der Impulsgleichung zusätzlich noch die Kontinuitätsgleichung zu berücksichtigen, die mit der Geschwindigkeit gewichtet subtrahiert wird. Es ergibt sich somit der Ansatz

$$(4.52) \quad \frac{\partial u_i}{\partial s} \Big|_{ip} = -\frac{1}{\varrho|v|} (\dot{\varepsilon} - u_i \ddot{\varepsilon}) \Big|_{ip}$$

mit dem Fehler $\dot{\varepsilon}$ aus der Impulsgleichung

$$\dot{\varepsilon} = \left(\varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

und dem Fehler $\ddot{\varepsilon}$ aus der Kontinuitätsgleichung.

$$\ddot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \varrho}{\partial x_j} \right).$$

4.4.3 Randbedingungen

Eine gesonderte Behandlung bei der Diskretisierung müssen Randelemente erfahren. Es gilt, eine numerische Beschreibung der in Abschnitt 3.3 diskutierten kontinuierlichen Randbedingungen zu finden.

Zudem ist die geometrische Situation am Rand unterschiedlich zu der im Inneren des Gebietes. Ein Randkontrollvolumen wird zum einen durch das duale Gitter und zum anderen durch den Rand des Gebietes begrenzt. Zur Bestimmung der numerischen Flüsse in das Gebiet hinein und aus dem Gebiet heraus werden deshalb an den Seitenmittelpunkten des Randes zusätzliche Randintegrationspunkte (*boundary integration point*) bip eingeführt. Eine Darstellung der Konstruktion von Randkontrollvolumen und Randintegrationspunkt ist in Abbildung 4.7 zu finden.

Da die Assemblierung der Massenmatrix über die Teilkontrollvolumen erfolgt, müssen für diese keine Änderungen vorgenommen werden. Die Steifigkeitsmatrix hingegen erfordert die Berechnung der Flüsse über die Grenzen der Kontrollvolumen hinweg. Ein Randintegral wird somit wie folgt approximiert:

$$\int_{\partial CV} \Phi n_i ds = \sum_{ip} \Phi n_i \Big|_{ip} + \sum_{bip} \Phi n_i \Big|_{bip}.$$

Je nach Typ der Randbedingung ist der Abschluss des Finite Volumen Verfahrens am Rand unterschiedlich zu behandeln. Bei einer Dirichlet-Randbedingung wird der Dirichlet-Wert für die entsprechende Komponente direkt gesetzt. Bei anderen Randbedingungen werden Teile der Gleichungen am bip geeignet assembliert. Eventuelle Stabilisierungs- oder PAC-Terme werden dagegen generell nicht berücksichtigt.

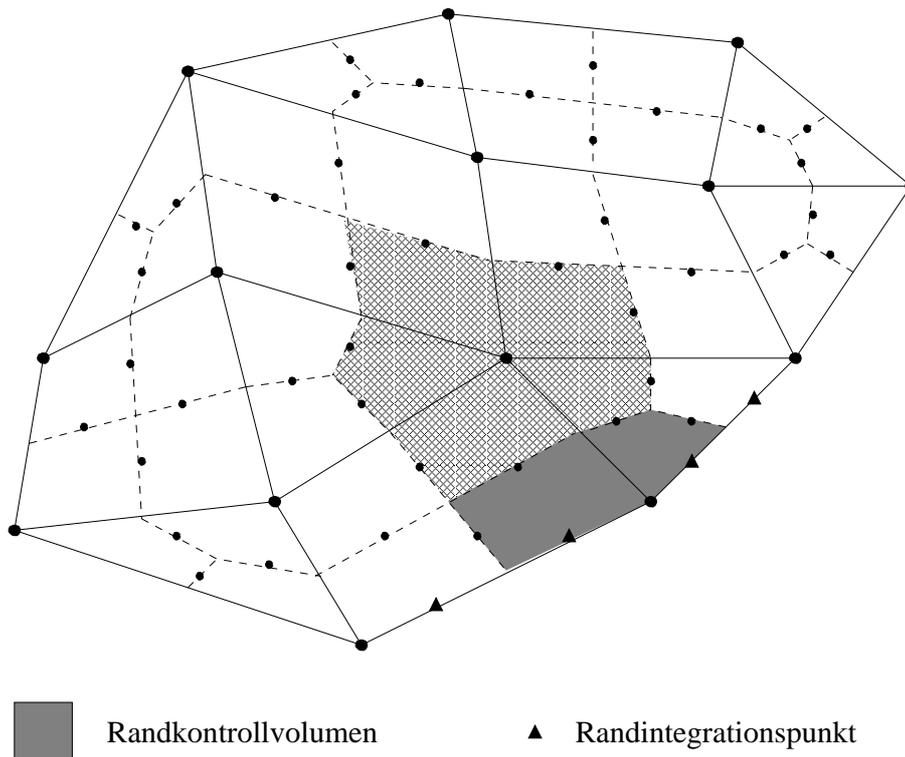


Abbildung 4.7: Randkontrollvolumen mit Randintegrationspunkten

Einflussrandbedingung

Im Falle einer Strömung in das Gebiet hinein werden am Einflussrand Dirichlet-Werte vorgegeben. Bei einer supersonischen Strömung werden alle Größen mit Hilfe einer Dirichlet-Randbedingung vorgegeben. Bei allen anderen Strömungen jedoch sind nur die Geschwindigkeit und die Dichte durch Dirichlet-Werte festgelegt. Die Energiegleichung wird dann durch eine Interpolation aller Terme mit Hilfe der Ansatzfunktionen assembliert.

Ausflussrandbedingung

Bei einer Strömung aus dem Gebiet hinaus muss ebenso wie beim Einflussrand je nach Strömungsgeschwindigkeit unterschieden werden. Bei einer subsonischen oder transonischen Strömung wird der Druck am Ausflussrand durch einen Dirichlet-Wert bestimmt, somit wird lediglich die Energiegleichung nicht assembliert. Bei supersonischen Strömungen ist keine Komponente vorgegeben, sodass alle Gleichungen am Rande assembliert werden müssen. Dies geschieht durch Verwendung der gleichen

Linearisierung wie im Inneren des Gebietes und durch Verwendung der zentralen Differenzen für alle Terme. Dieses Vorgehen ist auch konsistent im Falle eines Upwind-Verfahrens im Inneren, da die zentralen Differenzen am Rande bei Annahme eines parallelen Ausstromes auch als Art Upwinding angesehen werden kann.

Wandrandbedingung

An Wänden gilt die charakteristische Eigenschaft, dass die Geschwindigkeit in Normalenrichtung zur Wand Null ist:

$$(4.53) \quad u_j n_j|_{bip} = 0.$$

Im reibungslosen Fall spricht man von einer Slip-Randbedingung, im reibungsbehafteten Fall dagegen von einer No-Slip-Wand.

- **Slip Randbedingung**

Eine einfache Implementierung der Bedingung (4.53) beruht auf dem Vernachlässigen aller Terme, die die Normalengeschwindigkeit beinhalten. Bei den Euler-Gleichungen muss somit lediglich der Druckterm in den Impulsgleichungen assembliert werden. Dies geschieht wie auch im Inneren des Gebietes mit einer Interpolation unter Zuhilfenahme der Ansatzfunktionen. Im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen ist zudem der Diffusionsterm ungleich Null. Dieser vereinfacht sich jedoch, da bei einer Slip-Randbedingung die Reibungskräfte parallel zur Wand zu Null werden müssen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn für die Komponente des Spannungstensors in Tangentialrichtung

$$\tau_{ij} t_j = 0$$

gilt.

- **No-Slip Randbedingung**

Bei einer reibungsbehafteten Strömung gilt zusätzlich, dass an der Wand die Strömung bezüglich dieser stationär ist. Das heisst, die Geschwindigkeit der Strömung ist identisch zur Geschwindigkeit der Wand. In den meisten Fällen ist diese Null. Es gilt also die Dirichlet-Randbedingung

$$u_j|_{bip} = u_j|_{wall} \quad \text{für } j = 1, \dots, d$$

für die Geschwindigkeit. Somit sind nur noch die Kontinuitäts- und die Energiegleichung zu behandeln. Alle Flüsse in beiden Gleichungen werden assembliert,

indem die vorgegebenen Geschwindigkeitswerte direkt eingesetzt werden und für die anderen Größen zentrale Differenzen verwendet werden.

4.5 Nichtlineare Iterationsverfahren

Die Euler- beziehungsweise Navier-Stokes-Gleichungen stellen ein voll gekoppeltes Gleichungssystem in den Variablen Dichte, Geschwindigkeit und Druck dar. Mit Hilfe der in diesem Kapitel beschriebenen Diskretisierung werden die partiellen Differentialgleichungen in ein nichtlineares System algebraischer Gleichungen überführt. Dieses gilt es in jedem Zeitschritt zu lösen.

Die Nichtlinearität der Navier-Stokes- als auch der Euler-Gleichungen bleibt natürlich nach der zeitlichen Diskretisierung erhalten. Es ergibt sich immer - wie am Beispiel BDF(2) in (4.23) oder DIRK(2) in (4.34) zu sehen - ein nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$(4.54) \quad \mathcal{N}(y) = b$$

mit dem nichtlinearen Operator \mathcal{N} , den Unbekannten $y = (\varrho, u_1, \dots, u_d, p^{(2)})_{co=1, \dots, K}$ an den K Knoten des Gitters und der rechten Seite b . Der Operator \mathcal{N} hat im Allgemeinen die Gestalt

$$(4.55) \quad \mathcal{N}(y) = s_m \cdot \mathcal{T}(y) + s_a \cdot \mathcal{R}(y)$$

mit den diskretisierten Operatoren \mathcal{T} und \mathcal{R} aus (4.17) respektive (4.18). Bei stationären Berechnungen lauten die Koeffizienten $s_m = 0$ und $s_a = 1$. Bei instationären Berechnungen dagegen ist $s_m = 1$ und s_a ergibt sich aus der jeweiligen Formel für die Zeitdiskretisierung.

4.5.1 Newton-Iteration

Das nichtlineare System (4.54) kann mit Hilfe der Newton-Iteration gelöst werden. Das Newton-Verfahren ergibt sich aus der nach dem Term erster Ordnung abgebrochenen Taylor-Entwicklung des nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\mathcal{N}(y) = \mathcal{N}(y^0) + \mathcal{J}(y^0)(y - y^0) + O((y - y^0)^2) = b.$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{J} die sogenannte Jacobi-Matrix, die über die Vorschrift

$$\mathcal{J}(y) = \frac{\partial \mathcal{N}(y)}{\partial y}$$

gebildet wird. Die Bestimmung der Jacobi-Matrix wird in Abschnitt 4.5.2 besprochen.

Die hieraus abgeleitete Iterationsvorschrift besteht aus zwei Schritten. Im ersten Schritt wird das lineare Gleichungssystem

$$(4.56) \quad \mathcal{J}(y^i)c^{i+1} = -d^i$$

gelöst. Auf der rechten Seite erscheint der Defekt $d^i = \mathcal{N}(y^i) - b$ der Näherung y^i aus dem letzten Iterationsschritt. Die Lösung c^{i+1} des Gleichungssystems (4.56) wird mit Hilfe einer der in Abschnitt 4.6 vorgestellten Methoden zur numerischen Behandlung linearer Gleichungssysteme berechnet. Sie dient dann in einem zweiten Schritt als Korrektur der letzten Iterierten:

$$(4.57) \quad y^{i+1} = y^i + c^{i+1}.$$

Oft wird zur Stabilisierung des nichtlinearen Lösungsverfahrens nicht die volle Korrektur addiert, sondern nur ein gedämpfter Beitrag

$$(4.58) \quad y^{i+1} = y^i + \lambda \cdot c^{i+1}.$$

Der Dämpfungsparameter λ wird dabei typischerweise zwischen 0.5 und 1 gewählt. Statt der Vorgabe eines festen Wertes für λ kann auch eine sogenannte Liniensuche benutzt werden, um automatisch einen günstigen Wert für λ zu finden. Liegt die Fehlerreduktion des Iterationsschrittes über einem gewünschten Wert, so wird λ halbiert. Für das so neu entstandene $y^{i+1} = y^i + \frac{\lambda}{2} \cdot c^{i+1}$ wird wiederum die Fehlerreduktion bestimmt. Entweder wird λ ein weiteres Mal halbiert oder aber es wird bei ausreichender Konvergenz zum nächsten Iterationsschritt übergegangen. Vorteil der Liniensuche ist eine flexible Anpassung an das Konvergenzverhalten der Iteration. Von Nachteil ist jedoch, dass bei jedem Schritt der Liniensuche die Matrix neu assembliert werden muss, sodass die Zahl der Liniensuchschritte möglichst gering gehalten werden sollte.

4.5.2 Berechnung der Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix \mathcal{J} des nichtlinearen Systems (4.54) wird analytisch bestimmt. Ebenso wie bei der Aufspaltung des nichtlinearen Operators (4.55) berechnet sich die Jacobi-Matrix aus zwei Anteilen:

$$\mathcal{J} = s_m \cdot \mathcal{J}_{\mathcal{T}} + s_a \cdot \mathcal{J}_{\mathcal{R}}.$$

Der Anteil $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ stammt aus der Zeitdiskretisierung, der Anteil $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$ dagegen aus der Steifigkeitsmatrix.

Somit gilt in drei Raumdimensionen:

$$(4.59) \quad \mathcal{J}_{\mathcal{T}}(y^0)y = \begin{pmatrix} \int \varrho dx \\ \hat{\lambda} \int \varrho u_1^0 dx + \int \varrho^0 u_1 dx \\ \hat{\lambda} \int \varrho u_2^0 dx + \int \varrho^0 u_2 dx \\ \hat{\lambda} \int \varrho u_3^0 dx + \int \varrho^0 u_3 dx \\ \frac{M^2}{\gamma-1} \int p^{(2)} dx + \hat{\lambda} \frac{M^2}{2} \int \varrho u_i^0 u_i^0 dx + (1 + \hat{\lambda}) \frac{M^2}{2} \int \varrho^0 u_i^0 u_i dx \end{pmatrix}$$

Hier wurde wie auch schon im Abschnitt über die Zeitschrittverfahren auf die kontinuierliche Notation zurückgegriffen, um die Darstellung übersichtlich zu halten. Zusätzlich wurde in dieser Notation ein weiterer Dämpfungsparameter $\hat{\lambda}$ eingeführt, der zur Stabilisierung der Diagonaldominanz der linearisierten Matrix beitragen kann. Man gelangt zu obiger Jacobi-Matrix mit Hilfe des Ansatzes

$$\Phi_{\hat{\lambda}} = \hat{\lambda} \Phi + (1 - \hat{\lambda}) \Phi^0.$$

Die Linearisierung eines nichtlinearen Termes der Form $\Phi_{\hat{\lambda}} \Psi$ lautet dann

$$\Phi_{\hat{\lambda}} \Psi = \hat{\lambda} \Phi^0 \Psi + \hat{\lambda} \Phi \Psi^0 + (1 - \hat{\lambda}) \Phi^0 \Psi = \Phi^0 \Psi + \hat{\lambda} \Phi \Psi^0.$$

Dieser Dämpfungsparameter ist von dem Parameter λ aus (4.58) zu unterscheiden. Für $\hat{\lambda} = 1$ erhält man das volle Newton-Schema, für $\hat{\lambda} = 0$ dagegen die in der Literatur häufig zu findende Fixpunktiteration. Diese hat den Vorteil, in einem weit größeren Bereich zu konvergieren. Allerdings ist die Fehlerreduktion wie zu erwarten deutlich geringer.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Bestimmung der Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(y^0)y$ für jeden einzelnen nichtlinearen Term von \mathcal{R} einzeln aufgeführt.

Der Massenterm in der Kontinuitätsgleichung lautet linearisiert

$$(4.60) \quad \int \varrho u_j n_j ds \rightarrow \int \varrho u_j^0 n_j ds + \hat{\lambda} \int \varrho^0 u_j n_j ds.$$

Der Druckterm und der Diffusionsterm in der Impulsgleichung sind linear, der Konvektionsterm wird folgendermaßen linearisiert:

$$(4.61) \quad \int \varrho u_i u_j n_j ds \rightarrow \int \varrho^0 u_i u_j^0 n_j ds + \hat{\lambda} \int \varrho u_i^0 u_j^0 n_j + \varrho^0 u_i^0 u_j n_j ds.$$

In der Energiegleichung sind alle Terme bis auf den Divergenzterm $\int u_j n_j ds$ nicht-linear:

$$(4.62) \quad \int p^{(2)} u_j n_j ds \rightarrow \int p^{(2)} u_j^0 n_j ds + \hat{\lambda} \int (p^{(2)})^0 u_j n_j ds$$

$$(4.63) \quad \int \varrho u_i u_i u_j n_j ds \rightarrow (1 + \hat{\lambda}) \int \varrho^0 u_i^0 u_i u_j^0 n_j ds + \hat{\lambda} \int \varrho u_i^0 u_i^0 u_j^0 n_j + \varrho^0 u_i^0 u_i^0 u_j n_j ds$$

$$(4.64) \quad \int \tau_{ij} u_i n_j ds \rightarrow \int \tau_{ij} u_i^0 n_j ds + \hat{\lambda} \int \tau_{ij}^0 u_i n_j ds.$$

Eine weitere interessante Möglichkeit zur Bestimmung der Jacobi-Matrix liegt in der Verwendung einer numerischen Differentiation anstatt der analytischen Bestimmung. Diese soll hier nicht weiter untersucht werden, findet jedoch in der Dissertation von Hurdeman [41] bei turbulenten Strömungsproblemen eine erfolgreiche Anwendung.

Schließlich könnte die Verwendung einer automatischen Differentiation, wie sie bei Griewank [30], [31] beschrieben ist, erfolgreich sein. Diese bestimmt die Jacobi-Matrix für das konkrete diskrete Problem. Solch ein Vorgehen hat den Vorteil, dass Nichtlinearitäten, die zum Beispiel aus den Upwind-Verfahren oder aufgrund der Stabilisierung entstehen, mit berücksichtigt werden können. Der Implementierungsaufwand sprengt jedoch den Rahmen dieser Arbeit.

4.5.3 Defektberechnung

Zur Berechnung des Defektes

$$(4.65) \quad d^{i+1} = \mathcal{N}(y^{i+1}) - b$$

muss der Operator \mathcal{N} auf die aktuelle Lösung y^{i+1} angewendet werden. Dies kann ebenso wie bei der Berechnung der Jacobi-Matrix durch die Assemblierung einer Matrix geschehen. Aus Implementierungssicht ist es durch einen einfachen Trick möglich, die Defektberechnung mit der Assemblierung der Jacobi-Matrix zu kombinieren. Der Defekt wird dann bestimmt durch die Gleichung

$$(4.66) \quad d^{i+1} = \mathcal{J}_{\hat{\lambda}=0}(y^{i+1})y^{i+1} - b$$

mit der Jacobi-Matrix der Fixpunktiteration, das bedeutet für $\hat{\lambda} = 0$.

4.6 Lineare Iterationsverfahren

Nach Anwendung der Zeitdiskretisierung und schließlich der räumlichen Diskretisierung der linearisierten Gleichungen stellt sich das Problem, ein lineares Gleichungssystem der Form

$$(4.67) \quad Ay = b$$

zu lösen. Es ist $y = (\varrho, u_1, \dots, u_d, p^{(2)})_{co=1, \dots, K}$ der Vektor der Unbekannten, die in den K Knoten des Gitters lokalisiert sind. Die Matrix A ist eine reguläre $N \times N$ -Matrix mit $N = (d + 2) \cdot K$. Aufgrund der Diskretisierung mit Finiten Volumen ist die Matrix A nur dünn besetzt, das heißt die Matrix hat nur $O(N)$ Nichtnulleinträge. Da die Invertierung der Matrix N^2 Einträge erzeugen würde, ist das direkte Lösen des Gleichungssystems für große N auf heutigen Rechnern nicht mehr möglich. Stattdessen kommen iterative Lösungsverfahren zum Einsatz, deren Aufwand linear mit der Anzahl N der Unbekannten wächst. Eine gute Übersicht über die Konstruktion von Iterationsverfahren sowie ihrer Konvergenz und Stabilität findet sich in dem Buch von Hackbusch [36].

4.6.1 Klassische Iterationsverfahren

Die in diesem Abschnitt vorgestellten linearen Iterationsverfahren haben in der Regel nur ein langsames Konvergenzverhalten. Man wird sie deshalb kaum als iterativen Löser verwenden. Sie haben jedoch eine wichtige Bedeutung als Glätter im Mehrgitterverfahren oder als Vorkonditionierer.

Viele Iterationsverfahren lassen sich aus einer additiven Zerlegung

$$(4.68) \quad A = W - R$$

der Matrix A gewinnen. Die reguläre Matrix W sollte dabei möglichst leicht zu invertieren sein. Das Gleichungssystem (4.67) ist dann äquivalent zu

$$(4.69) \quad Wy = Ry + b,$$

woraus sich sofort die Iteration

$$(4.70) \quad Wy^{i+1} = Ry^i + b$$

herleiten läßt. Etwas umgeformt lautet die Iteration

$$(4.71) \quad y^{i+1} = y^i - \theta \cdot W^{-1}(Ay^i - b).$$

Zusätzlich wurde der Dämpfungsparameter θ eingeführt, der dazu dienen kann, eine Konvergenz zu erzwingen.

Entscheidend ist nun die Bestimmung der Matrix W . Eine mögliche Zerlegung der Matrix A ist die Aufspaltung in die Diagonalmatrix D , eine strikt untere Dreiecksmatrix L und eine strikt obere Dreiecksmatrix U :

$$(4.72) \quad A = D - L - U.$$

Die einfachste Wahl für W ist die Diagonalmatrix D . Hieraus resultiert das sogenannte Jacobi-Verfahren

$$(4.73) \quad y^{i+1} = y^i - \theta \cdot D^{-1}(Ay^i - b).$$

Das Verfahren ist zwar sehr einfach zu implementieren, konvergiert aber in den meisten Fällen nur sehr langsam.

Eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit erzielt man durch die zusätzliche Berücksichtigung des unteren Dreiecksanteils L . Ist also $W = \frac{1}{\omega}D - L$, so erhält man das SOR-Verfahren

$$(4.74) \quad y^{i+1} = y^i - \theta \cdot \omega(D - \omega L)^{-1}(Ay^i - b).$$

Die Wahl von $\omega = 1$ stellt einen Spezialfall dar, nämlich das Gauß-Seidel-Verfahren. Bei einer Überrelaxation $\omega > 1$ kann man oft eine schnellere Konvergenz erzielen, $\omega < 1$ hingegen stabilisiert das Verfahren bei Problemen, die mit dem Gauß-Seidel-Algorithmus nicht konvergieren.

Im SOR-Verfahren ist die Auswahl der unteren Dreiecksmatrix willkürlich. Ein vollkommen analoges Schema ergibt sich bei Wahl von $W = \frac{1}{\omega}D - U$ mit der oberen Dreiecksmatrix U . Führt man nun zuerst eine Iteration mit der unteren und anschließend eine weitere Iteration mit der oberen Dreiecksmatrix aus, so entsteht das SSOR-Verfahren. Es ist hier

$$(4.75) \quad W = \frac{1}{(2 - \omega)} \left(\frac{1}{\omega}D - L \right) \left(\frac{1}{\omega}D \right)^{-1} \left(\frac{1}{\omega}D - U \right)$$

und die Iteration lautet

$$(4.76) \quad y^{i+1} = y^i - \theta \cdot \omega(2 - \omega)(D - \omega U)^{-1}D(D - \omega L)^{-1}(Ay^i - b).$$

Für $\omega = 1$ ergibt sich das Symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren.

4.6.2 ILU-Verfahren

Eine weitere Form der additiven Zerlegung stellt die Durchführung einer Dreieckszerlegung dar. Dann ist

$$A = L'U' - R.$$

Für die Iterationsmatrix W ist ein Ansatz der Form $W = L'U'$ möglich, sodass sich die folgende Iteration ergibt:

$$(4.77) \quad y^{i+1} = y^i - \theta \cdot U'^{-1}L'^{-1}(Ay^i - b).$$

Bei einer vollständigen LU-Zerlegung ist $R = 0$. Dies erkauft man sich jedoch durch den entscheidenden Nachteil, dass beide Dreiecksmatrizen voll besetzt sind. Es müssen die N^2 Gleichungen

$$\sum_{j=1}^N l_{ij}u_{jk} = a_{ik} \quad \text{für } 1 \leq i, k \leq N$$

gelöst werden. Eine Zerlegung in wiederum schwach besetzte Dreiecksmatrizen wird bei der sogenannten ILU-Zerlegung (*Incomplete Lower Upper*) erzwungen, indem nur bestimmte Matrixeinträge in L' und U' gefüllt werden. Zur exakten Definition des Verfahrens müssen zunächst ein paar Begriffe eingeführt werden. Eine Teilmenge $G \subset I \times I$ aller Indexpaare (i, j) mit $I = \{1, 2, \dots, N\}$ heißt Graph. Der Graph $G(A)$ einer Matrix A ist dann die Menge aller Indexpaare der Nichtnullelemente:

$$G(A) = \{(i, j) \in I \times I : a_{ij} \neq 0\}.$$

Für einen vorgegebenen Graphen G ist die ILU-Zerlegung definiert durch

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N l_{ij}u_{jk} &= a_{ik} && \text{für } (i, k) \in G \\ l_{ik} &= u_{ik} = 0 && \text{für } (i, k) \notin G. \end{aligned}$$

Gewöhnlicherweise wird die Indexmenge G so gewählt, dass der Graph der Matrix A eine Teilmenge von G ist. Im Spezialfall

$$G(A) = G$$

spricht man auch von einer ILU-Zerlegung auf Level 0 oder kurz ILU(0).

In der Literatur ist eine Vielzahl an Füllstrategien zu finden. Es gibt Möglichkeiten, den Graphen geometrisch oder numerisch zu erweitern. Im zweiten Fall wird ein

zusätzlicher Matrixeintrag erzeugt, wenn dieser über einer vorgegebenen Schranke (*threshold*) liegt. Das so modifizierte Verfahren nennt sich THILU. Die Schwierigkeit liegt darin, die Schranke geeignet zu wählen. Auf der einen Seite ist durch die Erweiterung des Graphen eine Konvergenzverbesserung zu erzielen. Auf der anderen Seite muss jedoch die Anzahl der Nichtnullelemente klein gehalten werden, um nicht Gefahr zu laufen, eine deutliche Performanceverschlechterung in Kauf nehmen zu müssen.

Eine andere wichtige Erweiterung ist das von Wittum [112], [110] vorgestellte Modifizierte ILU-Verfahren. Die Idee dieses Verfahrens ist es, ähnlich wie bei den Relaxationsverfahren die Diagonale der Iterationsmatrix zu beeinflussen. Für die Restmatrix R gilt

$$r_{ii} = 0,$$

da die Diagonale von A - also alle Indexpaare (i, i) - immer zum Graphen G gehören muss. Beim sogenannten ILU_β -Verfahren werden dagegen die nicht berücksichtigten Elemente außerhalb des Graphen G geeignet gewichtet auf die Diagonale der Restmatrix R addiert:

$$r_{ii} = \beta \sum_{i \neq j} |r_{ij}|.$$

Für $\beta = 0$ erhält man das gewöhnliche ILU-Verfahren, eine Verbesserung der Konditionszahl ergibt sich für $\beta = -1$. Viel wichtiger ist jedoch, dass für $\beta > 0$ aufgrund der Dämpfung das Iterationsverfahren bessere Stabilitätseigenschaften aufweisen kann.

Aus Implementierungssicht wird die Darstellung der Iterationsmatrix W oft derart modifiziert, dass

$$W = (D + L)D^{-1}(D + U)$$

gilt mit der Diagonalmatrix D und den strikt unteren beziehungsweise strikt oberen Dreiecksmatrizen L und U . Zu beachten ist, dass diese Formel formal der Vorschrift des SSOR-Verfahrens (4.75) für $\omega = 1$ entspricht. Die Herleitung der Dreiecksmatrizen erfolgt jedoch in einem Fall direkt aus der Matrix A und im anderen Fall mit Hilfe der unvollständigen Zerlegung.

4.6.3 Blockverfahren

Das lineare Gleichungssystem (4.67) ist bei Verwendung des kollokierten Ansatzes wie bereits erwähnt von der Dimension $N = (d + 2) \cdot K$. Es können nun zwei

verschiedene Formen der Blockung unterschieden werden:

- **Punktblock**

Die Unbekannten werden in K Blöcke der Größe $d + 2$ aufgeteilt. Dies entspricht der Anordnung $(\varrho, u_1, \dots, u_d, p^{(2)})_1, \dots, (\varrho, u_1, \dots, u_d, p^{(2)})_K$. Die Steifigkeitsmatrix besteht dann aus Punktblöcken der Größe $(d + 2) \times (d + 2)$.

- **Gleichungsblock**

In diesem Falle werden die Unbekannten in $d + 2$ Blöcke der Größe K aufgeteilt. Dies entspricht einer gleichungsweisen Anordnung $\varrho_{1,\dots,K}, u_{11,\dots,K}, \dots, u_{d1,\dots,K}, p_{1,\dots,K}^{(2)}$ der Unbekannten. Die Steifigkeitsmatrix zerfällt dann in Gleichungsblöcke der Größe $K \times K$.

In Verallgemeinerung der bisher vorgestellten Iterationsverfahren können nun die Blockvarianten eingeführt werden. Die Zerlegung der Matrix erfolgt in Blöcken, es ist dann zum Beispiel

$$A = D - L - U$$

mit der Blockdiagonalmatrix D , der strikt unteren Blockdreiecksmatrix L und der strikt oberen Blockdreiecksmatrix U . Dabei müssen die einzelnen Blöcke invertiert werden.

Bei der Punktblockung kann die Invertierung der Blöcke exakt erfolgen, da diese nicht zu groß sind. Die meisten Konvergenzaussagen zu den skalaren Verfahren können dann auf die Blockvarianten übertragen werden. Wenn in dieser Arbeit im Kontext der Mehrgitterverfahren von einem der bisher eingeführten Iterationsverfahren gesprochen wird, so ist damit immer die entsprechende Punktblock-Iteration gemeint.

Etwas anders ist die Situation für die Gleichungsblockung, da die entstehenden Blöcke nur um einen konstanten Faktor kleiner sind als die Ausgangsmatrix. Die Blöcke können somit zur Reduktion des Aufwandes nur näherungsweise invertiert werden. Hier können etwa die bereits besprochenen Punktblock-Verfahren zum Einsatz kommen. Als spezielles Gleichungsblock-Verfahren kann das SIMPLE-Verfahren von Patankar und Spalding [78] interpretiert werden, wie bei Wittum [109] dargestellt. Weitere im Rahmen von Mehrgitterverfahren für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen einsetzbare Gleichungsblock-Verfahren sind spektralverschobene und transformierende Iterationen, wie sie von Rentz-Reichert [88] untersucht wurden.

4.6.4 Mehrgitterverfahren

Die ersten Mehrgitterverfahren sind bereits in den früher 60er Jahren bei Fedorenko [25] beschrieben. Die auch heute noch grundlegende Konvergenzanalyse aufbauend auf einer Fourier-Transformation stammt aus dem Jahre 1976 von Hackbusch [35]. Die Theorie für elliptische Randwertprobleme ist seit Mitte der 90er Jahre im Wesentlichen abgeschlossen und kann zum Beispiel in den Monographien von Hackbusch [36] oder Wesseling [107] nachgelesen werden. Die Bedeutung der Mehrgitterverfahren ist dabei in ihrer optimalen Effizienz begründet: Bei einem algorithmischen Aufwand von $O(N)$ können elliptische Probleme mit einer Konvergenzrate unabhängig von der Problemgröße gelöst werden. In den letzten Jahren konnten Mehrgitterverfahren jedoch auch auf eine weitaus größere Anzahl von Problemstellungen übertragen werden. Allerdings birgt der Übergang zu hyperbolischen Gleichungen und zu Systemen von Gleichungen immer noch einen großen Forschungsbedarf. Für die lineare Konvektions-Diffusions Gleichung, die im Grenzfall in eine hyperbolische Gleichung übergeht, sind robuste Mehrgitterverfahren von Johannsen [44] und Probst [81] entwickelt worden. Für Systeme von Gleichungen gibt es nur wenige Konvergenzbeweise, die zudem nur für spezielle Gleichungsblock-Varianten gültig sind. Von Wittum [113] stammt der sogenannte transformierende Glätter für die Stokes-Gleichungen, dessen Glättungseigenschaft von der Ordnung $O(1/\sqrt{\nu})$ ist bei Anwendung von ν Glättungsschritten. In einem neueren Ansatz für Sattelpunktprobleme kann Zulehner [116] sogar eine Glättungsrate der Ordnung $O(1/\nu)$ für die Stokes-Gleichungen beweisen. Im Falle der in dieser Arbeit verwendeten Punktblock-Strategien liegen bis zum heutigen Zeitpunkt jedoch keine Konvergenzaussagen vor.

Die bisher beschriebenen klassischen Iterationsverfahren haben die Eigenschaft, dass hochfrequente Fehleranteile zwar effektiv gedämpft, die niederfrequenten Anteile dagegen nur sehr wenig reduziert werden. Dieses Verhalten ist gleichzeitig der Grund dafür, dass die Konvergenz bei zunehmender Dimension des Gleichungssystems immer langsamer wird. Die grundlegende Idee für ein Mehrgitterverfahren ist es nun, einige wenige Iterationsschritte durchzuführen, bis der Fehler im Wesentlichen niederfrequent ist. Dieser glatte Fehler kann auf einem gröberen Gitter dargestellt werden. Dort ist die Behandlung des Fehlers einfacher, da das System kleiner wird. Man spricht von der Zweigittermethode, wenn das Gleichungssystem auf dem groben Gitter exakt gelöst wird. Das Mehrgitterverfahren ergibt sich durch rekursive Anwendung des Zweigitterschemas über mehrere Gitter hinweg. Eine exakte Beschreibung des Mehrgitterverfahrens in Pseudocode ist dem Algorithmus 4.1 zu entnehmen.

Algorithmus 4.1 Das (γ, ν_1, ν_2) -Mehrgitterverfahren $\text{MG}(l, y_l, b_l)$

```

if  $l = 0$  then
     $y_0 = A_0^{-1}b_0$                                 (exakte Lösung auf größtem Gitter)
else
     $y_l = S^{\nu_1}(y_l, b_l)$                         (Vorglättung)
     $d_l = b_l - A_l y_l$                                (Defektberechnung)
     $d_{l-1} = R_l^{l-1} d_l$                          (Restriktion)
     $c_{l-1} = 0$ 
    for  $i = 1, \dots, \gamma$  do
         $\text{MG}(l - 1, c_{l-1}, d_{l-1})$              (Grobgitterlösung)
    end for
     $y_l = y_l + P_{l-1}^l c_{l-1}$                      (Prolongation)
     $y_l = S^{\nu_2}(y_l, b_l)$                        (Nachglättung)
end if

```

Das Parametertripel (γ, ν_1, ν_2) ist kennzeichnend für das Mehrgitterverfahren: Mit ν_1 und ν_2 wird die Anzahl der Vor- beziehungsweise Nachglättungsschritte bezeichnet, der Parameter γ steht für die Anzahl der inneren Iterationsschritte zur Lösung der Grobgitterkorrektur. Typischerweise sind nur der sogenannte V-Zyklus ($\gamma = 1$) und der W-Zyklus ($\gamma = 2$) von Interesse. Modifikationen dieser klassischen Vertreter sind der auch Full Multigrid genannte F-Zyklus und die geschachtelte Iteration. Letztere ist dadurch gekennzeichnet, dass die Mehrgitterlösung auf Level $l-1$ als Startwert für eine Mehrgitteriteration auf Level l dient. Durch diese Vorgehensweise gelangt man zu einer Verbesserung der Startlösung. Die hier vorgestellten Mehrgittervarianten sind in Abbildung 4.8 schematisch aufgelistet.

Im Folgenden sollen nun die einzelnen Elemente des Mehrgitterverfahrens etwas ausführlicher dargestellt werden.

Gitterhierarchie

Um überhaupt von mehreren Gittern sprechen zu können, müssen diese zunächst formal eingeführt werden. Unter einer Gitterhierarchie der Tiefe L versteht man eine Menge

$$\{T_0, T_1, \dots, T_L\}$$

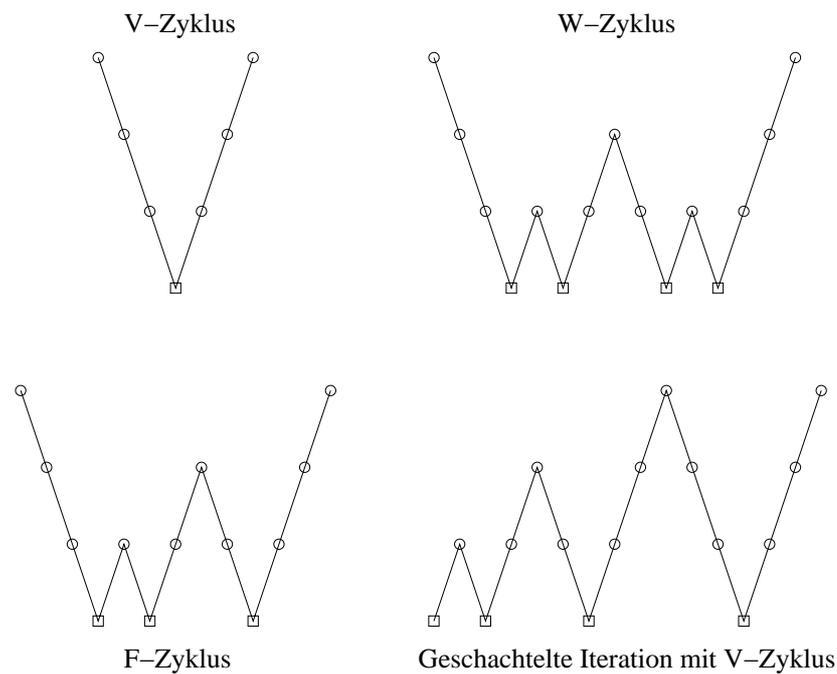


Abbildung 4.8: Verschiedene Mehrgitterzyklen

von zulässigen Triangulierungen des Gebietes Ω , die ineinander enthalten sind:

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_L$$

Die Gitter T_i entstehen aus dem größten Gitter T_0 durch sukzessive Verfeinerung. Die einfachste Strategie hierbei ist die uniforme Verfeinerung: Ein Dreieck wird durch Verbindung der Seitenmittelpunkte in vier Dreiecke zerlegt; ein Viereck zerfällt durch Verbindung der Seitenmittelpunkte ebenfalls in vier kleinere Vierecke. Desweiteren besteht die Möglichkeit einer lokalen Verfeinerung, um zum Beispiel Singularitäten in der Lösung genauer aufzulösen. Da in diesem Kapitel lediglich eine grundlegende Vorgehensweise beschrieben werden soll, wird auf eine Beschreibung der in UG implementierten Verfeinerungsregeln verzichtet, die insbesondere in drei Raumdimensionen relativ kompliziert sind.

Vor- und Nachglättung

Als Glätter kommen prinzipiell alle in diesem Abschnitt besprochenen Iterationsverfahren in Frage. Die Aufgabe eines Glätters ist dabei nicht in erster Linie die Reduktion des Fehlers, sondern vielmehr die Reduktion der kurzwelligen Fehleranteile. Diese "Glättung" hat zur Folge, dass der Fehler auf dem gröberen Gitter gut

darstellbar ist. Formal gesprochen besitzt eine Iteration S die *Glättungseigenschaft*, wenn die Bedingung

$$(4.78) \quad \|A_l S_l^\nu\| \leq \eta(\nu) \cdot \|A_l\|$$

erfüllt ist für eine vom Gitter l unabhängige Funktion mit

$$(4.79) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta(\nu) = 0.$$

Im speziellen Fall der Navier-Stokes-Gleichungen kommen immer die Blockvarianten der Iterationsverfahren zum Einsatz. Bereits in den Arbeiten von Rentz-Reichert [88] und Huurdeman [41] zeigte sich die besondere Robustheit des ILU_β -Glätters. Diese Aussage kann an dieser Stelle sogar soweit verschärft werden, als dass ILU_β der einzige Glätter ist, der bei der hier untersuchten Problemstellung zu einer Konvergenz des Mehrgitterverfahrens führte.

Restriktion und Prolongation

Die Transferoperatoren, die für die Übertragung der Funktionsdarstellungen zwischen den verschiedenen Gittern verantwortlich sind, werden Restriktion und Prolongation genannt. Die Restriktion R_l^{l-1} transferiert die Werte des Gitters l auf das gröbere Gitter $l-1$. Die Prolongation P_{l-1}^l dagegen interpoliert aus den Werten des groben Gitters $l-1$ die Werte des feinen Gitters l .

In dieser Arbeit wird die kanonische Prolongation verwendet, die sich allein aus den Koordinaten der Gitterpunkte ergibt. Es bezeichne J_l die Abbildung, die einen Koeffizientenvektor $y_l = (y_{l,1}, \dots, y_{l,N})$ in eine Linearkombination der Ansatzfunktionen $\varphi_{co}(x)$ überführt:

$$J_l(y_l) = \sum_{co} \varphi_{co} y_{l,co}.$$

Dann ist die kanonische Prolongation als

$$(4.80) \quad P_{l-1}^l = J_l^{-1} J_{l-1}$$

definiert. Die kanonische Restriktion

$$(4.81) \quad R_l^{l-1} = (P_{l-1}^l)^*$$

ergibt sich schließlich als Adjungierte der kanonischen Prolongation.

Hierarchie der Gleichungssysteme

Durch die Hierarchie der Gitter entsteht ebenso eine Hierarchie der Gleichungssysteme

$$(4.82) \quad A_l y_l = b_l \quad \text{für } 0 \leq l \leq L.$$

Die Matrix A_l kann dabei auf jedem Level auf zweierlei Weise berechnet werden. Bei Wahl des sogenannten Galerkin-Ansatzes ergibt sich die Matrix durch das Galerkin-Produkt

$$A_{l-1} = R_l^{l-1} A_l P_{l-1}^l.$$

Dieser Ansatz hat bei Anwendung der kanonischen Restriktion und Prolongation den Nachteil, dass sich die bei konvektionsdominanten Strömungen angewandte Upwind-Diskretisierung auf dem feinsten Gitter bei fortführender Bildung des Galerkin-Produktes auf den gröberen Gittern immer mehr einer Diskretisierung mit zentralen Differenzen annähert. Um den Charakter der Upwind-Diskretisierung zu erhalten, sind stattdessen spezielle Transferoperatoren erforderlich. Aus diesem Grund wird hier diese Strategie nicht verfolgt, sondern es wird vielmehr auf jedem Level die Matrix A_l direkt assembliert.

Konvergenztheorie

An dieser Stelle soll kurz die grundlegende Vorgehensweise für einen Konvergenzbeweis des Mehrgitterverfahrens aufgezeigt werden. Die Iterationsmatrix M_l^{ZG} einer Zweigitteriteration mit $\nu_1 = \nu$ Vor- und $\nu_2 = 0$ Nachglättungsschritten kann in der Form

$$(4.83) \quad M_l^{ZG} = (A_l^{-1} - P A_{l-1}^{-1} R)(A_l S^\nu)$$

notiert werden. Hinreichend für die Konvergenz des Zweigitterverfahrens ist die Beschränkung des Spektralradius der Iterationsmatrix:

$$(4.84) \quad \rho(M_l^{ZG}) < 1.$$

Beide Faktoren des Produktes in (4.83) können nun getrennt untersucht werden. Die Matrix $(A_l^{-1} - P A_{l-1}^{-1} R)$ des ersten Faktors erfüllt die sogenannte Approximationseigenschaft, wenn

$$(4.85) \quad \|A_l^{-1} - P A_{l-1}^{-1} R\| \leq \frac{C_A}{\|A_l\|}$$

für eine Konstante C_A unabhängig vom Gitter l gilt.

Erfüllt nun zudem die Iteration S die bereits in (4.78) definierte Glättungseigenschaft, so folgt aus beiden Abschätzungen die Konvergenz des Zweigitterverfahrens. Es bleibt festzuhalten, dass die Approximationseigenschaft (4.85) eine starke Forderung an das zugrundeliegende kontinuierliche Problem darstellt, wohingegen die Glättungseigenschaft (4.78) rein algebraischer Natur ist.

4.6.5 Krylovraum-Verfahren

Eine weitere Klasse der iterativen linearen Gleichungssystemlöser stellen die Krylovraum-Verfahren dar, die auf einem gänzlich anderen Konstruktionsprinzip beruhen. Als Grundidee wird die Suche nach einer in geeignetem Sinne optimalen Lösung y^i aus dem Krylovraum $y^{(0)} + \text{span}\{r^{(0)}, Ar^{(0)}, \dots, A^{i-1}r^{(0)}\}$ verfolgt, die dann als i -te Iterierte dient. Einen guten Überblick zu diesem Thema kann das Buch von Barrett et al. [5] geben, das weniger auf Aspekte der theoretischen Herleitung als vielmehr auf Details der Implementierung eingeht.

Das erste und grundlegende Verfahren dieser Klasse ist das cg -Verfahren von Hestenes und Stiefel [38]. Auch wenn dieses aufgrund der benötigten Voraussetzungen nicht für die Navier-Stokes-Gleichungen anwendbar ist, soll es hier wegen seiner Einfachheit erläutert werden. Die daraus abgeleiteten Verfahren werden dann in knapper Form besprochen.

Das cg -Verfahren ist eine effiziente Methode für symmetrisch positiv definite Gleichungssysteme, bei dem iterativ durch fortgesetzte lokale Minimierung bezüglich gewisser Suchrichtungen eine Näherung an die Lösung bestimmt wird. Im Algorithmus 4.2 wird das vorkonditionierte cg -Verfahren in Pseudocode-Notation angegeben.

Die Bedeutung der einzelnen Terme in Algorithmus 4.2 ist die folgende: In Suchrichtung $p^{(i)}$ wird die nächste Iterierte $y^{(i)}$ bestimmt. Der Parameter α_i wird dabei so gewählt, dass das Funktional $(y^{(i)} - y)^T A (y^{(i)} - y)$ minimiert wird. Die neue Suchrichtung wird mit Hilfe des Residuums $r^{(i)}$ gebildet. Die spezielle Wahl des Parameters β_i sorgt dafür, dass die Suchrichtungen $p^{(i)}$ und damit auch die Residuen $r^{(i)}$ orthogonal zueinander sind. Die Konvergenz des cg -Verfahrens ist abhängig von der Konditionszahl der Matrix A . Mit Hilfe einer Vorkonditionierung durch eine Näherung M an die Inverse von A kann die Konvergenz des cg -Verfahrens beschleunigt werden.

Algorithmus 4.2 Das vorkonditionierte *cg*-Verfahren $i = 0$ Berechne $r^{(0)} = b - Ay^{(0)}$ für eine Startlösung $y^{(0)}$ **repeat** $i = i + 1$ löse $Mz^{(i-1)} = r^{(i-1)}$

(Vorkonditionierung)

 $\eta_{i-1} = r^{(i-1)T} z^{(i-1)}$ **if** $i = 1$ **then** $p^{(i)} = z^{(0)}$ **else** $\beta_{i-1} = \eta_{i-1} / \eta_{i-2}$ $p^{(i)} = z^{(i-1)} + \beta_{i-1} p^{(i-1)}$ **end if** $q^{(i)} = Ap^{(i)}$ $\alpha_i = \eta_{i-1} / (p^{(i)T} q^{(i)})$ $y^{(i)} = y^{(i-1)} + \alpha_i p^{(i)}$ $r^{(i)} = r^{(i-1)} - \alpha_i q^{(i)}$ **until** $r^{(i)}$ erfüllt das Konvergenzkriterium

Die Konvergenz des *cg*-Verfahrens ist auf den symmetrisch positiv definiten Fall beschränkt. Für nichtsymmetrische und indefinite Matrizen, wie sie auch bei den hier betrachteten Navier-Stokes-Gleichungen vorliegen, muss ein anderer Ansatz gewählt werden. Naheliegender ist es, auf das transformierte System $A^T A x = A^T b$ der Normalengleichungen überzugehen mit der symmetrisch positiv definiten Matrix $\tilde{A} = A^T A$. Dieses auch als CGN-Methode bekannte Verfahren hat aber zwei entscheidende Nachteile: Zum einen quadriert sich die Konditionszahl, was eine deutlich schlechtere Konvergenz zur Folge hat, zum anderen kann es sein, dass die Matrix A nicht explizit vorliegt, sondern nur in Form einer Auswertung der Matrix-Vektor-Multiplikation Ay . In solch einem Falle wäre es somit sehr aufwändig, die transponierte Matrix A^T anzugeben. Aus dem letztgenannten Grund unterscheidet man für nichtsymmetrische Matrizen im Wesentlichen zwischen zwei Klassen von Verfahren: Solche, die eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit A^T erfordern, und sogenannte transponiertenfreie Methoden, die nur Multiplikationen mit der Ausgangsmatrix A benötigen. Es gibt eine Vielzahl von Methoden für unsymmetrische Matrizen, die alle mehr oder weniger große Unzulänglichkeiten aufweisen. Manche Verfahren leiden an Stabilitätsproblemen, die durch Akkumulation von Rundungsfehlern entstehen

können. Andere Verfahren dagegen sind nicht robust genug, sodass es in bestimmten Situationen zum Abbruch des Verfahrens kommen kann.

In die erste Klasse fallen zum Beispiel die BiCG-Methode und das QMR-Verfahren. Die grundlegende Idee der BiCG-Methode ist die Bildung einer zweiten orthogonalen Sequenz

$$r^{(i)} = r^{(i-1)} - \alpha_i A p^{(i)} \quad \tilde{r}^{(i)} = \tilde{r}^{(i-1)} - \alpha_i A^T \tilde{p}^{(i)}$$

und einer zweiten Sequenz von Suchrichtungen

$$p^{(i)} = r^{(i-1)} - \beta_{i-1} p^{(i-1)} \quad \tilde{p}^{(i)} = \tilde{r}^{(i-1)} - \beta_{i-1} \tilde{p}^{(i-1)}.$$

Da das Verfahren keine Minimierungseigenschaft mehr erfüllt, kann es zu einem Abbruch des Verfahrens kommen. Zudem ist oft zu beobachten, dass das Konvergenzverhalten sehr unregelmäßig ist.

Zur zweiten Klasse der transponiertenfreien Methoden gehören GMRES und zwei Abkömmlinge der BiCG-Methode: CGS und BiCG-Stab. GMRES bildet wie im *cg*-Verfahren eine orthogonale Sequenz der Residuen und die *i*-te Iterierte stellt die Lösung eines Minimierungsproblems dar. Aus praktischer Sicht muss die Iteration aber nach wenigen Schritten abgebrochen werden, da die Anforderungen an Speicherbedarf und Rechenzeit zu groß werden. Aus diesen Gründen ist nach *m* Schritten ein Neustart des dann GMRES(*m*) genannten Verfahrens mit der letzten Iterierten als Startlösung vonnöten. Damit wird es aber schwierig, die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten. Das in *UG* implementierte BiCG-Stab-Verfahren von Van der Vorst [104] kann als ein Produkt der BiCG- und einer mehrfach angewendeten GMRES(1)-Iteration interpretiert werden. Aufgrund der lokalen Minimierungseigenschaft des GMRES-Schrittes ergibt sich ein deutlich glatteres Konvergenzverhalten als beim reinen BiCG-Verfahren. Obwohl es mehrere Situationen gibt, die zu einem Abbruch der Methode führen können, hat sich das Verfahren als Löser für die diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen in vielen Fällen bewährt. Da es auch in dieser Arbeit verwendet werden soll, ist der Pseudocode für ein vorkonditioniertes BiCG-Stab-Verfahren in Algorithmus 4.3 angegeben.

Das Zusammenspiel aus Mehrgitterverfahren und BiCG-Stab-Verfahren erweist sich als besonders effektiv. Eine wesentliche Voraussetzung für eine schnelle Konvergenz eines Krylovraum-Verfahrens ist ein geeignetes Vorkonditionierungsverfahren. Das Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierung kann an dieser Stelle seine Stärke ausspielen. Umgekehrt ist das BiCG-Stab-Verfahren hilfreich, wenn ein reines Mehrgitterverfahren ein schlechtes Konvergenzverhalten aufzeigt: Umso komplexer das zu-

Algorithmus 4.3 Das vorkonditionierte BiCG-Stab-Verfahren

 $i = 0$

 Berechne $r^{(0)} = b - Ay^{(0)}$ für eine Startlösung $y^{(0)}$

 Wähle \tilde{r} , z.B. $\tilde{r} = r^{(0)}$
repeat
 $i = i + 1$
 $\eta_{i-1} = \tilde{r}^T r^{(i-1)}$
if $\eta_{i-1} = 0$ **then**

Abbruch, da keine Lösung möglich

end if
if $i = 1$ **then**
 $p^{(i)} = r^{(i-1)}$
else
 $\beta_{i-1} = (\eta_{i-1}/\eta_{i-2})/(\alpha_{i-1}/\omega_{i-1})$
 $p^{(i)} = r^{(i-1)} + \beta_{i-1}(p^{(i-1)} - \omega_{i-1}q^{(i-1)})$
end if

 löse $M\hat{p} = p^{(i)}$

(Vorkonditionierung)

 $q^{(i)} = A\hat{p}$
 $\alpha_i = \eta_{i-1}/(\tilde{r}^T q^{(i)})$
 $s = r^{(i-1)} - \alpha_i q^{(i)}$
if s erfüllt das Konvergenzkriterium **then**
 $y^{(i)} = y^{(i-1)} + \alpha_i \hat{p}$
 $r^{(i)} = s$

beende Iteration

end if

 löse $M\hat{s} = s$

(Vorkonditionierung)

 $t = A\hat{s}$
 $\omega_i = (t^T s)/(t^T t)$
 $y^{(i)} = y^{(i-1)} + \alpha_i \hat{p} + \omega_i \hat{s}$
 $r^{(i)} = s - \omega_i t$
until $r^{(i)}$ erfüllt das Konvergenzkriterium

grundliegende Gleichungssystem ist, umso schwieriger wird es, ein optimales Glättungsverfahren zu finden. Ist die Glättung nicht optimal, so verschlechtert sich die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens aufgrund einiger weniger Eigenmoden. Die äußere Iteration mit dem Krylovraum-Verfahren ermöglicht es dann, diese ungünstigen Eigenmoden effizient konvergieren zu lassen.

Bei dieser Überlegung drängt sich natürlich die Idee auf, das Zusammenspiel umzudrehen und ein Krylovraum-Verfahren als Glätter für das Mehrgitterverfahren einzusetzen. Diese Vorgehensweise ist jedoch nicht zu empfehlen, da ein Krylovraum-Verfahren in der Regel keine ausgeprägte Glättungseigenschaft aufweist [36].

5 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden numerische Ergebnisse für Strömungen aller Machzahlen präsentiert. Es wird aufgezeigt, dass mit Hilfe der Druckaufspaltung in Verbindung mit einer Stabilisierung schwach kompressible oder sogar inkompressible Strömungen effizient und genau gelöst werden können. Dass die in dieser Arbeit vorgestellte Methode auch für kompressible Strömungen geeignet ist, wird in weiteren Testfällen demonstriert. Es werden sowohl stationäre als auch instationäre Beispiele diskutiert.

Neben der Frage nach der numerischen Genauigkeit des in dieser Arbeit beschriebenen Verfahrens steht insbesondere ein Vergleich der Eigenschaften unterschiedlicher numerischer Lösungsverfahren für das nichtlineare und das lineare Problem im Mittelpunkt. Als Kennzahl für die Konvergenz des linearen Problems dient die Größe κ_{10} , die die mittlere Konvergenz des linearen Löser innerhalb der ersten zehn iterativen Schritte angibt:

$$\kappa_{10} = \left(\frac{r_{10}}{r_0} \right)^{\frac{1}{10}}.$$

Mit r_i wird hierbei die L^2 -Norm des Residuums des linearen Problems nach i linearen Iterationen bezeichnet. Vollkommen analog hierzu dient die Größe

$$\chi_{15} = \left(\frac{d_{15}}{d_0} \right)^{\frac{1}{15}}$$

mit der L^2 -Norm d_i des nichtlinearen Defektes im i -ten Schritt als Maß für die nichtlineare Konvergenz in den ersten 15 Schritten des nichtlinearen Löser.

5.1 Kanal mit Beule

Für reibungslose Strömungen beliebiger Machzahl hat sich in den letzten Jahren der sogenannte Kanal mit Beule als Benchmark etabliert. Eine Strömung in einem

Kanal trifft auf ein Hindernis, das durch einen Kreisbogen beschrieben wird. Für gewöhnlich hat das Hindernis eine Länge, die der Kanalhöhe entspricht. Die Höhe ist bei supersonischen Berechnungen mit 4% der Kanalhöhe festgelegt, in allen anderen Fällen beträgt sie 10% der Kanalhöhe. Am vorderen Rande des Gebietes findet eine Einströmung statt. Diese ist durch die Vorgabe einer Machzahl Ma_{in} am Einströmrand charakterisiert. An den oberen und unteren Wänden herrschen Slip-Randbedingungen, am hinteren Ende des Kanals ist der Ausstrom.

Es können nun für verschiedene Machzahlen Vergleichsrechnungen durchgeführt werden. In den Fällen $Ma_{in} = 10^{-9}$, 10^{-6} und 10^{-3} handelt es sich um schwach kompressible Strömungen, die nur mit einem angepassten Lösungsverfahren behandelt werden können. Hier wird deshalb die in dieser Arbeit vorgestellte Druckaufspaltung mit zusätzlicher Stabilisierung zur Anwendung kommen. Eine weitere subsonische Strömung ergibt sich für $Ma_{in} = 0.5$. Daneben ist $Ma_{in} = 0.675$ charakteristisch für eine transonische und $Ma_{in} = 1.65$ für eine supersonische Strömung. Bei allen im Folgenden betrachteten Fällen stellt sich eine stationäre Lösung ein.

In der Literatur finden sich verschiedenste Ansätze und Lösungsverfahren. Die etwas ältere Arbeit von Eidelman et al. [24] betrachtet die subsonische Strömung für $Ma_{in} = 0.5$ sowie den transonischen und den supersonischen Fall. Es wird ein Godunov-Verfahren erster Ordnung mit einem entsprechenden Verfahren zweiter Ordnung verglichen. Leider sind in dieser Arbeit keine Angaben über die Größe der Gitter zu finden, sodass kein direkter Vergleich möglich ist. Die etwas neuere Arbeit von Karimian und Schneider [47] behandelt dieselben Problemstellungen wie Eidelman et al. mit einem Ansatz, der außer im schwach kompressiblen Regime in vielen Punkten mit der hier vorgestellten Arbeit übereinstimmt. Allerdings verwenden die Autoren ein Zeitschrittverfahren zur Berechnung der stationären Lösung. Die Genauigkeit des Verfahrens ist jedoch zumindest auf groben Gittern vergleichbar. Die Arbeit von Darbandi und Schneider [21] modifiziert den Ansatz von Karimian et al. und erzielt insbesondere für den subsonischen Fall $Ma_{in} = 0.5$ eine sehr gute Lösung. Schwächen sind jedoch bei der Auflösung der Stöße im transonischen und im supersonischen Regime zu erkennen. Erst in der Dissertation von Bijl [12] findet sich eine Betrachtung aller Testfälle, also insbesondere auch der schwach kompressiblen. Sie verwendet ein explizites Verfahren, das ebenfalls eine Art Druckaufspaltung beinhaltet. Insofern ist die Arbeit von Bijl am ehesten mit der hier vorliegenden vergleichbar. Allerdings kommen ihre Untersuchungen über die Anwendung eines GMRES-Verfahrens als linearen Löser nicht hinaus. Die Qualität der Ergebnisse des Verfahrens im subsonischen Bereich sind sehr beachtlich. Im transonischen und im

supersonischen Fall sind sie jedoch schlechter als in der Arbeit von Eidelman et al. Dies liegt darin begründet, dass der Schwerpunkt von Bijl's Arbeit im subsonischen Bereich liegt und für den supersonischen Bereich nur ein einfaches Upwind-Verfahren erster Ordnung implementiert wurde.

Für das Problem Kanal mit Beule wird in dieser Arbeit die stationäre Lösung direkt berechnet, das heisst ohne Verwendung eines Zeitschrittverfahrens. Allerdings muss zur Berechnung der Lösung wie im Abschnitt 4.2.1 beschrieben ein Upwind-Verfahren für alle Größen zum Einsatz kommen, da bei Interpolation mit zentralen Differenzen die Matrix ohne Zeitterme singulär wird. Als Lösungsprozess wird immer eine geschachtelte Iteration verwendet: Die Lösung wird auf dem größten Gitter berechnet und dient dann als Startlösung für das nächstfeinere Gitter. Zum Vergleich der Konvergenzeigenschaften werden auf jedem Gitter 15 nichtlineare Schritte und innerhalb des nichtlinearen Iterationsschrittes 10 lineare Schritte durchgeführt.

5.1.1 Inkompressible Strömung

Im Limit $M = 0$ muss sich das Verfahren für die schwach kompressiblen Gleichungen mit den Ergebnissen für eine inkompressible Methode messen lassen. Die inkompressible Methode berechnet die Unbekannten Geschwindigkeit und Druck; die Dichte wird als konstant angenommen.

In Abbildung 5.1 wird deshalb der Druck eines inkompressiblen Verfahrens mit dem Schwankungsdruck $p^{(2)}$ verglichen. Beide Rechnungen wurden auf einem Gitter mit 49665 Knoten durchgeführt. Zur Verbesserung der Darstellung wurde beim schwach kompressiblen Verfahren nur jeder fünfte Wert am Rand eingezeichnet. Es zeigt sich tatsächlich ein identisches Ergebnis beider Methoden. Beide Verfahren weisen lediglich am Einflussrand eine gewisse Unsymmetrie der Lösung auf. Diese rührt wohl von der Implementierung der Einflussrandbedingung her und ist auch in der Arbeit von Bijl [12] zu finden. Im Vergleich zu den von Bijl präsentierten Ergebnissen berechnet das hier beschriebene Verfahren einen größeren Maximalwert für den Druck, was seine Erklärung in der Verwendung eines feineren Gitters haben dürfte.

Im nichtlinearen Lösungsverhalten unterscheiden sich der inkompressible und der kompressible Code kaum. Interessant ist dagegen der Vergleich der Konvergenzeigenschaft des Mehrgitterverfahrens. In Tabelle 5.1 sind die Konvergenzraten aufgelistet, die einen leichten Vorteil des inkompressiblen Verfahrens aufzeigen. Dies ist nicht allzusehr verwunderlich, da das inkompressible System pro Knoten eine Unbe-

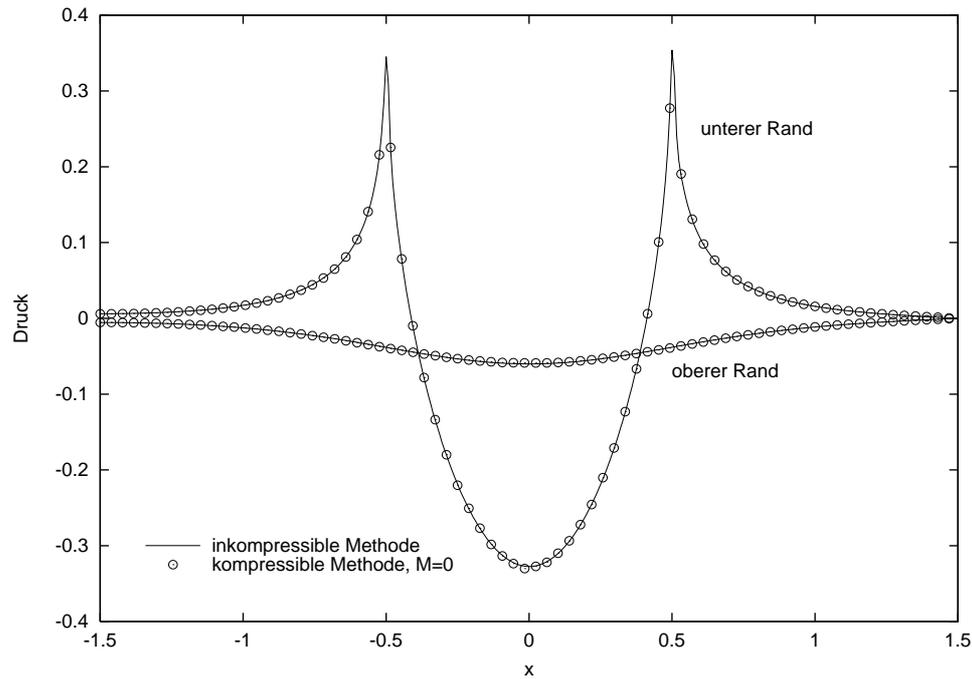
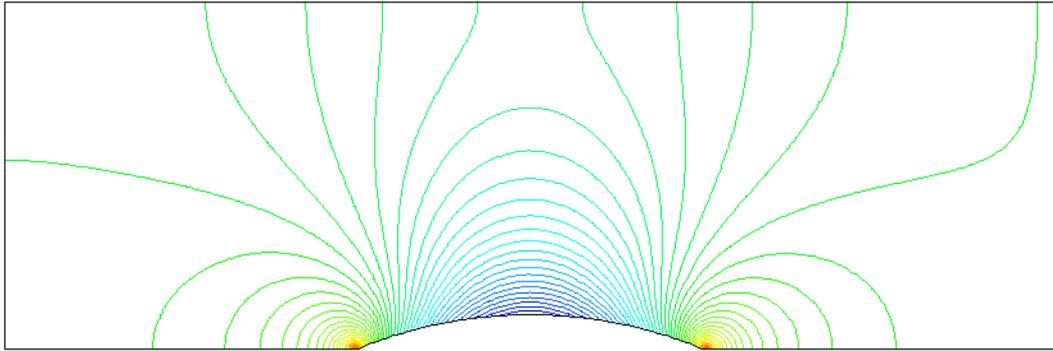


Abbildung 5.1: Druck am oberen und unteren Rand für $M = 0$ verglichen mit den Ergebnissen eines inkompressiblen Verfahrens

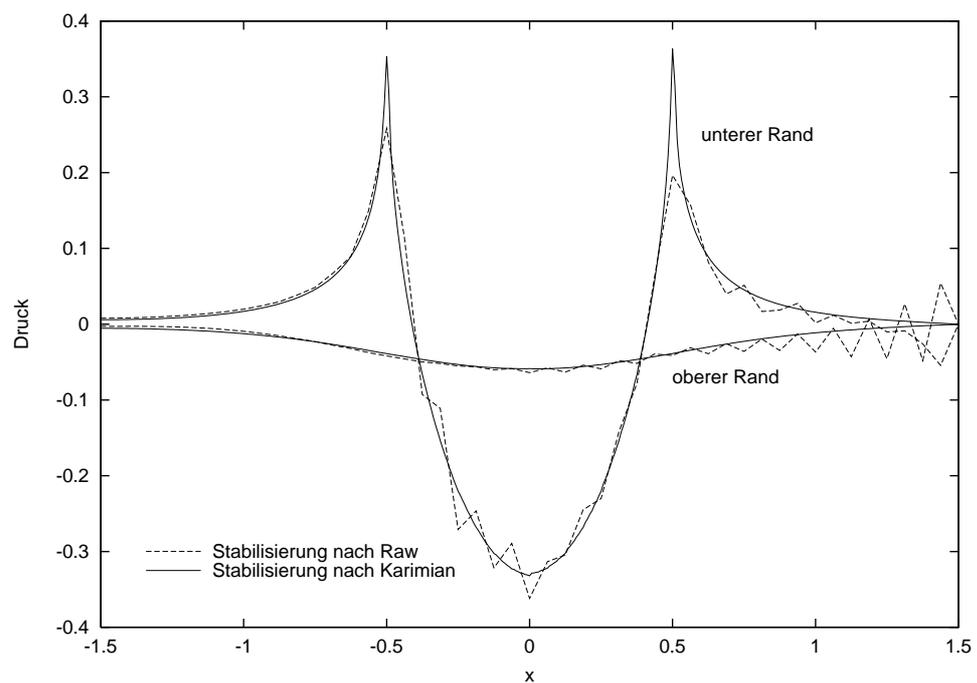
kannte weniger aufweist. Die Daten sind für einen V-Zyklus mit zwei Vor- und zwei Nachglättungsschritten sowie dem ILU_{β} -Glätter mit $\beta = 0$ angegeben. Die Kontinuitätsgleichung wird mit einem Newtonansatz, die restlichen Gleichungen mit einem Fixpunktansatz linearisiert. Als Upwinding-Strategie kommt das Positive Upwinding zum Einsatz.

	Mehrgitter (1,2,2)	
Level	inkompressibel	kompressibel
1	0.026	0.034
2	0.084	0.140
3	0.087	0.129
4	0.102	0.143
5	0.140	0.181
6	0.155	0.217

Tabelle 5.1: Lineare Konvergenzrate κ_{10} eines (γ, ν_1, ν_2) -Mehrgitterverfahrens gemittelt über 15 nichtlineare Schritte mit einem inkompressiblen und dem kompressiblen Code bei $M = 0$

Abbildung 5.2: Druckisolinien für $M = 0$

Anhand einer weiteren Testrechnung im inkompressiblen Regime kann desweiteren sehr gut demonstriert werden, wie sich die in Abschnitt 4.4.2 besprochene Stabilisierung nach Karimian et al. [46] im Vergleich zur einfacheren Stabilisierung nach Raw et al. [94] verhält.

Abbildung 5.3: Druck am oberen und unteren Rand für $M = 0$ bei unterschiedlicher Stabilisierung

In Abbildung 5.3 zeigt sich deutlich, dass die Stabilisierung nach Raw et al. weiterhin ein Oszillieren der Lösung zulässt, wohingegen das Verfahren nach Karimian et

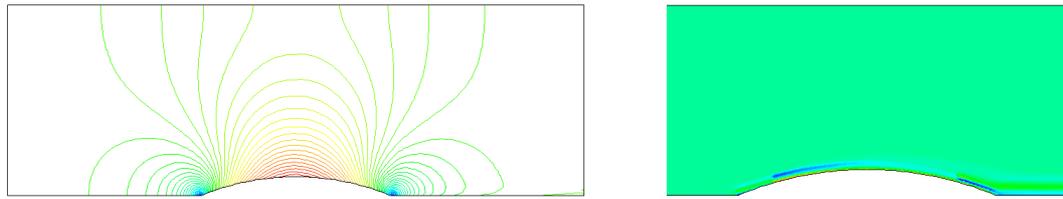
al. eine glatte Lösung erzwingt. Dieses Verhalten ist auch im schwach kompressiblen Regime feststellbar. Für alle im Weiteren besprochenen Berechnungen mit Stabilisierung des Gleichungssystems kommt deshalb immer die Variante von Karimian et al. zum Einsatz.

5.1.2 Subsonische Strömung

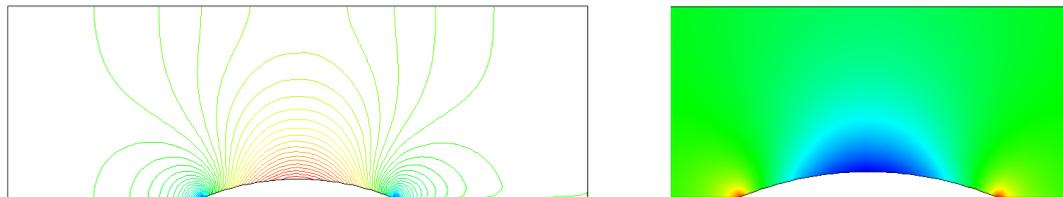
Bei einer subsonischen Strömung bleibt die Machzahl auf dem ganzen Rechengebiet kleiner als Eins. Es treten dann keine Stöße auf und die Lösung muss somit symmetrisch sein. Aus numerischer Sicht werden bei einer subsonischen Strömung zwei weitere Unterkategorien unterschieden. Im Falle sehr kleiner Machzahlen versagt ein rein kompressibles Verfahren. Die asymptotische Analyse aus Kapitel 2 zeigt auf, dass eine Druckaufspaltung die entstehenden Probleme im Limit verschwindender Machzahl bewältigen kann. Das so modifizierte Gleichungssystem muss dann wie in Abschnitt 4.4.2 beschrieben stabilisiert werden. In diese Kategorie fallen die Beispielrechnungen für $Ma_{in} = 10^{-9}$, $Ma_{in} = 10^{-6}$ sowie $Ma_{in} = 10^{-3}$. Bei nicht zu kleinen Machzahlen, wie sie etwa bei $Ma_{in} = 0.5$ gegeben sind, ist hingegen das rein kompressible Verfahren vollkommen ausreichend.

Für die schwach kompressiblen Simulationen wird wie oben erwähnt eine Druckaufspaltung durchgeführt und die Geschwindigkeit im Divergenzterm der Energiegleichung gemäß (4.52) interpoliert, um eine Stabilisierung des Gleichungssystems zu erzielen. Dieses Vorgehen ist zwar ausreichend, um eine Konvergenz des Verfahrens zu erreichen, es ist jedoch im schwach kompressiblen Regime eine weitere Schwierigkeit zu beachten: Bei einer Strömung mit konstanter Dichte am Einströmrand, das heißt dimensionslos $\varrho = 1$, ist die Dichte im gesamten Gebiet nahezu konstant. Die Schwankungen in der Dichte sind ähnlich wie im Druck, also in der Größenordnung $O(M^2)$. Die asymptotische Analyse zeigt jedoch, dass im Gegensatz zum Druck nur die Dichte führender Ordnung - also in diesem Falle der konstante Anteil - einen Einfluss auf die anderen Größen des Gleichungssystems hat. Dies kann zur Folge haben, dass ein numerisch stabiles Verfahren zwar die Geschwindigkeit und den Druck genau berechnet, die Dichte aber physikalisch nicht korrekt wiedergibt, da eine konstante Dichte approximiert wird.

Dieses Phänomen wird in Abbildung 5.4 veranschaulicht. Bei Verwendung des Positiven Upwindings und einer Fixpunktlinearisierung sind die Machisolinien nicht zu unterscheiden von den Ergebnissen einer zweiten Simulation mit Positivem Upwin-



Machisolinien und Dichte mit Fixpunktlinearisierung



Machisolinien und Dichte mit Newtonlinearisierung für die Dichte

Abbildung 5.4: Unphysikalische und physikalische Approximation der Dichte bei $Ma_{in} = 10^{-6}$

ding, die allerdings die Terme in der Kontinuitätsgleichung mit einem Newtonansatz linearisiert. Deutlich wird der Unterschied erst bei Betrachtung der Dichte oberhalb der Beule: Im ersten Fall ist sie zwar nahezu konstant, jedoch nur im zweiten Fall wird das physikalisch korrekte Ergebnis approximiert. Die dargestellten Dichteschwankungen liegen bei einer Machzahl von $Ma_{in} = 10^{-6}$ erwartungsgemäß im Bereich von 10^{-13} .

Level	Mehrgitter				MG-BiCG-Stab			
	(1,1,1)	(1,2,2)	(2,2,2)	(1,3,3)	(1,1,1)	(1,2,2)	(2,2,2)	(1,3,3)
1	0.043	0.035	0.035	0.034	0.010	0.006	0.006	0.005
2	0.260	0.151	0.151	0.109	0.121	0.157	0.017	0.003
3	0.381	0.174	0.175	0.111	0.144	0.042	0.031	0.010
4	0.528	0.295	0.289	0.179	0.237	0.091	0.068	0.045
5	0.667	0.466	0.465	0.289	0.455	0.221	0.171	0.125
6	div	div	div	div	0.639	0.512	0.600	0.448

Tabelle 5.2: Lineare Konvergenzrate κ_{10} für einen (γ, ν_1, ν_2) -Mehrgitterzyklus gemittelt über 15 nichtlineare Schritte bei Regulärem Upwinding und $Ma_{in} = 10^{-3}$

Besonders interessant ist die Frage nach der Konvergenz des Mehrgitterverfahrens im schwach kompressiblen Regime. Exemplarisch soll diese Frage für den Testfall $Ma_{in} = 10^{-3}$ erörtert werden. In Tabelle 5.2 ist die gemittelte lineare Konvergenzrate κ_{10} angegeben bei Verwendung des Regulären Upwindings. Eine volle Newtonlinearisierung divergiert, sodass auf die Fixpunktlinearisierung zurückgegriffen wurde. Wie bereits erwähnt wurde lediglich der Massenterm in der Kontinuitätsgleichung mit einem Newtonschema linearisiert, um eine physikalisch korrekte Lösung zu erhalten. Die Tabelle ist dabei wie folgt zu lesen: Es ist die Konvergenz des linearen Löser auf dem groben Gitter 1 mit 65 Knoten bis zum sechs Mal verfeinerten Gitter 6 mit 49665 Knoten angegeben. Als linearer Löser dient ein reines Mehrgitterverfahren mit den Parametern (γ, ν_1, ν_2) , die die Art des Verfahrens (V- oder W-Zyklus) und die Anzahl der Vor- und Nachglättungsschritte angeben. Daneben sind die entsprechenden Werte zu finden für ein BiCG-Stab-Verfahren, das durch ein Mehrgitterverfahren vorkonditioniert ist. Als Glätter für das Mehrgitterverfahren kommt nur ILU_β in Frage, da alle anderen in dieser Arbeit beschriebenen Glätter zu einer Divergenz des Mehrgitterverfahrens führen. Der Parameter β wird zu Null gesetzt, das heißt es wird das unmodifizierte ILU-Verfahren verwendet. Es zeigt sich in allen Fällen eine gute Konvergenz bis zum fünften Level. Auf dem feinsten Gitter divergiert das reine Mehrgitterverfahren. Das vorkonditionierte BiCG-Stab-Verfahren kann zwar noch die Konvergenz erhalten, jedoch verschlechtert sich diese sprunghaft, da die Lösung auf dem feinsten Gitter zu oszillieren beginnt.

Diese Probleme werden bei Wahl des Positiven Upwindings umgangen. Wie aus Tabelle 5.3 zu entnehmen, ist die Mehrgitterkonvergenz insbesondere für die Variante

Level	Mehrgitter				MG-BiCG-Stab			ILU-
	(1,1,1)	(1,2,2)	(2,2,2)	(1,3,3)	(1,1,1)	(1,2,2)	(2,2,2)	BCGS
1	0.037	0.035	0.035	0.035	0.010	0.007	0.007	0.102
2	0.183	0.140	0.139	0.113	0.100	0.010	0.010	0.336
3	0.178	0.129	0.086	0.089	0.045	0.008	0.005	0.604
4	0.220	0.143	0.136	0.124	0.083	0.020	0.013	0.897
5	0.282	0.181	0.179	0.201	0.115	0.048	0.033	0.798
6	0.378	0.217	0.206	0.262	0.211	0.079	0.065	0.831

Tabelle 5.3: Lineare Konvergenzrate κ_{10} für einen (γ, ν_1, ν_2) -Mehrgitterzyklus gemittelt über 15 nichtlineare Schritte bei Positivem Upwinding und $Ma_{in} = 10^{-3}$

V-Zyklus mit zwei Vor- und Nachglättungsschritten sehr gut. Die Verwendung eines W-Zyklus ist nur minimal besser, sodass sich der Mehraufwand nicht lohnt. Das mit Mehrgitter vorkonditionierte BiCG-Stab-Verfahren zeigt noch bessere lineare Konvergenzraten, allerdings ist zu beachten, dass natürlich der Rechenaufwand größer ist. Als Glätter dient weiterhin ILU_β mit $\beta = 0$. Auf eine Untersuchung des Parameters β kann aufgrund der sehr guten linearen Konvergenzraten getrost verzichtet werden. Die letzte Spalte zeigt zum Vergleich das BiCG-Stab-Verfahren mit einer ILU-Vorkonditionierung. Es ist deutlich zu sehen, dass durch die Vorkonditionierung mit dem Mehrgitterverfahren eine erhebliche Konvergenzbeschleunigung im Vergleich zur ILU-Vorkonditionierung zu erzielen ist.

Sowohl die linearen als auch die nichtlinearen Konvergenzraten sind nahezu identisch bei den Testrechnungen für $Ma_{in} = 10^{-9}, 10^{-6}, 10^{-3}$ und 0.1 . Die Abbildung 5.5 belegt dies eindrucksvoll für die linearen Konvergenzraten κ_{10} eines V-Zyklus mit zwei Vor- und Nachglättungsschritten. In der untersten Zeile sind zudem die gemittelten nichtlinearen Konvergenzraten χ_{15} angegeben, die sich bei allen vier Testrechnungen nur marginal unterscheiden.

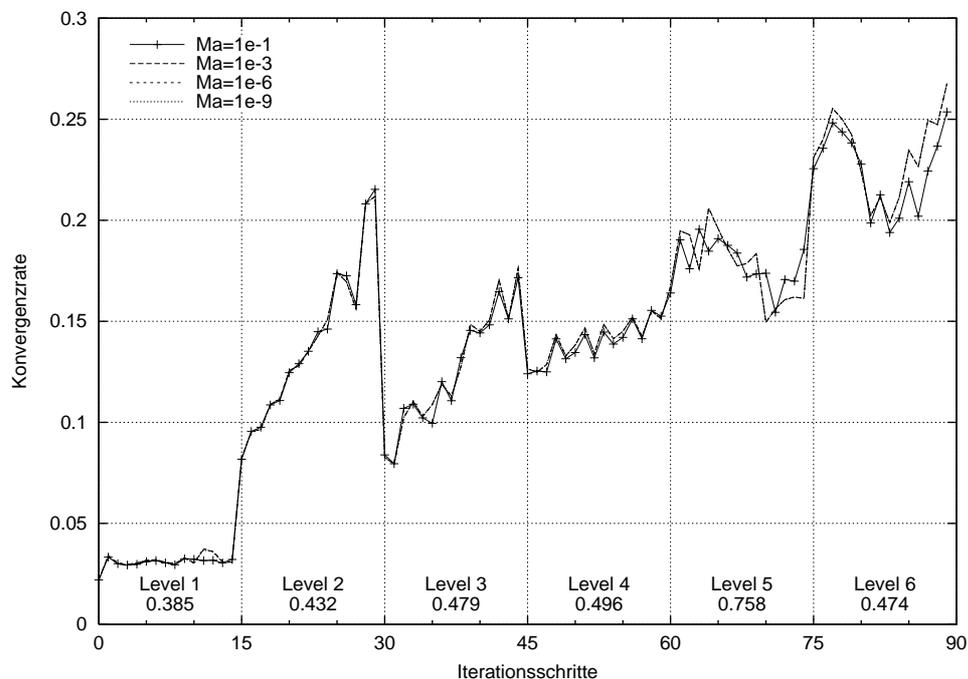


Abbildung 5.5: Konvergenzraten für einen (1, 2, 2)-Mehrgitterzyklus bei unterschiedlichen Machzahlen

Der letzte subsonische Testfall beim Kanal mit Beule ergibt sich für die Machzahl $Ma_{in} = 0.5$ am Einströmrand. Das System ist so weit vom schwach kompressiblen Limit entfernt, dass keine Druckaufspaltung und damit auch keine Stabilisierung mehr notwendig ist. Die wie auch in den anderen subsonischen Testfällen symmetrische Lösung ist anhand der Machisolinien in Abbildung 5.6 dargestellt.

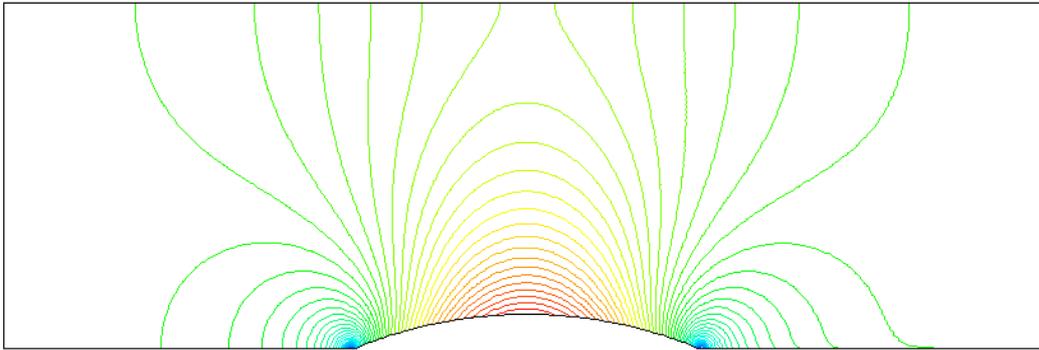


Abbildung 5.6: Machisolinien für $Ma_{in} = 0.5$

Eine etwas genauere Betrachtung der Qualität der Lösung erzielt man durch Vergleich der Machzahlen am unteren und am oberen Rand des Kanals mit anderen Benchmarkrechnungen in der Literatur.

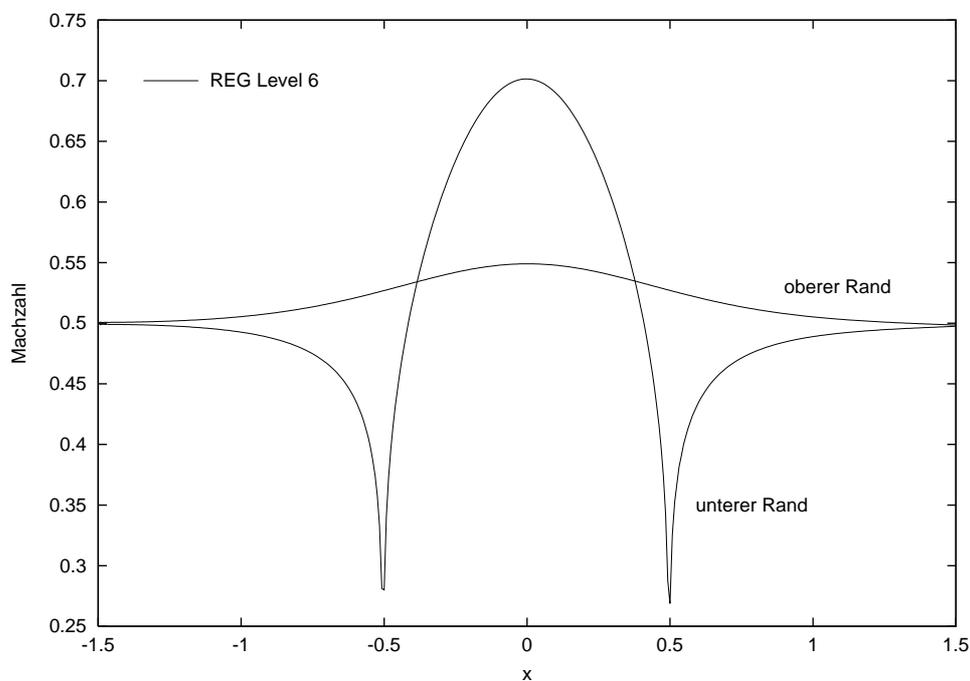


Abbildung 5.7: Machzahl am oberen und unteren Rand für $Ma_{in} = 0.5$

Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den Arbeiten von Eidelman et al., Karimian et al. und Darbandi et al., lediglich die Berechnungen von Bijl weisen eine größere maximale Machzahl am unteren Rand auf. Man könnte eine geringere numerische Diffusion bei Bijl annehmen. Allerdings wurde die Lösung dort auf einem uniformen Gitter mit etwa 4000 Knoten gerechnet, die in Abbildung 5.7 dargestellten Machzahlen jedoch auf einem uniformen Gitter mit knapp 50000 Knoten, sodass man eigentlich von einer besser auskonvergierten Lösung ausgehen kann.

Interessant ist es festzustellen, dass das Weglassen der Druckaufspaltung und der Stabilisierung zu einem deutlich unterschiedlichen Lösungsverhalten im Vergleich zu den vorherigen Testrechnungen führt. Konvergierte im schwach kompressiblen Regime nur die Fixpunktiteration, so kann bei einer Machzahl von $Ma_{in} = 0.5$ die volle Newtonlinearisierung zum Einsatz kommen. Ein weiterer gravierender Unterschied ergibt sich bei der Wahl der Upwind-Strategie. Das Positive Upwinding führt nun zu einem Divergieren des Lösungsprozesses, wohingegen mit LPS und REG gute Resultate erzielt werden können. Beide Strategien sind nahezu gleichwertig, weshalb im Folgenden immer nur die Ergebnisse für das Reguläre Upwinding angegeben werden. Parallelen ergeben sich lediglich bei der Wahl des Glätters im Mehrgitterverfahren: Auch hier kann nur mit ILU_{β} eine Konvergenz der linearen Iteration herbeigeführt werden, alle anderen in dieser Arbeit beschriebenen Glätter sind zur Problemstellung nicht adäquat.

Level	Mehrgitter				MG-BiCG-Stab			
	(1,1,1)	(1,2,2)	(2,2,2)	(1,3,3)	(1,1,1)	(1,2,2)	(1,3,3)	$\beta = 0.1$
1	0.054	0.039	0.039	0.035	0.011	0.007	0.005	0.005
2	0.415	0.162	0.162	0.078	0.149	0.020	0.003	0.005
3	0.578	0.341	0.338	0.196	0.321	0.091	0.028	0.030
4	0.716	0.562	0.562	0.465	0.608	0.361	0.164	0.199
5	0.918	0.819	0.822	0.758	0.719	0.605	0.463	0.472
6	0.923	0.880	0.880	0.880	0.904	0.684	0.671	0.577

Tabelle 5.4: Lineare Konvergenzrate κ_{10} für einen (γ, ν_1, ν_2) -Mehrgitterzyklus gemittelt über 15 nichtlineare Schritte bei Regulärem Upwinding und $Ma_{in} = 0.5$

Die in Tabelle 5.4 angegebenen linearen Konvergenzraten sind deutlich schlechter als im schwach kompressiblen Regime und steigen auf den feineren Gittern sprunghaft

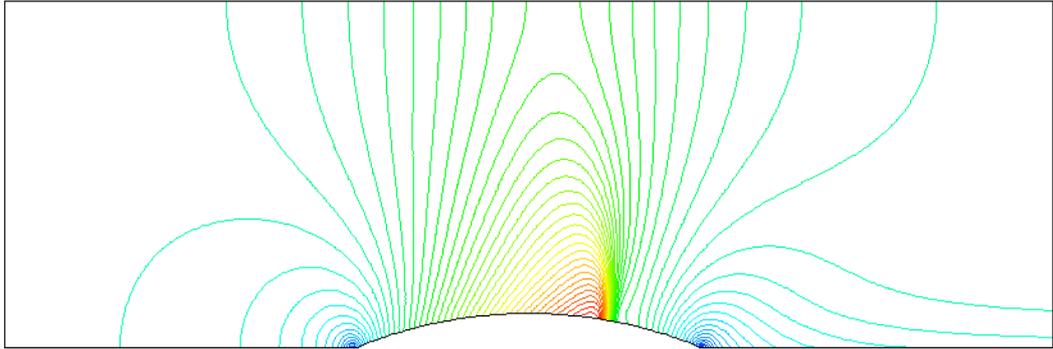
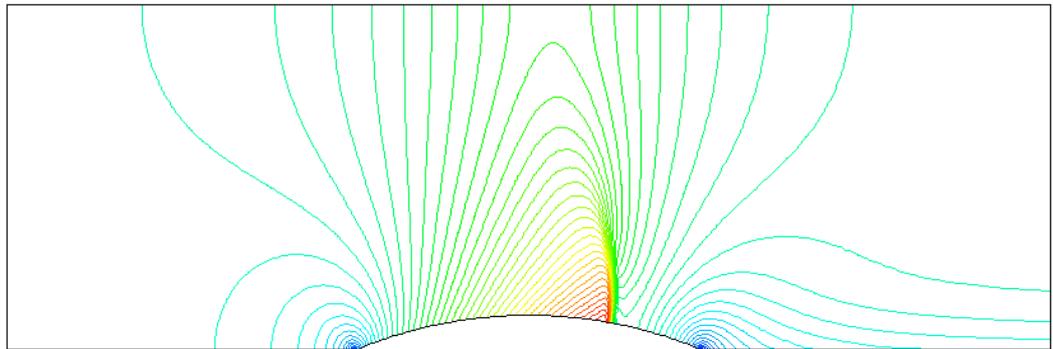
an. Die schlechtere Konvergenz ist im Wegfallen der Stabilisierung begründet. Die aufgrund der Stabilisierung künstlich eingeführten Terme haben elliptischen Charakter und tragen somit wesentlich zur Verbesserung der Mehrgitterkonvergenz bei. Es kann schon an dieser Stelle festgehalten werden, dass diese Beobachtung auch im transonischen und supersonischen Regime Gültigkeit besitzt.

Mit Hilfe der BiCG-Stab-Iteration kann dieses Konvergenzverhalten auch nur in geringem Maße verbessert werden. Die besten Ergebnisse werden bei einem V-Zyklus mit drei Vor- und Nachglättungsschritten erzielt. Allerdings ist die Konvergenzrate nur auf den groben Gittern erheblich verringert; auf dem feinsten Gitter nähert sich diese den Werten der anderen Beispielrechnungen an. Eine weitere Verbesserung der Konvergenz kann durch Wahl des Parameters β des ILU_β -Glätters erzielt werden. In der letzten Spalte der Tabelle 5.4 ist die lineare Konvergenzrate eines $(1, 3, 3)$ -Mehrgitterzyklus für $\beta = 0.1$ angegeben. Diese ist im Vergleich zu der in der vorletzten Spalte dokumentierten Rechnung mit $\beta = 0$ um ein Zehntel kleiner. Größere Werte für β liefern wieder schlechtere Resultate, ebenso wie die Einführung einer Dämpfung gemäß (4.71).

5.1.3 Transonische Strömung

Obwohl das eigentliche Interesse dieser Arbeit auf den schwach kompressiblen Strömungen liegt, soll die Qualität der Methode auch für voll kompressible Strömungen aufgezeigt werden. Aus diesem Grunde wird die transonische Strömung für $Ma_{in} = 0.675$ betrachtet. Bei einer transonischen Strömung sind Teile des Gebietes subsonisch und andere Teile supersonisch. In diesem Beispiel beschleunigt sich die Strömung über der Beule so stark, dass im letzten Drittel ein kleiner Stoß entsteht.

Ein sechs mal uniform verfeinertes Gitter mit 49665 Knoten wird zur Simulation der Strömung verwendet. Die Wahl der Upwindings ist analog zum Fall $Ma_{in} = 0.5$ entscheidend: Das Positive Upwinding führt zu einem Divergieren des Lösungsprozesses. LPS und REG zeigen ein sehr ähnliches Verhalten, wobei das Reguläre Upwinding geringfügig besser ist. In Abbildung 5.8 sind die berechneten Machisolinien graphisch dargestellt. Der Stoß wird gut lokalisiert bei etwa 73% der Beule, die maximale Machzahl beträgt 1.36 vor dem Stoß. Der Stoß wird aufgrund der numerischen Diffusion über 8 Knoten verschmiert. Bijl [12] findet den Stoß bei 70% mit einem Maximum von 1.33, wohingegen in der Arbeit von Eidelman et al. [24] der Schock bei 72% liegt und ein Maximum von 1.32 in der Machzahl berechnet wird.

Abbildung 5.8: Machisolinien für $Ma_{in} = 0.675$ mit Regulärem UpwindingAbbildung 5.9: Machisolinien für $Ma_{in} = 0.675$ mit PAC-Upwinding

Eine erhebliche Verbesserung der numerischen Genauigkeit wird bei Verwendung der PAC-Upwinding-Strategie (4.50) für die Dichte in der Kontinuitätsgleichung erzielt. Auf dem feinen Gitter wird der Stoß deutlich besser wiedergegeben, wie in Abbildung 5.9 zu sehen ist. Der Stoß ist zudem nur noch über 4 Knoten verschmiert. Die maximale Machzahl ist aufgrund der geringeren numerischen Diffusion größer und beträgt 1.43, der Stoß befindet sich bei 73.5% der Beule. Ein Vergleich der Genauigkeit der beiden hier eingesetzten Verfahren ist noch einmal in Abbildung 5.10 anhand der Machzahl am unteren und oberen Rand des Kanals graphisch aufbereitet. Während der Stoß bei Regulärem Upwinding auf dem viermal verfeinerten Gitter mit 3201 Knoten noch nicht zu erkennen ist, wird er mit dem PAC-Upwinding für die Dichte auf demselben Gitter an der korrekten Stelle wiedergegeben. Dieselbe Genauigkeit wie auf diesem groben Gitter wird mit Regulärem Upwinding erst auf Level 6 erreicht. Mit Hilfe des PAC-Upwindings dagegen gelingt es auf dem feinen Gitter, den Stoß sehr scharf aufzulösen.

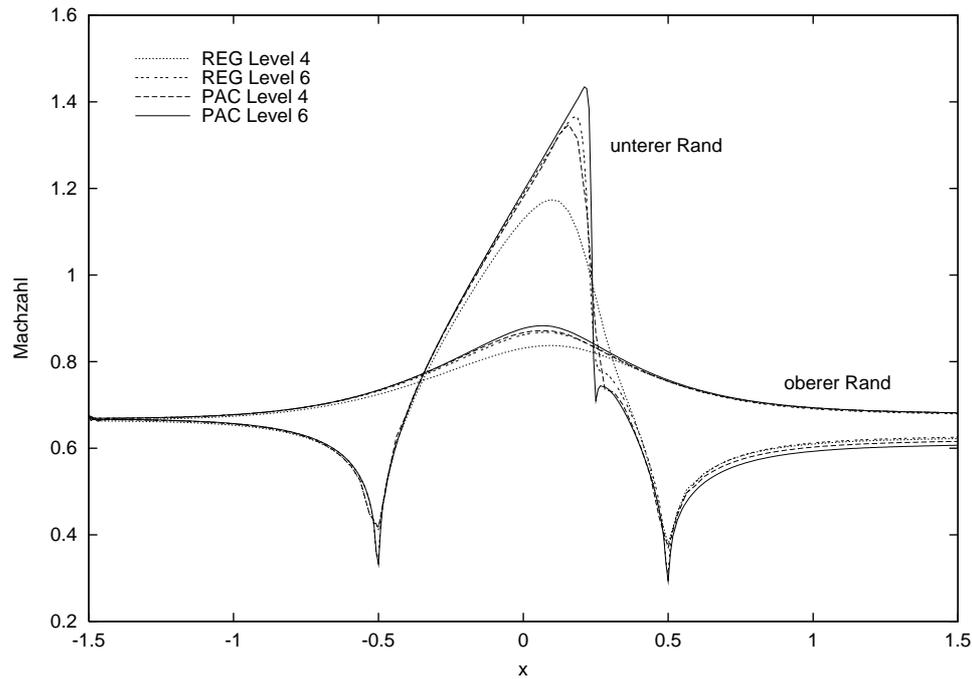


Abbildung 5.10: Machzahl am oberen und unteren Rand des Kanals mit Beule für $Ma_{in} = 0.675$ und unterschiedlichen Upwind-Strategien auf Gitter Level 4 und Level 6

Bei allen transonischen Rechnungen wurde das Newton-Verfahren als nichtlinearer Gleichungslöser verwendet, da erstaunlicherweise die Fixpunktiteration divergiert. Dies mag daran liegen, dass durch den vereinfachten Ansatz die Kopplungen zwischen den einzelnen Größen nicht mehr korrekt wiedergegeben werden. Das lineare Gleichungssystem ist dann zwar stabil zu lösen, der nichtlineare Lösungsprozess schlägt jedoch fehl.

Interessant ist vor allem der Vergleich des Newton-Verfahrens für die unterschiedlichen Upwind-Strategien. Dabei stellt sich heraus, dass der Gewinn der höheren Genauigkeit mit Hilfe des PAC-Upwinding durch eine deutlich schlechtere nichtlineare Konvergenz bezahlt wird. Durch den zusätzlichen PAC-Term in der Kontinuitätsgleichung entstehen neue Kopplungen zwischen Dichte und Geschwindigkeit, die der in dieser Arbeit aufgezeigte Ansatz eines Newton-Verfahrens nicht aufzulösen vermag. Vielversprechend könnte hier der Einsatz einer automatischen Differentiation sein [30] [31], die im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht implementiert wurde.

In Abbildung 5.11 ist die Verschlechterung der Konvergenz anhand des logarithmisch aufgetragenen nichtlinearen Defektes der Lösung gut zu erkennen. Neben dem Ver-

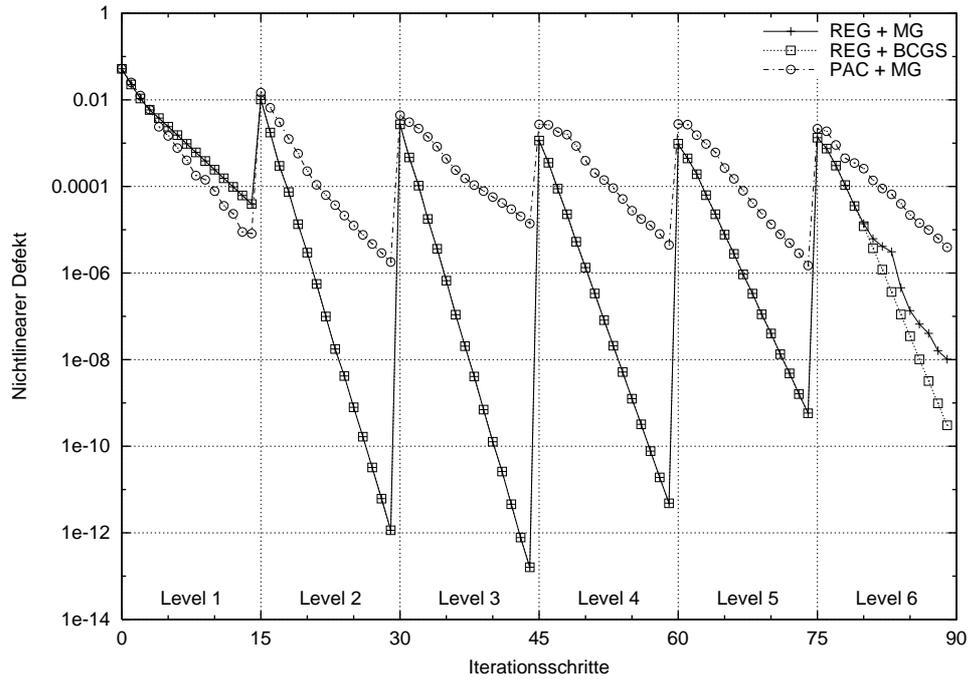


Abbildung 5.11: Nichtlineare Konvergenz für den Kanal mit Beule bei $Ma_{in} = 0.675$ und unterschiedlichen Upwind-Strategien auf Level 6

gleich zwischen dem Regulären und dem PAC-Upwinding ist zudem eine weitere Kurve zu sehen, in der das Mehrgitterverfahren als linearer Löser durch ein mit Mehrgitter vorkonditioniertes BiCG-Stab-Verfahren ersetzt wurde. Es zeigt sich auf dem feinsten Gitter eine bessere nichtlineare Konvergenz, da der lineare Löser in den verwendeten 10 Iterationsschritten eine genauere Lösung erzeugt. Da im Falle des PAC-Upwindings der lineare Löser wie im nächsten Abschnitt gezeigt auch auf dem feinsten Gitter noch gut konvergiert, ist durch den Einsatz des BiCG-Stab-Verfahrens keine Verbesserung der nichtlinearen Konvergenz zu erzielen. Die mittlere Konvergenz χ_{15} auf jedem Gitter ist der Tabelle 5.5 zu entnehmen.

Level	REG	PAC	Level	REG	PAC
1	0.60	0.53	4	0.22	0.55
2	0.19	0.47	5	0.32	0.54
3	0.17	0.57	6	0.42	0.59

Tabelle 5.5: Mittlere nichtlineare Konvergenzrate χ_{15} für $Ma_{in} = 0.675$ bei unterschiedlichen Upwind-Strategien

Level	Mehrgitter				MG-BiCG-Stab			
	(1,1,1)	(1,2,2)	(2,2,2)	(1,3,3)	(1,1,1)	(1,2,2)	(2,2,2)	(1,3,3)
1	0.048	0.037	0.037	0.036	0.011	0.007	0.007	0.006
2	0.356	0.220	0.220	0.146	0.147	0.022	0.020	0.004
3	0.504	0.310	0.302	0.200	0.276	0.093	0.077	0.025
4	0.672	0.509	0.496	0.445	0.515	0.346	0.298	0.218
5	0.867	0.702	0.676	0.527	0.616	0.516	0.489	0.413
6	0.854	0.826	0.821	0.805	0.881	0.613	0.524	0.484

Tabelle 5.6: Lineare Konvergenzrate κ_{10} für einen (γ, ν_1, ν_2) -Mehrgitterzyklus gemittelt über 15 nichtlineare Schritte bei Regulärem Upwinding und $Ma_{in} = 0.675$

Die linearen Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens können der Tabelle 5.6 entnommen werden. Es zeigt sich wie zu erwarten in etwa dasselbe Bild wie bei der subsonischen Strömung mit $Ma_{in} = 0.5$ am Einströmrand. Auf den feinen Gittern wird die Konvergenz immer schwächer, auch mehrmaliges Glätten hilft wenig. Dieser

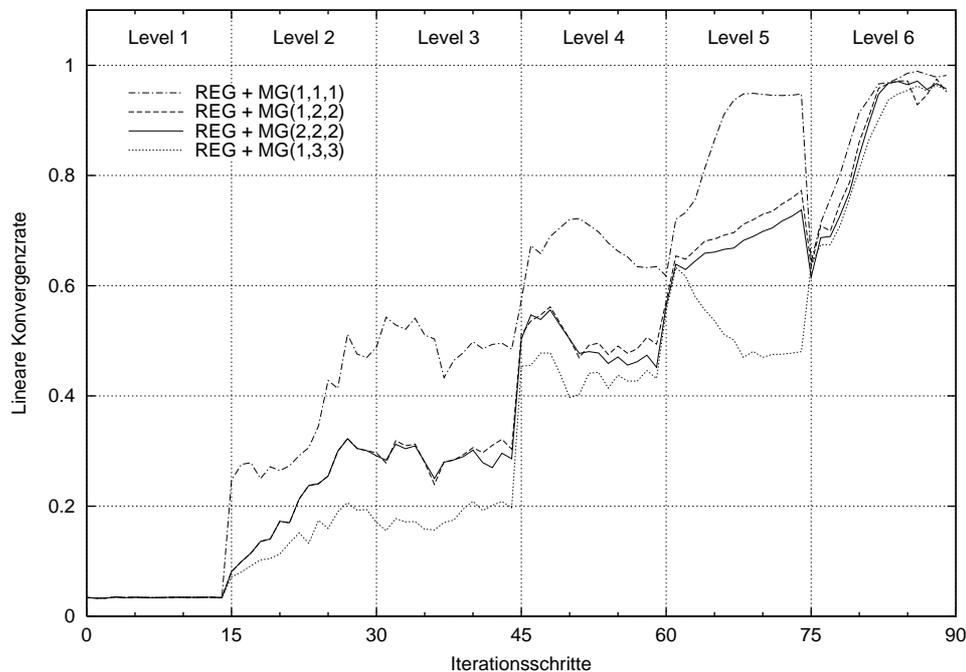


Abbildung 5.12: Lineare Konvergenz für den Kanal mit Beule bei $Ma_{in} = 0.675$ mit unterschiedlichen Parametern für das Mehrgitterverfahren

Effekt wird in Abbildung 5.12 noch einmal für das Reguläre Upwinding mit unterschiedlichen Einstellungen des Mehrgitterzyklus graphisch veranschaulicht.

Eine deutliche Verbesserung der linearen Konvergenzrate κ_{10} läßt sich erst durch die mit Mehrgitter vorkonditionierte BiCG-Stab-Iteration erzielen. Die entsprechende Graphik kann der Abbildung 5.13 entnommen werden.

Aus Abbildung 5.14 kann schließlich das unterschiedliche lineare Konvergenzverhalten von Regulärem und PAC-Upwinding abgelesen werden. Im Gegensatz zur obigen Betrachtung des nichtlinearen Problems ist hierbei eine Verschlechterung der Konvergenz bei Verwendung des PAC-Upwindings nicht festzustellen. Es zeigt sich bei einem reinen Mehrgitterverfahren sogar eine bessere Konvergenz auf dem feinsten Gitter.

5.1.4 Supersonische Strömung

Der Benchmark einer supersonischen Strömung ergibt sich für $Ma_{in} = 1.65$. Ein Schock entsteht am vorderen Ende der Beule und wird an der oberen Wand reflektiert. Am anderen Ende der Beule entsteht ein zweiter Stoß, der sich im Kanal hinter der Beule mit dem reflektierten Schock kreuzt. Für die supersonischen Berechnungen wurde der Kanal um eine Einheit verlängert, damit die reflektierten Stöße zu sehen sind.

Um die Genauigkeit des Verfahrens zu verifizieren, kann der Winkel des ersten Schocks sowie die Machzahl hinter dem Stoß exakt berechnet werden. Die nun folgenden kurzen Ausführungen entstammen dem Buch von Anderson [4].

Die kreisförmige Beule mit einer Höhe von 4% der Kanalhöhe und einer Länge von 1 entspricht einem Hindernis, das im Winkel von $\theta = 9.15^\circ$ angestellt ist. Den physikalischen Zusammenhang zum Winkel β des Schocks stellt die Formel

$$(5.1) \quad \tan \theta = 2 \cot \beta \cdot \frac{Ma_{in}^2 \sin^2 \beta - 1}{Ma_{in}^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2}$$

her, in der die Strömung durch die Machzahl Ma_{in} und den adiabatischen Koeffizienten γ gegeben ist. Mit Hilfe der Formel (5.1) errechnet sich der Winkel des ersten Schocks zu 47.76° . Zur Berechnung der Machzahl hinter dem Schock wird die Machzahl normal zum Schock benötigt:

$$\widetilde{Ma}_{in} = Ma_{in} \sin \beta.$$

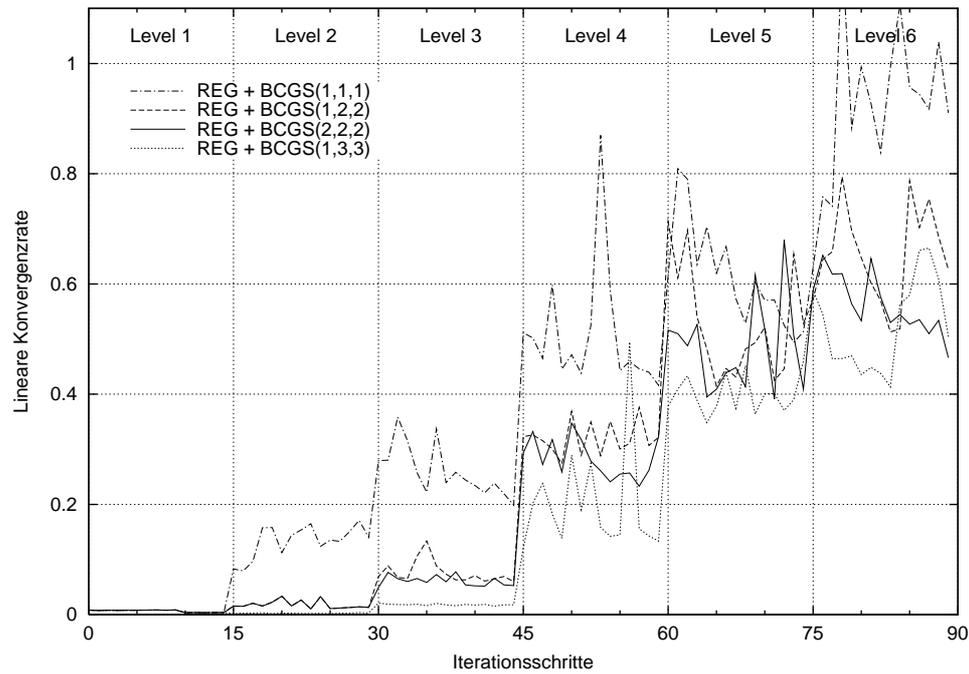


Abbildung 5.13: Lineare Konvergenz für den Kanal mit Beule bei $Ma_{in} = 0.675$ mit unterschiedlichen Parametern für das BiCG-Stab-Verfahren

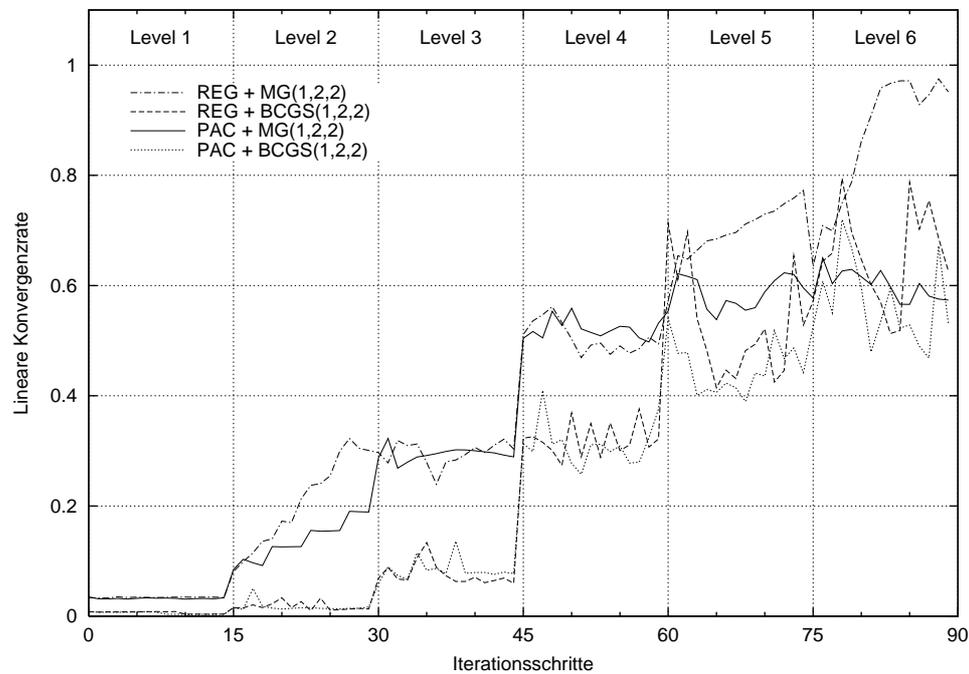


Abbildung 5.14: Lineare Konvergenz für den Kanal mit Beule bei $Ma_{in} = 0.675$ mit unterschiedlichen Upwind-Strategien und Lösern

Ma_{in}	β	Ma_{out}
1.85	41.72	1.53
1.87	41.23	1.55
1.90	40.52	1.58
1.92	40.07	1.60
1.94	39.68	1.62
1.96	39.21	1.63
1.98	38.80	1.65

Tabelle 5.7: Zusammenhang zwischen der Machzahl vor und hinter dem Stoß sowie dem Winkel des Stoßes

Mit dieser Größe erhält man die Machzahl normal zum Schock hinter dem Stoß:

$$(5.2) \quad \widetilde{Ma}_{out}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \widetilde{Ma}_{in}^2}{\gamma \cdot \widetilde{Ma}_{in}^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

Die gesuchte Machzahl Ma_{out} hinter dem ersten Stoß ist dann durch die Formel

$$(5.3) \quad Ma_{out} = \frac{1}{\sin(\beta - \theta)} \widetilde{Ma}_{out}$$

gegeben. Mit den in diesem Benchmark vorliegenden Größen ergibt sich somit die Machzahl $Ma_{out} = 1.33$. Die Berechnung des zweiten Stoßes kann analog erfolgen. Jedoch ist es schwierig, die genaue Machzahl am Ende der Beule vor dem Stoß zu berechnen, sodass hier kein exaktes Ergebnis angegeben werden kann. Der physikalische Zusammenhang zwischen der Machzahl vor dem Schock, dem Winkel des Stoßes und der Machzahl nach dem Schock ist dabei so empfindlich, dass schon eine geringe Abweichung bei der Machzahl vor dem Schock zu starken Abweichungen für den Winkel des Stoßes führt. Die Machzahl hinter dem Schock ändert sich absolut in etwa wie die Machzahl vor dem Schock. Dieses Verhalten ist in Tabelle 5.7 exemplarisch für verschiedene Machzahlen vor dem Stoß aufgeführt.

Die nun diskutierten Rechnungen wurden auf einem sechs mal uniform verfeinerten Gitter mit 66177 Knoten auf einem Prozessor durchgeführt. Zunächst zeigt sich wie im Testfall $Ma_{in} = 0.675$ die höhere Genauigkeit des Verfahrens bei Anwendung des PAC-Upwindings (4.50) für die Dichte. In den Abbildungen 5.15 und 5.16 ist die Dichte geplottet mit und ohne Anwendung der PAC-Strategie. Es ist deutlich zu sehen, dass das numerische Verfahren im ersten Fall erheblich weniger Diffusion erzeugt.

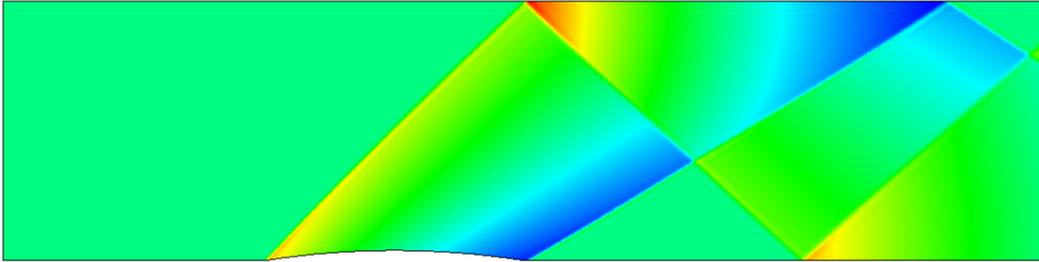


Abbildung 5.15: Dichte mit PAC-Upwinding

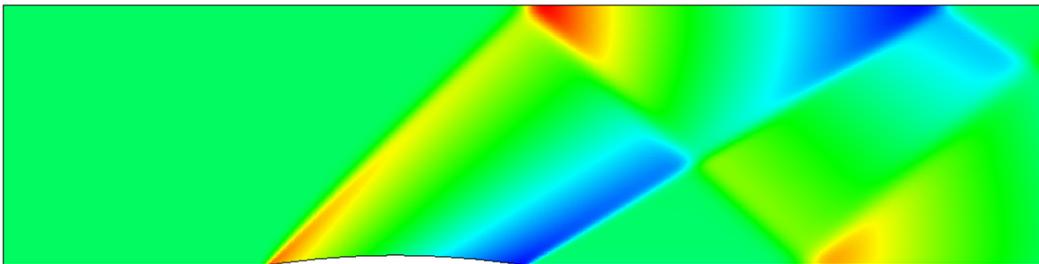


Abbildung 5.16: Dichte mit Regulärem Upwinding

Noch besser ersichtlich wird die höhere Genauigkeit bei Betrachtung der Machzahl am oberen und unteren Rand des Kanals, wie in Abbildung 5.17 dargestellt. Alle Stöße - auch die reflektierten - werden mit dem PAC-Upwind-Verfahren scharf aufgelöst, wohingegen das Reguläre Upwinding nur die ersten beiden Stöße am unteren Rand korrekt wiedergibt. Die erhöhte Diffusivität beim Regulären Upwinding spiegelt sich zudem an einer niedrigeren maximalen Machzahl am hinteren Ende der Beule. Für das reguläre Upwinding ergibt sich ein Wert von etwa 1.90, mit Hilfe des PAC-Upwindings liegt der Wert bei 1.93. Wie schon weiter oben diskutiert muss dies zu sehr unterschiedlichen Machzahlen hinter dem zweiten Schock führen, wenn die Verfahren in sich konsistent sind. Im ersten Fall müsste diese bei 1.58 liegen, im zweiten Fall bei 1.61. Wiederum ist es das PAC-Upwinding, das hier fast exakte Werte liefert. Mit Hilfe des Regulären Upwindings beträgt die Abweichung jedoch ungefähr 2% von der konsistenten Lösung.

Eine Betrachtung der nichtlinearen und linearen Konvergenz bringt an dieser Stelle keine neuen Aufschlüsse. Im Wesentlichen gelten dieselben Ergebnisse wie im transonischen Fall: Das PAC-Upwinding führt zu einer Verschlechterung der nichtlinearen Konvergenz. Die lineare Konvergenz des Mehrgitterverfahrens sollte durch eine Einbettung in die BiCG-Stab-Iteration und durch Verwendung von drei Vor-

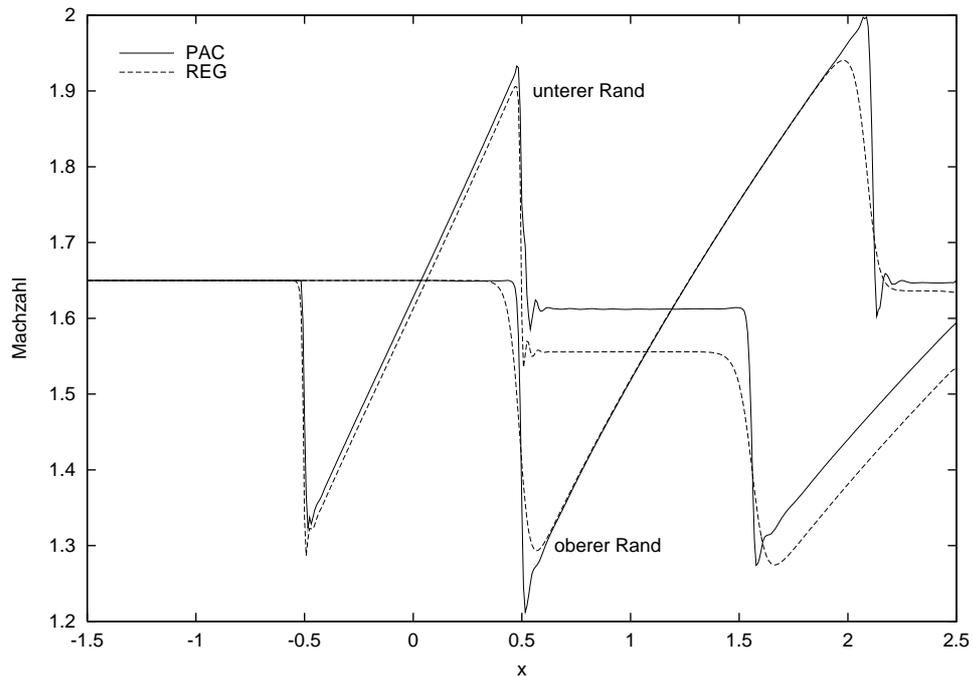


Abbildung 5.17: Machzahl am oberen und unteren Rand des Kanals mit Beule für $Ma_{in} = 1.65$ und unterschiedlichen Upwind-Strategien

und Nachglättungsschritten beschleunigt werden. Durch Modifikation des Parameters β kann die Glättungseigenschaft des ILU_{β} -Verfahrens verbessert werden. Es konnte allerdings keine allgemeine Regel für alle Rechnungen gefunden werden. Für die supersonische Strömung stellt die Wahl von $\beta = -0.4$ ein Optimum dar.

Da zur Auflösung der Schocks vergleichsweise viele Knotenpunkte benötigt werden und die Lösung zudem stationär ist, drängt sich die Anwendung eines adaptiven Verfahrens geradezu auf. Als Fehlerindikator zur Markierung der lokal zu verfeinernden Elemente wurde die Machzahl gewählt, die an den Stößen große Sprünge aufweist. Das so entstandene adaptiv verfeinerte Gitter hat neun Level und umfasst insgesamt 398.815 Knoten. Dies bedeutet eine Reduktion um 90% gegenüber dem uniformen Gitter, das im Vergleich aus 4.199.425 Knoten bestünde. Zur Lösung des Problems wurden 16 Prozessoren verwendet.

Auch für diesen Fall soll die Machzahl am oberen und unteren Rand des Kanals geplottet werden. Es findet sich eine sehr genaue Wiedergabe der Machzahl hinter dem ersten Schock sowie des Winkels. Ebenso ist der zweite Stoß in sich konsistent berechnet: Die Machzahl vor dem Stoß ist 1.94 und hinter dem Stoß 1.613, was in sehr guter Übereinstimmung mit den theoretischen Werten aus Tabelle 5.7 steht.

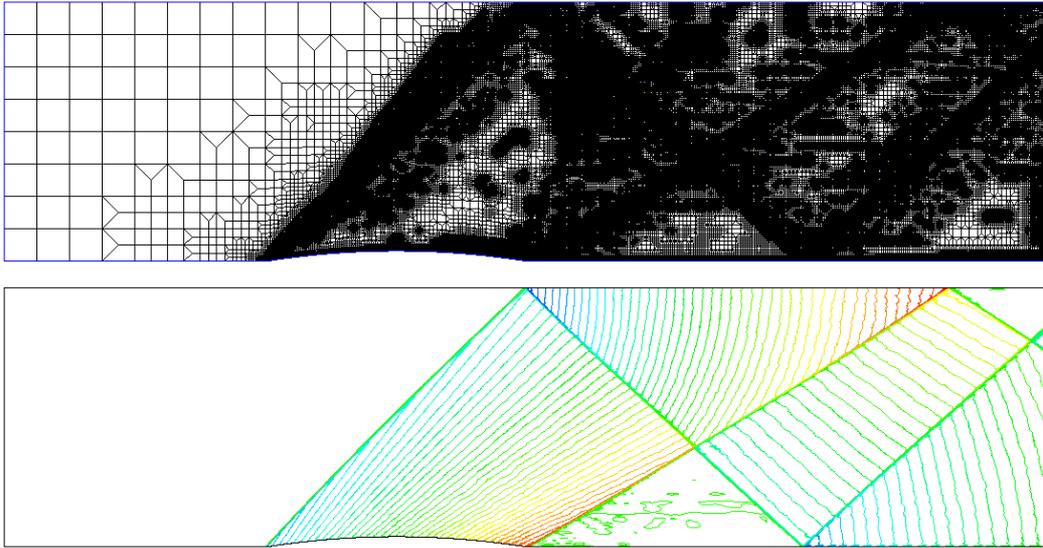


Abbildung 5.18: Adaptiv verfeinertes Gitter und Machisolinien für $Ma_{in} = 1.65$ bei Verwendung des PAC-Upwinding-Verfahrens

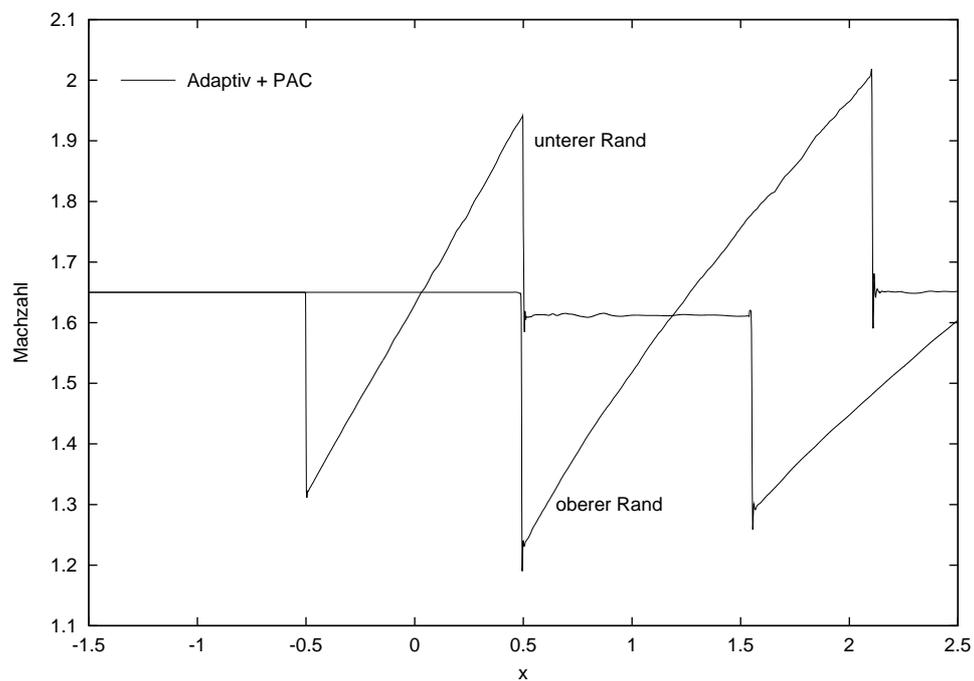


Abbildung 5.19: Machzahl am oberen und unteren Rand des Kanals mit Beule für $Ma_{in} = 1.65$ bei adaptiver Gitterverfeinerung und PAC-Upwinding

5.1.5 Schwach kompressible Strömung in drei Raumdimensionen

Simulationen in drei Raumdimensionen sind natürlicherweise von besonderem Interesse. Mit Hilfe von *UG* ist es möglich, die Implementierung der Diskretisierung unabhängig von der Raumdimension vorzunehmen. Allerdings erfordert die in drei Raumdimensionen schnell anwachsende Problemgröße und der vermehrte Speicherbedarf die Verwendung von Parallelrechnern.

In den folgenden Beispielrechnungen soll nun das Lösungsverhalten für dreidimensionale Probleme im schwach kompressiblen Regime getestet werden. In diesem Bereich liegen in der Literatur noch keine Vergleichsrechnungen vor, sodass mit dieser Arbeit ein neuer Benchmark eingeführt werden soll. Es handelt sich um das Problem Kanal mit Beule, das auf dreidimensionale Simulationen erweitert wurde: Die Strömung erfolgt in einem Quader mit einer Breite und Höhe von einer Einheit und einer Länge von drei Einheiten. An der Mitte der unteren Seite ist ein Hindernis, das durch ein Zylindersegment beschrieben wird mit einer Höhe von 10% der Kanalhöhe und einer Länge von einer Einheit. Vorne findet ein Einstrom statt und hinten der Ausstrom, an allen anderen Wänden liegen Slip-Randbedingungen vor. Die Lösung der Euler-Gleichungen ist wie in zwei Raumdimensionen stationär.

Betrachtet man einen vertikalen Schnitt durch das Gebiet, so sollte die dreidimensionale Lösung mit der entsprechenden Lösung einer zweidimensionalen Berechnung vergleichbar sein. Dies wird in Abbildung 5.20 anhand der Machisolinien für einen senkrechten Schnitt in der Mitte des Gebietes dargestellt. Die Machzahl am Einströmrand ist dabei $Ma_{in} = 0.00845$.

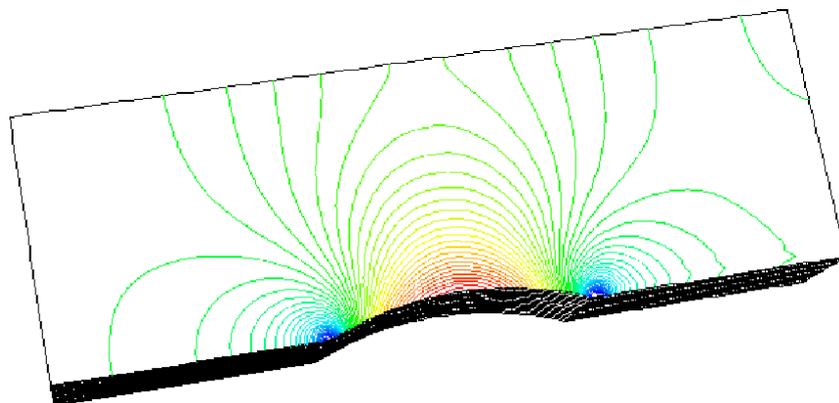


Abbildung 5.20: Machisolinien für $Ma_{in} = 0.00845$

Um die Möglichkeiten der in dieser Arbeit vorgestellten Methode aufzuzeigen, sollen nun für eine Machzahl von $Ma_{in} = 10^{-6}$ am Einströmrand die Ergebnisse etwas genauer betrachtet werden. Die Analyse des zweidimensionalen Verfahrens legt nahe, eine Newtonlinearisierung für die Kontinuitätsgleichung und eine Fixpunktlinearisierung für die restlichen Gleichungen zu verwenden. Ebenso erweist sich in drei Raumdimensionen das Positive Upwinding als einzig konvergente Strategie. Mit Hilfe der Druckaufspaltung mit Stabilisierung der Energiegleichung kann dann die schwach kompressible Lösung berechnet werden.

Das feinste Gitter auf Level 5 enthält etwa 815.000 Knoten, sodass ein Gleichungssystem mit mehr als vier Millionen Unbekannten zu lösen ist. Zur Berechnung der Lösung wurde deshalb ein PC-Cluster mit 40 Prozessoren herangezogen. Das nur aus Hexaedern bestehende zugehörige Gitter auf Level 2 kann ebenso wie die Lastverteilung auf die Prozessoren der Abbildung 5.21 entnommen werden.

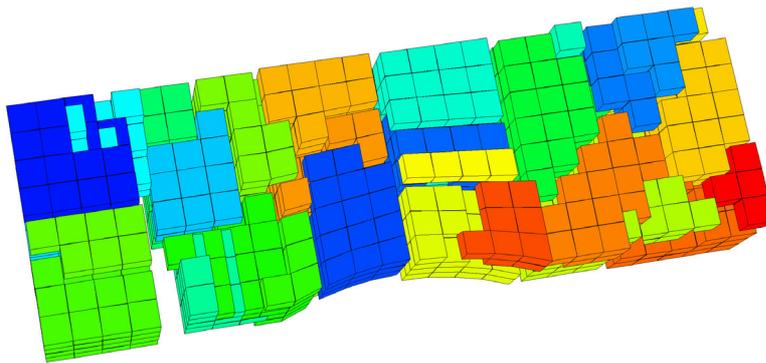


Abbildung 5.21: Gitter auf Level 2 und Lastverteilung auf 40 Prozessoren

Die Aufmerksamkeit soll wiederum hauptsächlich auf die linearen Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens gerichtet sein. In Tabelle 5.8 ist der Wert κ_{10} für einen reinen V-Zyklus und eine mit dem entsprechenden Mehrgitterverfahren vorkonditionierte BiCG-Stab-Iteration angegeben. Wie in den zweidimensionalen Testrechnungen führt nur die Wahl des ILU_{β} -Glätters zu einer Konvergenz. Die besten Resultate sind zudem für eine ungedämpfte Iteration mit dem Parameter $\beta = 0$ zu erzielen.

Verständlicherweise sind die Konvergenzraten auf dem feinsten Gitter schlechter als im zweidimensionalen Fall. Aufgrund der höheren Raumdimension wird das Problem steifer und auch die Parallelisierung verändert die Eigenschaften des Iterationsverfahrens. Um trotzdem eine gute Konvergenz zu erzielen sollte die Anzahl der Vor- und Nachglättungsschritte auf $\nu_1 = \nu_2 = 3$ erhöht werden. Desweiteren ist die un-

Level	Knoten	Mehrgitter		MG-BiCG-Stab	
		(1,2,2)	(1,3,3)	(1,2,2)	(1,3,3)
1	325	0.011	0.006	0.005	0.001
2	2025	0.187	0.123	0.043	0.033
3	14161	0.275	0.179	0.118	0.048
4	105633	0.433	0.334	0.288	0.177
5	815425	0.613	0.567	0.522	0.392

Tabelle 5.8: Lineare Konvergenzrate κ_{10} für einen (γ, ν_1, ν_2) -Mehrgitterzyklus gemittelt über 20 nichtlineare Schritte bei Positivem Upwinding und $Ma_{in} = 10^{-6}$

terschiedliche Problemgröße zu berücksichtigen: Der gesuchte Lösungsvektor enthält auf dem feinsten Gitter in drei Raumdimensionen etwa die zwanzigfache Anzahl an Unbekannten als dem feinsten Gitter im zweidimensionalen Fall. Nichtsdestotrotz ist anders als erwünscht keine gitterunabhängige Konvergenz zu erkennen.

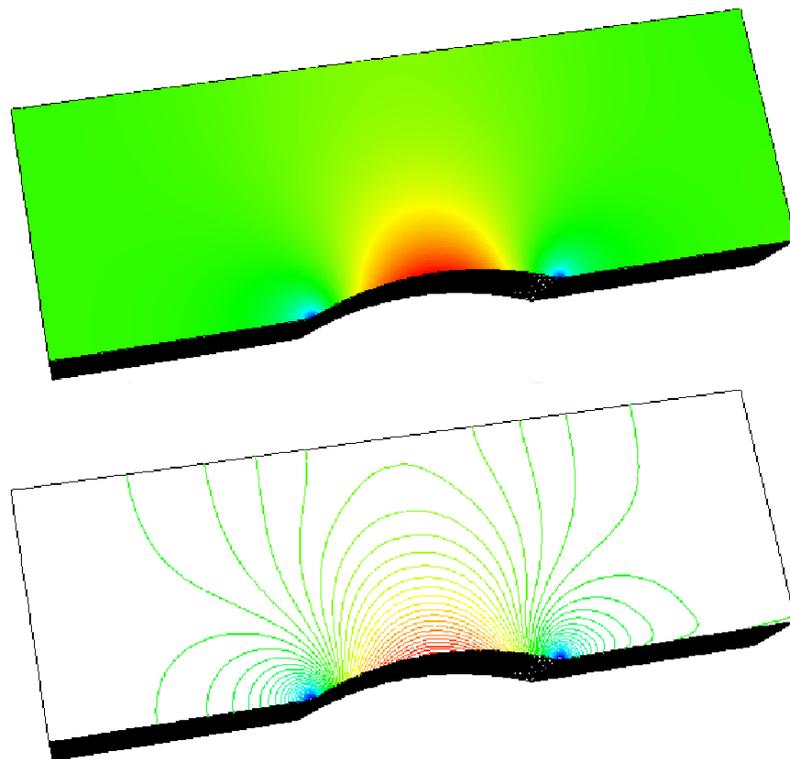


Abbildung 5.22: Geschwindigkeit in x -Richtung und Machisolinien für $Ma_{in} = 10^{-6}$

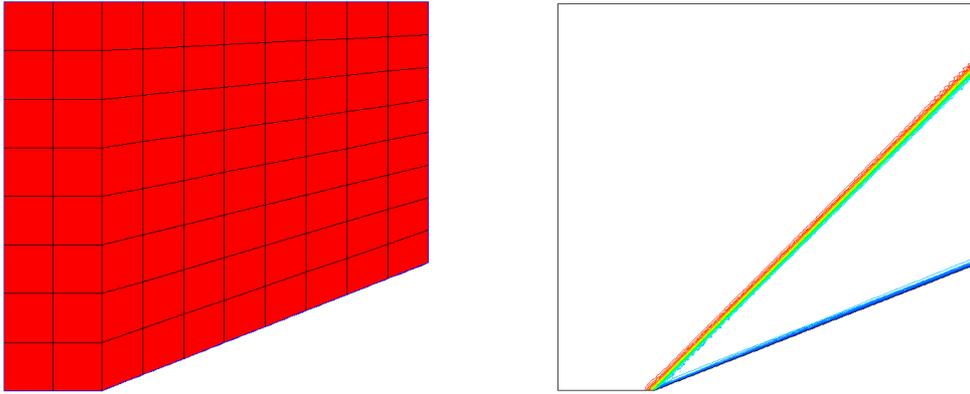


Abbildung 5.23: Gitter auf Level 1 und Machisolinien beim Kanal mit Rampe für $Ma_{in} = 2.5$

5.2 Kanal mit Rampe

Ein ähnliches Problem wie der Kanal mit Beule stellt der Kanal mit Rampe dar. Es ist wiederum ein supersonisches Problem bei einer Machzahl von $Ma_{in} = 2.5$ am Einströmrand. Der Kanal hat eine Länge von 1.3 und eine Höhe von 1.2; die vordere Ecke der schrägen Rampe am unteren Rand ist 0.3 Einheiten vom Einströmrand entfernt. Die Rampe ist im Winkel von 21.57° angestellt. Es ergibt sich eine stationäre Lösung mit einem Stoß, der nach der Formel (5.1) im Winkel von 45° zur Strömung liegt. Die Machzahl hinter dem Stoß beträgt $Ma_{out} = 1.57$ bei exakter Berechnung gemäß (5.3).

Dieses supersonische Problem wird auch in den Arbeiten von Karimian et al. [47] und Darbandi et al. [21] beschrieben. Es wurde hier ebenfalls ausgewählt, da aufgrund des starken Stoßes das stationäre Verfahren beim Lösungsprozess divergiert. Stattdessen muss - wie auch in den zitierten Arbeiten - die stationäre Lösung mit Hilfe eines Zeitschrittverfahrens berechnet werden.

Das verwendete uniforme Gitter ist in Abbildung 5.23 auf Level 1 abgebildet. Zur Berechnung der stationären Lösung wurden beginnend auf dem größten Gitter bis zum fünf Mal verfeinerten Gitter mit 20769 Knoten jeweils vier Zeitschritte iteriert. Zur Zeitdiskretisierung wurde das Backward Euler Verfahren herangezogen mit einer variablen Zeitschrittsteuerung: Um die Iteration zu stabilisieren, wurde zu Anfang auf den groben Gittern mit einer mittleren Schrittweite von $\Delta t = 0.1$ begonnen, ab Level 2 wurden schließlich alle weiteren Schritte mit $\Delta t = 1.0$ berechnet.

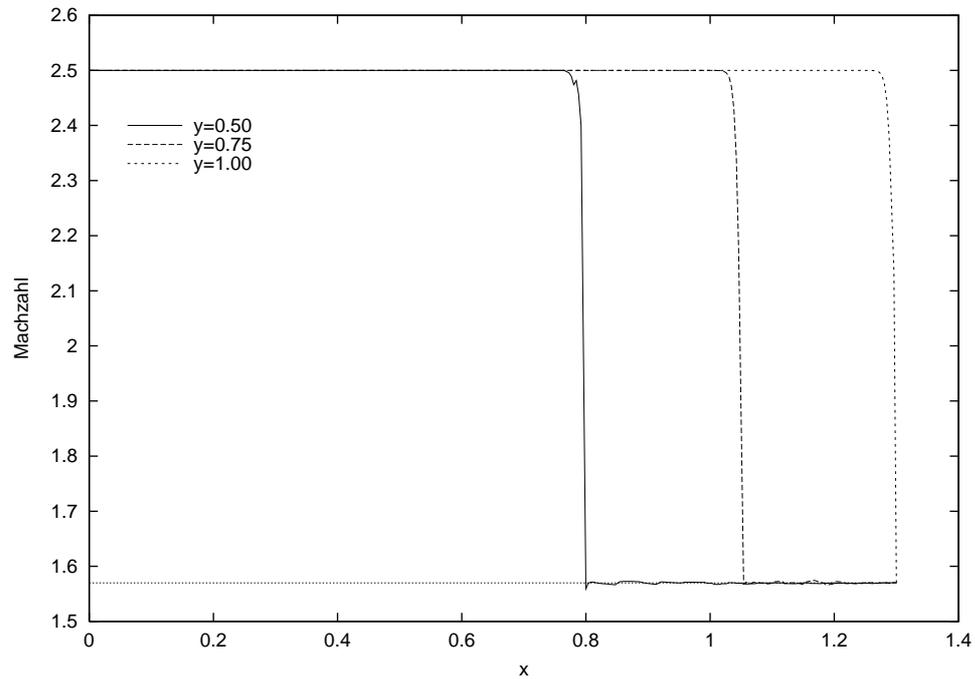


Abbildung 5.24: Machzahl entlang der horizontalen Schnitten durch den Kanal mit Rampe bei $y = 0.5$, $y = 0.75$ und $y = 1.0$ für $Ma_{in} = 2.5$

Die Einführung des zusätzlichen Zeittermes ist mit einer Stärkung der Diagonalen verbunden. Diese wirkt sich umso stärker aus, umso kleiner der Zeitschritt ist. Durch die geänderten Matrixeigenschaften wird das Lösungsverhalten des linearen Mehrgitterzyklus spürbar besser. Für die hier vorgestellte Simulation wurde ein V-Zyklus mit zwei Vor- und Nachglättungsschritten eingesetzt, der wie in den meisten vorherigen Rechnungen als Glätter ILU_{β} mit $\beta = 0$ verwendet. Um pro nichtlinearem Schritt eine Reduktion des Defektes um 0.1 in jeder Komponente des Gleichungssystems zu erzielen, sind maximal zwei lineare Mehrgitteriterationen ausreichend.

Die Machisolinien der stationären Lösung sind der Abbildung 5.23 zu entnehmen. Es ist daraus ersichtlich, dass der 45° -Winkel des Stoßes korrekt reproduziert wird. Zur genaueren Verifizierung der Lösung wird in Abbildung 5.24 die Machzahl entlang von drei horizontalen Schnitten bei $y = 0.5$, $y = 0.75$ und $y = 1.0$ aufgetragen. Obwohl die Schnitte den Stoß schräg schneiden, ist dieser fein aufgelöst. Hinter dem Stoß wird die exakte Machzahl, die durch die untere durchgezogene Linie markiert ist, ebenfalls gut wiedergegeben.

5.3 Backstep

Nachdem in den vorigen Abschnitten sowohl stationäre als auch instationäre reibungsfreie Probleme betrachtet wurden, soll nun als letztes Beispiel eine Simulation der Navier-Stokes-Gleichungen erfolgen. Für den inkompressiblen Grenzfall gibt es eine Vielzahl von Benchmarks wie die Umströmung eines Zylinders oder die Driven Cavity. All diese Rechnungen können auch mit der hier vorgestellten Diskretisierung durchgeführt werden. Allerdings hat das Gleichungssystem mit der Dichte eine zusätzliche Unbekannte, sodass in diesem Grenzfall das Verfahren ineffizient ist. Stattdessen soll an dieser Stelle ein schwach kompressibles Problem mit einer variablen Dichte simuliert werden.

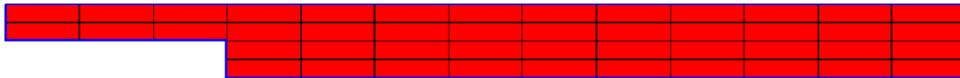


Abbildung 5.25: Grobes Gitter des Backward Facing Step

Die Geometrie des Problems ist eine rückwärts gerichtete Stufe oder auch Backward Facing Step genannt. Die Einströmung findet in einem Kanal der Länge 3 und Höhe 0.5 statt, der sich dann nach einer Stufe auf die Höhe 1 erweitert. Die Länge dieses zweiten Stückes beträgt 10 Einheiten. Es gelten Haftbedingungen für alle Wände. Das zugehörige grobe Gitter ist der Abbildung 5.25 zu entnehmen. Für inkompressible viskose laminare Strömungen sind in der Literatur einige Vergleichsrechnungen zu finden, es sei hier lediglich exemplarisch auf die Arbeit von Huurdeman [41] verwiesen. Bei einer Reynoldszahl von $Re = 300$ bildet sich eine Rezirkulationszone hinter der Stufe. Für $Re = 1000$ ergibt sich zusätzlich noch eine zweite an der Oberseite des Kanals. Bei Reynoldszahlen über $Re \approx 1200$ führt diese Konfiguration zu einer turbulenten Strömung.

Für die hier vorgestellte schwach kompressible Simulation wird $Re = 500$ gewählt mit einer Machzahl am Einströmrand von $Ma_{in} = 0.000845$. Am vorderen Ende des Kanals wird das Dichteprofil

$$\varrho = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq y < 0.125 \\ 2 & \text{für } 0.125 \leq y < 0.375 \\ 1 & \text{für } 0.375 \leq y \leq 0.5 \end{cases}$$

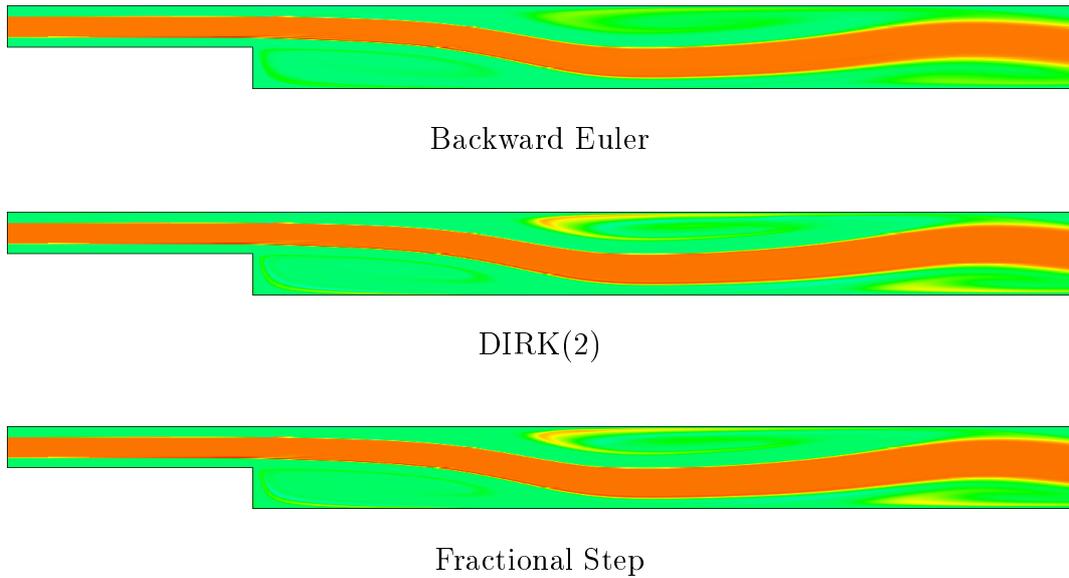


Abbildung 5.26: Dichteverteilung des Backward Facing Step bei $t = 35.4$ mit verschiedenen Zeitschrittverfahren

vorgegeben. Die angegebenen Reynolds- und Machzahlen am Einströmrand errechnen sich aus den folgenden Referenzgrößen:

$$l_\infty = 1, u_\infty = 1, \varrho_\infty = 1, p_\infty = 1000000, \nu = 0.002.$$

Die Simulation erfolgt auf einem sechs Mal uniform verfeinerten Gitter mit insgesamt 107.265 Knoten. Zum Auffinden einer guten Startlösung wurde beginnend auf Level 4 mit kleineren Zeitschritten iteriert, um schließlich auf dem feinen Level 6 mit einer festen Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.3$ zu operieren. Dies wurde so gewählt, um verschiedene Zeitschrittverfahren miteinander vergleichen zu können. Eine Diskussion für der Simulationsergebnisse mit Backward Euler, DIRK(2) und Fractional Step soll nun im Folgenden durchgeführt werden.

Das mit Abstand schnellste Verfahren ist natürlich Backward Euler, da in jedem Zeitschritt die Systemmatrix nur einmal berechnet werden muss, wohingegen bei DIRK(2) zwei und bei Fractional Step sogar drei Assemblierungen zu berücksichtigen sind. Betrachtet man die Lösung rein qualitativ, so zeigt sich aber sofort, dass Backward Euler wie erwartet aufgrund der niedrigeren Ordnung der Zeitapproximation mehr numerische Diffusion erzeugt als die beiden anderen Verfahren. Aus Abbildung 5.26 ist gut zu entnehmen, dass insbesondere die Dichte in den Rezirkulationszonen verschmiert wird. Die Lösungen mit DIRK(2) und Fractional Step sind dagegen in etwa vergleichbar mit minimalen Vorteilen bei Fractional Step.

Verfahren	Zeit	κ	# lin	# nlin
BE	8.7	0.108	24	4
	23.4	0.134	18	3
	38.4	0.135	21	3
DIRK(2)	8.7	0.113	28	6
	23.4	0.105	29	6
	38.4	0.119	33	6
FS	8.7	0.109	43	9
	23.4	0.073	24	6
	38.4	0.096	27	6

Tabelle 5.9: Lineare Konvergenzrate κ , sowie die Anzahl der linearen und nichtlinearen Schritte in einigen exemplarischen Zeitschritten für unterschiedliche Zeitschrittverfahren bei $\Delta t = 0.3$

In Tabelle 5.9 sind einige Zeitschritte exemplarisch angegeben, die einen Vergleich der Effizienz der verschiedenen Verfahren ermöglichen. Zunächst ist die lineare Konvergenzrate angegeben, wobei in allen Fällen ein mit einem Mehrgitterzyklus vorkonditioniertes BiCG-Stab-Verfahren verwendet wurde. Als Glätter dient ILU_β mit $\beta = 0$ in einem V-Zyklus mit zwei Vor- und Nachglättungsschritten. Diese lineare Konvergenzrate ist sehr gut und unterscheidet über alle Iterationen hinweg nur minimal. Besonders interessant ist die Anzahl der benötigten nichtlinearen Schritte, da diese den größten Einfluß auf die Effizienz der Verfahren hat. Fractional Step benötigt zu Anfang der Simulation drei nichtlineare Iterationen pro Teilzeitschritt, zusammen also neun im gesamten Zeitschritt. In dieser Phase ist Fractional Step im Vergleich zu DIRK(2) ineffizient, da bei diesem Verfahren nur jeweils drei, zusammen also sechs nichtlineare Iterationen benötigt werden. Dies hat natürlich direkten Einfluss auf die Anzahl der linearen Iterationen, was sich in der vorletzten Spalte der Tabelle widerspiegelt. Erst zu einem späteren Zeitpunkt der Simulation reduziert sich bei Fractional Step die Anzahl der nichtlinearen Iterationen pro Teilzeitschritt, sodass in Summe die Anzahl mit DIRK(2) übereinstimmt. Beide Verfahren zeigen dann dieselben Effizienzen. Ganz anders dagegen bei Backward Euler: Hier werden nur 3-4 nichtlineare Iterationen pro Zeitschritt benötigt, sodass dieses Verfahren den beiden anderen in diesem Punkt weit überlegen ist. Es darf jedoch nicht vernachlässigt werden, dass wie schon erwähnt die numerische Diffusion die Ergebnisse verfälscht.

Wiegt man diese unterschiedlichen Eigenschaften gegeneinander auf, so zeichnet sich DIRK(2) für dieses Problem als robustes Zeitschrittverfahren aus, das sowohl die Anforderungen der Genauigkeit als auch der Effizienz erfüllt. Backward Euler ist zwar sehr schnell, liefert aber ungenaue Ergebnisse, sodass es wohl nur für erste "quick and dirty" Näherungen dienen kann. Der Einsatz von Fractional Step lohnt sich eher nicht, da die Effizienz schlechter ist. Zudem hat es sich in anderen Testrechnungen als nicht so stabil wie das DIRK(2)-Verfahren gezeigt.

In Abbildung 5.27 ist die Dichte und die Geschwindigkeit der Lösung zu unterschiedlichen Zeitpunkten abgebildet. Es entsteht zunächst eine erste Rezirkulationszone hinter der Stufe, die allerdings in den ersten beiden Abbildungen anhand der Dichte nur schwach zu erkennen ist. Eine zweite Rezirkulationszone entsteht dahinter am oberen Rand des Kanals. Die Entstehung dieser Zone kann dem zweiten bis vierten Bild entnommen werden. Schließlich ist auf dem fünften und sechsten Bild zu erkennen, dass ein dritter Wirbel an der Unterseite des Kanals entsteht. Dieser wird mit der Zeit nach außen transportiert, sodass sich eine vergleichbare Situation zu der inkompressiblen Strömung bei $Re = 1000$ als stationäre Lösung ergibt.

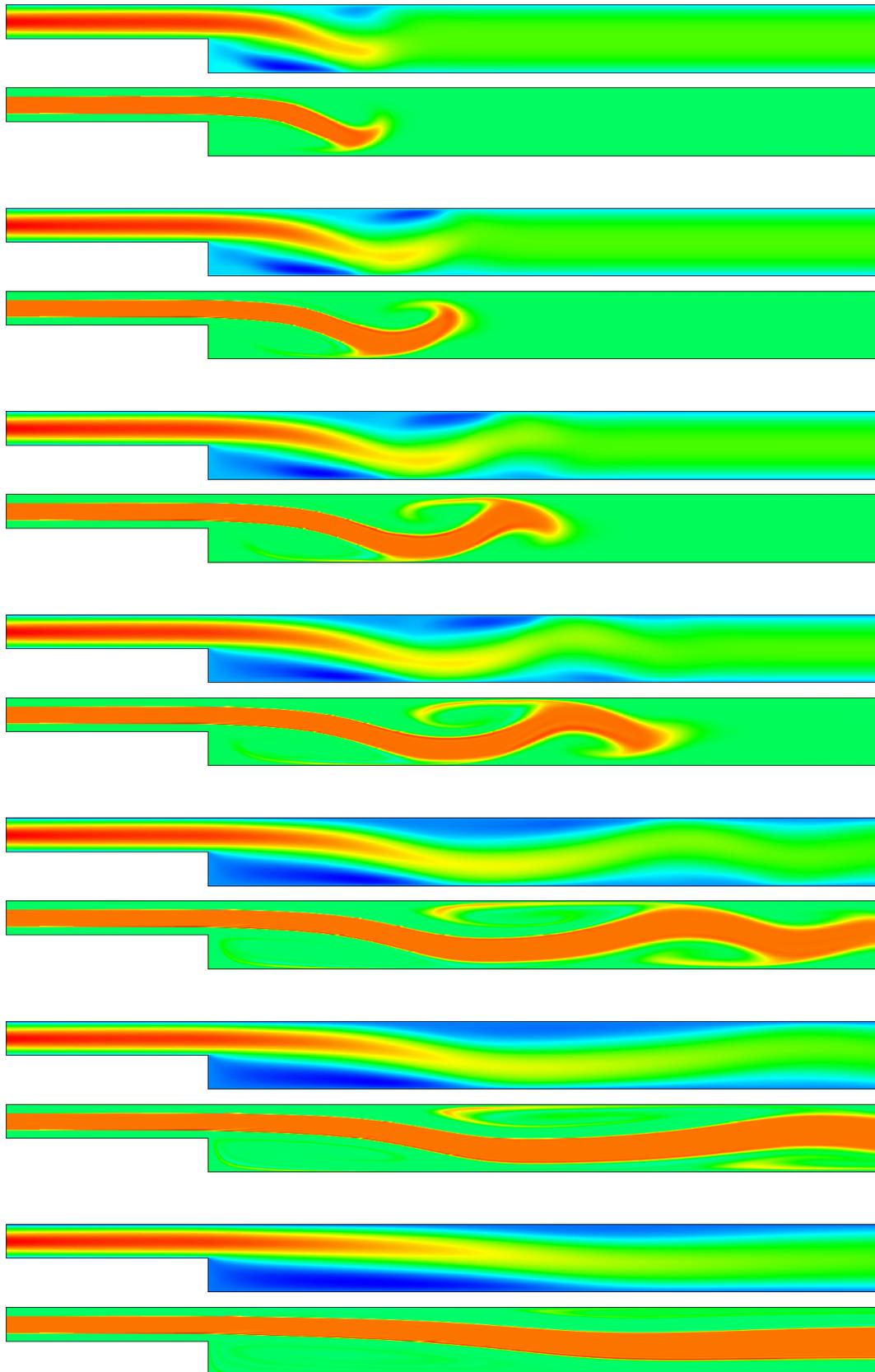


Abbildung 5.27: Geschwindigkeit und Dichte zu den Zeitpunkten $t = 12.7$, $t = 15.1$,
 $t = 18.1$, $t = 21.7$, $t = 30.1$, $t = 35.4$ und $t = 146.7$

6 Zusammenfassung und Ausblick

*Teile von deinem geistigen Wesen denen,
die mit dir auf dem Weg sind,
soviel mit, als du kannst,
und nimm als etwas Kostbares hin,
was dir von ihnen zurückkommt.*

Albert Schweitzer

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines Mehrgitterverfahrens für die Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen auf unstrukturierten Gittern. Das besondere Augenmerk lag dabei auf der Berücksichtigung des schwach kompressiblen Grenzfalles. Für diesen wurde zunächst eine vollständige asymptotische Analyse angegeben, die in der Lage ist, die Interaktion der Strömung mit langwelliger Akustik zu beschreiben. Mit Hilfe der Einführung mehrerer Druckvariablen lässt sich der Grenzübergang $M \rightarrow 0$ zu den inkompressiblen Gleichungen bewältigen.

Für dieses so modifizierte Gleichungssystem wurde eine spezielle Diskretisierung entwickelt, die die Anwendung eines robusten Mehrgitterverfahrens ermöglicht. Es zeigen sich in zwei Raumdimensionen sehr gute Konvergenzresultate bei Verwendung des ILU_β -Glätters. Erstmals wurde auch ein Benchmark für schwach kompressible Strömungen in drei Raumdimensionen vorgestellt. Aufgrund der hohen Anzahl an Unbekannten und dem gesteigerten Hauptspeicherbedarf gelingen diese Rechnungen nur mit einer Parallelisierung des Verfahrens.

Die vorgestellte Diskretisierung wurde auch an transonischen und supersonischen kompressiblen reibungsfreien Strömungen getestet, da hier ein guter Vergleich zu Ergebnissen aus der Literatur möglich ist. Es zeigte sich, dass durch Einführung einer speziellen Upwind-Diskretisierung für die Dichte in der Strömung vorhandene Stöße scharf abgebildet werden können. Die Vergleichsrechnungen konnten dabei

auf sehr feinen Gittern durchgeführt werden. Auch der Einsatz einer adaptiven Verfeinerung in Abhängigkeit der Machzahl wurde erfolgreich demonstriert. Allerdings lässt die Effizienz des Mehrgitterverfahrens auf feinen Gittern stark nach. Dies liegt in der immer stärker dominierenden Konvektion begründet. Zudem entfallen die im schwach kompressiblen Regime durch die Stabilisierung induzierten elliptischen Anteile. An dieser Stelle besteht in Zukunft weiterhin Forschungsbedarf zur Anpassung des Mehrgitterverfahrens.

Auf dem Weg zu einem gekoppelten Strömungs-Akustik-Löser ist die hier vorgestellte Arbeit nur ein erster Schritt. An dieser Stelle soll deshalb ein Ausblick auf die Anforderungen zukünftiger Verfahren gegeben werden. Die Modellierung langwelliger Akustik mit Hilfe des Druckterms $p^{(1)}$ wurde in dieser Arbeit nicht berücksichtigt und muss vertieft untersucht werden. Eine Herausforderung wird dabei sein, ob die auf unterschiedlichen Skalen lebenden Druckterme geeignet in ein Mehrgitterverfahren integriert werden können, ohne wie bisher a priori eine Aufspaltung des Druckes vornehmen zu müssen. Für realistische Strömungen, die sowohl schwach kompressible als auch stark kompressible Regimes beinhalten, ist zudem eine lokale Anpassung in Abhängigkeit der Machzahl denkbar. Weiterhin zeigt gerade das Beispiel der Umströmung einer Windturbine, dass für praxisnahe Anwendungen weitere physikalische Effekte modelliert werden müssen. Hier sind Turbulenzmodelle an erster Stelle zu nennen, aber auch eine Berücksichtigung von temperaturgetriebenen Strömungen ist denkbar.

Literaturverzeichnis

- [1] ALBERS, M.: *A local mesh refinement multigrid method for 3-D convection problems with strongly variable viscosity*. Journal of Computational Physics, 160:126–150, 2000.
- [2] ALEXANDER, R.: *Diagonally implicit Runge-Kutta methods for stiff O.D.E.'S*. SIAM J. Numer. Anal., 14(6):1006–1021, 1977.
- [3] ALMGREN, A.S., J.B. BELLA, P. COLELLA, L.H. HOWELL und M.L. WELCOME: *A conservative adaptive projection method for the variable density incompressible Navier-Stokes equations*. Journal of Computational Physics, 142:1–46, 1998.
- [4] ANDERSON, J.D.: *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 1991.
- [5] BARRETT, R., M. BERRY, T.F. CHAN, J. DEMMEL, J. DONATO, J. DONGARRA, V. EIJKHOUT, R. POZO, C. ROMINE und H. VAN DER VORST: *Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods*. SIAM, 1994.
- [6] BASTIAN, P.: *Parallele adaptive Mehrgitterverfahren*. Teubner Skripten zur Numerik. Teubner-Verlag, 1996.
- [7] BASTIAN, P.: *Load balancing for adaptive multigrid methods*. SIAM J. Sci. Computing, 19(4):1303–1321, 1998.
- [8] BASTIAN, P., K. BIRKEN, K. JOHANNSEN, S. LANG, N. NEUSS, H. RENTZREICHERT und C. WIENERS: *UG - A flexible software toolbox for solving partial differential equations*. Computing and Visualization in Science, 1:27–40, 1997.

- [9] BASTIAN, P., K. BIRKEN, K. JOHANNSEN, S. LANG, V. REICHENBERGER, C. WIENERS, G. WITTUM und C. WROBEL: *A parallel software-platform for solving problems of partial differential equations using unstructured grids and adaptive multigrid methods*. In: JÄGER, W. und E. KRAUSE (Herausgeber): *High performance computing in science and engineering '98*, Seiten 326–339. Springer, 1998.
- [10] BASTIAN, P., K. JOHANNSEN, S. LANG, S. NÄGELE, V. REICHENBERGER, C. WIENERS, G. WITTUM und C. WROBEL: *Advances in high-performance computing: Multigrid methods for partial differential equations and its applications*. In: *High performance computing in science and engineering 2000*. Springer, 2000.
- [11] BECKER, J.: *Entwicklung eines effizienten Verfahrens zur Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen*. Doktorarbeit, Universität Freiburg, 2000.
- [12] BIJL, H.: *Computation of flow at all speeds with a staggered scheme*. Doktorarbeit, Technische Universität Delft, 1999.
- [13] BIJL, H. und P. WESSELING: *A method for the numerical solution of the almost incompressible Euler equations*. Report 96-37, TU Delft, 1996.
- [14] BIJL, H. und P. WESSELING: *A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates*. *Journal of Computational Physics*, 141:153–173, 1998.
- [15] BIRKEN, K.: *An Efficient Programming Model for Parallel and Adaptive CFD-Algorithms*. In: *Proceedings of Parallel CFD Conference 1994*, Kyoto, Japan, 1995. Elsevier Science.
- [16] BIRKEN, K.: *Ein Modell zur effizienten Parallelisierung von Algorithmen auf komplexen, dynamischen Datenstrukturen*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1998.
- [17] BRAACK, M.: *Adaptive Finite Elements for stationary compressible flows at low Mach number*. In: FREISTÜHLER, H. und G. WARNECKE (Herausgeber): *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, Band 1 der Reihe ISNM 140, Seiten 169–178. Birkhäuser, 2001.
- [18] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. Springer, 1997.

- [19] BREZZI, F.: *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers*. RAIRO Anal Numer, 8:129–151, 1974.
- [20] CFX-TASCFLOW: *CFX-TASCflow theory documentation version 2.10*. AEA Technology Engineering Software Limited, 2000. Online-Version http://www.umanitoba.ca/campus/acn/unix/software/vendor_html/tascflow/Theory/Theory-html.html.
- [21] DARBANDI, M. und G.E. SCHNEIDER: *Performance of an analogy-based all-speed procedure without any explicit damping*. Computational Mechanics, 26:459–469, 2000.
- [22] DICK, E.A.: *A multigrid method for steady Euler equations, based on flux-difference splitting with respect to primitive variables*. In: HACKBUSCH, W. (Herausgeber): *Robust multi-grid methods*, NFM 23, 1989.
- [23] DREYER, T.: *Lineare und nichtlineare Mehrgitterverfahren für die Navier-Stokes-Gleichungen*. Doktorarbeit, Universität Heidelberg, 1993.
- [24] EIDELMAN, S., P. COLELLA und R.P. SHREEVE: *Application of the Godunov method and its second-order extension to cascade flow modeling*. AIAA Journal, 22(11):1609–1615, 1984.
- [25] FEDORENKO, R.P.: *The speed of convergence of one iterative process*. USSR Comput. Math. and Math. Phys., 4(3):227–235, 1964.
- [26] GERATZ, K.J.: *Erweiterung eines Godunov-Typ-Verfahrens für zweidimensionale kompressible Strömungen auf die Fälle kleiner und verschwindender Machzahl*. Doktorarbeit, RWTH Aachen, 1997.
- [27] GINZBURG, I. und G. WITTUM: *Multigrid Methods for Two Phase Flow*. Notes in Numerical Fluid Mechanics, 66(144), 1998.
- [28] GINZBURG, I. und G. WITTUM: *Two-Phase Flows on Interface Refined Grids Modeled with VOF, Staggered Finite Volumes, and Spline Interpolants*. Journal of Computational Physics, 166(1), 2001.
- [29] GRESHO, P.M. und R.L. SANI: *On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 7:1111–1145, 1987.

- [30] GRIEWANK, A.: *Evaluating Derivatives - Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. SIAM, 2000.
- [31] GRIEWANK, A. und G.F. CORLISS: *Automatic Differentiation of Algorithms: Theory, Implementation, Application*. SIAM, 1991.
- [32] GUILLARD, H. und C. VIOZAT: *On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit*. *Computers & Fluids*, 28:63–86, 1999.
- [33] GUSTAFSSON, I.: *A class of first order factorization methods*. *BIT*, 18:142–156, 1978.
- [34] HAAG, R.: *Robuste Mehrgitterverfahren für die Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen*. ICA Bericht N97/2, 1997.
- [35] HACKBUSCH, W.: *A fast iterative method solving Poisson's equation in a general region*. In: BULIRSCH, R., R.D. GRIGORIEFF und J. SCHRÖDER (Herausgeber): *Numerical treatment of differential equations*, *Lecture Notes in Mathematics* 631, Seiten 51–62. Springer, 1978.
- [36] HACKBUSCH, W.: *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Teubner, 1993.
- [37] HEMKER, P.W.: *Defect correction and higher order schemes for the multigrid solution of the steady Euler equations*. In: HACKBUSCH, W. und U. TROTTENBERG (Herausgeber): *Multigrid Methods II*, *Lecture Notes in Mathematics*, Seiten 149–165. Springer, 1986.
- [38] HESTENES, M. und E. STIEFEL: *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49:409–436, 1952.
- [39] HIRSCH, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Band 1: *Fundamentals of Numerical Discretization*. Wiley, 1988.
- [40] HOFF, D.: *The zero-Mach limit of compressible flows*. *Comm. in Math. Phys.*, 192:543–554, 1998.
- [41] HUURDEMAN, B.: *Numerische Simulation inkompressibler turbulenter Strömungen mit Mehrgitterverfahren auf unstrukturierten Gittern*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1999.

- [42] HUURDEMAN, B., S. NÄGELE, V. REICHENBERGER und H. RENTZ-REICHERT: *Multigrid solution of incompressible Navier-Stokes equations and its application to parallel computers*. In: BONGARTZ, H.-J., F. DURST und C. ZENGER (Herausgeber): *Proceedings of the International FORTWIHR Conference 1998*, Seiten 51–60. Springer Verlag, 1999.
- [43] JAMESON, A.: *Multigrid for Euler equations*. In: HACKBUSCH, W. und U. TROTTEBERG (Herausgeber): *Multigrid Methods II*, Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1986.
- [44] JOHANNSEN, K.: *Robuste Mehrgitterverfahren für die Konvektions-Diffusions Gleichung mit wirbelbehafteter Konvektion*. Doktorarbeit, Universität Heidelberg, 1998.
- [45] KARIMIAN, S.M.H.: *Pressure-Based Control-Volume Finite-Element Method for Flow at All Speeds*. Doktorarbeit, University of Waterloo, Canada, 1994.
- [46] KARIMIAN, S.M.H. und G.E. SCHNEIDER: *Pressure-Based Computational Method for Compressible and Incompressible Flows*. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 8(2):267–274, 1994.
- [47] KARIMIAN, S.M.H. und G.E. SCHNEIDER: *Pressure-Based Control-Volume Finite Element Method for Flow at All Speeds*. AIAA Journal, 33(9):1611–1618, 1995.
- [48] KLAINERMAN, S. und A. MAJDA: *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*. Comm. Pure Appl. Math., 34:481–524, 1981.
- [49] KLAINERMAN, S. und A. MAJDA: *Compressible and incompressible flows*. Comm. Pure Appl. Math., 35:629–651, 1982.
- [50] KLEIN, R.: *Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics I: One dimensional flow*. Journal of Computational Physics, 120:213–237, 1995.
- [51] KLEIN, R., N. BOTTA, L. HOFMANN, A. MEISTER, C.-D. MUNZ, S. ROLLER und T. SONAR: *Asymptotic adaptive methods for multiscale problems in fluid mechanics*. Journal of Engineering Mathematics, 39:261–343, 2001.

- [52] KLEIN, R. und C.-D. MUNZ: *The multiple pressure variable (MPV) approach for numerical approximation of weakly compressible fluid flow*. In: M. FEI-STAUER, R. RANNACHER und K. KOZEL (Herausgeber): *Numerical Modelling in Continuum Mechanics*, Seiten 123–133. Charles University Prag, 1995.
- [53] KÖLTZSCH, P.: *Strömungsakustik - eine aktuelle Übersicht*. Preprint ET-IAS-01-2000, TU Dresden, 2000.
- [54] KOREN, B. und B. VAN LEER: *Improving Euler computations at low Mach numbers*. In: DECONINCK, H. und B. KOREN (Herausgeber): *Euler and Navier-Stokes solvers using multi-dimensional upwind schemes and multigrid acceleration*, NNFM 57. Vieweg, 1997.
- [55] KREISS, H.-O. und J. LORENZ: *Initial boundary value problems and the Navier-Stokes equations*. Academic Press, 1989.
- [56] LANG, S.: *Parallele Numerische Simulation instationärer Probleme mit adaptiven Methoden auf unstrukturierten Gittern*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 2001.
- [57] LEE, D., B. VAN LEER und J.F. LYNN: *A local Navier-Stokes preconditioner for all Mach and cell Reynolds numbers*. Extended abstract for the 13. AIAA Conference on Computational Fluid Dynamics, 1996.
- [58] LEONARD, B.P.: *A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19:59–89, 1979.
- [59] LEVEQUE, R.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, 1990.
- [60] LUBICH, C.: *Numerische Mathematik I*. Vorlesungsskriptum Universität Tübingen, WS 1994/95.
- [61] MAAR, B.: *Nicht-Newton'sche Fluide - Mehrgitterverfahren für Bingham-Strömungen*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1998.
- [62] MAVRIPLIS, D.J.: *Multigrid solution of the 2D-Euler equations on unstructured triangular meshes*. AIAA Journal, 26(7):824–831, 1988.
- [63] MEISTER, A.: *Asymptotic single and multiple scale expansions in the low Mach number limit*. SIAM J. Appl. Math, 60(1):256–271, 1999.

- [64] MULDER, W.A.: *A new multigrid approach to convection problems*. Journal of Computational Physics, 83:303–323, 1989.
- [65] MULDER, W.A.: *A high-resolution Euler solver based on multigrid, semi-coarsening and defect correction*. Journal of Computational Physics, 100:91–104, 1992.
- [66] MÜLLER, B.: *Computation of compressible low Mach number flow*. Habilitation, ETH Zürich, 1996.
- [67] MÜLLER, B.: *Low Mach number asymptotics of the Navier-Stokes equations*. Journal of Engineering Mathematics, 34:97–109, 1998.
- [68] MÜLLER, B.: *Low Mach number asymptotics of the Navier-Stokes equations and numerical implications*. Lecture Series 1999-03, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1999.
- [69] MÜLLER-URBANIAK, S.: *Eine Analyse des Zwischenschritt- θ -Verfahrens zur Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen*. Doktorarbeit, Universität Heidelberg, 1993.
- [70] MUNZ, C.-D., S. ROLLER, R. KLEIN und K.J. GERATZ: *Multiple Pressure Variable Extension of incompressible Flow Solvers to the weakly compressible regime*. Computers & Fluids, 2002.
- [71] NÄGELE, S. Doktorarbeit, Universität Heidelberg, wird 2002 erscheinen.
- [72] NÄGELE, S. und G. WITTUM: *Large-Eddy Simulation and Multigrid Methods*. Electronic Transactions on Numerical Analysis, to appear, 2002.
- [73] OGAWA, M., G. SCHUBERT und A. ZEBIB: *Numerical simulations of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature-dependent viscosity*. Journal of Fluid Mechanics, 233:299–328, 1991.
- [74] OOSTERLEE, C.W.: *Robust multigrid methods for the steady and unsteady incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates*. Doktorarbeit, Technische Universität Delft, 1993.
- [75] OOSTERLEE, C.W.: *Multigrid for singularly perturbed problems from fluid dynamics, including multigrid preconditioning and multiple semi-coarsening*. Habilitation, Universität Köln, 1998.

- [76] PAILLÈRE, H. und H. DECONINCK: *Multidimensional upwind residual distribution schemes for the 2D Euler equations*. In: DECONINCK, H. und B. KOREN (Herausgeber): *Euler and Navier-Stokes Solvers Using Multi-Dimensional Upwind Schemes and Multigrid Acceleration*, NFM 57. Vieweg, 1997.
- [77] PATANKAR, S.V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, 1980.
- [78] PATANKAR, S.V. und D.B. SPALDING: *A calculation procedure for heat and mass transfer in threedimensional parabolic flows*. Int. J. Heat Mass Transfer, 15:1787–1806, 1972.
- [79] PAXION, S.: *Développement d'un solveur multigrille non-structuré parallèle pour la simulation de flamme laminaire en chimie et transport complexes*. Doktorarbeit, EM2C, École Centrale Paris, 1999.
- [80] PRAKASH, C. und S.V. PATANKAR: *A control volume-based finite-element method for solving the Navier-Stokes equations using equal-order velocity-pressure interpolation*. Numerical Heat Transfer, 8:259–280, 1985.
- [81] PROBST, T.: *Mehrgitterverfahren für Konvektionsdiffusionsgleichungen*. Doktorarbeit, Universität Kiel, 1999.
- [82] RAICHLE, A.: *Neuartige Finite-Volumen-Diskretisierung der Gleichungen von Stokes mit stabilen nichtkonformen Elementen*. Studienarbeit, Universität Stuttgart, 1998.
- [83] RAITBY, G.D.: *Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 9:153–164, 1976.
- [84] RAITBY, G.D. und K.E. TORRANCE: *Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow*. Computers & Fluids, 8(12):191–206, 1974.
- [85] RAW, M.: *A coupled algebraic multigrid method for the 3D Navier-Stokes equations*. In: HACKBUSCH, W. (Herausgeber): *Fast solvers for flow problems*, Band 49 der Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Seiten 204–215. Vieweg, 1995.

- [86] RAW, M.J.: *A new control-volume-based Finite Element procedure for the numerical solution of the fluid flow and scalar transport equations*. Doktorarbeit, University of Waterloo, Canada, 1985.
- [87] REHM, R.G. und H.R. BAUM: *The equations of motion for thermally driven buoyant flows*. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 83:297–308, 1978.
- [88] RENTZ-REICHERT, H.: *Robuste Mehrgitterverfahren zur Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung: Ein Vergleich*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1996.
- [89] RENTZ-REICHERT, H. und G. WITTUM: *Solving the Navier-Stokes-Equations on Unstructured Grids*. In: HIRSCH, E. (Herausgeber): *Flow Simulation on High Performance Computers*, NNFM. Vieweg, 1993.
- [90] RENTZ-REICHERT, H. und G. WITTUM: *Robust multigrid methods for the incompressible Navier-Stokes equations*. In: HACKBUSCH, W. und G. WITTUM (Herausgeber): *Fast Solvers for Flow Problems*, NNFM 49. Vieweg, 1995.
- [91] ROLLER, S. und C.-D. MUNZ: *A low Mach number scheme based on multi-scale asymptotics*. Comput. Visual Sci., 3:85–91, 2000.
- [92] SCHNEIDER, G.E. und S.M.H. KARIMIAN: *Advances in control-volume-based finite-element methods for compressible flows*. Computational Mechanics, 14:431–446, 1994.
- [93] SCHNEIDER, G.E. und M.J. RAW: *A skewed, positive influence coefficient upwinding procedure for control-volume-based finite element convection-diffusion computation*. Numerical Heat Transfer, 8:1–26, 1986.
- [94] SCHNEIDER, G.E. und M.J. RAW: *Control volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using colocated variables – 1. Computational procedure*. Numerical Heat Transfer, 11:363–390, 1987.
- [95] SCHNEIDER, TH., N. BOTTA, K.J. GERATZ und R. KLEIN: *Extension of Finite Volume Compressible Flow Solvers to multi-dimensional, variable density zero Mach number flow*. Journal of Computational Physics, 155:248–286, 1999.

- [96] SIDILKOVER, D. und U.M. ASCHER: *A Multigrid Solver for the Steady State Navier-Stokes Equations using the Pressure-Poisson Formulation*. Comp. Appl. Math., 14(1):21–35, 1995.
- [97] STEELANT, J., E. DICK und S. PATTIJN: *Analysis of robust multigrid methods for steady viscous low Mach number flows*. Journal of Computational Physics, 136:603–628, 1997.
- [98] TARNOW, N. und J.C. SIMO: *How to render second-order accurate time-stepping algorithms fourth-order accurate while retaining the stability and conservation properties*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 115:233–252, 1994.
- [99] TUREK, S.: *Tools for simulating nonstationary incompressible flow via discretely divergence-free finite element models*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 18:71–105, 1994.
- [100] TUREK, S.: *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems. An Algorithmic and Computational Approach*. Springer, 1999.
- [101] TURKEL, E.: *Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations*. Journal of Computational Physics, 72:277–298, 1987.
- [102] VENKATAKRISHNAN, V. und D.J. MAVRIPLIS: *Implicit solvers for unstructured meshes*. Journal of Computational Physics, 105:83–91, 1993.
- [103] VIOZAT, C.: *Implicit upwind schemes for low Mach number compressible flows*. Report 3084, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), 1997.
- [104] VORST, H.A. VAN DER: *Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*. SIAM J. Sci. Statist. Comput., 13:631–644, 1992.
- [105] WAGNER, C.: *Filternde Algebraische Mehrgitterverfahren*. Habilitation, Universität Heidelberg, 2000.
- [106] WENNEKER, I., G. SEGAL und P. WESSELING: *Computation of compressible flows on unstructured staggered grids*. In: OÑATE, E., G. BUGEDA und

- B. SUÁREZ (Herausgeber): *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering 2000*. CIMNE, 2000.
- [107] WESSELING, P.: *An introduction to multigrid methods*. Wiley, 1991.
- [108] WESSELING, P.: *Principles of computational fluid dynamics*. Springer, 2001.
- [109] WITTUM, G.: *Distributive Iterationen für indefinite Systeme*. Doktorarbeit, Universität Kiel, 1986.
- [110] WITTUM, G.: *Linear iterations as smoothers in multigrid methods: theory with applications in incomplete decompositions*. Impact Comput. Sci. Eng., 1:180–215, 1989.
- [111] WITTUM, G.: *Multi-grid methods for Stokes and Navier-Stokes equations with transforming smoother: algorithms and numerical results*. Numer. Math., 54:543–563, 1989.
- [112] WITTUM, G.: *On the robustness of ILU smoothing*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 10:699–717, 1989.
- [113] WITTUM, G.: *On the convergence of multi-grid methods with transforming smoothers*. Numer. Math., 57:15–38, 1990.
- [114] ZHANG, Z.-C., S.T. JOHN YU, S.-C. CHANG und P.C.E. JORGENSEN: *Calculations of low-mach-number viscous flows without preconditioning by the space-time CE/SE method*. In: SATOFUKA, N. (Herausgeber): *Computational Fluid Dynamics 2000*, Seiten 127–132. Springer, 2001.
- [115] ZHU, J. und M.A. LESCHZINER: *A local oscillation-damping algorithm for higher-order convection schemes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 67:355–366, 1988.
- [116] ZULEHNER, W.: *A class of smoothers for saddle point problems*. Computing, 65(3):227–246, 2000.
- [117] ZULEHNER, W.: *Analysis of iterative methods for saddle point problems: a unified approach*. Mathematics of Computation, 71(238):479–505, 2002.