INAUGURAL – DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich–Mathematischen Gesamtfakultät
der
Ruprecht – Karls – Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Diplom–Mathematiker Thomas Oberlies
aus Ludwigshafen
Tag der mündlichen Prüfung: 08.12.2003

Einbettungsprobleme
in der
Differentialgaloistheorie

Gutachter: Prof. Dr. Bernd Heinrich Matzat

Dr. Peter Müller

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der gewöhnlichen Galoistheorie versteht man unter dem inversen Problem die Frage, ob eine gegebene endliche Gruppe als Galoisgruppe über einem gegebenen Körper realisierbar ist. Dabei sagt man, eine endliche Gruppe G werde durch eine galoissche Körpererweiterung E/F realisiert, wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/F)$ isomorph zu G ist. Weiter nennt man G (als Galoisgruppe) über F realisierbar, wenn es eine galoissche Körpererweiterung E/F gibt, welche G realisiert. Ein Einbettungsproblem, gegeben durch einen Gruppenepimorphismus $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ endlicher Gruppen und eine Realisierung E/F von G, ist eine Verschärfung dieser Fragestellung:

Gibt es eine Realisierung $\overline{E}/F$ von $\overline{G}$, so dass E ein Teilkörper von $\overline{E}$ ist (man also E in $\overline{E}$ *einbetten* kann)?

Läßt sich diese Frage mit Ja beantworten, dann sagt man das Einbettungsproblem sei eigentlich lösbar. Falls G trivial ist, bedeutet dies nichts anderes, als dass das inverse Problem für $\overline{G}$ über F lösbar ist (aus $G = 1$ folgt nämlich $E = F$).

Kann man lediglich eine Untergruppe von $\overline{G}$ auf die entsprechende Weise realisieren, so sagt man schlicht das Einbettungsproblem sei lösbar.

Die Untersuchung von Einbettungsproblemen hat zu wichtigen Fortschritten bei der Lösung des inversen Problems geführt. Zum Beispiel basiert der wohlbekannte Satz von Shafarevich, der besagt, dass jede auflösbare Gruppe über $\mathbb{Q}$ realisierbar ist, auf der eigentlichen Lösbarkeit zerfallender Einbettungsprobleme mit nilpotentem Kern.

Als weitere Anwendung erhält man Strukturaussagen, welche die absolute Galoisgruppe $G_F$betreffen. Beispielsweise sind genau dann alle Einbettungsprobleme über F lösbar, wenn die Gruppe G_F projektiv ist. Weiter gibt es ein exaktes Kriterium, wann die Gruppe G_F (von abzählbar unendlichem Rang) frei ist, nämlich genau dann, wenn alle Einbettungsprobleme eine eigentliche Lösung besitzen (Freiheitssatz von Iwasawa [FJ, Corollary 24.2]).

Die Differentialgaloistheorie ist analog zur gewöhnlichen Galoistheorie aufgebaut. Statt Polynomgleichungen über Körpern studiert man lineare, homogene Differentialgleichungen über einem Differentialkörper. Dabei ist ein Differentialkörper ein Körper K mit einer Ableitung (das ist eine additive Abbildung $'\colon K \to K$, welche die Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ erfüllt). Die Lösungen einer linearen Differentialgleichung $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1x' + a_0x = 0$ mit Koeffizienten $a_i \in K$ erzeugen eine sogenannte Picard-Vessiot-Erweiterung N/K, welche die Rolle einer „Galoiserweiterung" spielt. Die K-Automorphismen von N, die mit der Ableitung vertauschbar sind, bilden die Differentialgaloisgruppe $\mathrm{Gal}(N/K)$. Es handelt sich um eine lineare algebraische Gruppe, deren abgeschlossene Untergruppen zu Zwischendifferentialkörpern von N/K korrespondieren - völlig analog zum Hauptsatz der gewöhnlichen Galoistheorie.

Schließlich definiert man auch Einbettungsprobleme analog zum klassischen Fall.

Die Picard-Vessiot-Erweiterungen von K bilden eine sogenannte Tannaka-Kategorie, welche durch die Darstellungen eines affinen Gruppenschemas G_K beschrieben werden kann. Dieses Gruppenschema spielt die Rolle der „absoluten Galoisgruppe": Analog zur gewöhnlichen Galoistheorie kann man die Punktgruppe dieses Schemas sowohl als die Automorphismengruppe einer „universellen Picard-Vessiot-Erweiterung", wie auch als projektiven Limes linearer algebraischer Gruppen auffassen.

Zur Bestimmung der Struktur von G_K möchte man wissen, welche linearen algebraischen Gruppen als Faktorgruppen auftauchen - dies ist das inverse Problem der Differentialgaloistheorie. Weitergehend ist die Lösbarkeit von Einbettungsproblemen ein Maß für die Freiheit von G_K.

In dieser Arbeit betrachten wir nur Differentialkörper K von Charakteristik 0, deren Konstantenkörper $C = \{u \in K : u' = 0\}$ algebraisch abgeschlossen sind. Als wichtiges Beispiel sei hier $C(t)$, der rationale Funktionenkörper in einer Variablen (mit der Ableitung $u' := \frac{d}{dt}u$) genannt.

Mit dem Ziel das inverse Problem zu lösen, wurden Einbettungsprobleme in der Differentialgaloistheorie zuerst von J. Kovacic untersucht. In [Ko1, Proposition 9] zeigt er im wesentlichen, dass jedes zusammenhängende Einbettungsproblem über $C(t)$ eine (nicht unbedingt eigentliche) Lösung besitzt. Desweiteren gibt er in [Ko2, Proposition 19] eine hinreichende Bedingung für die eigentliche Lösbarkeit von zusammenhängenden, zerfallenden Einbettungsproblemen mit unipotentem, abelschem Kern und reduktiver Faktorgruppe an. Durch eine spezielle Realisierung halbeinfacher Gruppen gelang es C. Mitschi und F. M. Singer mit dieser Bedingung zu zeigen, dass jede zusammenhängende lineare algebraische Gruppe als Differentialgaloisgruppe über $C(t)$ realisierbar ist (siehe [MS1]).

Ein Resultat von Borel und Serre [BS] besagt, dass die Zusammenhangskomponente einer linearen algebraischen Gruppe ein endliches Supplement hat. Dies erlaubt es, sich beim Lösen des inversen Problems auf semidirekte Produkte $G \rtimes H$ mit zusammenhängendem G und endlichem H zu beschränken. In [MS2] wird gezeigt, dass man so eine Gruppe realisieren kann, wenn einem dies auf eine spezielle Weise (welche der Operation von H auf G Rechnung trägt) für den zusammenhängenden Teil G gelingt. Dadurch kann man sich die Methoden für zusammenhängende Gruppen nutzbar machen.

In der vorliegenden Arbeit werden sowohl zusammenhängende Einbettungsprobleme untersucht, als auch solche, welche in „semidirekter" Weise aus zusammenhängenden Einbettungsproblemen und einer endlichen Gruppe gebildet sind. Als wichtiges Resultat für zusammenhängende Einbettungsprobleme erhalten wir:

Theorem. *Jedes zusammenhängende Einbettungsproblem ist über $C(t)$ eigentlich lösbar.*

Die entwickelte Theorie zur Behandlung von nicht zusammenhängenden Einbettungsproblemen erlaubt es, das Umkehrproblem über Funktionenkörpern in endlich vielen Variablen zu lösen:

Theorem. *Sei K ein Funktionenkörper in endlich vielen Variablen über C. Dann existiert zu jeder linearen algebraischen Gruppe $G \leq \mathrm{GL}_n C$ eine Picard-Vessiot-Erweiterung N/K, so dass $G \cong \mathrm{Gal}(N/K)$ gilt.*

Die Arbeit ist in folgender Weise aufgebaut:

Kapitel 1 gibt eine kurze Einführung in die Differentialgaloistheorie. Im letzten Abschnitt werden einige Besonderheiten der Theorie linearer algebraischer Gruppen in Charakteristik 0 aufgeführt.

Im 2. Kapitel werden Einbettungsprobleme in der Differentialgaloistheorie definiert. Mit Hilfe der Strukturtheorie linearer algebraischer Gruppen wird gezeigt, wie man Epimorphismen linearer algebraischer Gruppen, bzw. die zugehörigen Einbettungsprobleme „zerlegen" kann. Hierbei folgt die eigentliche Lösbarkeit eines Einbettungsproblems aus der eigentlichen Lösbarkeit seiner „Teile".

Die aus der gewöhnlichen Galoistheorie bekannte Zerlegung eines beliebigen Einbettungsproblems in ein zerfallendes und eines von Frattini-Typ wird verallgemeinert. Hierzu wird die Definition der Frattini-Eigenschaft auf Epimorphismen linearer algebraischer Gruppen verallgemeinert und eine den klassischen Fall verallgemeinernde Charakterisierung angegeben.

Schließlich wird im Hinblick auf das letzte Kapitel gezeigt, wie man ein beliebiges Einbettungsproblem in ein „semidirektes" und eines mit endlichem Kern zerlegen kann.

In Kapitel 3 werden zusammenhängende Einbettungsprobleme betrachtet (deren zugehöriger Epimorphismus ist eine Abbildung zusammenhängender linearer algebraischer Gruppen). Dazu führen wir zuerst den Begriff der effektiven Picard-Vessiot-Erweiterung ein. Die Differentialgaloisgruppe einer solchen Erweiterung ist immer zusammenhängend. Ist die kohomologische Dimension des Differentialkörpers höchstens 1 (dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $K = C(t)$), dann gilt hiervon auch die Umkehrung.

Bei einer effektiven Erweiterung kann man die erzeugende Differentialgleichung als Element der Liealgebra der zugehörigen Differentialgaloisgruppe auffassen. Solche Differentialgleichungen kann man durch Gruppenepimorphismen, vermöge deren zugehörigen Liealgbrahomomorphismen transformieren. Wir erhalten, dass alle effektiven Einbettungsprobleme lösbar sind.

Als nächstes wird gezeigt, dass die eigentliche Lösbarkeit effektiver, zusammenhängender Einbettungsprobleme mit reduktivem Kern bereits aus der Lösung des Umkehrproblems für reduktive Gruppen folgt.

Anschließend werden exakte Bedingungen für die eigentliche Lösbarkeit effektiver, zusammenhängender Einbettungsprobleme mit unipotentem Kern angegeben.

Als Anwendung wird im Fall $K := C(t)$ gezeigt, dass diese Bedingungen immer erfüllt sind. Mit den Zerlegungssätzen aus dem zweiten Kapitel, erhalten wir die eigentliche Lösbarkeit von allen zusammenhängenden Einbettungsproblemen über $C(t)$.

Im letzten Kapitel werden die Resultate aus dem dritten Kapitel auf „semidirekte" Einbettungsprobleme verallgemeinert. Dies führt schließlich auf die

Lösung des inversen Problems der Differentialgaloistheorie für Funktionenkörper in endlich vielen Variablen.

Bedanken möchte ich mich an erster Stelle bei B. H. Matzat für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Betreuung während ihrer Entstehung.

Für kritische Kommentare und wichtige Hinweise möchte ich mich auch bei der Computer-Algebra-Gruppe, besonders bei J. Hartmann, G. Kemper, J. Klüners und P. Müller bedanken.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe der Differentialgaloistheorie vorgestellt. Die folgende Liste zeigt, dass man diese analog zur gewöhnlichen Galoistheorie entwickeln kann. Gleichzeitig ist die Gegenüberstellung als Leitfaden für die nächsten Abschnitte zu verstehen.

Wir betrachten im Folgenden nur Körper der Charakteristik 0.

Erweiterungen
Gewöhnliche Galoistheorie: Man betrachtet Körper und Körpererweiterungen.
Differentialgaloistheorie: Hier geben wir uns einen algebraisch abgeschlossenen Körper C vor und betrachten die Differentialkörper mit Konstantenkörper C. Als Körpererweiterungen lassen wir nur Differentialkörpererweiterungen solcher Körper zu (Abschnitt 1.1).

„Galoissche" Erweiterungen
Gewöhnliche Galoistheorie: Eine Körpererweiterung E/F nennt man normal oder galoissch, wenn ein Polynom p mit Koeffizienten in F existiert, so dass sämtliche Lösungen der Gleichung $p = 0$ in E liegen und die Erweiterung E/F erzeugen.
Differentialgaloistheorie: Hier sagen wir, dass eine Differentialkörpererweiterung N/K eine Picard–Vessiot–Erweiterung ist, wenn eine Matrix A mit Koeffizienten in K existiert, so dass die Koeffizienten aller Lösungen der Differentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ in N liegen und die Erweiterung N/K erzeugen (Abschnitt 1.2 und 1.3).

Galoisgruppen und Galoiskorrespondenz
Gewöhnliche Galoistheorie: Der Galoiserweiterung E/F wird die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/F)$ zugeordnet. Dies ist eine endliche Gruppe, deren Elemente gerade die F-Automorphismen von E sind. Es gibt eine bijektive Korrespondenz zwischen den Untergruppen von $\mathrm{Gal}(E/F)$ und den Zwischenkörpern von E/F (Hauptsatz der Galoistheorie).
Differentialgaloistheorie: Hier ordnen wir der Picard–Vessiot–Erweiterung N/K die Differentialgaloisgruppe $\mathrm{Gal}(N/K)$ zu. Es handelt sich um eine lineare algebraische Gruppe, deren Elemente gerade die K-Differentialautomorphismen von N sind. Es besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen den abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{Gal}(N/K)$ und den Differentialzwischenkörpern von N/K (Abschnitt 1.4).

1.1 Differentialringe und Differentialkörper

Definition 1.1.1. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Eine Abbildung $\delta : R \to R$ nennt man eine* **Derivation** *oder* **Ableitung** *auf R, wenn für alle $u, v \in R$ die Gleichungen*

$$\delta(u+v) = \delta(u) + \delta(v) \quad \text{und} \quad \delta(uv) = \delta(u)v + u\delta(v)$$

gelten.

Ist δ eine Derivation auf R, dann nennen wir das Paar (R, δ) einen **Differentialring***. Ist R sogar ein Körper, dann nennen wir (R, δ) einen* **Differentialkörper***.*

Für die Anwendung der Derivation δ auf ein Element $u \in R$, benutzen wir auch die üblichen Bezeichnungsweisen $u' := \delta u$, $u'' := \delta^2 u$ und $u^{(k)} := \delta^k u$.

Definition 1.1.2. *Sei (R, δ) ein Differentialring.*

1. *Ein* **Differentialideal** *von R ist ein Ideal von R, das von δ stabilisiert wird.*

2. *Die Elemente von R, die von δ annuliert werden, nennt man die* **Konstanten** *des Differentialringes R.*

   Ist R ein Körper, dann bilden auch die Konstanten von R einen Körper, den **Konstantenkörper** *von R.*

3. *R heißt* **einfach***, wenn es ausser (0) und R keine weiteren Differentialideale gibt.*

Beispiel 1.1.3. *Sei $C(t)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über dem Körper C der Charakteristik 0. Indem wir $\delta := \frac{d}{dt}$ setzen, definieren wir eine Derivation auf $C(t)$. Man sieht, dass der Konstantenkörper von $C(t)$ gerade C ist.*

Definition 1.1.4. *Seien (R, δ_R) und (S, δ_S) Differentialringe.*

1. *Ein Homomorphismus $\Phi : R \to S$ heißt* **Differentialhomomorphismus***, wenn er mit den Derivationen vertauschbar ist, d.h. wenn $\Phi \circ \delta_R = \delta_S \circ \Phi$ gilt.*

2. *Man nennt eine Erweiterung S/R eine* **Differentialringerweiterung***, wenn die Injektion $R \subset S$ ein Differentialhomomorphismus ist, d.h. wenn $\delta_S|_R = \delta_R$ gilt. Sind S und R sogar Körper, dann heißt S/R eine* **Differentialkörpererweiterung***.*

3. *Wir sagen eine Differentialringerweiterung S/R sei* **ohne neue Konstanten***, wenn die Konstanten von S und R übereinstimmen.*

1.2 Differentialgleichungen

Sei im Folgenden K ein Differentialkörper mit Konstantenkörper $C \neq K$ und sei $\operatorname{char} K = 0$. Sei weiter E/K eine Differentialkörpererweiterung ohne neue Konstanten. Die Derivation von E bezeichnen wir mit δ.

Wir betrachten nun Differentialgleichungen mit Koeffizienten in K und die Lösungen einer solchen Differentialgleichung mit Koeffizienten in E.

Definition 1.2.1. *Eine* **lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung n** *ist eine Gleichung der Form $Lx = 0$ mit einem linearen Differentialoperator*

$$L = \delta^n + a_{n-1}\delta^{n-1} + \ldots + a_1\delta + a_0 \in K[\delta].$$

Für das Lösen von Einbettungsproblemen ist es geschickter, die folgende Matrixschreibweise zu verwenden. Am Ende des nächsten Abschnitts werden wir sehen, dass beide Darstellungen zur gleichen Picard–Vessiot–Theorie führen.

Die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K bezeichnen wir mit $M_n(K)$.

Definition 1.2.2. *Eine* **Matrixdifferentialgleichung der Ordnung n** *ist eine Gleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ mit $A \in M_n(K)$.*

Man kann zeigen, dass die Menge $V := \{\mathbf{v} \in E^n | \mathbf{v}' = A\mathbf{v}\}$ der Lösungen einer solchen Differentialgleichung in E^n einen höchstens n-dimensionalen C-Vektorraum bildet (siehe [PS, Lemma 1.8]).

Definition 1.2.3. *Sei eine Differentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ der Ordnung n gegeben. Ist der Lösungsraum n-dimensional, dann sagen wir, diese Differentialgleichung sei* **vollständig lösbar** *in E.*

Eine Matrix $X \in \mathrm{GL}_n(E)$, deren Spaltenvektoren eine Basis von V bilden, heißt eine **Fundamentalmatrix** *dieser Differentialgleichung. Wir sagen dann auch, dass X eine zu A gehörige Fundamentalmatrix sei.*

Eine Fundamentalmatrix X erfüllt die Gleichung $X' = AX$, wobei mit X' die koeffizientenweise Ableitung von X gemeint ist. Ist $Y \in \mathrm{GL}_n(E)$ eine weitere Fundamentalmatrix zu A, dann liegt Y in $X \cdot \mathrm{GL}_n(C)$:

Es gilt nämlich $W := X^{-1}Y \in \mathrm{GL}_n(E)$. Wegen

$$AY = Y' = (XW)' = X'W + XW' = AXW + XW' = AY + XW'$$

folgt $W' = 0$, d.h. $W \in \mathrm{GL}_n(C)$.

Definition 1.2.4. *Zwei Matrizen $A, \tilde{A} \in M_n(K)$ nennt man* **äquivalent***, wenn eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\tilde{A} = B^{-1}AB - B^{-1}B'$ existiert.*

Sind $\mathbf{x} \in E^n$ und $\tilde{\mathbf{x}} := B^{-1}\mathbf{x}$, dann gilt genau dann $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, wenn $\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}$ ist.

Kommen wir nun zum Zusammenhang der beiden Darstellungen. Sei ein linearer Differentialoperator $L \in K[\delta]$ der Ordnung n wie in Definition 1.2.1 gegeben. Wir erhalten die *zugehörige* Matrixdifferentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, wenn wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

setzen. Ist nun $x \in E$ und $\mathbf{x} := (x, x', \ldots, x^{(n-1)})^T \in E^n$, dann sieht man, dass genau dann $Lx = 0$ gilt, wenn $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ist.

Man kann umgekehrt zeigen (siehe [PS, Section 1.2]), dass jede Matrix äquivalent zu einer Matrix ist, die zu einem linearen Differentialoperator gehört.

1.3 Picard-Vessiot-Erweiterungen

Sei im folgenden K ein Differentialkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper $C \neq K$ der Charakteristik 0.

Definition 1.3.1. *Sei N/K eine Differentialkörpererweiterung ohne neue Konstanten und $A \in M_n(K)$. Man nennt N einen* **Picard-Vessiot-Körper** *für die Differentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, wenn gilt:*

- *Es existiert eine Fundamentalmatrix $X \in \mathrm{GL}_n(N)$ für die gegebene Differentialgleichung.*
- *Die Erweiterung N/K wird von den Koeffizienten von X erzeugt.*

Man nennt N/K eine **Picard-Vessiot-Erweiterung (PVE)***, wenn N Picard-Vessiot-Körper einer Matrixdifferentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ über K ist. Wir sagen dann auch, dass N/K eine durch A definierte PVE sei.*

Wir skizzieren die an das Kroneckerverfahren erinnernde Konstruktion eines Picard-Vessiot-Körpers zur Differentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Mit (X_{ij}) bezeichnen wir eine $n \times n$-Matrix von Unbestimmten. Wir definieren den Ring $R_A := K[X_{ij}, 1/\det(X_{ij})]$. Man kann leicht zeigen, dass es genau eine Derivation auf R_A gibt, welche die von K fortsetzt und auf den Unbestimmten durch $(X'_{ij}) = A(X_{ij})$ gegeben ist.

Sei jetzt $\mathfrak{m} \leq R_A$ ein maximales Differentialideal von R_A. Man erkennt, dass $R_A/\mathfrak{m}$ ein einfacher Differentialring ist. In [PS, Lemma 1.17] wird gezeigt, dass einfache Ringe ganz sind, so dass wir den Quotientenkörper N von $R_A/\mathfrak{m}$ bilden können. Die Derivation auf R_A induziert eine Derivation auf $R_A/\mathfrak{m}$ und diese setzt sich eindeutig auf N fort.

Dank der algebraischen Abgeschlossenheit von C, kann man nun beweisen, dass N/K eine Differentialkörpererweiterung ohne neue Konstanten ist ([PS, Lemma 1.17]). Schließlich erkennt man, dass $(X_{ij} + \mathfrak{m}) \in \mathrm{GL}_n(R_A/\mathfrak{m}) \subseteq \mathrm{GL}_n(N)$ eine Fundamentalmatrix der gegebenen Differentialgleichung ist, deren Koeffizienten N/K erzeugen. Dies zeigt den ersten Teil der nächsten Bemerkung.

Bemerkung 1.3.2. *Sei über K eine Differentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ der Ordnung n gegeben. Dann gilt:*

Es existiert ein Picard-Vessiot-Körper zu dieser Differentialgleichung. Dieser ist bis auf K-Differentialisomorphie eindeutig.

Beweis. Siehe [PS, Proposition 1.20]. □

Bemerkung 1.3.3. *Sei N/K eine PVE zu $A \in M_n(K)$ und M/K eine Differentialkörpererweiterung ohne neue Konstanten. Dann gilt:*

1. *Es existieren eine Differentialkörpererweiterung $\overline{N}/K$ ohne neue Konstanten und Differentialmonomorphismen $N \subseteq \overline{N}$ und $M \subseteq \overline{N}$, so dass $\overline{N} = NM$.*

   Ist M/K sogar eine PVE, dann gilt dies auch für $\overline{N}/K$. Wird nämlich M/K durch ein $B \in M_m(K)$ definiert, dann ist $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n+m}(K)$ eine Matrix zu $\overline{N}/K$.

2. *Es gilt die folgende Eindeutigkeitsaussage: Seien $\overline{N}_1$ und $\overline{N}_2$ Differentialkörpererweiterungen von K ohne neue Konstanten. Seien weiter K-Differentialmonomorphismen $\sigma_i\colon N \hookrightarrow \overline{N}_i$ und $\tau_i\colon M \hookrightarrow \overline{N}_i$ gegeben, so dass $\overline{N}_i = \sigma_i(N)\tau_i(M)$ gilt ($i = 1, 2$).*

   Dann existieren zwei K-Differentialisomorphismen $\phi\colon \overline{N}_1 \to \overline{N}_2$ und $\phi_N\colon N \to N$, so dass $\phi \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \phi_N$ und $\phi \circ \tau_1 = \tau_2$ gelten.

Beweis. Zu 1. Wir betrachten die durch $A \in M_n(M)$ definierte PVE $\overline{N}$ über M mit Fundamentalmatrix $X \in \mathrm{GL}_n(\overline{N})$. Auch $K(X)/K$ ist eine PVE zu A und es gilt $K(X) \cdot M = \overline{N}$. Die Eindeutigkeitsaussage in Bemerkung 1.3.2 liefert schließlich noch einen K-Differentialisomorphismus $N \cong K(X)$. Daraus folgt der erste Teil der Aussage.

Ist M/K eine durch B definierte Picard-Vessiot-Erweiterung mit Fundamentalmatrix $Y \in \mathrm{GL}_m(M)$, dann folgt der zweite Teil aus der Identität

$$\overline{N} = K(X)K(Y) = K(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}).$$

Zu 2. Zuerst erkennt man, dass $\overline{N}_1/M$ und $\overline{N}_2/M$ durch $A \in M_n(K) \subseteq M_n(M)$ definierte PVE sind. Bemerkung 1.3.2 zeigt dann, dass ein M-Differentialisomorphismus $\phi\colon \overline{N}_1 \to \overline{N}_2$ existiert. Da sowohl $\phi(\sigma_1(X))$ als auch $\sigma_2(X)$ in $\mathrm{GL}_n(\overline{N}_2)$ liegende Fundamentalmatrizen von A sind, gilt $\phi(\sigma_1(N)) = \sigma_2(N)$. Wir können nun den gewünschten K-Differentialautomorphismus durch $\phi_N := \sigma_2^{-1} \circ \phi \circ \sigma_1$ definieren. □

In der Situation der letzten Bemerkung nennen wir den Körper $\overline{N}$ ein *Kompositum* von N und M. Wir können in $\overline{N}$ auch immer den Schnitt $N \cap M$ bilden. Er ist unabhängig von der Wahl des Kompositums:

Korollar 1.3.4. *Mit den Bezeichnungen wie in Bemerkung 1.3.3 gilt: Der Schnitt $N \cap M$ ist ein wohldefinierter Teilkörper von M (d.h. er ist nicht von der Wahl des Kompositums in dem er gebildet wird abhängig).*

Beweis. Seien $\overline{N}_i, \sigma_i, \tau_i, \phi$ und ϕ_N wie in Bemerkung 1.3.3. Sei $\tilde{M}$ der Differentialzwischenkörper von M/K, so dass $\sigma_1(N) \cap \tau_1(M) = \tau_1(\tilde{M}) \subseteq \overline{N}_1$. Wendet man darauf ϕ an so erhält man $\sigma_2(N) \cap \tau_2(M) = \tau_2(\tilde{M})$. □

Wir zeigen nun, dass man die Picard-Vessiot-Theorie auch mit homogenen linearen Differentialgleichungen entwickeln kann.

Sei $L \in K[\delta]$ ein Differentialoperator der Ordnung n wie in Definition 1.2.1. Sei weiter N/K eine Differentialkörpererweiterung ohne neue Konstanten. Wir sagen dann, dass N ein *Picard-Vessiot-Körper zu L* sei, wenn für den C-Vektorraum V der Lösungen von $Lx = 0$ in N die beiden folgenden Bedingungen gelten:
1. V ist n-dimensional (d.h. L ist vollständig lösbar in N).
2. Es gilt $N = K(\{x^{(k)}\colon x \in V, k \in \mathbb{N}\})$.

Die Ausführungen nach Definition 1.2.4 zeigen nun, dass N/K genau dann eine PVE ist, wenn N der Picard-Vessiot-Körper einer Differentialgleichung $Lx = 0$ ist. Man beachte dazu, dass eine durch eine Matrix A definierte PVE, auch durch jede zu A äquivalenten Matrix definiert wird.

1.4 Differentialgaloisgruppen

Sei K wieder ein Differentialkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper $C \neq K$ der Charakteristik 0.

Definition 1.4.1. *Sei N/K eine PVE. Mit $\mathrm{Gal}(N/K)$ bezeichnen wir die Gruppe der K-Differentialautomorphismen von N (das sind die Differentialautomorphismen, die K festlassen). Diese Gruppe nennt man die* **Differentialgaloisgruppe** *der PVE N/K.*

Definition 1.4.2. *Sei $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ eine Differentialgleichung mit zugehöriger PVE N/K. Sei weiter $X \in \mathrm{GL}_n(N)$ eine Fundamentalmatrix von A. Dann bezeichnen wir mit ι_X den Gruppenmonomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}(N/K) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(C) \\ \sigma & \mapsto & X^{-1} \cdot \sigma(X). \end{array}$$

Das ι_X wohldefinierter ist, sieht man wie folgt. Da

$$\sigma(X)' = \sigma(X') = \sigma(AX) = A\sigma(X),$$

ist auch $\sigma(X)$ eine Fundamentalmatrix von A. Wir erhalten $X^{-1} \cdot \sigma(X) \in \mathrm{GL}_n(C)$.

Ist $\iota_X(\sigma) = 1$, dann ist $\sigma(X) = X$. Da die Koeffizienten von X die PVE N/K erzeugen, muss $\sigma = 1$ gelten. Dies zeigt die Injektivität.

Dank des Monomorphismus ι_X hat man eine Einbettung der Differentialgaloisgruppe in die $\mathrm{GL}_n(C)$. Man kann nun zeigen, dass diese bezüglich der Zariskitopologie abgeschlossen ist.

Bemerkung 1.4.3. *Die Gruppe $\mathrm{Gal}(N/K)$ ist eine lineare algebraische Gruppe über C.*

Beweis. [PS, Proposition 1.27] □

Satz 1.4.4 (Hauptsatz der Differentialgaloistheorie). *Sei N/K eine PVE. Wir setzen $G := \mathrm{Gal}(N/K)$ und definieren die Mengen*

$$\begin{array}{rl} \mathcal{U}, & \text{der abgeschlossenen Untergruppen von } G \\ \text{und} \quad \mathcal{Z}, & \text{der Differentialzwischenkörper von } N/K. \end{array}$$

Seien die Abbildung $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{Z}$ durch $\phi(W) := N^W$ und $\psi\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{U}$ vermöge $\psi(E) := \mathrm{Gal}(N/E)$ gegeben (dabei bezeichnet N^W den Unterkörper der W-invarianten Elemente von N). Dann gelten:

1. *Die Abbildungen ϕ und ψ sind invers zueinander.*
2. *Ist $W \in \mathcal{U}$ eine normale Untergruppe von G, dann ist $\phi(W)/K$ eine PVE deren Differentialgaloisgruppe $\mathrm{Gal}(\phi(W)/K)$ isomorph zu G/W ist.*
3. *Bezeichne G° die Einskomponente von G. Dann ist $\phi(G^\circ)/K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G/G°. $\phi(G^\circ)$ ist der algebraische Abschluss von K in N.*

Beweis. [PS, Proposition 1.34] □

Der letzte Satz beendet die Analogie zur gewöhnlichen Galoistheorie noch nicht. Zum Beispiel ist in der gewöhnlichen Galoistheorie eine Körpererweiterung genau dann durch Radikale auflösbar, wenn ihre Galoisgruppe auflösbar ist. Die entsprechende Aussage in der Differentialgaloistheorie wird in [PS, Theorem 1.43] bewiesen.

Der Grad einer endlichen Galoiserweiterung ist gerade die Ordnung der Galoisgruppe. In der Differentialgaloistheorie haben wir eine analoge Aussage.

Bemerkung 1.4.5. *Der Transzendenzgrad einer PVE N/K, stimmt mit der Dimension ihrer Differentialgaloisgruppe* $\mathrm{Gal}(N/K)$ *überein.*

Beweis. [PS, Corollary 1.30] □

Im endlichdimensionalen Fall hat man sogar die folgende Überschneidung der Theorien.

Bemerkung 1.4.6. *Sei E/K eine endliche Körpererweiterung. Die Erweiterung E/K ist genau dann eine PVE, wenn sie eine gewöhnliche Galoiserweiterung ist. In diesem Fall stimmen Galoisgruppe und Differentialgaloisgruppe überein.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.4.5 hat eine endlichdimensionale PVE E/K eine endliche Differentialgaloisgruppe G. Da $E^G = K$, ist E/K auch eine gewöhnliche Galoiserweiterung. Die Umkehrung folgt aus [Mag, Proposition 3.20]. Da jeder K-Automorphismus einer algebraischen Erweiterung E/K sogar ein K-Differentialautomorphismus ist (siehe [Mag, Example 1.14]), erhält man auch die letzte Aussage. □

Wir gehen noch auf zwei Fragen ein, die unsere Voraussetzungen betreffen.

1. Wieso werden nur Erweiterungen ohne neue Konstanten zugelassen?
Werfen wir zuerst einen Blick auf die gewöhnliche Galoistheorie: Ist E/F eine Körpererweiterung und $p \in F[X]$ ein Polynom, dass über E in Linearfaktoren zerfällt, dann liegen *alle* Lösungen der Gleichung $p = 0$ in E. Es gibt nämlich in keiner Körpererweiterung von E weitere Lösungen.

Damit wir die Differntialgaloistheorie analog aufbauen können, müssen wir uns für einen gegebenen algebraisch abgeschlossenen Körper C auf die Kategorie $\mathbf{Diff}_C$, der Differentialkörper mit Konstantenkörper C beschränken (Differentialkörpererweiterungen von Objekten dieser Kategorie, sind dann automatisch ohne neue Konstanten). Ist K ein Differentialkörper mit Konstantenkörper C, dann macht es nämlich nur für eine Differentialkörpererweiterung N/K in $\mathbf{Diff}_C$ Sinn, davon zu sprechen, dass alle Lösungen einer gegebenen Differentialgleichung $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ mit $A \in M_n(K)$ in N liegen. Nämlich dann, wenn der C-Vektorraum $V \leq N^n$ der Lösungen die volle Dimension n hat (siehe Definition 1.2.3). In keiner Differentialkörpererweiterung von N in $\mathbf{Diff}_C$ können dann weitere Lösungen liegen.

Wäre eine Konstantenerweiterung erlaubt, dann könnte man $N(t)$, den rationalen Funktionenkörper in einer Variablen bilden, auf dem man die Derivation von N so fortsetzen könnte, dass $t' = 0$ ist. Der Konstantenkörper von $N(t)$ wäre dann $C(t)$ und für eine Lösung $0 \neq x \in V$, wäre dann $t \cdot x \notin N^n$ eine neue Lösung in $N(t)^n$. Die Lösungen würden dann den n-dimensionalen $C(t)$-Vektorraum $V \otimes_C C(t)$ bilden.

2. Wieso setzt man Charakteristik 0 *voraus?*
Nehmen wir an die Charakteristik des Differentialkörpers F mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper C_F wäre $p > 0$. Dann gilt $F = C_F$, denn für alle $v \in F$ ist $(v^p)' = p \cdot v^{p-1} \cdot v' = 0$, d.h., $v^p \in C_F$.

Man erhält trotzdem eine analoge Differentialgaloistheorie in Charakteristik p, wenn man statt der hier definierten Differentialkörper, Körper mit einer *iterativen* Derivation betrachtet (siehe [Mat]).

1.5 Lineare algebraische Gruppen in Charakteristik 0

Seien alle lineare algebraische Gruppen dieses Abschnitts über dem algebraisch abgeschlossenen Körper C der Charakteristik 0 definiert.

Bemerkung 1.5.1. *Ein bijektiver Morphismus linearer algebraischer Gruppen ist ein Isomorphismus.*

Beweis. [Spr, 3.2.21 iii)] und [Spr, 4.3.4 ii)]. □

Es gilt der Homomorphiesatz:

Bemerkung 1.5.2. *Sei* $\pi\colon \overline{G} \to G$ *ein Morphismus linearer algebraischer Gruppen. Sei weiter* $W \subseteq \mathrm{Kern}\pi$ *eine normale, abgeschlossene Untergruppe von* $\overline{G}$*. Dann existiert ein Morphismus* $\tilde{\pi}\colon \overline{G}/W \to \pi(\overline{G})$*, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads] & G \\ \overline{G}/W \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & \pi(\overline{G}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Gilt sogar $W = \mathrm{Kern}\pi$*, dann ist* $\tilde{\pi}$ *ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Existenz von π ist eine Konsequenz der universellen Abbildungseigenschaft des Quotienten ([Hum, Theorem 12.1]). Ist $W = \mathrm{Kern}\pi$, so sieht man, dass $\tilde{\pi}$ bijektiv ist. Man wendet schließlich Bemerkung 1.5.1 an. □

Diese Bemerkung erlaubt ein ähnliches Rechnen wie mit endlichen Gruppen. Insbesondere gelten die beiden Isomorphiesätze.

Beim Umgang mit unipotenten Gruppen, benutzen wir oft implizit die folgende Aussage.

Bemerkung 1.5.3. *Unipotente Gruppen sind zusammenhängend.*

Beweis. Siehe [PR, Abschnitt 2.1.8]. □

Definition 1.5.4. *Sei* G *eine lineare algebraische Gruppe.*

1. *Die größte zusammenhängende, normale, auflösbare Untergruppe von* G *nennt man das* **Radikal** *von* G*. Wir bezeichnen es mit* $R(G)$*.*

2. *Die größte zusammenhängende, normale, unipotente Untergruppe von* G *heißt das* **unipotente Radikal** *von* G*. Wir bezeichnen es mit* $R_u(G)$*.*

3. *Eine* **Leviuntergruppe** *von G ist eine zusammenhängende Untergruppe L von G, so dass G das semidirekte Produkt von L und $R_u(G)$ ist.*

Man sieht sofort, dass das unipotente Radikal $R_u(G)$ einer linearen algebraischen Gruppe G gerade aus den unipotenten Elementen des Radikals $R(G)$ von G besteht.

Bemerkung 1.5.5. *Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe, dann gelten:*

1. *Es existiert eine Leviuntergruppe von G.*
2. *Eine Leviuntergruppe L von G ist reduktiv. Das Radikal $R(L)$ ist ein maximaler Torus von $R(G)$. Es gilt $R(L) = L \cap R(G)$.*
3. *Zwei Leviuntergruppen von G sind konjugiert unter einem Element aus $R_u(G)$.*

Beweis. Zu (1) siehe [PR, Theorem 2.3]. Der erste Teil von (2) folgt sofort aus der Definition, der zweite aus [Bor, Prop. 11.21 und Prop. 11.23(i)]. Beachtet man, dass Leviuntergruppen maximal unter den reduktiven sind, dann folgt (3) aus [PR, Theorem 2.3]. $\square$

Der nächste Satz ist von zentraler Bedeutung für die Untersuchung von Einbettungsproblemen, die nicht zusammenhängend sind.

Satz 1.5.6. *Sei G eine lineare algebraische Gruppe mit der Zusammenhangskomponente G°. Dann existiert ein endliches Supplement H von G° in G (das ist eine endliche Untergruppe H von G mit $G = H \cdot G^\circ$).*

Beweis. [BS, Lemme 5.11] $\square$

Kapitel 2

Zerlegung von Einbettungsproblemen

In dem ganzen Kapitel sei K ein Differentialkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper $C \neq K$ der Charakteristik 0. Alle linearen algebraischen Gruppen seien über C definiert.

Nach der Definition eines Einbettungsproblems im ersten Abschnitt, widmet sich der Rest dieses Kapitels der Zerlegung von Epimorphismen linearer algebraischer Gruppen. Ein Blick auf Bemerkung 2.2.5 zeigt nämlich, dass aus einer Zerlegung eines Epimorphismus auch eine „Zerlegung" des zugehörigen Einbettungsproblems folgt. Dies erlaubt es, uns später auf Einbettungsprobleme zu beschränken, deren Epimorphismen gewisse Eigenschaften besitzen.

2.1 Einbettungsprobleme

Definition 2.1.1. *Ein* **Einbettungsproblem** *über K ist gegeben durch einen Epimorphismus linearer algebraischer Gruppen über C*

$$\overline{G} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G,$$

eine PVE N/K und einen Isomorphismus $\alpha\colon \mathrm{Gal}(N/K) \xrightarrow{\cong} G$.

Den Kern von π nennt man den **Kern des Einbettungsproblems**. *Wir nennen das Einbettungsproblem* **zusammenhängend**, *falls die Gruppe $\overline{G}$ zusammenhängend ist.*

Unter einer **Lösung des Einbettungsproblems** *versteht man eine PVE $\overline{N}/K$ mit $N \subseteq \overline{N}$ und einen Monomorphismus $\overline{\alpha}\colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \hookrightarrow \overline{G}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \arrow[u, hook, "\overline{\alpha}"] \arrow[r, two heads, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Gal}(N/K) \arrow[u, hook, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Die Lösung heißt **nichttrivial**, *wenn $N \subsetneq \overline{N}$ gilt und* **eigentlich**, *wenn $\overline{\alpha}$ ein Isomorphismus ist.*

2.2 Zerlegung von Epimorphismen

Definition 2.2.1. *Sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge von Epimorphismen linearer algebraischer Gruppen. Eine auf eine der folgenden Weisen gebildeten Menge $\tilde{\mathcal{M}}$, nennen wir eine elementare Zerlegung von $\mathcal{M}$:*

1. *Ersetze $\pi_2 \in \mathcal{M}$ durch Epimorphismen π_1 und π_3 mit $\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_3$.*
2. *Ersetze $\pi_1 \in \mathcal{M}$ durch einen Epimorphismus π_2, so dass ein Epimorphismus π_3 existiert mit $\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_3$.*

Wir sagen $\pi\colon \overline{G} \to G$ sei **zerlegbar** *in $\pi_1, \ldots, \pi_n$, wenn Mengen $\mathcal{M}_i$ existieren $(1 \le i \le m)$, mit $\mathcal{M}_1 = \{\pi\}$ und $\mathcal{M}_m = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$, so dass für alle i die Menge $\mathcal{M}_{i+1}$ eine elementare Zerlegung von $\mathcal{M}_i$ ist.*

Im folgenden Sinne bedeutet eine Zerlegung von Epimorphismen auch eine Zerlegung eines zugehörigen Einbettungsproblems:

Bemerkung 2.2.2. *Sei ein kommutatives Dreieck von Epimorphismen linearer algebraischer Gruppen gegeben.*

$$\begin{tikzcd} & G_2 \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ G_1 \arrow[ur, "\pi_3"] \arrow[rr, two heads, "\pi_2"] & & G_3 \end{tikzcd}$$

- *Ist nun $\tilde{\alpha}\colon \mathrm{Gal}(\tilde{N}/K) \to G_2$ eine eigentliche Lösung des Einbettungsproblems*

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, two heads] & G_3 \\ & \mathrm{Gal}(N/K) \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

  und $\overline{\alpha}\colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \to G_1$ eine (eigentliche) Lösung des Einbettungsproblems

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, two heads] & G_2 \\ & \mathrm{Gal}(\tilde{N}/K), \arrow[u, "\tilde{\alpha}"'] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

  dann ist $\overline{\alpha}$ auch eine (eigentliche) Lösung des Einbettungsproblems

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, two heads] & G_3 \\ & \mathrm{Gal}(N/K). \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

- *Ist umgekehrt $\overline{\alpha}\colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \to G_1$ eine eigentliche Lösung des Einbettungsproblems 2.3 und setzen wir*

$$\tilde{N} := \overline{N}^{\mathrm{Kern}\,\pi_3},$$

  dann existiert genau ein Morphismus $\tilde{\alpha}\colon \mathrm{Gal}(\tilde{N}/K) \to G_2$, so dass

$$\tilde{\alpha} \circ \mathrm{res} = \pi_3 \circ \overline{\alpha} \tag{2.4}$$

  gilt. Dieser ist eine eigentliche Lösung des Einbettungsproblems 2.1.

Beweis. Die erste Aussage zeigt man durch das Zusammenfügen der kommutativen Diagramme.

Bei der zweiten Aussage folgt die Eindeutigkeit von $\tilde{\alpha}$ aus der Surjektivität der Restriktionsabbildung. Definiert man $\tilde{\alpha}$ durch Gleichung 2.4, dann folgt die Wohldefiniertheit, weil π_3 und die Restriktionsabbildung den gleichen Kern haben. □

Man kann den zweiten Teil dieser Bemerkung nun so interpretieren, dass man das Einbettungsproblem 2.1 auf das Einbettungsproblem 2.3 reduzieren kann. Der erste Teil liefert eine Zerlegung von 2.3 in 2.1 und 2.2, aber in diesem Fall hängt das Einbettungsproblem 2.2 von der gewählten eigentlichen Lösung von 2.1 ab.

Folgende Definition erlaubt dennoch die Formulierung von Zerlegungssätzen für Einbettungsprobleme.

Definition 2.2.3. *Ein Epimorphismus linearer algebraischer Gruppen heißt* **einbettend** *(über K), wenn alle zugehörigen Einbettungsprobleme über K eigentlich lösbar sind.*

Lemma 2.2.4. *Sei ein kommutatives Dreieck von Epimorphismen linearer algebraischer Gruppen gegeben.*

$$\begin{tikzcd} & G_2 \arrow[dr, two heads, "\pi_1"] & \\ G_1 \arrow[ur, two heads, "\pi_3"] \arrow[rr, two heads, "\pi_2"] & & G_3 \end{tikzcd}$$

Es gelten:

1. *Sind π_1 und π_3 einbettend, dann ist auch π_2 einbettend.*
2. *Ist π_2 einbettend, dann ist auch π_1 einbettend.*

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.2.2. □

Das letzte Lemma beschreibt was bei elementaren Zerlegungen geschieht. Induktion liefert daraus sofort:

Bemerkung 2.2.5. *Sei $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ ein Epimorphismus linearer algebraischer Gruppen. Ist π in die einbettenden Epimorphismen $\pi_1, \ldots, \pi_n$ zerlegbar, dann ist auch π einbettend.*

Analoge Bemerkungen gelten natürlich für alle Eigenschaften von Epimorphismen, für welche die Aussage von Lemma 2.2.4 gilt. Neben einbettenden Epimorphismen sind dies z.B. die im Anschluss definierten Frattini-Epimorphismen (siehe Lemma 2.5.2).

Definition 2.2.6. *Sei $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ ein Epimorphismus linearer algebraischer Gruppen.*

- *Man nennt π* **zerfallend**, *wenn ein Morphismus $\sigma\colon G \hookrightarrow \overline{G}$ existiert, so dass $\pi \circ \sigma = id_G$ gilt. Man sagt dann auch, dass π* **zerfällt** *und dass σ ein* **homomorpher Schnitt** *für π sei.*

- *Man nennt π* **direkt zerfallend**, *wenn π zerfällt und zusätzlich $\sigma(G)$ normal in $\overline{G}$ ist (d.h. $\overline{G} \cong \mathrm{Kern}\pi \times \sigma(G)$).*

- *Wir sagen π sei ein* **Frattini–Epimorphismus**, *wenn für alle echten, abgeschlossenen Untergruppen S von $\overline{G}$ auch $\pi(S)$ eine echte, abgeschlossene Untergruppe von G ist.*

- *Man nennt π* **zusammenhängend**, *wenn $\overline{G}$ zusammenhängend ist.*

- *Man nennt den Kern von π* **minimal**, *wenn keine echte, nichttriviale, abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{Kern}\pi$ normal in $\overline{G}$ ist.*

Zu π gehörige Einbettungsprobleme nennen wir dann ebenfalls **zerfallend**, *bzw.* **direkt zerfallend**, *bzw.* **zusammenhängend**, *bzw.* **Frattini–Einbettungsproblem**.

Frattini–Einbettungsprobleme und zerfallende Einbettungsprobleme sind Extreme im folgenden Sinne. Direkt aus der Definition sieht man, dass jedes zerfallende Einbettungsproblem lösbar ist. Es bleibt die Frage, ob es sich um eine eigentliche Lösung handelt.

Bei Frattini–Einbettungsproblemen dagegen ist die Lösbarkeit unklar. Falls eine Lösung existiert folgt aber wiederum sofort aus der Definition, dass sie eigentlich ist.

Bemerkung 2.2.7. *Sei $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ eine exakte Sequenz linearer algebraischer Gruppen. Es existiert eine Zerlegung von π in Epimorphismen, die einem der folgenden Typen angehören:*

- *Frattini–Epimorphismen*
- *zerfallende Epimorphismen mit endlichem Kern*
- *zerfallende Epimorphismen mit minimalem, unipotentem Kern*
- *zerfallende Epimorphismen mit Toruskern.*
- *zerfallende Epimorphismen mit halbeinfachem Kern*

Zum Beweis dieser Bemerkung benötigen wir zuerst die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 2.2.8. *Sei $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ eine (zerfallende) exakte Sequenz linearer algebraischer Gruppen. Sei V eine abgeschlossene Untergruppe von W, welche normal in G liegt. Dann ist π zerlegbar in den Epimorphismus $G \twoheadrightarrow G/V$ und den (zerfallenden) Epimorphismus $G/V \twoheadrightarrow G/W$.*

Beweis. Folgt direkt aus Definition 2.2.1, denn π ist die Verkettung der beiden Epimorphismen. □

Lemma 2.2.9. *Sei $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ eine exakte Sequenz linearer algebraischer Gruppen. Sei S ein minimales Supplement von W in G (d.h. S ist minimal unter den abgeschlossenen Untergruppen von G mit der Eigenschaft $G = S{\cdot}W$). Dann ist π zerlegbar in den Frattini–Epimorphismus $\pi|_S \colon S \twoheadrightarrow G/W$ und den zerfallenden Epimorphismus $pr_S \colon W \rtimes S \twoheadrightarrow S$.*

Beweis. Den Untergruppen von G entsprechen Ideale im noetherschen Koordinatenring von G. Dies zeigt die Existenz einer minimalen, abgeschlossenen Untergruppe S, so dass $G = S \cdot W$. Aus der Minimalität von S erhält man sofort, dass $\pi|_S$ ein Frattini–Epimorphismus ist.

Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] & G \arrow[r, two heads, "\pi"] & G/W \\ W \arrow[r, hook] & W \rtimes S \arrow[r, two heads] \arrow[u, two heads, "\mu"] & S, \arrow[u, two heads, "\pi|_S"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\mu\colon W \rtimes S \twoheadrightarrow G$ die Produktabbildung $(w, s) \mapsto w \cdot s$ ist. Aus Definition 2.2.1 folgt, dass π in $\pi|_S \circ \mathrm{pr}_S$ zerlegbar ist, also auch in $\pi|_S$ und pr_S. □

Beweis von Bemerkung 2.2.7. Beachte, dass bei der Zerlegung in Lemma 2.2.9 der zugehörige zerfallende Epimorphismus den gleichen Kern wie der ursprüngliche Epimorphismus hat. Es genügt also, in Epimorphismen mit endlichem, bzw. minimalem, unipotentem, bzw. halbeinfachem, bzw. Toruskern zu zerlegen. Wir erledigen dies in fünf Schritten:

1. Zerlegung eines Epimorphismus in einen mit zusammenhängendem Kern und einen mit endlichem Kern.

Da W° eine charakteristische Untergruppe von W ist, liegt sie insbesondere normal in $\overline{G}$. Lemma 2.2.8 zeigt nun das Gewünschte.

2. Zerlegung eines Epimorphismus mit zusammenhängendem Kern in einen mit halbeinfachem und einen mit zusammenhängendem, auflösbarem Kern.

Dies folgt mit Lemma 2.2.8, da das Radikal $R(W)$ eine charakteristische Untergruppe von W ist.

3. Zerlegung eines Epimorphismus mit zusammenhängendem, auflösbarem Kern in solche mit zusammenhängendem, abelschem Kern:

Wir machen eine Induktion nach der Dimension des Kerns W. Im Fall, dass W abelsch ist, ist nichts mehr zu zeigen. Wir können also annehmen, dass die Dimension der Kommutatorgruppe $[W, W]$, echt kleiner als die von W ist. Da $[W, W]$ eine charakteristische Untergruppe von W ist, können wir mit Lemma 2.2.8 π in einen Epimorphismus mit abelschem Kern und einen mit Kern $[W, W]$ zerlegen.

4. Zerlegung eines Epimorphismus mit zusammenhängendem, abelschen Kern in einen mit unipotentem und einen mit Toruskern.

Die Menge W_U der unipotenten Elemente in W ist eine charakteristische Untergruppe von W. Da W/W_U ein Torus ist, folgt die Behauptung mit Lemma 2.2.8.

5. Zerlegung eines Epimorphismus mit unipotentem Kern in solche mit minimalem, unipotentem Kern.

Ist der unipotente Kern W des Epimorphismus nicht minimal, dann existiert eine echte, nichttriviale, abgeschlossene Untergruppe U von W, die normal in $\overline{G}$ ist. Wegen Bemerkung 1.5.3 gilt $1 < \dim U < \dim W$ und wir können mit Lemma 2.2.8 in Epimorphismen mit echt kleinerdimensionalen unipotenten Kernen zerlegen. Induktion nach der Dimension des Kerns zeigt dann die Behauptung. □

2.3 Zerfallende Epimorphismen mit Toruskern

Wir benötigen die folgende Konsequenz aus dem Starrheitssatz für diagonalisierbare Gruppen:

Bemerkung 2.3.1. *Sei W eine diagonalisierbare Untergruppe der linearen algebraischen Gruppe G. Dann gilt $N_G(W)^\circ = C_G(W)^\circ$.*

Beweis. [Hum, Corollary 16.3] $\square$

Bemerkung 2.3.2. *Sei $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ ein zusammenhängender Epimorphismus mit Toruskern W. Dann ist π zentral, d.h. $W \subseteq Z(\overline{G})$. Ist zusätzlich π zerfallend, dann zerfällt π sogar direkt.*

Beweis. Nach der letzten Bemerkung gilt $\overline{G} = N_{\overline{G}}(W) = N_{\overline{G}}(W)^\circ = C_{\overline{G}}(W)^\circ$. Es gilt also $W \subseteq Z(\overline{G})$.

Zerfällt π, dann können wir G als Untergruppe von $\overline{G}$ auffassen. Es folgt $[W, G] = 1$. Also muss G normal in $\overline{G} = W \cdot G$ liegen. $\square$

2.4 Zerfallende Epimorphismen mit halbeinfachem Kern

Wir zeigen zunächst das folgende Lemma.

Lemma 2.4.1. *Sei G halbeinfach. Seien $G_1, \ldots, G_n$ die einfachen Komponenten von G (das sind die minimalen, zusammenhängenden, normalen, abgeschlossenen Untergruppen positiver Dimension von G). Dann gilt:*

1. *$Z(G) = Z(G_1) \cdot \ldots \cdot Z(G_n)$.*
2. *$G_1/Z(G_1) \times \cdots \times G_n/Z(G_n) \to G/Z(G)$, $(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) \mapsto g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \cdot Z(G)$ ist ein Isomorphismus.*
3. *$G/Z(G)$ hat triviales Zentrum.*

Beweis. Eigenschaften von einfachen Komponenten kann man in [Hum, Theorem 27.5] nachlesen. Wir benötigen hier insbesondere, dass $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n$ und dass für $i \neq j$ die Kommutatorgruppe $[G_i, G_j]$ trivial ist.

1) '$\supset$' Sei $1 \leq i \leq n$ beliebig und $g \in Z(G_i)$. Für ein beliebiges $h \in G$ existieren dann $h_j \in G_j$, so dass $h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_n$. Für alle j gilt $[g, h_j] = 1$. Im Fall $j = i$ folgt dies, da $g \in Z(G_i)$. Ist dagegen $j \neq i$, dann folgte es aus $[G_i, G_j] = 1$. Dies zeigt, dass h mit g vertauschbar ist. Es gilt also $g \in Z(G)$.

'$\subseteq$' Sei $g \in Z(G)$. Es exisitieren wieder $g_j \in G_j$, so dass $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$. Sei nun $1 \leq i \leq n$ und $h \in G_i$. Es gilt

$$\begin{aligned} h \cdot g_i &= h \cdot g_{i-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot g_1^{-1} \cdot g \cdot g_n^{-1} \cdot \ldots \cdot g_{i+1}^{-1} \\ &= g_{i-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot g_1^{-1} \cdot g \cdot g_n^{-1} \cdot \ldots \cdot g_{i+1}^{-1} \cdot h \\ &= g_i \cdot h \end{aligned}$$

Hierbei ist h mit $g \in Z(G)$ und mit den g_j $(j \neq i)$ vertauschbar. Wir erhalten also $g_i \in Z(G_i)$.

2) Die Wohldefiniertheit folgt aus der ersten Aussage, die Injektivität aus dem Beweis von '$\subseteq$' in Teil 1. Die Surjektivität ist wegen $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n$ klar.

3) Die Gruppen $G_i/Z(G_i)$ haben ein triviales Zentrum [Hum, Corollary 29.5]. Aussage 2 impliziert, dass sie die einfachen Komponenten der Gruppe $G/Z(G)$ sind. Die Behauptung folgt nun, wenn man Teil 1 auf die Gruppe $G/Z(G)$ anwendet. □

Das Lemma erlaubt es, uns auf zerfallende Epimorphismen mit zentrumsfreiem Kern zu beschränken.

Bemerkung 2.4.2. *Sei $\pi\colon G \twoheadrightarrow G/W$ ein (zerfallender) Epimorphismus mit halbeinfachem Kern W. Dann läßt sich π in den Epimorphismus $G \twoheadrightarrow G/Z(W)$ mit endlichem Kern und den (zerfallenden) Epimorphismus $G/Z(W) \twoheadrightarrow G/W$ mit dem halbeinfachen, zentrumsfreien Kern $W/Z(W)$ zerlegen.*

Beweis. Das Zentrum $Z(W)$ ist eine charakteristische Untergruppe von W. Die Behauptung folgt mit Lemma 2.2.8 und Lemma 2.4.1. □

Bemerkung 2.4.3. *Sei $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ ein zusammenhängender, zerfallender Epimorphismus mit halbeinfachem, zentrumsfreien Kern W. Dann gilt:*

Die Gruppe $\overline{G}$ ist das direkte Produkt von W und dem Zentralisator $C_{\overline{G}}(W)$. Insbesondere ist der Epimorphismus direkt zerfallend.

Beweis. Sofort aus der Voraussetzung erhalten wir $W \cap C_{\overline{G}}(W) = Z(W) = 1$.

Wir betrachten G vermöge eines homomorphen Schnitts als Untergruppe von $\overline{G}$. Dann ist $\overline{G} = W{\cdot}G$. Man rechnet leicht nach, dass der Zentralisator $C_G(W)$ eine normale Untergruppe von G ist. Wir erhalten den injektiven Gruppenhomomorphismus in die (abstrakte) Gruppe $\mathrm{Aut}(W)$ der Automorphismen von W:

$$\begin{aligned} G/C_G(W) &\rightarrow \mathrm{Aut}(W) \\ \overline{g} &\mapsto (w \mapsto gwg^{-1}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Da W halbeinfach ist, hat die Gruppe $\mathrm{Inn}(W)$ der inneren Automorphismen von W endlichen Index in $\mathrm{Aut}(W)$ (siehe [Hum, Theorem 27.4]). Dies impliziert, dass auch die vermöge der Injektion 2.5 gebildeten Gruppe $\mathrm{Inn}(W) \cap G/C_G(W)$ endlichen Index in $G/C_G(W)$ hat. Wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{Inn}(W) \cap G/C_G(W) &= \{\overline{g} \in G/C_G(W) | \exists v \in W\ \forall w \in W\colon gwg^{-1} = vwv^{-1}\} \\ &= \{\overline{g} \in G/C_G(W) | g \in W{\cdot}C_{\overline{G}}(W)\} \\ &= (G \ \cap\ W{\cdot}C_{\overline{G}}(W))/C_G(W) \end{aligned}$$

ist $\mathrm{Inn}(W) \cap G/C_G(W)$ eine abgeschlossene Untergruppe der zusammenhängenden Gruppe $G/C_G(W)$. Es muss also $G/C_G(W) \subseteq \mathrm{Inn}(W)$ gelten.

Ist $g \in G$ beliebig, dann existiert also ein $v \in W$, so dass für alle $w \in W$ die Gleichung $gwg^{-1} = vwv^{-1}$ gilt. Es folgt $v^{-1}g \in C_{\overline{G}}(W)$, g liegt also in $W{\cdot}C_{\overline{G}}(W)$. Man erhält schließlich $\overline{G} = W{\cdot}G = W{\cdot}C_{\overline{G}}(W)$. □

2.5 Frattini–Epimorphismen

Ziel dieses Abschnittes ist der folgende Klassifikationssatz.

Satz 2.5.1. *Sei* $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ *eine exakte Sequenz linearer algebraischer Gruppen. Sei* $\kappa \colon G \twoheadrightarrow G/G^\circ$ *der kanonische Epimorphismus und* $\Phi(G/G^\circ)$ *die Frattinigruppe der endlichen Gruppe* G/G°*. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1. π *ist ein Frattini–Epimorphismus.*

2. $W^\circ \subseteq (R_u(G), R_u(G))$ *und* $\kappa(W) \subseteq \Phi(G/G^\circ)$.

Dabei bezeichnet $(R_u(G), R_u(G))$ die Kommutatorgruppe des unipotenten Radikals von G. Die Definition und einfache Eigenschaften der Frattinigruppe einer endlichen Gruppe kann man in [Hup, III. §3] nachlesen.

Wir zeigen zunächst einige Lemmata.

Lemma 2.5.2. *Sei ein kommutatives Dreieck von Epimorphismen linearer algebraischer Gruppen gegeben.*

$$\begin{tikzcd} & G_2 \arrow[dr, two heads, "\pi_1"] & \\ G_1 \arrow[ur, two heads, "\pi_3"] \arrow[rr, two heads, "\pi_2"] & & G_3 \end{tikzcd}$$

Genau dann ist π_2 *ein Frattini–Epimorphismus, wenn* π_1 *und* π_3 *Frattini–Epimorphismen sind.*

Beweis. Folgt direkt aus Definition 2.2.6. □

Lemma 2.5.3. *Die exakte Sequenz* $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ *mit unipotentem Kern* W *hat genau dann die Frattini-Eigenschaft, wenn* $W \subseteq (R_u(G), R_u(G))$.

Im Fall, dass $W \cap (R_u(G), R_u(G)) = 1$ *ist, zerfällt die Sequenz.*

Beweis. Ist $W \subseteq (R_u(G), R_u(G))$, dann folgt aus [Ko1, Lemma 2], dass π ein Frattini-Epimorphismus ist.

Sei nun umgekehrt $W \nsubseteq (R_u(G), R_u(G))$. Laut [Mos] existiert eine Zerlegung

$$G = R_u(G) \rtimes G_v$$

mit einer vollständig reduziblen Untergruppe G_v von G.

Falls $W = R_u(G)$ gilt, dann zerfällt die Sequenz, d.h. sie hat nicht die Frattini–Eigenschaft. Sei nun $W \lneq R_u(G)$. Aus der bereits bewiesenen Richtung der Bemerkung folgt, dass

$$\lambda \colon R_u(G) \twoheadrightarrow R_u(G)/(R_u(G), R_u(G))$$

ein Frattini–Epimorphismus ist. Die Gruppe $V := R_u(G)/(R_u(G), R_u(G))$ ist unipotent und abelsch, also eine Vektorgruppe. Es gilt

$$0 \lneq \lambda(W) \lneq V.$$

Die erste Ungleichung folgt aus $W \nsubseteq (R_u(G), R_u(G))$. Da λ ein Frattini–Epimorphismus ist, impliziert $W \lneq R_u(G)$ die zweite.

Die Gruppe G_v operiert auf $R_u(G)$, also auch auf dem C-Vektorraum V. Mit W wird auch $\lambda(W)$ von G_v stabilisiert. Da G_v vollständig reduzibel ist, gibt es eine G_v-stabile Untergruppe $0 \lneq U \lneq V$, so dass $V = \lambda(W) \oplus U$.

Mit Hilfe der Frattini–Eigenschaft von λ kann man jetzt nachrechnen, dass $W{\cdot}\lambda^{-1}(U) = R_u(G)$ ist. Da $\lambda^{-1}(U)$ von G_v normalisiert wird, können wir die Untergruppe

$$S := \lambda^{-1}(U) \rtimes G_v$$

von G definieren. Aus Dimensionsgründen gilt $S \lneq G$ (siehe [Hum, §7.4 Prop. B(d)]). Wegen $W{\cdot}S = G$ kann dann π kein Frattini–Epimorphismus sein.

Ist $W \cap (R_u(G), R_u(G)) = 1$, dann ist auch $W \cap \lambda^{-1}(U) = 1$. Dies impliziert $W \cap S = 1$. Es folgt $G = W \rtimes S$, d.h. die Sequenz zerfällt. □

Bemerkung 2.5.4. *Sei G eine lineare algebraische Gruppe die automorph auf dem Torus T operiert (d.h. wenn man die Operation $T \times G \to T$ durch $(t,g) \mapsto t^g$ beschreibt, dann ist für alle $g \in G$ die Abbildung $t \mapsto t^g$ ein Automorphismus von T).*

Ist $S \leq T$ ein G-stabiler Untertorus, dann existiert ein G-stabiler Untertorus $W \leq T$, so dass $T = S \cdot W$ und $S \cap W$ endlich ist.

Beweis. Wegen Satz 1.5.6 existiert eine endliche Untergruppe H von G mit $G = G^\circ H$. Nach [Bor, §8.5 Corollary] existiert ein Untertorus V von T mit $T = S \times V$. Sei $\Theta\colon T \to V$ die Projektion auf V. Wir betrachten den Morphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon T & \to & T \\ t & \mapsto & \prod_{h \in H} \Theta(t^h)^{h^{-1}} \end{array}$$

Wir setzen $W := \varphi(T)$. Da mit T auch W zusammenhängend ist, muss W ein Untertorus von T sein. Wir zeigen nun, dass W G-stabil ist.
W ist H-stabil:

$$\varphi(t)^h = \prod_{f \in H} \Theta(t^f)^{f^{-1}h} = \prod_{h^{-1}f \in H} \Theta((t^h)^{h^{-1}f})^{f^{-1}h} = \varphi(t^h)$$

W ist G°-stabil: Wir bilden $T \rtimes G^\circ$. Aus Bemerkung 2.3.1 folgt dann sogar, dass G° trivial auf T operiert.

Als nächstes zeigen wir, dass $T = S \cdot W$. Sei dazu $t \in T$ beliebig. Da T teilbar ist, existiert ein $\tilde{t} \in T$, so dass $\tilde{t}^{\#H} = t$. Wir erhalten nun

$$t \cdot \varphi(\tilde{t})^{-1} = \prod_{h \in H} \tilde{t}\Theta(\tilde{t}^h)^{-h^{-1}} = \prod_{h \in H} (\tilde{t}^h \Theta(\tilde{t}^h)^{-1})^{h^{-1}} \in S,$$

denn für jedes $h \in H$ liegt $\tilde{t}^h \Theta(\tilde{t}^h)^{-1}$ in S. Wir können also

$$t = t\varphi(\tilde{t})^{-1} \cdot \varphi(\tilde{t}) \in S \cdot W$$

schreiben.

Als letztes bleibt noch die Endlichkeit von $S \cap W$ zu zeigen. Für die Dimension von T erhalten wir einerseits die Gleichung

$$\dim T = \dim W + \dim \mathrm{Kern}\varphi.$$

Da $S \cap W$ der Kern des Produktepimorphismus $S \times W \to S \cdot W$ ist, gilt andererseits

$$\dim T = \dim S + \dim W - \dim S \cap W.$$

Wegen $S \subseteq \mathrm{Kern}\varphi$ folgt aus diesen beiden Gleichungen, dass $\dim S \cap W = 0$. $\square$

Lemma 2.5.5. *Eine exakte Sequenz* $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ *mit nichttrivialem Toruskern besitzt nicht die Frattini–Eigenschaft.*

Beweis. Wir beginnen, indem wir die Gruppe G zerlegen. Es existieren eine endliche Untergruppe H von G und eine reduktive Untergruppe L von G°, so dass

$$\begin{array}{lcll} G & = & G^\circ \cdot H & \text{(Satz 1.5.6)}, \\ G^\circ & = & R_u(G^\circ) \rtimes L & \text{(Levizerlegung, Bemerkung 1.5.5(1))}, \\ L & = & (L,L) \cdot R(L) & \text{mit } R(L) = Z(L)^\circ. \end{array}$$

Nach Bemerkung 1.5.5(2) ist $R(L)$ ein maximaler Torus von $R(G)$. Da W in allen maximalen Tori von $R(G)$ liegt, muss $W \trianglelefteq R(L)$ gelten. Nun sind mit $R(L) \trianglelefteq N_G(L)$ und $W \trianglelefteq N_G(L)$ die Voraussetzungen zu Bemerkung 2.5.4 erfüllt. Diese zeigt die Existenz eines Torus $T \trianglelefteq N_G(L)$ mit $R(L) = T \cdot W$ und $\#(T \cap W) < \infty$. Wir setzen nun

$$S^\circ := R_u(G) \cdot (L,L) \cdot T. \tag{2.6}$$

Da $T \trianglelefteq R(L) = Z(L)^\circ$, ist S° eine Gruppe. Man sieht, dass $(L,L) \cdot T$ eine Leviuntergruppe von S° ist. Weil $(L,L) \cap T$ endlich ist, erhalten wir $\dim S^\circ = \dim G - \dim W$. Jetzt definieren wir

$$S := S^\circ \cdot H$$

und sehen, dass dies eine Gruppe ist, indem wir zeigen, dass S° von H normalisiert wird.

Sei dazu $h \in H$ beliebig, dann ist auch $h^{-1}Lh$ eine Leviuntergruppe von G. Da nach Bemerkung 1.5.5(3) alle Leviuntergruppen von G durch Elemente von $R_u(G)$ konjugiert sind, gibt es ein $u \in R_u(G)$ mit $h^{-1}Lh = uLu^{-1}$. Wir sehen also, dass hu in $N_G(L)$ liegt und alle Gruppen der rechten Seite von Gleichung 2.6 normalisiert, denn $R_u(G)$ ist charakteristisch in G, (L,L) charakteristisch in L und T normal in $N_G(L)$. Da $R_u(G) \subseteq S^\circ$, können wir $h^{-1}S^\circ h = S^\circ$ folgern.

Es gilt $G = S \cdot W$. Da aber aus Dimensionsgründen S eine echte Untergruppe von G ist, kann π kein Frattini–Epimorphismus sein. $\square$

Lemma 2.5.6. *Eine exakte Sequenz* $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ *mit halbeinfachem, nichttrivialem Kern besitzt nicht die Frattini–Eigenschaft.*

Beweis. Sei T ein maximaler Torus von W. Da W halbeinfach ist, gilt $T \neq 1$. Ist $g \in G$ beliebig, dann ist auch $g^{-1}Tg$ ein maximaler Torus von W. Da alle maximalen Tori konjugiert sind, gibt es ein $w \in W$, so dass $w^{-1}g^{-1}Tgw = T$. Wir erhalten $gw \in N_G(T)$.

Dies impliziert $G = N_G(T) \cdot W$. Da W halbeinfach ist, muss aber $N_G(T) \lneq G$ gelten. π kann also kein Frattini–Epimorphismus sein. $\square$

Lemma 2.5.7. *Sei* $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ *eine exakte Sequenz mit endlichem Kern. Sei* $\kappa\colon G \twoheadrightarrow G/G^\circ$ *der kanonische Epimorphismus und* $\Phi(G/G^\circ)$ *die Frattinigruppe der endlichen Gruppe* G/G°*. Dann gilt*

$$\pi \text{ ist ein Frattini–Epimorphismus} \iff \kappa(W) \subseteq \Phi(G/G^\circ).$$

Beweis. '$\Longleftarrow$': Angenommen π wäre kein Frattini–Epimorphismus. Dann existiert eine echte Untergruppe S von G mit $G = W \cdot S$. Da aber aus Dimensionsgründen

$$\mathrm{Kern}\kappa = G^\circ = S^\circ \subseteq S$$

folgt, erhalten wir $\kappa(S) \lneq G/G^\circ$, denn $\kappa(S) = G/G^\circ$ würde $G = S$ implizieren. Wegen $\kappa(W)\cdot\kappa(S) = G/G^\circ$ erhält man mit Satz [Hup, III.3.2] den Widerspruch $\kappa(W) \nsubseteq \Phi(G/G^\circ)$.

'$\Longrightarrow$': Angenommen es würde $\kappa(W) \nsubseteq \Phi(G/G^\circ)$ gelten. Dann zeigt Satz [Hup, III.3.2] die Existenz einer Untergruppe $Z \lneq G/G^\circ$ mit $\kappa(W)Z = G/G^\circ$. Wir setzen $S := \kappa^{-1}(Z)$. Da $\mathrm{Kern}\kappa \leq S \leq SW$ und $\kappa(SW) = G/G^\circ$, muß $S \cdot W = G$ gelten. Weil aber S eine echte Untergruppe von G ist, kann π kein Frattini–Epimorphismus sein. Widerspruch! □

Beweis von Satz 2.5.1. Da W° eine charakteristische Untergruppe von W ist, gilt $W^\circ \trianglelefteq G$ und wir erhalten ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} & G/W^\circ \arrow[dr, two heads, "\varepsilon_2"] & \\ G \arrow[ur, two heads, "\varepsilon_1"] \arrow[rr, two heads, "\pi"] & & G/W. \end{tikzcd}$$

Mit Lemma 2.5.2 folgt, dass π genau dann ein Frattini–Epimorphismus ist, wenn ε_1 und ε_2 Frattini–Epimorphismen sind.

'2) $\Longrightarrow$ 1)': Aus $W^\circ \subseteq (R_u(G), R_u(G))$ folgt mit Lemma 2.5.3, dass ε_1 ein Frattini–Epimorphismus ist.

Die Zusammenhangskomponente der Eins von G/W° ist G°/W°. Mit $\tilde{\kappa}$ bezeichnen wir den kanonischen Epimorphismus von G/W° in die Gruppe $G/G^\circ \cong (G/W^\circ)/(G^\circ/W^\circ)$. Wir erhalten das kommutative Diagram

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, two heads, "\varepsilon_1"'] \arrow[dr, two heads, "\kappa"] & \\ G/W^\circ \arrow[rr, two heads, "\tilde{\kappa}"] & & G/G^\circ. \end{tikzcd}$$

Es gilt $\tilde{\kappa}(W/W^\circ) = \kappa(W) \subseteq \Phi(G/G^\circ)$ und Lemma 2.5.7 impliziert, dass auch ε_2 ein Frattini–Epimorphismus ist.

'1) $\Longrightarrow$ 2)': Da ε_2 ein Frattini–Epimorphismus ist, zeigt Lemma 2.5.7, dass $\kappa(W) = \tilde{\kappa}(W/W^\circ)$ eine Untergruppe von $\Phi(G/G^\circ)$ ist.

Als nächstes nutzen wir aus, dass ε_1 ein Frattini-Epimorphismus ist. Da $R(W^\circ)$ eine charakteristische Untergruppe von W° ist, kann man ε_1 mit Lemma 2.2.8 zerlegen. Lemma 2.5.2 zeigt dann, dass die Sequenz

$$1 \to W^\circ/R(W^\circ) \to G/R(W^\circ) \to G/W^\circ \to 1$$

die Frattini-Eigenschaft hat. Nach Lemma 2.5.6 kann dies aber nur sein, wenn $W^\circ/R(W^\circ)$ trivial ist. Wir haben die Auflösbarkeit von W° gezeigt.

Wenn wir mit $R_u(W^\circ)$ analog verfahren, sehen wir, dass auch die Sequenz

$$1 \to W^\circ/R_u(W^\circ) \to G/R_u(W^\circ) \to G/W^\circ \to 1$$

die Frattini–Eigenschaft besitzt. Da W° auflösbar ist, muss $W^\circ/R_u(W^\circ)$ ein Torus sein. Da dieser nach Lemma 2.5.5 trivial ist, muss W° sogar unipotent sein. Schliesslich liefert Lemma 2.5.3 die Inklusion $W^\circ \subseteq (R_u(G), R_u(G))$. $\square$

2.6 Zerlegung von zusammenhängenden Epimorphismen

Wir führen folgende Schreibweisen zur Abkürzung ein.

Definition 2.6.1. *Wir betrachten hier nur zusammenhängende Epimorphismen.*

1. *Sei W eine lineare algebraische Gruppe. Wir nennen einen* **z***erfallenden, bzw.* **d***irekt zerfallenden Epimorphismus mit Kern W einen $(\mathbf{z}_W)$–, bzw. $(\mathbf{d}_W)$–***Epimorphismus***.*

2. *Einen* **d***irekt zerfallenden Epimorphismus mit* **e***infachem Kern bezeichnen wir als $(\mathbf{d}_e)$–***Epimorphismus***.*

3. *Einen* **z***erfallenden Epimorphismus mit* **m***inimalem,* **u***nipotentem Kern nennen wir einen $(\mathbf{z}_{mu})$–***Epimorphismus***.*

4. *Für* **F***rattini–Epimorphismus schreiben wir auch $(\mathbf{F})$–***Epimorphismus***.*

Satz 2.6.2. *Sei $\pi\colon \overline{G} \to G$ ein zusammenhängender Epimorphismus. Es gilt:*

1. *Man kann π in $(\mathbf{F})$– , $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$– , $(\mathbf{d}_e)$– und $(\mathbf{z}_{mu})$–Epimorphismen zerlegen.*

2. *Ist der Kern von π halbeinfach, dann kann man π in $(\mathbf{F})$– und $(\mathbf{d}_e)$–Epimorphismen zerlegen.*

3. *Ist der Kern von π auflösbar, dann kann man π in $(\mathbf{F})$– , $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$– und $(\mathbf{z}_{mu})$–Epimorphismen zerlegen.*

4. *Ist entweder $\overline{G}$ nilpotent oder π zentral (d.h. $\mathrm{Kern}\pi \subseteq Z(\overline{G})$), dann kann man π in $(\mathbf{F})$–, $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$– und $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_a})$–Epimorphismen zerlegen.*

5. *Ist $\overline{G}$ auflösbar, dann kann man π in $(\mathbf{F})$–, $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$– und $(\mathbf{z}_{\mathbf{G}_a})$–Epimorphismen zerlegen.*

Beweis. Zu 2. Wir machen eine Induktion nach der Anzahl der einfachen Komponenten des Kerns. Zuerst zerlegen wir mit Lemma 2.2.8 π in einen $(\mathbf{F})$–Epimorphismus und einen zerfallenden Epimorphismus mit halbeinfachem Kern. Letzteren zerlegen wir mit Bemerkung 2.4.2 in einen $(\mathbf{F})$–Epimorphismus und einen nach Bemerkung 2.4.3 direkt zerfallenden Epimorphismus mit halbeinfachem, zentrumsfreien Kern. Ist dieser Kern nicht einfach, dann kann man letzteren wegen des Struktursatzes für halbeinfache Gruppen [Hum, Theorem 27.5] in Epimorphismen zerlegen, deren halbeinfache Kerne echt kleinere Dimension haben.

Zu 3. Dank der Schritte 3, 4 und 5 im Beweis von Bemerkung 2.2.7 bleibt nur noch zu zeigen, dass ein Epimorphismus mit Toruskern in $(\mathbf{F})$– und $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$–Epimorphismen zerlegt werden kann. Nach Bemerkung 2.3.2 ist der Epimorphismus π zentral und wir können ihn induktiv in Epimorphismen mit Kern $\mathbf{G}_m$ zerlegen. Mit Lemma 2.2.9 zerlegen wir diese weiter, in $(\mathbf{F})$– und $(\mathbf{z}_{\mathbf{G}_m})$–Epimorphismen. Nach Bemerkung 2.3.2 sind die letzteren auch $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$-Epimorphismen.

Zu 1. Dies folgt aus den Schritten 1 und 2 im Beweis von Bemerkung 2.2.7 und den beiden bereits bewiesenen Aussagen.

Zu 5. Wegen Aussage 3 genügt es zu zeigen, dass der nichttriviale Kern W eines $(\mathbf{z}_{mu})$–Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ mit auflösbarem $\overline{G}$ gerade die additive Gruppe ist. Da W minimal ist, muss $[W, W] = 1$ gelten, d.h. W ist eine Vektorgruppe. Mit $\overline{G}$ ist auch G zusammenhängend und auflösbar. Die Minimalität von W impliziert, dass G irreduzibel auf dem C-Vektorraum W operiert. Aus dem Lie-Kolchin Theorem [Hum, Theorem 17.6] folgt dann, dass $W = \mathbf{G}_a$ ist.

Zu 4. In beiden Fällen ist der Kern von π auflösbar. Man sieht leicht, dass sich die beiden Eigenschaften auf Zerlegungen von π übertragen. Wegen 3 reicht es also wenn wir zeigen, dass ein $(\mathbf{z}_{mu})$–Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ mit nichttrivialem Kern W sogar ein $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_a})$–Epimorphismus ist.

Man sieht dies sofort, wenn π ein zentraler $(\mathbf{z}_{mu})$–Epimorphismus ist. Denn jede echte, nichttriviale, abgeschlossene Untergruppe von W würde der Minimalität widersprechen.

Ist $\overline{G}$ nilpotent, dann gilt $[\overline{G}, \overline{G}] = [R_u(\overline{G}), R_u(\overline{G})]$ (siehe [Hum, Proposition 19.2]). Wir betrachten die Gruppe $W \cap [\overline{G}, \overline{G}]$. Wäre $W \subseteq [\overline{G}, \overline{G}]$, dann würde Satz 2.5.1 zeigen, dass π ein Frattini–Epimorphismus ist. Dies widerspricht der Voraussetzung $W \neq 1$.

Die Minimalität von W impliziert also, dass $W \cap [\overline{G}, \overline{G}] = 1$. Wir sehen, dass π zentral ist und somit die Behauptung aus dem bereits Bewiesenen folgt. $\square$

2.7 Zerlegung von nicht zusammenhängenden Epimorphismen

2.7.1 H-semidirekte Epimorphismen

Definition 2.7.1. *Sei H eine endliche Gruppe.*

1. *Wir nennen eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe G eine* H**-Gruppe***, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $H \to \mathrm{Aut}G$ gibt.*

2. *Seien $\overline{G}$ und G H-Gruppen. Ein Morphismus $\overline{G} \to G$ linearer algebraischer Gruppen, der mit der Operation von H vertauschbar ist, nennen wir einen* H**-Morphismus***.*

3. *Wir sagen ein H-Epimorphismus sei* H**-zerfallend***, wenn ein homomorpher Schnitt existiert, der ein H-Morphismus ist.*

Ist G eine H-Gruppe, dann können wir immer das semidirekte Produkt $G \rtimes H$ bilden. Ein H-Epimorphismus $\pi^\circ\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$, läßt sich dann auf eindeutige Weise so zu einem Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ von semidirekten Produkten fortsetzen, dass $\pi|_H$ die Identität auf H ist. Solchen Epimorphismen geben wir einen eigenen Namen:

Definition 2.7.2. *Seien zwei H-Gruppen $\overline{G}$ und G gegeben. Ein Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ heißt H-**semidirekt**, wenn $\pi|_H$ die Identität auf H ist. Man nennt π H-zerfallend, wenn ein homomorpher Schnitt existiert, der die Identität auf H ist.*

Umgekehrt ist die Restriktion $\pi^\circ := \pi|_{\overline{G}}$ eines H-semidirekten Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ wieder ein H-Epimorphismus, also insbesondere zusammenhängend. Man beachte, dass π genau dann H-zerfallend ist, wenn π° H-zerfallend ist. Satz 2.5.1 zeigt, dass π auch genau dann ein Frattini–Epimorphismus ist, wenn dies für π° gilt.

Ist G eine H-Gruppe und V eine abgeschlossene Untergruppe von G, welche normal in $G \rtimes H$ liegt, dann ist auch G/V eine H-Gruppe. Wir erhalten eine H-semidirekte Version von Lemma 2.2.8.

Lemma 2.7.3. *Sei $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ ein (H-zerfallender) H-semidirekter Epimorphismus mit Kern W. Ist $V \leq W$ normal in $\overline{G} \rtimes H$, dann läßt sich π in den H-semidirekten Epimorphismus $\overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow \overline{G}/V \rtimes H$ und den (H-zerfallenden) H-semidirekten Epimorphismus $\overline{G}/V \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ zerlegen.*

Als nächstes notieren wir H-semidirekte Varianten der Bemerkungen 2.3.2 und 2.4.3.

Bemerkung 2.7.4. *Sei $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ ein H-zerfallender, H-semidirekter Epimorphismus mit Toruskern W. Dann zerfällt π sogar direkt.*

Beweis. Die Bemerkung folgt, wenn wir Bemerkung 2.3.2 auf den zusammenhängenden H-Epimorphismus $\pi|_{\overline{G}}$ anwenden. □

Bemerkung 2.7.5. *Sei $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ ein H-zerfallender, H-semidirekter Epimorphismus mit halbeinfachem, zentrumsfreien Kern W. Dann stabilisiert H den Zentralisator $C_{\overline{G}}(W)$, es gilt $\overline{G} = W \times C_{\overline{G}}(W)$ und π zerfällt direkt.*

Beweis. Sei $h \in H$ und $g \in C_{\overline{G}}(W)$ beliebig, dann gilt für alle $w \in W$

$$w^{-1}(h^{-1}gh)w = h^{-1}(hwh^{-1})^{-1}g(hwh^{-1})h = h^{-1}gh,$$

denn $hwh^{-1} \in W$ kommutiert mit g. Es folgt also $h^{-1}gh \in C_{\overline{G}}(W)$. Der Rest der Behauptung folgt aus Bemerkung 2.4.3. □

2.7.2 Zerlegung in H-semidirekte Epimorphismen

Der Vorteil der H-semidirekten Epimorphismen ist, dass die Lösung von zugehörigen Einbettungsproblemen sich ähnlich angehen läßt wie bei zusammenhängenden Epimorphismen (siehe in den nächsten beiden Kapiteln). Wir erhalten den folgenden Zerlegungssatz.

Satz 2.7.6. *Sei $1 \to W \to G \xrightarrow{\pi} G/W \to 1$ eine exakte Sequenz linearer algebraischer Gruppen. Es existiert eine Zerlegung von π in Epimorphismen, die einem der folgenden Typen angehören:*

1. *Epimorphismen mit endlichem Kern.*
2. *Frattini–Epimorphismen, welche H-semidirekt bezüglich einer endlichen Gruppe H sind.*

3. *Epimorphismen mit minimalem, unipotentem Kern, welche H-semidirekt und H-zerfallend bezüglich einer endlichen Gruppe H sind.*
4. *Epimorphismen mit Toruskern, welche H-semidirekt und H-zerfallend bezüglich einer endlichen Gruppe H sind.*
5. *Epimorphismen mit halbeinfachem Kern, welche H-semidirekt und H-zerfallend bezüglich einer endlichen Gruppe H sind.*

Wir gliedern den Beweis in drei Lemmata.

Lemma 2.7.7. *Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Es existiert eine endliche Untergruppe H von G, mit $G = G^\circ \cdot H$, so dass $\mu\colon G^\circ \rtimes H \to G$ mit $(g,h) \mapsto g \cdot h$ ein Frattini–Epimorphismus ist.*

Beweis. Satz 1.5.6 zeigt die Existenz einer endlichen Untergruppe H von G mit $G = G^\circ \cdot H$. Wir können annehmen, dass H minimal mit dieser Eigenschaft ist.

Dann ist $H \twoheadrightarrow H/H \cap G^\circ$ ein Frattini–Epimorphismus. Denn wäre W eine echte Untergruppe von H mit $W \cdot (H \cap G^\circ) = H$, würde man $G = W \cdot G^\circ$ erhalten, was der Minimalität von H widerspricht.

Satz 2.5.1 angewendet auf den Epimorphismus $H \twoheadrightarrow H/H \cap G^\circ$ zeigt dann, dass $H \cap G^\circ$ in der Frattinigruppe $\Phi(H)$ von H liegt.

Wir wollen jetzt Satz 2.5.1 auch auf μ anwenden. Der kanonische Epimorphismus κ ist hier die Projektion $G^\circ \rtimes H \twoheadrightarrow H$. Es gilt

$$\mathrm{Kern}\mu = \{(g^{-1}, g) | g \in H \cap G^\circ\}$$

und wir erhalten $\kappa(\mathrm{Kern}\mu) = H \cap G^\circ \leq \Phi(H)$.

μ ist also ein Frattini–Epimorphismus. ☐

Lemma 2.7.8. *Sei der zerfallende Epimorphismus $\pi\colon W \rtimes G \twoheadrightarrow G$ mit zusammenhängendem Kern W gegeben. Es existiert eine endliche Untergruppe H von G, so dass π in zwei Epimorphismen zerlegt werden kann, nämlich in einen Frattini–Epimorphismus μ mit endlichem Kern und einen H-zerfallenden, H-semidirekten Epimorphismus $\tilde{\pi}$ mit Kern W.*

Beweis. Wir wählen eine endliche Untergruppe H von G mit den Eigenschaften aus Lemma 2.7.7 und erhalten den Frattini–Epimorphimus $\mu\colon G^\circ \rtimes H \twoheadrightarrow G$. Da H durch Konjugation auf W und G° operiert, sieht man, dass

$$\pi|_{W \rtimes G^\circ} : W \rtimes G^\circ \twoheadrightarrow G^\circ$$

ein H-Epimorphismus ist. Wir erhalten den zugehörigen H-semidirekten, H-zerfallenden Epimorphismus $\tilde{\pi}\colon (W \rtimes G^\circ) \rtimes H \twoheadrightarrow G^\circ \rtimes H$. Definieren wir nun noch den Epimorphismus

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}, \mu)\colon (W \rtimes G^\circ) \rtimes H &\to W \rtimes G, \\ ((w,g),h) &\mapsto (w, g \cdot h), \end{aligned}$$

so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \rtimes G \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ (W \rtimes G^\circ) \rtimes H \arrow[u, two heads, "(\mathrm{id},\mu)"] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] & G^\circ \rtimes H, \arrow[u, two heads, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

an dem wir die Behauptung ablesen können. ☐

Lemma 2.7.9. *Sei der Frattini–Epimorphimus $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ mit zusammenhängendem Kern W gegeben. Es existiert eine endliche Untergruppe H von $\overline{G}$, so dass π in zwei Epimorphismen zerlegt werden kann, nämlich in einen Frattini–Epimorphismus mit endlichem Kern und einen H-semidirekten Frattini–Epimorphismus mit Kern W.*

Beweis. Wir wählen eine endliche Untergruppe H von $\overline{G}$ mit den Eigenschaften aus Lemma 2.7.7 und erhalten den Frattini–Epimorphimus $\mu\colon \overline{G}^{\circ} \rtimes H \twoheadrightarrow \overline{G}$. Da $\pi(\overline{G}^{\circ}) = G^{\circ}$, können wir G° durch die Festsetzung $h \cdot \pi(g) := \pi(hgh^{-1})$ zu einer H-Gruppe machen. Die Restriktion $\pi|_{\overline{G}^{\circ}}$ ist dann ein H-Epimorphismus. Folglich wird ein H-semidirekter Epimorphismus $\tilde{\pi}\colon \overline{G}^{\circ} \rtimes H \twoheadrightarrow G^{\circ} \rtimes H$ induziert. Wir definieren nun den Epimorphismus $\tilde{\mu}\colon G^{\circ} \rtimes H \twoheadrightarrow G$ durch $\tilde{\mu}(g,h) := g \cdot \pi(h)$ und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] & \overline{G} \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ W \arrow[r, hook] & \overline{G}^{\circ} \rtimes H \arrow[u, two heads, "\mu"] \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] & G^{\circ} \rtimes H. \arrow[u, two heads, "\tilde{\mu}"'] \end{tikzcd}$$

Mit π und μ ist auch $\pi \circ \mu = \tilde{\mu} \circ \tilde{\pi}$ ein Frattini–Epimorphismus und damit auch $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\pi}$ (Lemma 2.5.2). □

Beweis von Satz 2.7.6. Die Aussage folgt sofort aus den letzten beiden Lemmata und Bemerkung 2.2.7. □

2.7.3 H-semidirekte, H-zerfallende Epimorphismen mit unipotentem Kern

Definition 2.7.10. *Wir sagen eine H-Gruppe G ist* **levistabil**, *wenn eine Leviuntergruppe von G existiert, die von H stabilisiert wird.*

Ein H-semidirekter Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ heißt **levistabil**, *wenn $\overline{G}$ levistabil ist.*

In Lemma 2.7.7 kann die endliche Gruppe H so gewählt werden, dass $G^{\circ} \rtimes H$ levistabil ist. Wegen [Mos] existiert nämlich eine Zerlegung $G = R_u(G) \rtimes G_v$ mit einer vollständig reduziblen Untergruppe G_v von G. Nach Satz 1.5.6 existiert eine endliche Untergruppe H von G_v mit $G_v = G_v^{\circ} \cdot H$. Man sieht, dass G_v° eine von H normalisierte Leviuntergruppe von G° ist und dass $G = G^{\circ} \cdot H$ gilt.

Bemerkung 2.7.11. *Ist in Lemma 2.7.8 der Kern W unipotent, dann kann man H so wählen, dass $\tilde{\pi}$ levistabil ist.*

Beweis. Direkt aus der Definition folgt, dass eine Leviuntergruppe von G° auch eine Leviuntergruppe von $W \rtimes G^{\circ}$ ist. □

Lemma 2.7.12. *Sei $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ ein H-semidirekter, levistabiler Epimorphismus mit unipotentem Kern W. Dann gilt:*

1. *G ist levistabil.*
2. *Ist $W \cap (R_u(\overline{G}), R_u(\overline{G})) = 1$, dann ist π H-zerfallend.*

Beweis. Sei L eine von H normalisierte Leviuntergruppe von $\overline{G}$.

Für die erste Aussage rechnet man nach, dass $\pi(L)$ eine von H normalisierte Leviuntergruppe von G ist.

Um die zweite Aussage zu erhalten benutzen wir den Beweis von Lemma 2.5.3. Da $L \rtimes H$ vollständig reduzibel ist, können wir dort $G_v := L \rtimes H$ setzen. Der Beweis zeigt dann, dass π H-zerfallend ist. □

Bemerkung 2.7.13. *Ein H-semidirekter, H-zerfallender, levistabiler Epimorphismus mit unipotentem Kern ist zerlegbar in H-semidirekte Frattini–Epimorphismen und in H-semidirekte, H-zerfallende Epimorphismen mit minimalem, unipotentem Kern.*

Beweis. Wir machen eine Induktion nach der Dimension des Kerns. Sei der H-semidirekte, H-zerfallende, levistabile Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ gegeben, dessen unipotenter Kern U nicht minimal ist. Wir betrachten die normale Untergruppe $W := U \cap (R_u(\overline{G}), R_u(\overline{G}))$ von $\overline{G}$ und unterscheiden drei Fälle.

Ist $W = U$, dann ist π nach Satz 2.5.1 ein Frattini–Epimorphismus.

Ist $1 \subsetneq W \subsetneq U$, dann zerlegt man π mit Lemma 2.7.3 in den H-semidirekten Frattini–Epimorphismus $\overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow \overline{G}/W \rtimes H$ mit Kern W und den levistabilen, H-zerfallenden (wegen Lemma 2.7.12), H-semidirekten Epimorphismus

$$\overline{G}/W \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H.$$

Der Fall $W = 1$. Es existiert eine nichttriviale, abgeschlossene Untergruppe V von U, welche normal in $\overline{G} \rtimes H$ liegt. Zerlegen wir π mit Lemma 2.7.3, so erhalten wir die H-zerfallenden, levistabilen Epimorphismen $\overline{G}/V \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ und $\overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow \overline{G}/V \rtimes H$. Der zweite Epimorphimus ist H-zerfallend nach Lemma 2.7.12. □

Kapitel 3

Zusammenhängende Einbettungsprobleme

Sei wieder K ein Differentialkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper $C \neq K$ der Charakteristik 0. Alle linearen algebraischen Gruppen seien über C definiert.

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Liealgebra einer linearen algebraischen Gruppe zu beschreiben. Wir wählen im ersten Abschnitt eine Darstellung, in der die Elemente der Liealgebra Matrizen sind. Im Anschluss widmen wir uns dann solchen Picard-Vessiot-Erweiterungen, die durch eine Matrix aus der Liealgebra der zugehörigen Differentialgaloisgruppe definiert werden.

3.1 Liealgebren

Notationen. Sei F eine Körpererweiterung von C. Wir setzen $F[\mathrm{GL}_n] := F[X_{ij}, 1/\det(X_{ij})]$. Ist W eine Teilmenge von $\mathrm{GL}_n(K)$, dann bezeichnen wir mit $I_{W,F}$ das Ideal $\{f \in F[\mathrm{GL}_n] \colon f(W) = 0\} \leq F[\mathrm{GL}_n]$.
Für eine lineare algebraische Gruppe $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$ führen wir die abkürzende Bezeichnungsweise $I_G := I_{G,C} \leq C[\mathrm{GL}_n]$ ein.

Die Gruppe $G(F)$ der F-rationalen Punkte läßt sich dann durch die Menge $\{g \in \mathrm{GL}_n(F) | \forall f \in I_G \colon f(g) = 0\}$ ausdrücken. Insbesondere ist $G(C) = G$.

Zur Beschreibung der F-Liealgebra definieren wir die beiden folgenden Funktionen (hierbei ist $A = (a_{ij})$; der Operator $\frac{\delta}{\delta X_{ij}}(1)$ bezeichnet die partielle Ableitung nach X_{ij} und anschließende Auswertung in der Einheitsmatrix):

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{B}_n^F \colon M_n(F) & \to & \mathrm{Abb}(C[\mathrm{GL}_n], F) & \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \frac{\delta}{\delta X_{ij}}(1) & \\ & \text{und} & & \\ \mathfrak{D}_n^F \colon M_n(F) & \to & \mathrm{Abb}(C[\mathrm{GL}_n], F[\mathrm{GL}_n]) & \\ A & \mapsto & \mathfrak{D}_n^F(A) & \mathfrak{D}_n^F(A)(f)(g) := \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\delta f(Xg)}{\delta X_{ij}}(1) \end{array}$$

(wobei $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ und $f \in C[\mathrm{GL}_n]$).

Die Elemente im Bild von $\mathfrak{B}_n^F$ und $\mathfrak{D}_n^F$ sind C-Derivationen im Sinne von [Bor, AG §15].

Die Liealgebra $\mathfrak{g} \leq M_n(C)$ einer linearen algebraischen Gruppe $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$ kann nun durch die Mengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \{A \in M_n(C) | \mathfrak{B}_n^C(A) I_G = 0\} \\ &= \{A \in M_n(C) | \mathfrak{D}_n^C(A) I_G \subseteq I_G\} \end{aligned}$$

beschrieben werden. Diese Darstellungen sind gerade die Koordinatenversionen von [Bor, Proposition I.3.8].

Analog läßt sich die F-Liealgebra $\mathfrak{g}(F) := \mathfrak{g} \otimes_C F \leq M_n(F)$ durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(F) &= \{A \in M_n(F) | \mathfrak{B}_n^F(A) I_G = 0\} && (3.1) \\ &= \{A \in M_n(F) | \mathfrak{D}_n^F(A) I_G \subseteq I_{G,F}\} && (3.2) \end{aligned}$$

charakterisieren.

Ist $\overline{G} \leq \mathrm{GL}_m(C)$ eine weitere lineare algebraische Gruppe mit F-Liealgebra $\overline{\mathfrak{g}}(F) \leq M_m(F)$, dann gehört zu jedem Morphismus $\pi \colon \overline{G} \to G$ auch ein F-Liealgebrahomomorphismus $d\pi \colon \overline{\mathfrak{g}}(F) \to \mathfrak{g}(F)$. Beschreibt man π durch die Matrix $(\pi_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $\pi_{ij} \in C[\overline{G}]$, dann gilt

$$d\pi(B) = \mathfrak{B}_m^F(B)(\pi) \qquad (3.3)$$

für alle $B \in \overline{\mathfrak{g}}(F)$. Hierbei wendet man $\mathfrak{B}_m^F(B)$ auf die Koeffizienten von π an, was wegen $\mathfrak{B}_m^F(B)(I_{\overline{G}}) = 0$ wohldefiniert ist.

Ist $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$ eine lineare algebraische Gruppe, dann kann man aufgrund der obenstehenden Charakterisierung jedes Element A der K-Liealgebra $\mathfrak{g}(K)$ in eindeutiger Weise als Matrix aus $M_n(K)$ auffassen. Insbesondere existiert also eine durch A definierte PVE N/K.

Eine andere rationale Darstellung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_m(C)$, führt zu einer anderen Matrixdarstellung von A. Bemerkung 3.2.6 (angewendet auf $\mathrm{id} \colon G \xrightarrow{=} G$) wird aber zeigen, dass diese eine PVE definiert, die K-isomorph zu N ist.

Bemerkung 3.1.1. *Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$ eine lineare algebraische Gruppe mit K-Liealgebra $\mathfrak{g}(K) \leq M_n(K)$ und $A \in M_n(K)$. Mit R_A bezeichnen wir den Ring $K[X_{ij}, 1/\det]$ mit der durch $X' = AX$ definierten Derivation. Dann gilt:*

$$I_{G,K} \leq R_A \text{ ist ein Differentialideal} \iff A \in \mathfrak{g}(K).$$

Beweis. Wir bezeichnen mit δ_A die Derivation auf R_A und zeigen zuerst, dass δ_A und $\mathfrak{D}_n^K(A)$ auf $C[X_{ij}, 1/\det]$ identisch sind. Da beide Abbildungen der gleichen Produktformel genügen, müssen wir diese Gleichheit nur auf den Erzeugern von $C[X_{ij}, 1/\det]$ nachrechnen. Sei also $f := X_{st}$ und $g \in \mathrm{GL}_n(K)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_n^K(A)(f)(g) &= \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\delta f(Xg)}{\delta X_{ij}}(1) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\delta(\sum_l X_{sl} g_{lt})}{\delta X_{ij}}(1) \\ &= \sum_j a_{sj} g_{jt} = (\delta_A f)(g). \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass aus $\delta_A I_G \subseteq I_{G,K}$ auch $\delta_A I_{G,K} \subseteq I_{G,K}$ folgt. Ist $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung δ von δ_A auf $\overline{K}[\mathrm{GL}_n]$. Da $I_{G,K} \subseteq < I_G >_{\overline{K}[\mathrm{GL}_n]}$, kann man ein $f \in I_{G,K}$ als endliche Summe $\sum f_i h_i$ schreiben, wobei die f_i in I_G und die h_i in $\overline{K}[\mathrm{GL}_n]$ liegen. Nach Voraussetzung ist $\delta_A(f_i) \in I_{G,K}$ und wir erhalten für alle $g \in G$ die Gleichung

$$(\delta_A f)(g) = \sum (\delta_A(f_i)(g) h_i(g) + f_i(g)\delta(h_i)(g)) = 0.$$

Es folgt $\delta_A f \in I_{G,K}$.

Die Matrix A liegt wegen Gleichung 3.2 genau dann in $\mathfrak{g}(K)$, wenn $\mathfrak{D}(A) I_G \subseteq I_{G,K}$. Nach dem oben gezeigten ist dies äquivalent zu $\delta_A I_G \subseteq I_{G,K}$, was wiederum zu $\delta_A I_{G,K} \subseteq I_{G,K}$ äquivalent ist. Letzteres heißt gerade, dass $I_{G,K}$ ein Differentialideal von R_A ist. $\square$

Lemma 3.1.2. *Sei $f \in K[X_{ij}, 1/\det]$ und $U, V \in \mathrm{GL}_n(K)$, dann gilt:*

$$\frac{\delta f(UXV)}{\delta X_{ij}}(1) = \sum_{l,k} u_{li} \frac{\delta f}{\delta X_{lk}}(UV) v_{jk}. \tag{3.4}$$

Beweis. Es genügt, die Gleichung für die K-Erzeuger von $K[X_{ij}, 1/\det]$ nachzuprüfen, da mit f_1 und f_2 auch $f_1 + f_2$, $-f_1$, $f_1 f_2$ und f_1^{-1} die Gleichung 3.4 erfüllen. Sei $f = X_{st}$, dann gilt:

$$\frac{\delta f(UXV)}{\delta X_{ij}}(1) = \frac{\delta(\sum_{lm} u_{sl} X_{lm} v_{mt})}{\delta X_{ij}}(1) = u_{si} v_{jt} = \sum_{l,k} u_{li} \frac{\delta f}{\delta X_{lk}}(UV) v_{jk}.$$

$\square$

3.2 Effektive PVE

Definition 3.2.1. *Sei N/K eine PVE mit Differentialgaloisgruppe G. Bezeichne $\mathfrak{g}(K)$ die K-Liealgebra von G. Die PVE N/K heißt* **effektiv***, wenn sie durch eine Matrix $A \in \mathfrak{g}(K)$ definiert wird. In diesem Fall sagen wir auch, G sei durch die Matrix A* **effektiv realisiert**.

Bemerkung 3.2.2. *Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$, $A \in \mathfrak{g}(K)$ und N/K eine durch A definierte PVE. Dann gelten:*

1. *Es existiert eine Fundamentalmatrix $Z \in G(N)$ von A.*
2. *Die Fundamentalmatrix $Z \in G(N)$ definiert einen Differentialmonomorphismus $\iota_Z \colon \mathrm{Gal}(N/K) \hookrightarrow G$.*
3. *Sei $\tilde{N}/K$ eine weitere durch A definierte PVE und $\varphi\colon N \xrightarrow{\cong} \tilde{N}$ ein K–Differentialisomorphismus. Ist $Z \in G(N)$ eine Fundamentalmatrix von A, dann gilt dies auch für $\varphi(Z) \in G(\tilde{N})$.*
4. *Sind $Z, Y \in G(N)$ Fundamentalmatrizen von A, dann existiert ein Matrix $W \in G$ mit $Y = ZW$ und ein innerer Automorphismus τ von G, so dass $\iota_Z = \tau \circ \iota_Y$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die dritte Aussage. Sei $f \in I_G$ beliebig. Dann gilt $f(\varphi(Z)) = \varphi(f(Z)) = 0$, denn die Koeffizienten von f liegen in $C \subseteq K$. Also liegt $\varphi(Z)$ in $G(\tilde{N})$. Der Rest der Aussage folgt aus der Gleichung

$$\varphi(Z)' = \varphi(Z') = \varphi(AZ) = A\varphi(Z).$$

Die zweite Aussage folgt aus der dritten, wenn man dort $\tilde{N} := N$ setzt (der Monomorphismus ι_Z wird in Definition 1.4.2 erklärt).

Zum Beweis der ersten Aussage verfeinern wir die Konstruktion nach Definition 1.3.1. Sei R_A wieder die K-Algebra $K[X_{ij}, 1/\det]$ mit der durch $X' = AX$ definierten Derivation.

Da $I_{G,K}$ nach Bemerkung 3.1.1 ein Differentialideal in R_A ist, können wir ein maximales Differentialideal $\mathfrak{m}$ wählen, welches $I_{G,K}$ umfasst. Wir erhalten dann eine durch A definierte PVE $\tilde{N} := \mathrm{Quot}(R_A/\mathfrak{m})$ von K und eine Fundamentalmatrix $\tilde{Z} := (X_{ij}\mathfrak{m})$.

Sei nun wieder $f \in I_G$ beliebig. Dann gilt $f \in \mathfrak{m}$ und wir erhalten

$$f(\tilde{Z}) = f(X_{ij}\mathfrak{m}) = f(X_{ij})\mathfrak{m} = 0. \tag{3.5}$$

Dies impliziert $\tilde{Z} \in G(\tilde{N})$ und die Behauptung folgt aus der dritten Aussage.

Zu Aussage 4: Es existiert eine Matrix $W \in \mathrm{GL}_n(C)$ mit $Z = YW$. Man erkennt, dass $W = Y^{-1}Z$ in $G(N) \cap \mathrm{GL}_n(C) = G$ liegt. Definiert man jetzt τ durch $\tau(g) := W^{-1}gW$ für alle $g \in G$, dann kann man $\iota_Z = \tau \circ \iota_Y$ nachrechnen. □

Korollar 3.2.3. *Die Differentialgaloisgruppe einer effektiven PVE ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass man in Aussage 1 von Bemerkung 3.2.2 sogar $Z \in G^\circ(N)$ wählen kann. Da die Zusammenhangskomponente G^0 die gleiche K-Liealgebra wie G hat, ist nach Bemerkung 3.1.1 auch $I_{G^\circ,K} \supseteq I_{G,K}$ ein Differentialideal in R_A. Wir können dann im Beweis von Bemerkung 3.2.2 $\mathfrak{m} \supseteq I_{G^\circ,K}$ wählen. Dann gilt Gleichung 3.5 auch für ein $f \in I_{G^\circ}$ und wir erhalten $Z \in G^\circ(N)$.

Das Bild von ι_Z ist dann in G° enthalten, und die Behauptung folgt aus Dimensionsgründen. □

Ist $\mathrm{cd}(K) \leq 1$ (siehe [Ser, II.3.1]), dann gilt auch die Umkehrung dieses Korollars. Zum Beispiel gilt $\mathrm{cd}(C(t)) \leq 1$, wobei $C(t)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen ist (siehe [Ser, II.3.3]).

Bemerkung 3.2.4. *Gilt* $\mathrm{cd}(K) \leq 1$*, dann ist jede PVE mit zusammenhängender Differentialgaloisgruppe effektiv.*

Beweis. Wenn man [Ser, III.2.3 Theorem 1'] verwendet, geht der Beweis analog wie im Fall, dass K ein C_1-Körper ist (siehe [PS, Corollary 1.32]). □

Lemma 3.2.5. *Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$, $A \in \mathfrak{g}(K)$ mit PVE N/K und Fundamentalmatrix $Z \in G(N)$. Dann gelten:*

1. *Sei $\tilde{N}/K$ eine weitere durch A definierte PVE und $\tilde{Z} \in G(\tilde{N})$ eine Fundamentalmatrix von A. Ist ι_Z ein Isomorphismus, dann existiert ein K-Differentialisomorphismus $\varphi\colon \tilde{N} \to N$ mit $\varphi(\tilde{Z}) = Z$.*

2. *Es existiert ein maximales Differentialideal* $\mathfrak{m} \supseteq I_{G,K}$ *von* $K[X_{ij}, 1/\det]$ *und ein* K*-Differentialisomorphismus* $\varphi\colon \tilde{N} \to N$*, so dass* $\varphi(\tilde{Z}) = Z$ *gilt. Hier haben wir* $\tilde{N} := \mathrm{Quot}(K[X_{ij}, 1/\det]/\mathfrak{m})$ *gesetzt und mit* $\tilde{Z}$ *das Bild von* X *in* $\tilde{N}$ *bezeichnet.*

Für den von φ *induzierten Isomorphismus* $\overline{\varphi}\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to \mathrm{Gal}(\tilde{N}/K)$ *gilt dann jeweils die Gleichung* $\iota_{\tilde{Z}} \circ \overline{\varphi} = \iota_Z$*.*

Beweis. Zu 1. Wegen Bemerkung 1.3.2 existiert ein K-Differentialisomorphismus $\chi\colon \tilde{N} \to N$. Mit Hilfe von Bemerkung 3.2.2 sehen wir, dass $\chi(Z) \in G(N)$ eine Fundamentalmatrix von A ist, und dass eine Matrix $W \in G$ mit $\chi(\tilde{Z}) = ZW$ existiert. Da ι_Z surjektiv ist, gibt es ein $\tau \in \mathrm{Gal}(N/K)$ mit $\iota_Z(\tau) = W$. Es gilt also $\tau(Z) = ZW$. Definieren wir nun $\varphi := \tau^{-1} \circ \chi$, dann erhalten wir $\varphi(\tilde{Z}) = \tau^{-1}(ZW) = Z$.

Zu 2. Ist $\mathfrak{m}_0 \supseteq I_{G,K}$ ein maximales Differentialideal von $K[X_{ij}, 1/\det]$, dann gibt es einen K-Differentialisomorphismus $\chi\colon \mathrm{Quot}(K[X_{ij}, 1/\det]/\mathfrak{m}_0) \to N$. Bezeichnen wir nun mit X_0 das Bild von X in $\mathrm{Quot}(K[X_{ij}, 1/\det]/\mathfrak{m}_0)$, dann existiert eine Matrix $W \in G$ mit $\chi(X_0) = ZW$.

Der Kern $\mathfrak{m}$ des K-Algebrahomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} K[X_{ij}, 1/\det] & \to & K[X_{ij}, 1/\det]/\mathfrak{m}_0 \\ f(X) & \mapsto & f(XW^{-1}) \end{array}$$

ist ein maximales Differentialideal. Der induzierte K-Differentialisomorphismus $\tau\colon \tilde{N} \to \mathrm{Quot}(K[X_{ij}, 1/\det]/\mathfrak{m}_0)$ erfüllt dann die Gleichung $\tau(\tilde{Z}) = X_0W^{-1}$. $\varphi := \chi \circ \tau$ hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Ist nun $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$, dann gilt
$(\iota_{\tilde{Z}} \circ \overline{\varphi})(\sigma) = \iota_{\tilde{Z}}(\varphi^{-1}\sigma\varphi) = \tilde{Z}^{-1} \cdot \varphi^{-1}\sigma\varphi(\tilde{Z}) = \tilde{Z}^{-1} \cdot \varphi^{-1}(Z\iota_Z(\sigma)) = \iota_Z(\sigma)$. □

Bemerkung 3.2.6. *Sei* $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ *ein Epimorphismus linearer algebraischer Gruppen* $\overline{G} \leq \mathrm{GL}_m(C)$ *und* $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$ *und* $d\pi\colon \overline{\mathfrak{g}}(K) \to \mathfrak{g}(K)$ *der zugehörige* K*-Liealgebrahomomorphismus. Sei* $B \in \overline{\mathfrak{g}}(K)$ *mit PVE* $\overline{N}/K$ *und Fundamentalmatrix* $Y \in \overline{G}(\overline{N})$ *und* $A := d\pi(B) \in \mathfrak{g}(K)$*. Dann gilt:*

1. *Sei* N/K *eine durch* A *definierte PVE und* $X \in G(N)$ *eine Fundamentalmatrix von* A*. Ist* ι_X *ein Isomorphismus, dann existiert ein* K*-Differentialmonomorphismus* $N \hookrightarrow \overline{N}$*, so dass* $\pi(Y) = X$ *und Diagramm 3.6 kommutiert.*

2. *Setzt man* $X := \pi(Y) \in G(\overline{N})$ *und* $N := K(X)$ *(der kleinste Zwischenkörper von* $\overline{N}/K$*, der alle Koeffizienten von* X *enthält), dann ist* N/K *eine durch* A *definierte PVE,* $X \in G(N)$ *eine Fundamentalmatrix von* A *und das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[r, two heads, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Gal}(N/K) \arrow[u, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Beweis. Mit $\pi_{ij} \in C[\overline{G}]$ bezeichnen wir die Koeffizienten des Epimorphismus π. Sei $R_B := K[Y_{ij}, 1/\det]$ die K-Differentialalgebra mit der $m \times m$-Matrix (Y_{ij}) von Unbestimmten und der durch $Y' = BY$ definierten Derivation. Analog setzen wir $R_A := K[X_{ij}, 1/\det]$. Die Derivationen auf diesen Algebren bezeichnen wir mit δ_B bzw. δ_A.

Die Beziehung $A = d\pi(B)$ läßt sich Dank Gleichung 3.3 in Koordinatenschreibweise durch

$$a_{sl} = \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\delta \pi_{sl}}{\delta Y_{ij}}(1) \tag{3.7}$$

ausdrücken.

Sei $\mathfrak{m}_Y \supseteq I_{\overline{G},K}$ ein maximales Differentialideal von R_B wie in Aussage 2 von Lemma 3.2.5. Dann können wir $\mathrm{Quot}(R_B/\mathfrak{m}_Y)$ so mit $\overline{N}$ identifizieren, dass das Bild von (Y_{ij}) in $\overline{N}$ gerade die gegebene Fundamentalmatrix Y ist. Wir beweisen nun, dass der K-Algebrahomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon R_A & \to & R_B/\mathfrak{m} \\ f(X) & \mapsto & f(\pi(Y)) \end{array}$$

ein Differentialhomomorphismus ist. Dazu muss man $\phi \circ \delta_A = \delta_B \circ \phi$ zeigen und es genügt wieder, dies auf den K-Erzeugern von R_A nachzurechnen. Sei also X_{st} ein Koeffizient von X und $g \in \overline{G}$.

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \delta_A)(X_{st})(g) &= \phi(\sum_l a_{sl} X_{lt})(g) = \sum_l a_{sl} \pi_{lt}(g) \\
&\overset{3.7}{=} \sum_{ij} b_{ij} \sum_l \frac{\delta \pi_{sl}}{\delta Y_{ij}}(1) \pi_{lt}(g) \\
&= \sum_{ij} b_{ij} \frac{\delta(\sum_l \pi_{sl}(Y)\pi_{lt}(g))}{\delta Y_{ij}}(1) \\
&= \sum_{ij} b_{ij} \frac{\delta \pi_{st}(Yg)}{\delta Y_{ij}}(1) \\
&= \sum_{ij} b_{ij} \sum_l \frac{\delta \pi_{st}}{\delta Y_{il}}(g) g_{jl} \quad \text{(Lemma 3.1.2)} \\
&= \sum_{il} \frac{\delta \pi_{st}}{\delta Y_{il}}(g) \sum_j b_{ij} g_{jl} \\
&= (\sum_{il} \frac{\delta \pi_{st}}{\delta Y_{il}} \delta_B(Y_{il}))(g) \\
&= (\delta_B(\pi_{st}))(g) = (\delta_B \circ \phi)(X_{st})(g)
\end{aligned}$$

Das Differentialideal $\mathfrak{m}_X := \mathrm{Kern}\phi$ enthält $I_{G,K}$ und wir erhalten den von ϕ induzierten K-Differentialmonomorphismus

$$\mathrm{Quot}(R_A/\mathfrak{m}_X) \hookrightarrow \mathrm{Quot}(R_B/\mathfrak{m}_Y).$$

Wir sehen, dass die Erweiterung $\mathrm{Quot}(R_A/\mathfrak{m}_X)/K$ keine neuen Konstanten hat und damit nach Konstruktion eine PVE ist.

Zu 2. Ist nun $X := \pi(Y)$ und $N := K(X) \subseteq \overline{N}$, dann muß $X = (X_{ij}\mathfrak{m}_X)$ und $N = \mathrm{Quot}(R_A/\mathfrak{m}_X)$ gelten. Dann stimmt $N \subseteq \overline{N}$ mit der konstruierten Injektion überein.

Zu 1. Ist ι_X ein Isomorphismus, dann können wir nach Aussage 1 von Lemma 3.2.5 $\mathrm{Quot}(R_A/\mathfrak{m}_X)$ so mit N identifizieren, dass das Bild von $(X_{ij}\mathfrak{m}_X)$ in N gerade X ist. Somit haben wir den K-Differentialmonomorphismus $N \hookrightarrow \overline{N}$ definiert und aufgrund der Konstruktion gilt $\pi(Y) = X$.

Wir rechnen nun nach, dass Diagramm 3.6 kommutiert. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{N}/K)$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} (\iota_X \circ \mathrm{res})(\sigma) &= \iota_X(\sigma|_N) = X^{-1} \cdot \sigma|_N(X) \\ &= X^{-1} \cdot \sigma(\pi(Y)) = X^{-1} \cdot \pi(\sigma(Y)) \\ &= \pi(Y^{-1} \cdot \sigma(Y)) = (\pi \circ \iota_Y)(\sigma). \end{aligned}$$

Beachte, dass der Zusatz in Lemma 3.2.5 garantiert, dass auch die Diagramme, welche bei den Identifikationen der Körper enstehen, kommutieren. □

Um mit der letzten Bemerkung zusammenhängende, effektive Einbettungsprobleme lösen zu können, muß man noch folgendes zeigen.

Bemerkung 3.2.7. *Sei eine lineare algebraische Gruppe $G \leq \mathrm{GL}_n(C)$, eine PVE N/K und ein Isomorphismus $\alpha\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to G$ gegeben. Ist N/K effektiv, dann existiert eine Matrix $A \in \mathfrak{g}(K)$ mit PVE N/K und einer Fundamentalmatrix $X \in G(N)$, so dass $\iota_X = \alpha$ gilt.*

Beweis. Da N/K effektiv ist, existiert eine Matrix $A \in \mathfrak{g}(K)$ mit PVE N/K und Fundamentalmatrix $X \in G(N)$. Da G zusammenhängend ist (Korollar 3.2.3), muß ι_X aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus sein. Wir wenden nun die zweite Aussage von Bemerkung 3.2.6 auf den Automorphismus $\pi := \iota_X \circ \alpha^{-1}$ von G an. Dann ist $\pi(X) \in G(N)$ eine Fundamentalmatrix von $d\pi(A) \in \mathfrak{g}(K)$ (auch mit PVE N/K) und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] & G \\ \mathrm{Gal}(N/K) \arrow[u, "\iota_X"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "="] & \mathrm{Gal}(N/K), \arrow[u, "\iota_{\pi(X)}"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Matrix $d\pi(A) \in \mathfrak{g}(K)$ mit Fundamentalmatrix $\pi(X) \in G(N)$ leistet also das Gewünschte. □

Bemerkung 3.2.8. *Sei $\mathrm{cd}(K) \leq 1$, N/K eine PVE mit zusammenhängender Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(N/K) \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Ist E/K eine Erweiterung ohne neue Konstanten mit $E \cap N = K$, dann ist NE/E eine PVE und*

$$\mathrm{res}\colon \mathrm{Gal}(NE/E) \to \mathrm{Gal}(N/K)$$

ein Isomorphismus linearer algebraischer Gruppen.

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{g}(K)$ eine Matrix, die N/K definiert und $X \in G(N)$ eine Fundamentalmatrix, so dass ι_X die gegebene Inklusion $\mathrm{Gal}(N/K) \to \mathrm{GL}_n(C)$ induziert. Dann ist NE/E eine PVE zur Matrix $A \in \mathfrak{g}(E)$ und es gilt $NE = E(X)$.

Sei ι_X^E der Monomorphismus $\sigma \mapsto X^{-1}\sigma(X)$ von $\mathrm{Gal}(NE/E)$ nach $\mathrm{GL}_n(C)$. Da $X \in G(N)$, liegt das Bild dieses Monomorphismus sogar in G. Wir erhalten den Monomorphismus $\iota_X^{-1} \circ \iota_X^E$, der mit der Restriktionsabbildung übereinstimmt. Sei H das Bild dieses Monomorphismus in $\mathrm{Gal}(N/K)$. Es gilt

$$N^H \subseteq (NE)^{\mathrm{Gal}(NE/E)} = E$$

und wir erhalten $N^H \subseteq N \cap E = K$. Dies impliziert $N^H = K$, woraus wir $H = \mathrm{Gal}(N/K)$ folgern. $\square$

3.3 Effektive Einbettungsprobleme

Definition 3.3.1. *Ein Einbettungsproblem*

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[r, two heads] & G \\ & \mathrm{Gal}(N/K), \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

nennen wir **effektiv***, wenn die PVE N/K effektiv ist. Eine Lösung*

$$\overline{\alpha}\colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \hookrightarrow \overline{G}$$

des Einbettungsproblems nennen wir **effektiv***, wenn $\overline{N}/K$ effektiv ist.*

Einen Epimorphismus linearer algebraischer Gruppen nennen wir **effektiv einbettend** *(über K), wenn alle zugehörigen effektiven Einbettungsprobleme eine effektive, eigentliche Lösung haben.*

Bemerkung 3.3.2. *Ist $\mathrm{cd}(K) \leq 1$, dann ist der zusammenhängende Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \twoheadrightarrow G$ genau dann effektiv einbettend, wenn er einbettend (siehe Definition 2.2.3) ist.*

Beweis. Folgt direkt aus Bemerkung 3.2.4. $\square$

Notation 3.3.3. *Sei das effektive, zusammenhängende Einbettungsproblem*

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ & \mathrm{Gal}(N/K) \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

gegeben. Sei weiter $A \in \mathfrak{g}(K)$ eine Matrix, welche die PVE N/K definiert und $X \in G(N)$ eine Fundamentalmatrix mit $\iota_X = \alpha$ (existiert nach Bemerkung 3.2.7).

Für jedes $B \in d\pi^{-1}(A) \in \overline{\mathfrak{g}}(K)$ existiert eine PVE $\overline{N}/K$ und eine Fundamentalmatrix $Y \in \overline{G}(\overline{N})$. Aussage 1 von Bemerkung 3.2.6 zeigt dann, dass $\iota_Y\colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \to \overline{G}$ eine effektive Lösung des Einbettungsproblems ist. Wir sagen dann auch die Lösung sei *von B induziert*. Es folgt:

Bemerkung 3.3.4. *Jedes effektive Einbettungsproblem besitzt eine effektive Lösung.*

Ist π ein Frattini–Epimorphismus, dann folgt direkt aus Definition 2.2.6, dass jedes $B \in d\pi^{-1}(A)$ eine eigentliche Lösung induziert. Es gilt also:

Bemerkung 3.3.5. *Zusammenhängende Frattini–Epimorphismen sind effektiv einbettend.*

Die nächste Bemerkung ist eine Anwendung des Zerlegungssatzes 2.6.2 auf effektiv einbettende Epimorphismen. Die verschiedenen Epimorphismentypen wurden in Definition 2.6.1 eingeführt.

Bemerkung 3.3.6. *Es gelten:*

1. *Genau dann sind zusammenhängende Epimorphismen effektiv einbettend, wenn dies für alle* $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$-, $(\mathbf{z}_{mu})$- *und* $(\mathbf{d}_e)$-*Epimorphismen gilt.*
2. *Genau dann sind alle zusammenhängende Epimorphismen mit halbeinfachem Kern effektiv einbettend, wenn dies für alle* $(\mathbf{d}_e)$-*Epimorphismen gilt.*
3. *Genau dann sind alle zusammenhängende Epimorphismen mit auflösbarem Kern effektiv einbettend, wenn dies für alle* $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$- *und* $(\mathbf{z}_{mu})$-*Epimorphismen gilt.*
4. *Genau dann sind alle zusammenhängende, zentrale Epimorphismen effektiv einbettend, wenn dies für alle* $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$- *und* $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_a})$-*Epimorphismen gilt.*

   In diesem Fall sind alle Epimorphismen nilpotenter Gruppen effektiv einbettend.
5. *Sind alle* $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$- *und* $(\mathbf{z}_{\mathbf{G}_a})$-*Epimorphismen effektiv einbettend, dann gilt dies auch für alle zusammenhängende Epimorphismen auflösbarer Gruppen.*

Beweis. Die Hinrichtung der ersten vier Behauptungen ist trivial.

Man sieht leicht, dass man in Lemma 2.2.4 und damit auch in Bemerkung 2.2.5 "einbettend" durch "effektiv einbettend" ersetzen kann. Die Aussagen folgen dann direkt mit Satz 2.6.2 und Bemerkung 3.3.5. □

3.4 Direkt zerfallende Einbettungsprobleme

Lemma 3.4.1. *Seien G_1 und G_2 zusammenhängende Gruppen, mit $G_1 \times G_2 \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Sei für $i \in \{1, 2\}$ eine Matrix $A_i \in \mathfrak{g}_i(K) \leq \mathrm{Lie}(G_1 \times G_2)(K)$ mit PVE N_i/K gegeben, so dass $\mathrm{Gal}(N_i/K) \cong G_i$.*

Gilt $N_1 \cap N_2 = K$, dann induziert $A_1 + A_2 \in \mathrm{Lie}(G_1 \times G_2)(K)$ eine eigentliche Lösung der Einbettungsprobleme $G_1 \times G_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} G_i \cong \mathrm{Gal}(N_i/K)$.

Beweis. Sei N/K eine durch $A_1 + A_2$ definierte PVE. Da $d\mathrm{pr}_i(A_1 + A_2) = A_i$, existieren nach Bemerkung 3.2.6 K-Differentialmonomorphismen $N_i \subseteq N$ und eine Lösung $\mathrm{Gal}(N/K) \hookrightarrow G_1 \times G_2$ der Einbettungsprobleme. Aus $N_1 \cap N_2 = K$ folgt, dass

$$\mathrm{Gal}(N_1 N_2/K) \cong \mathrm{Gal}(N_1/K) \times \mathrm{Gal}(N_2/K) \cong G_1 \times G_2.$$

Die Lösung muss also aus Dimensionsgründen eigentlich sein. □

Bemerkung 3.4.2. *Seien W und G zusammenhängende Gruppen. Sind alle Potenzen $W^n = W \times \cdots \times W$ über K realisierbar, dann ist der Epimorphismus* $\mathrm{pr}\colon W \times G \longrightarrow G$ *einbettend.*

Sind alle Potenzen von W effektiv realisierbar, dann ist pr *effektiv einbettend.*

Beweis. Sei durch den Isomorphismus $\alpha\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to G$ ein zu pr gehöriges Einbettungsproblem gegeben. Nach der Voraussetzung existiert eine PVE E/K, die $W^{\dim G+1}$ realisiert. Die Projektionen auf die W definieren Picard-Vessiot-Erweiterungen E_i/K mit $\mathrm{Gal}(E_i/K) \cong W$ (für $1 \leq i \leq \dim G + 1$).

Angenommen für alle i wäre $E_i \cap N \neq K$.
Da G zusammenhängend und damit K algebraisch abgeschlossen in N ist, muß $\mathrm{trdeg}_K(E_i \cap N) \geq 1$ gelten. Für jedes i wählen wir ein über K transzendentes Element $x_i \in E_i \cap N$. Da

$$\mathrm{trdeg}_K E = \dim \mathrm{Gal}(E/K) = (\dim G + 1) \cdot \dim W = \sum_{i=1}^{\dim G+1} \mathrm{trdeg}_K E_i,$$

sind $x_1, \ldots, x_{\dim G+1} \in E \cap N$ algebraisch unabhängig über K. Wir erhalten den Widerspruch

$$\dim G = \mathrm{trdeg}_K N \geq \mathrm{trdeg}_K E \cap N \geq \dim G + 1.$$

D.h. es exisitiert eine PVE E_i/K mit $E_i \cap N = K$, und der kanonische Isomorphismus $\mathrm{Gal}(E_i N/K) \to W \times G$ ist eine eigentliche Lösung des Einbettungsproblems.

Ist E/K effektiv, dann sind auch die Erweiterungen E_i/K effektiv, und die zweite Aussage folgt mit Lemma 3.4.1. □

3.5 Effektive, zerfallende Einbettungsprobleme mit unipotentem, abelschem Kern

Notation 3.5.1. *Wir geben uns ein effektives, zusammenhängendes Einbettungsproblem in der Notation 3.3.3 vor. Sei nun zusätzlich π zerfallend mit unipotentem, abelschem Kern. Wir schreiben $U := \mathrm{Kern}(\pi)$. Da π zerfällt, existiert ein Monomorphismus $\sigma\colon G \hookrightarrow \overline{G}$ mit $\pi \circ \sigma = id_G$. Wir identifizieren G vermöge σ als Untergruppe von $\overline{G}$ und $\mathfrak{g}(K)$ vermöge $d\sigma$ als Unterliealgebra von $\overline{\mathfrak{g}}(K)$.*

Da U unipotent und abelsch ist, existiert ein Isomorphismus $\phi\colon U \to C^n$ mit zugehörigem K-Liealgebraisomorphismus $d\phi\colon \mathfrak{u}(K) \to K^n$.

Sei $p\colon G \to \mathrm{Aut}(U)$ die Konjugationsoperation von G auf U und q der zusammengesetzte Morphismus

$$G \xrightarrow{p} \mathrm{Aut}(U) \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}_n(C),$$

wobei der Isomorphismus von ϕ induziert wird.

Nach Bemerkung 3.2.6 ist dann $W := q(X)$ eine Fundamentalmatrix von $dq(A)$.

3.5.1 Äquivalente Bedingungen für nichttriviale Lösbarkeit

Unser erstes Ziel ist nun der folgende Satz:

Satz 3.5.2. *Für ein zerfallendes Einbettungsproblem mit nichttrivialem, unipotentem, abelschem Kern (in der Notation 3.5.1) sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es existiert eine Matrix $B \in \pi^{-1}(A)$, die eine nichttriviale Lösung des Einbettungsproblems induziert.*

2. *Es existiert ein $b \in K^n$, so dass die inhomogene Matrixdifferentialgleichung $Y' - dq(A)Y = b$ keine Lösung in N^n hat.*

3. *Es existiert ein $b \in K^n$, so dass die Gleichung $Y' = W^{-1}b$ keine Lösung in N^n hat.*

Gelten die Aussagen, dann induziert für ein $b \in K^n$ aus 2) oder 3) die Matrix $d\phi^{-1}(b) + A \in \overline{\mathfrak{g}}(K)$ eine nichttriviale Lösung.

Lemma 3.5.3. *Wir benutzen Notation 3.5.1. Ist $u \in U(N)$ und setzt man $B := uAu^{-1} + u'u^{-1} - A \in \mathfrak{u}(K)$, dann gilt*

$$d\phi(B) = \phi(u)' - dq(A) \cdot \phi(u).$$

Dabei bezeichnet "·" die Matrixmultiplikation.

Beweis. Wir betrachten die linearen algebraischen Gruppen über dem algebraischen Abschluss L von N. Identifiziert man L^n mit den Matrizen aus $\mathrm{GL}_{2n}(L)$, deren Koeffizienten, ausserhalb der aus den 2×2-Kästchen

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in L$$

bestehenden Diagonale, alle Null sind, so sieht man, dass für alle $w \in U(N)$ gilt

$$d\phi(w'w^{-1}) = \phi(w)' \cdot \phi(w)^{-1} = \phi(w)'. \tag{3.8}$$

Direkt aus der Definition von p und q erkennt man, dass für alle $g \in G(N)$ und alle $w \in U(N)$ gilt

$$(\phi \circ p(g))(w) = q(g) \cdot \phi(w). \tag{3.9}$$

Aus dieser Gleichung folgt $d\phi \circ p(g) = d\phi \circ dp(g) = d(\phi \circ p(g)) = d(q(g) \cdot \phi)$. Mit Hilfe von Gleichung 3.3 rechnet man nun leicht $d(q(g) \cdot \phi) = q(g) \cdot d\phi$ nach. Insgesamt haben wir damit für alle $g \in G(N)$ die Gleichung

$$d\phi \circ p(g) = q(g) \cdot d\phi \tag{3.10}$$

gezeigt. Wir sehen nun

$$\begin{aligned}
d\phi(B) &= d\phi(uX'X^{-1}u^{-1} + u'u^{-1} - X'X^{-1}) \\
&= d\phi(X(X^{-1}uX)'(X^{-1}uX)^{-1}X^{-1}) \\
&= d\phi(p(X)(p(X^{-1})(u)'p(X^{-1})(u)^{-1})) \\
&\overset{3.10}{=} q(X) \cdot d\phi(p(X^{-1})(u)'p(X^{-1})(u)^{-1}) \\
&\overset{3.8}{=} q(X) \cdot \phi(p(X^{-1})(u))' \\
&\overset{3.9}{=} q(X) \cdot (q(X^{-1}) \cdot \phi(u))' \\
&= q(X) \cdot (-q(X)^{-1} \cdot q(X)' \cdot q(X)^{-1} \cdot \phi(u) + q(X)^{-1} \cdot \phi(u)') \\
&= \phi(u)' - dq(A) \cdot \phi(u),
\end{aligned}$$

denn aus Bemerkung 3.2.6 folgt, dass $dq(A) = q(X)'q(X)^{-1}$. $\square$

Beweis von Satz 3.5.2.

2) ⇔ 3): Substituieren wir $\tilde{Y} := WY$, dann erhalten wir die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
& Y' = W^{-1}b \\
\Leftrightarrow \quad & (W^{-1}\tilde{Y})' = W^{-1}b \\
\Leftrightarrow \quad & -W^{-1}W'W^{-1}\tilde{Y} + W^{-1}\tilde{Y}' = W^{-1}b \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{Y}' - dq(A)\tilde{Y} = b.
\end{aligned}$$

Da W Koeffizienten in N hat, folgt die Äquivalenz von 2 und 3.

2) ⇒ 1): Sei $\tilde{N}/K$ eine PVE mit $N \subseteq \tilde{N}$, so dass die Differentialgleichung $Y' - dq(A)Y = b$ eine Lösung y in $\tilde{N}^n \backslash N^n$ hat (wähle eine PVE, die y enthält und bilde das Kompositum mit N). Wir definieren $u := \phi^{-1}(y) \in U(\tilde{N}) \backslash U(N)$ und $B := (d\phi)^{-1}(b) \in \mathfrak{u}(K)$. Lemma 3.5.3 impliziert nun

$$d\phi(B) = \phi(u)' - dq(A) \cdot \phi(u) = d\phi(uAu^{-1} + u'u^{-1} - A)$$

und wir erhalten $B = uAu^{-1} + u'u^{-1} - A$.

Als nächstes setzen wir $Z := uX \in \overline{G}(\tilde{N})$ und berechnen

$$(A + B)(Z) = uAX + u'X = (uX)' = Z'.$$

Bezeichnen wir mit $\overline{N}$ die durch $A + B$ definierte PVE $K(Z)$ von K , dann zeigt Bemerkung 3.2.6, dass ein K-Differentialmonomorphismus $N \hookrightarrow \overline{N}$ existiert und, dass $\iota_Z \colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \to \overline{G}$ eine von $A + B$ induzierte Lösung des Einbettungsproblems ist.

Mit Z und X muss auch u in $\overline{G}(\overline{N})$ liegen. Da aber u nicht in $U(N)$ liegt, folgt, dass $N \subsetneq \overline{N}$ gilt.

1) ⇒ 2): Sei $D \in d\pi^{-1}(A) \subseteq \bar{\mathfrak{g}}(K)$ eine Matrix, die eine nichttriviale Lösung $\iota_Y \colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \hookrightarrow \overline{G}$ des gegebenen Einbettungsproblems induziert. Hierbei ist $Y \in \overline{G}(\overline{N})$ eine Fundamentalmatrix von D mit $\pi(Y) = X$. Wir setzen nun $B := D - A \in \bar{\mathfrak{g}}(K)$. Da $d\pi(B) = d\pi(D) - d\pi(A) = A - A = 0$ liegt B sogar in $\mathfrak{u}(K)$. Wir definieren $u := YX^{-1} \in U(\overline{N})$. Wäre $u \in U(N)$, dann wäre auch $Y \in \overline{G}(\overline{N})$ und der Widerspruch $\overline{N} = N$ würde folgen. Es gilt also $u \in U(\overline{N})/U(N)$ und man rechnet nach:

$$uAu^{-1} + u'u^{-1} - A = Y'Y^{-1} - X'X^{-1} = D - A = B.$$

Lemma 3.5.3 zeigt nun, dass $\phi(u)$ eine Lösung von $Y' - dq(A)Y = b$ ist, wenn man $b := d\phi(B) \in K^n$ setzt. Da die Fundamentalmatrix W von $dq(A)$ in $q(G)(N)$ liegt, ist die homogene Differentialgleichung $Y' = dq(A)Y$ vollständig in N lösbar. D.h. alle Lösungen von $Y' - dq(A)Y = b$ liegen in $\overline{N}^n/N^n$. $\square$

Die folgende Bemerkung wird später auch für nicht zusammenhängende Gruppen benötigt.

Bemerkung 3.5.4. *Eine nichttriviale Lösung eines Einbettungsproblems mit minimalem, unipotentem Kern ist eigentlich.*

Beweis. Wir geben uns ein Einbettungsproblem mit minimalem, unipotentem Kern in der Notation 3.3.3 vor. Sei $\overline{\alpha}$ eine nichttriviale Lösung. Mit U bezeichnen wir den Kern des Einbettungsproblems. Da U minimal in $\overline{G}$ ist, gilt $[U, U] = 1$, d.h. U ist abelsch. Die Voraussetzungen liefern uns das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] & \overline{G} \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \\ \mathrm{Gal}(\overline{N}/N) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \arrow[u, hook, "\overline{\alpha}"'] \arrow[r, two heads] & \mathrm{Gal}(N/K). \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Da die Gruppe $\mathrm{Gal}(\overline{N}/N)$ normal in U und normal in $\mathrm{Gal}(\overline{N}/K)$ ist, liegt sie auch normal in $\overline{G} = \mathrm{Gal}(\overline{N}/K)U$. Die Minimalität von U impliziert dann, dass $\mathrm{Gal}(\overline{N}/N)$ mit U übereinstimmt. Es folgt, dass $\overline{\alpha}$ ein Isomorphismus ist. $\square$

Korollar 3.5.5. *Ein $(\mathbf{z}_{mu})$-Einbettungsproblem mit nichttrivialem Kern (in der Notation 3.5.1) hat genau dann eine von einem $B \in \pi^{-1}(A)$ induzierte eigentliche Lösung, wenn die äquivalenten Aussagen von Satz 3.5.2 gelten.*

Beweis. Gelten die äquivalenten Aussagen von Satz 3.5.2, dann existiert eine nichttriviale Lösung. Bemerkung 3.5.4 zeigt nun, dass diese eigentlich ist.

Für die andere Richtung beachte man, dass der Kern eines Epimorphismus vom Typ $(\mathbf{z}_{mu})$ abelsch ist (die Minimalität impliziert, dass $[U, U] = 1$). $\square$

3.5.2 Der Fall $K = C(t)$

Sei nun K der Differentialkörper $C(t)$ mit der durch $t' = 1$ definierten Derivation. In Lemma 3.5.10 sehen wir, dass die Voraussetzung $t' = 1$ keine wirkliche Einschränkung ist.

Satz 3.5.6. *Sei $E/C(t)$ eine Differentialkörpererweiterung ohne neue Konstanten, deren Transzendenzgrad endlich ist. Sei $0 \neq \omega \in E$ und $m \in \mathbb{N}$, dann existieren $c_1, \ldots, c_m \in C$, so dass Lösungen $y_1, \ldots, y_m$ von $Y_i' = \frac{\omega}{t - c_i}$ algebraisch unabhängig über $C(t)$ sind. Insbesondere existiert ein $c \in C$, so dass $Y' = \frac{\omega}{t-c}$ keine Lösung in E hat.*

Um die algebraische Unabhängigkeit zu zeigen, ist das folgende Resultat nützlich:

Satz 3.5.7 (Satz von Ostrowski). *Sei F ein Differentialkörper der Charakteristik 0 mit (nicht notwendig algebraisch abgeschlossenem) Konstantenkörper C . Seien $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch abhängig über F mit $x_i' \in F$. Dann existieren $d_1, \ldots, d_n \in C$ (nicht alle Null) und $f \in F$, so dass $d_1 x_1' + \ldots + d_n x_n' = f'$ gilt.*

Beweis. [Kol] □

Beweis von Satz 3.5.6. Sei T eine Transzendenzbasis von $C/\mathbb{Q}$. Dann muss $Q := \mathbb{Q}(T)$ ein Hilbertkörper sein ([FJ, Theorem 12.9]) und C/Q ist eine algebraische Erweiterung.

Wir wählen $l \in \mathbb{N}$, so dass $t, \omega, \omega', \ldots, \omega^{(l-1)}$ algebraisch unabhängig über Q sind und $\omega^{(l)}$ algebraisch über $Q(t, \omega, \ldots, \omega^{(l-1)})$ ist (so ein l existiert immer, weil $\operatorname{trdeg}_Q(E) = \operatorname{trdeg}_{C(t)}(E) + 1$ endlich ist). Hier bedeutet $l = 0$, dass ω algebraisch über $Q(t)$ ist.

Es existiert nun ein $r \in \mathbb{N}$ und Elemente $b_0, \ldots, b_r \in Q[t, \omega, \ldots, \omega^{(l-1)}]$, so dass $b_r(w^{(l)})^r + \ldots + b_0 = 0$. Dies sieht man, indem man das Minimalpolynom von $\omega^{(l)}$ mit einem Vielfachen der Koeffizientennenner multipliziert. Wir betrachten nun die Ableitung

$$b_r'(w^{(l)})^r + \ldots + b_0' + w^{(l+1)}(rb_r(w^{(l)})^{r-1} + \ldots + b_1) = 0. \tag{3.11}$$

Man sieht, dass $Q(t, \omega, \ldots, \omega^{(l)})$ ein Differentialkörper mit Konstantenkörper Q ist. Wenn wir nun $F = Q(\omega, \ldots, \omega^{(l-1)})$ und $v := b_r\omega^{(l)}$ setzen, dann erkennen wir, dass v ganz über $F[t]$ ist. Das Minimalpolynom von v bezeichnen wir mit m. Es hat Koeffizienten in $Q[t, \omega, \ldots, \omega^{(l-1)}]$ und den Grad r.

Da der Ring $F[t, v]$ im Allgemeinen kein Differentialring ist, müssen wir später zu einer Lokalisierung übergehen. Dazu definieren wir

$$\theta := b_r^{r+1}(rb_r(\omega^{(l)})^{r-1} + \ldots + b_1) \in F[t, v].$$

Es gilt das folgende Lemma, das wir zunächst voraussetzen.

Lemma 3.5.8. *Es gibt unendlich viele $c \in Q$, so dass $(t-c)F[t, v]$ ein Primideal im Ring $F[t, v]$ ist.*

Benutzen wir dieses Lemma, dann können wir verschiedene $c_1, \ldots, c_m \in Q$ wählen, so dass die Ideale $(t - c_i)F[t, v]$ prim sind und $b_r, \theta \notin (t - c_i)F[t, v]$ gilt.

Wir zeigen, dass $y_1, \ldots, y_m$ mit $y_i' = \frac{\omega}{t - c_i}$ algebraisch unabhängig über $C(t)$ sind. Es genügt, die algebraische Unabhängigkeit über $Q(t)$ zu zeigen, denn $C(t)/Q(t)$ ist eine algebraische Erweiterung.

Angenommen, die Elemente $y_1, \ldots, y_m$ sind algebraisch abhängig über $Q(t)$, dann sind sie auch algebraisch abhängig über $Q(t, \omega, \ldots, \omega^{(l)})$.

Da $y_i' \in Q(t, \omega, \ldots, \omega^{(l)})$, können wir Satz 3.5.7 anwenden. Es existieren also $d_1, \ldots, d_m \in Q$ (nicht alle Null) und $f \in Q(t, \omega, \ldots, \omega^{(l)})$, so dass

$$d_1y_1' + \ldots + d_my_m' = f'. \tag{3.12}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $d_1 \neq 0$ annehmen. Bezeichnen wir mit W die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge

$$< b_r, \theta, t - c_i | 2 \leq i \leq m > \subseteq F[t, v],$$

dann kann man zeigen, dass $R := F[t, v]_W$ ein Differentialring mit Quotientenkörper $Q(t, \omega, \ldots, \omega^{(l)})$ ist. Da kein Element aus W in $(t - c_1)F[t, v]$ liegt, ist $(t - c_1)R$ ein Primideal von R.

Seien nun $p, q \in R\backslash(t-c_1)R$ und $z \in \mathbb{Z}$, so dass $f = (t-c_1)^z \frac{p}{q}$. Wenn wir dies in Gleichung 3.12 einsetzen und mit q^2 multiplizieren, erhalten wir

$$q^2\omega \sum_{j=1}^{m} \frac{d_j}{t-c_j} = z(t-c_1)^{z-1}pq + (t-c_1)^z(p'q - pq'). \tag{3.13}$$

Wäre $z < 0$, dann könnte man diese Gleichung mit $(t-c_1)^{1-z}$ multiplizieren und würde $zpq \in (t-c_1)R$ erhalten, was wegen $z \in R^{\times}$ zu einem Widerspruch führen würde.

Es gilt also $z \geq 0$. Wenn wir Gleichung 3.13 mit $(t-c_1)$ multiplizieren, erhalten wir

$$q^2\omega d_1 + (t-c_1)q^2\omega \sum_{j=2}^{m} \frac{d_j}{t-c_j} = z(t-c_1)^z pq + (t-c_1)^{z+1}(p'q - pq').$$

Dies impliziert $q^2\omega d_1 \in (t-c_1)R$ und damit $\omega \in (t-c_1)R$.

Im Fall $l > 0$ ist dies aber unmöglich, weil dann ω in $F \subseteq R^{\times}$ liegt.

Ist $l = 0$, dann ist ω algebraisch über $Q(t)$ und es gilt $F = Q$. Da also $\omega \in (t-c_1)Q[t,v]_W$, existiert ein Element $w \in W$, so dass $w \cdot \omega$ im Primideal $(t-c_1)Q[t,v]$ liegt. Wir erhalten $\omega \in (t-c_1)Q[t,v]$ und schließen daraus, dass auch $v \in (t-c_1)Q[t,v]$, denn $\omega \cdot b_r = v$ und b_r liegt in $Q[t]$. Da v ganz über $Q[t]$ ist, läßt sich jedes Element aus $Q[t,v]$ als Summe $\sum_{k=0}^{r-1} f_i v^i$ mit Koeffizienten $f_i \in Q[t]$ schreiben. Dies führt zum Widerspruch $v = (t-c_1)f_1 v$. □

Beweis von Lemma 3.5.8. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
F(t) & — & F(t,v) =: L & & \\
| & & | & \searrow & \\
F[t] & — & F[t,v] & — & \mathcal{O}_L
\end{array}$$

Mit $\mathcal{O}_L$ bezeichnen wir den ganzen Abschluss von $F[t]$ in L. Dieser enthält die ganze Erweiterung $F[t,v]$ von $F[t]$. Wir gehen in zwei Schritten vor:
Schritt 1. Es gibt unendlich viele $c \in Q$, so dass $(t-c)\mathcal{O}_L$ prim ist.
Schritt 2. Für alle bis auf endlich viele $c \in Q$ gilt: Ist $(t-c)\mathcal{O}_L$ ein Primideal von $\mathcal{O}_L$, dann ist $(t-c)F[t,v]$ ein Primideal in $F[t,v]$.

Beweis von Schritt 1. Wir möchten die Hilberteigenschaft von Q benutzen. Das Minimalpolynom $m(t,\omega,\ldots,\omega^{(l-1)},X) \in Q[t,\omega,\ldots,\omega^{(l-1)}][X]$ von v ist irreduzibel. D.h. es gibt unendlich viele $c \in Q$, so dass das spezialisierte Polynom $m(c,\omega,\ldots,\omega^{(l-1)},X) \in Q[\omega,\ldots,\omega^{(l-1)}][X]$ irreduzibel ist. Wir nehmen uns jetzt ein solches $c \in Q$ und zeigen, dass $(t-c)\mathcal{O}_L$ ein Primideal ist. Der Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
F[t][X] & \to & F[X] \\
t & \mapsto & c
\end{array}$$

mit Kern $(t-c)F[t][X]$ induziert einen Isomorphismus. Dann ist das Polynom $\overline{m} \in F[t]/(t-c)[X]$, welches durch diesen auf $m(c,\omega,\ldots,\omega^{(l-1)},X)$ abgebildet wird, auch irreduzibel. Da $\mathcal{O}_L$ ein Dedekindring und $L/F(t)$ eine Galoiserweiterung ist, können wir $(t-c)\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_1^e \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s^e$ schreiben. Hierbei sind $\mathfrak{p}_i$ die über $(t-c)$ liegenden Primideale von $\mathcal{O}_L$, $f = [\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_1 : F[t]/(t-c)]$ deren Trägheitsgrad und e deren Verzweigungsindex. Da $\overline{m} \in F[t]/(t-c)[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad r ist, das die Nullstelle $v\mathfrak{p}_1$ in $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_1$ hat, erhalten wir $f = r$. Wenden wir nun die wohlbekannte Formel $r = esf$ an, so erhalten wir $e = s = 1$, d.h. $(t-c)\mathcal{O}_L$ ist ein Primideal in $\mathcal{O}_L$.

Beweis von Schritt 2. Da $F[t]$ ein Hauptidealring ist, besitzt $\mathcal{O}_L$ eine (endliche) Ganzheitsbasis über $F[t]$ ([Neu, Satz 2.10]). Da $F[t,v]$ und $\mathcal{O}_L$ den gleichen Quotientenkörper haben, muss ein $\alpha \in F[t,v]$ existieren, dessen Produkt mit einem beliebigen Element der Ganzheitsbasis wieder in $F[t,v]$ liegt. Es gilt dann $\alpha \cdot \mathcal{O}_L \subseteq F[t,v]$. Sei $c \in Q$, so dass $(t-c)\mathcal{O}_L$ prim ist. Da nur für endlich viele $c \in Q$ die Norm $N_{L|F(t)}(\alpha) \in F[t]$ im Primideal $(t-c)F[t]$ liegen kann, schließen wir solche aus. Wir zeigen, dass $(t-c)F[t,v]$ für die übriggebliebenen $c \in Q$ ein Primideal ist:

Sei dazu $x, y \in F[t,v]$, so dass $xy \in (t-c)F[t,v]$. Dann gilt $xy \in (t-c)\mathcal{O}_L$. Da $(t-c)\mathcal{O}_L$ prim ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass x in $(t-c)\mathcal{O}_L$ liegt. Dann gilt $\alpha x \in (t-c)F[t,v]$. Wir benutzen die $F(t)$-Vektorraum Basis $1, v, \ldots, v^{r-1}$ von L und schreiben $\hat{x}$ für den Zeilenvektor von x bezüglich dieser Basis. Die Matrixdarstellung der Transformation $z \mapsto \alpha z$ bezeichnen wir mit T_α. Da v ganz über $F[t]$ ist, liegen alle Koeffizienten von T_α in $F[t]$. Nach Voraussetzung liegen die Koeffizienten von $T_\alpha \hat{x}$ in $(t-c)F[t]$. Wenden wir darauf den Ringhomomorphismus $\bar{\cdot}\colon F[t] \to F[t]/(t-c)$ an, dann folgt $\overline{T}_\alpha \overline{\hat{x}} = 0$. Wegen

$$\det \overline{T}_\alpha = \overline{\det T_\alpha} = \overline{N_{L|F(t)}(\alpha)} \neq 0$$

muss $\overline{\hat{x}} = 0$ sein, d.h. $x \in (t-c)F[t,v]$. □

Korollar 3.5.9. *Sei $\omega \neq 0$ ein Element einer PVE von $C(t)$ und S eine endliche Teilmenge von C, so dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *$\omega \in C(t)$ und S ist die Menge der Null- und Polstellen von ω.*
2. *Über $C(t)$ existiert eine homogene lineare Differentialgleichung $\mathcal{L}$ der Ordnung n, so dass ω eine Lösung von $\mathcal{L}$ ist und $\omega, \ldots, \omega^{(n-1)}$ algebraisch unabhängig über $C(t)$ sind. S ist die Menge der Polstellen der Koeffizienten von $\mathcal{L}$.*

Dann gilt:

Wählt man $c_1, \ldots, c_m \in C/S$ paarweise verschieden, dann sind die Elemente $y_1, \ldots, y_m$ mit $y_i' = \frac{\omega}{t-c_i}$ algebraisch unabhängig über $C(t)$.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass die zweite Bedingung erfüllt sei. Angenommen $y_1, \ldots, y_m$ wären über $C(t)$ algebraisch abhängig, dann existieren wegen $y_i' \in C(t, \omega, \ldots, \omega^{(n-1)})$ nach Satz 3.5.7 $d_1, \ldots, d_m \in C$ (nicht alle Null) und $f \in C(t, \omega, \ldots, \omega^{(n-1)})$, so dass Gleichung 3.12 gilt. Wir können wieder $d_1 \neq 0$ annehmen. Mit W bezeichnen wir die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge

$$< t - c_i, t - c | 2 \leq i \leq m, c \in S > \subseteq C[t].$$

Setzen wir nun $R := C[t, \omega, \ldots, \omega^{(n-1)}]_W$, dann sieht man sofort, dass $(t-c_1)R$ ein Primideal des Differentialrings R ist, der Quotientenkörper von R gerade $C(t, \omega, \ldots, \omega^{(n-1)})$ ist, und dass ω in R liegt. Man kann nun genau wie im Beweis von Satz 3.5.6 einen Widerspruch erzeugen.

Gilt die erste Bedingung, dann ist der Beweis analog, wenn man $R := C[t]_W$ setzt. □

In Bemerkung 3.5.11 werden wir sehen, dass jeder $(\mathbf{z}_{mu})$-Epimorphismus effektiv einbettend über $C(t)$ ist.

Satz 3.5.6 ist wegen der Benutzung des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes nicht konstruktiv. Wir können aber mit Korollar 3.5.9 zeigen, dass man für jedes effektive, zu einem $(\mathbf{z}_{\mathbf{G}_a})$-Epimorphismus gehörige Einbettungsproblem in folgender Weise eine eigentliche Lösung konstruieren kann:

Wir denken uns das Einbettungsproblem in der Notation 3.5.1 gegeben. Dann ist $n = 1$, und die Matrix W besteht nur aus einem Element. Es gilt $W' = dq(A)W$ und damit auch $(W^{-1})' = -dq(A)W^{-1}$. Die zusammenhängende Gruppe $q(G)$ liegt in $\mathbf{G}_m$. Es gibt nur zwei Möglichkeiten, $q(G) = \mathbf{G}_m$ oder $q(G) = 1$.

Im Fall, dass $q(G) = \mathbf{G}_m$, ist W^{-1} transzendent über $C(t)$. Wir setzen $m := \dim G + 1$. Korollar 3.5.9 zeigt, dass für verschiedene $c_1, \ldots, c_m \in C/S$, die Lösungen der Gleichungen $Y_i' = \frac{W^{-1}}{t-c_i}$ algebraisch unabhängig über $C(t)$ sind. Hier besteht die Ausnahmemenge S gerade aus den Polen von $dq(A)$. Aus Dimensionsgründen besitzt die Gleichung $Y_j' = \frac{W^{-1}}{t-c_j}$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ keine Lösung in N. Die Behauptung folgt mit Korollar 3.5.5.

Im Fall, dass $q(G) = 1$ ist, erhalten wir $dq(A) = 0$. Es folgt $W^{-1} \in C$ und wir können Dank Korollar 3.5.9 analog verfahren.

Dank der fünften Aussage von Satz 2.6.2, kann man einen zusammenhängenden Epimorphismus von auflösbaren Gruppen in $(\mathbf{z}_{\mathbf{G}_a})$-, $(\mathbf{F})$- und $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$-Epimorphismen zerlegen. Es ist klar, dass man zu effektiven Frattini-Einbettungsproblemen eine eigentliche Lösung konstruieren kann. Um auch für effektive $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$-Einbettungsprobleme eine eigentliche Lösung zu konstruieren, betrachte man den Beweis von Bemerkung 3.4.2 und beachte, dass sich Tori über $C(t)$ effektiv realisieren lassen (siehe [MS1, Theorem 1.1]).

3.5.3 Der Fall $0 < \operatorname{trdeg}_C(K) < \infty$

Zuerst zeigen wir ein Lemma, welches es erlaubt, die vorgegebene Derivation eines Differentialkörpers K so zu modifizieren, dass dies keinen Einfluss auf die Lösbarkeit von Einbettungsproblemen hat.

Lemma 3.5.10. *Bezeichne δ die Derivation auf K. Ist $a \in K^\times$ und setzen wir $\overline{\delta} := a\delta$, dann gelten:*

1. *$(K, \overline{\delta})$ ist ein Differentialkörper mit Konstantenkörper C.*

2. *Ist bezüglich δ die Erweiterung N/K eine durch $A \in M^n(K)$ definierte PVE mit Fundamentalmatrix X (d.h. $AX = \delta(X)$), dann ist N/K auch bezüglich $\overline{\delta}$ eine PVE, welche durch $aA \in M^n(K)$ mit Fundamentalmatrix X definiert wird. Es gilt $\mathrm{Gal}_\delta(N/K) = \mathrm{Gal}_{\overline{\delta}}(N/K)$.*

3. *Ein Einbettungsproblem ist genau dann über (K, δ) (eigentlich) lösbar, wenn dies über $(K, \overline{\delta})$ gilt. Dies gilt auch für die effektive (eigentliche) Lösbarkeit effektiver Einbettungsprobleme.*

Ist $t \in K \backslash C$ beliebig, dann ist $C(t)$ ein rationaler Funktionenkörper in einer Variablen über C. Setzt man nun $a := \frac{1}{\delta(t)}$, dann ist $K/C(t)$ eine Differentialkörpererweiterung bezüglich $\overline{\delta} := a\delta$ und es gilt $\overline{\delta}(t) = 1$.

Beweis. Die erste Aussage ist eine einfache Rechnung, die dritte folgt aus der zweiten. Der erste Teil der zweiten Aussage ist eine Konsequenz der Gleichung $aAX = a\delta(X) = \overline{\delta}(X)$. Der zweite Teil läßt sich wieder leicht nachrechnen.

Da C algebraisch abgeschlossen ist, muss t transzendent über C sein. Der Rest des Zusatzes folgt aus der ersten Aussage. □

Bemerkung 3.5.11. *Sei $0 < \operatorname{trdeg}_C(K) < \infty$. Dann ist (über K) jeder $(\mathbf{z}_{mu})$-Epimorphismus effektiv einbettend.*

Beweis. Wegen Lemma 3.5.10 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $C(t)$ ein Differentialunterkörper von K ist und $t' = 1$ gilt. Wir geben uns ein effektives $(\mathbf{z}_{mu})$-Einbettungsproblem mit nichttrivialem Kern in der Notation 3.5.1 vor. Wir wählen einen Koeffizienten $w_{ij} \neq 0$ von W^{-1}. Da $N/C(t)$ eine Differentialkörpererweiterung von endlichem Transzendenzgrad ist, können wir Satz 3.5.6 anwenden. Es existiert ein $c \in C$, so dass $Y' = w_{ij}\frac{1}{t-c}$ keine Lösung in N hat. Wenn man nun $b = (0, \dots, 0, b_j, 0, \dots, 0)^T$ mit $b_j := \frac{1}{t-c}$ setzt, dann sieht man, dass die dritte Aussage von Satz 3.5.2 gilt. Die Behauptung folgt schließlich aus Korollar 3.5.5. □

3.6 Zusammenhängende, effektive Einbettungsprobleme

Theorem 1. *Sei K ein Differentialkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper C der Charakteristik 0, so dass $0 < \operatorname{trdeg}_C(K) < \infty$.*

Dann hat jedes zusammenhängende, effektive Einbettungsproblem eine effektive, eigentliche Lösung.

Beweis. Mit anderen Worten ist zu zeigen, dass jeder zusammenhängende Epimorphismus effektiv einbettend über K ist. Wegen Bemerkung 3.3.6 genügt es, dies für $(\mathbf{z}_{mu})$-, $(\mathbf{d}_{\mathbf{G}_m})$- und $(\mathbf{d}_e)$-Epimorphismen zu zeigen. Epimorphismen vom ersten Typ sind effektiv einbettend nach Bemerkungen 3.5.11. Um dies auch für die anderen Typen zu zeigen, genügt es wegen Bemerkung 3.4.2 nachzuweisen, dass Tori und Potenzen einfacher Gruppen über K effektiv realisierbar sind. Dies leistet [MS1, Theorem 1.1]. □

Theorem 2. *Jedes zusammenhängende Einbettungsproblem über $C(t)$ hat eine eigentliche Lösung.*

Beweis. Folgt aus Theorem 1 und Bemerkung 3.3.2. □

Kapitel 4

Nicht zusammenhängende Einbettungsprobleme

In dem ganzen Kapitel sei K ein Differentialkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper $C \neq K$ der Charakteristik 0. Alle linearen algebraischen Gruppen seien über C definiert.

Wir betrachten nun Einbettungsprobleme zu H-semidirekten Epimorphismen und gehen analog zu Kapitel 3 vor.

4.1 H-effektive Monomorphismen

Definition 4.1.1. *Sei H eine endliche Gruppe, M/K eine endliche PVE und $\alpha\colon \mathrm{Gal}(M/K) \to H$ ein Gruppenisomorphismus. Sei G eine H-Gruppe mit semidirektem Produkt $G \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Wir sagen $A \in \mathfrak{g}(M)$ ist H-**äquivariant** (bezüglich α), wenn für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ gilt*

$$\sigma(A) = \alpha(\sigma)^{-1} A \alpha(\sigma).$$

Hier wird auf der linken Seite σ auf die Koeffizienten von A angewendet, während auf der rechten Seite σ vermöge des Monomorphismus

$$\mathrm{Gal}(M/K) \xrightarrow{\alpha} H \hookrightarrow G \rtimes H$$

als Element von $G \rtimes H$ betrachtet wird, das durch Konjugation auf $\mathfrak{g}(M)$ operiert.

Bemerkung 4.1.2. *Sei H eine endliche Gruppe und G eine H-Gruppe mit semidirektem Produkt $G \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Sei M/K eine endliche PVE und $\alpha\colon \mathrm{Gal}(M/K) \to H$ ein Isomorphismus. Sei weiter $A \in \mathfrak{g}(M)$ eine H-äquivariante Matrix (bezüglich α) mit PVE N/M und Fundamentalmatrix $X \in G(N)$. Dann gelten:*

1. *Es existiert eine Matrix $D \in M_n(K)$ mit einer Fundamentalmatrix $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$, so dass D die PVE M/K definiert und $\iota_Z = \alpha$ gilt.*

2. *Die Erweiterung N/K ist eine PVE. Sei $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$ wie in Aussage 1, dann wird N/K durch die Matrix $\tilde{A} = Z'Z^{-1} + ZAZ^{-1} \in M_n(K)$ mit Fundamentalmatrix $\tilde{X} := ZX \in \mathrm{GL}_n(N)$ definiert.*

3. *Das Bild von* $\iota_{\tilde{X}} \colon \mathrm{Gal}(N/K) \to \mathrm{GL}_n(C)$ *liegt in* $G \rtimes H$. *Genauer gilt für ein* $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$ *die Gleichung* $\iota_{\tilde{X}}(\sigma) = X^{-1}\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X)$.

4. *Der Monomorphismus* $\iota_X \colon \mathrm{Gal}(N/M) \to G$ *ist genau dann ein Isomorphismus, wenn* $\iota_{\tilde{X}} \colon \mathrm{Gal}(N/K) \to G \rtimes H$ *ein Isomorphismus ist.*

Siehe auch [MS2, Proposition 4.3] und [Har, Lemma 3.9].

Beweis. Da $H^1(\mathrm{Gal}(M/K), \mathrm{GL}_n(M)) = 0$ (siehe [Ser, Lemma 1 in III.§1]), ist der Kozykel $\mathrm{Gal}(M/K) \xrightarrow{\alpha} H \to \mathrm{GL}_n(M)$ trivial. Es existiert also ein $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$, so dass für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ die Gleichung $Z^{-1} = \alpha(\sigma)\sigma(Z^{-1})$ gilt. Wir erhalten $\iota_Z = \alpha$. Setzt man nun $D := Z'Z^{-1}$, dann kann man nachrechnen, dass für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ die Gleichung $\sigma(D) = D$ gilt, d.h. D liegt in $M_n(K)$.

Wir müssen noch zeigen, dass $M = K(Z)$ gilt. Dies ist der Fall, weil ein beliebiges $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K(Z))$ die Identität sein muss, denn es erfüllt die Gleichung $\alpha(\sigma) = \iota_Z(\sigma) = Z^{-1}\sigma(Z) = 1$.

Zur 2. Aussage: Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\tilde{A}$ eine Invariante der Differentialautomorphismen aus $\mathrm{Gal}(M/K)$ ist. Es gilt also $\tilde{A} \in M_n(K)$. Mit einer weiteren kleinen Rechnung sieht man, dass $\tilde{X}$ eine Fundamentalmatrix von $\tilde{A}$ ist. Es folgt, dass $K(\tilde{X})/K$ eine PVE ist und, dass $K(\tilde{X}) \subseteq N$ gilt. Da $K(\tilde{X}) \cdot M = M(\tilde{X}) = M(X) = N$, ist nach Bemerkung 1.3.3 auch N/K eine PVE.

Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K(\tilde{X}))$ beliebig, dann gilt

$$ZX = \tilde{X} = \sigma(\tilde{X}) = \sigma(Z)\sigma(X) = Z\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X).$$

Daraus folgt $X \cdot \sigma(X)^{-1} = \iota_Z(\sigma|_M)$. Da die linke Seite dieser Gleichung in $G(N)$ und die Rechte in $H \leq \mathrm{GL}_n(C)$ liegt, impliziert dies $\sigma|_M = 1$ und $\sigma(X) = X$. Wir schließen daraus, dass $\sigma = 1$ ist. Dies zeigt, dass $\mathrm{Gal}(N/K(\tilde{X}))$ trivial ist, d.h. $N = K(\tilde{X})$.

Zur 3. Aussage: Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$ beliebig. Wir erhalten:

$$\iota_{\tilde{X}}(\sigma) = \tilde{X}^{-1}\sigma(\tilde{X}) = X^{-1}Z^{-1}\sigma(Z)\sigma(X) = X^{-1}\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X).$$

Hieraus sehen wir, dass $\iota_{\tilde{X}}(\sigma)$ in $(G \rtimes H)(N)$ liegt. Da aber auch $\iota_{\tilde{X}}(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(C)$, folgt die Behauptung.

Zur 4. Aussage: Wir halten zuerst fest, dass für ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/M)$ aus der dritten Aussage $\iota_{\tilde{X}}(\sigma) = \iota_X(\sigma)$ folgt.

Ist $\iota_{\tilde{X}}$ ein Isomorphismus, dann hat $\mathrm{Gal}(N/M)$ die gleiche Dimension wie G. Da G zusammenhängend ist, impliziert dies, dass ι_X ein Isomorphismus sein muss.

Sei nun umgekehrt ι_X ein Isomorphismus. Dann gilt

$$\iota_{\tilde{X}}(\mathrm{Gal}(N/M)) = \iota_X(\mathrm{Gal}(N/M)) = G.$$

Aus der H-Äquivarianz von A folgt, dass für ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$ gilt

$$(\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X)\iota_Z(\sigma|_M)^{-1})' = A \cdot (\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X)\iota_Z(\sigma|_M)^{-1})$$

D.h. auch $\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X)\iota_Z(\sigma|_M)^{-1} \in G(N)$ ist eine Fundamentalmatrix von A. Es existiert also ein $C_\sigma \in G$, so dass $\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X)\iota_Z(\sigma|_M)^{-1} = X \cdot C_\sigma$.

Wir haben einen Kozykel $\sigma \mapsto C_\sigma$ in $Z^1(\mathrm{Gal}(N/K), G)$ definiert. Für einen Differentialautomorphismus $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$ erhält man nun

$$\iota_{\tilde{X}}(\sigma) = X^{-1}\iota_Z(\sigma|_M)\sigma(X)\iota_Z(\sigma|_M)^{-1}\iota_Z(\sigma|_M) = C_\sigma \cdot \iota_Z(\sigma|_M).$$

Da bereits gezeigt wurde, dass G im Bild von $\iota_{\tilde{X}}$ liegt, muss dies auch für H und damit auch für $G \rtimes H$ gelten. Also ist $\iota_{\tilde{X}}$ ein Isomorphismus. □

Definition 4.1.3. *Sei H eine endliche Gruppe und G eine H-Gruppe mit semidirektem Produkt $G \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Sei N/K eine PVE und M der algebraische Abschluss von K in N.*

*Der Monomorphismus $\alpha\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to G \rtimes H$ heißt H-**effektiv**, wenn folgende Bedingungen gelten.*

1. *Es existiert ein $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$, so dass $\iota_Z\colon \mathrm{Gal}(M/K) \to H$ ein Isomorphismus ist.*
2. *Es existiert ein bezüglich ι_Z H-äquivariantes Element $A \in \mathfrak{g}(M)$ mit Fundamentalmatrix $X \in G(N)$.*
3. *Für $\tilde{X} := Z \cdot X \in \mathrm{GL}_n(N)$ gilt $\alpha = \iota_{\tilde{X}}$.*

*Ist α ein H-effektiver Isomorphismus, dann sagen wir auch das semidirekte Produkt $G \rtimes H$ sei H-**effektiv realisiert**.*

Die nächste Bemerkung ist eine weitere Version von [MS2, Proposition 4.1] und [Har, Proposition 3.7]. Analog zum zusammenhängenden Fall gilt (vergl. Bemerkung 3.2.4):

Bemerkung 4.1.4. *Sei $\mathrm{cd}(K) \leq 1$ und N/K eine PVE. Sei H eine endliche Gruppe und G eine H-Gruppe. Dann gilt:*

Jeder Isomorphismus $\alpha\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to G \rtimes H$ ist H-effektiv.

Beweis. Sei $A_1 \in M_n(K)$ eine Matrix, die N/K definiert mit Fundamentalmatrix $X_1 \in \mathrm{GL}_n(N)$. Indem wir die Inklusion

$$G \rtimes H \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathrm{Gal}(N/K) \xrightarrow{\iota_{X_1}} \mathrm{GL}_n(C)$$

wählen, können wir annehmen, dass $\iota_{X_1} = \alpha$ gilt.

Der algebraische Abschluss M von K in N kann auch durch $M = N^{\alpha^{-1}(G)}$ charakterisiert werden. Es gilt $\alpha(\mathrm{Gal}(N/M)) = G$. Also exisitiert genau ein Isomorphismus $\mathrm{Gal}(M/K) \to H$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(N/K) & \xrightarrow{\alpha} & G \rtimes H \\ {\scriptstyle \mathrm{res}}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gal}(M/K) & \xrightarrow{\cong} & H \end{array}$$

kommutiert. Sei $\kappa\colon \mathrm{Gal}(M/K) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(N/K)$ der homomorphe Schnitt, so dass der Morphismus $\mathrm{Gal}(M/K) \to H \hookrightarrow G \rtimes H$ mit $\alpha \circ \kappa$ übereinstimmt. Wegen Bemerkung 4.1.2, gibt es eine Matrix $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$ und einen Isomorphismus $\iota_Z\colon \kappa(\mathrm{Gal}(M/K)) \to H$, so dass ι_Z die Restriktion von α auf $\kappa(\mathrm{Gal}(M/K))$ ist.

Wir setzen $X_2 := Z^{-1} \cdot X_1$. Dann liegt die Matrix

$$A_2 := X_2' \cdot X_2^{-1} = Z^{-1}A_1Z - Z^{-1}Z'$$

in $M_n(M)$. Für $\sigma \in \kappa(\mathrm{Gal}(M/K)) \leq \mathrm{Gal}(N/K)$ gilt:

$$\sigma(X_2) = \sigma(Z)^{-1}\sigma(X_1) = \iota_Z(\sigma)^{-1}Z^{-1}X_1\alpha(\sigma) = \iota_Z(\sigma)^{-1}X_2\iota_Z(\sigma).$$

Im Beweis von [Har, Proposition 3.7] wird die Existenz einer (bezüglich ι_Z) H-äquivarianten Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(M)$ gezeigt, so dass $A := B^{-1}A_2B - B^{-1}B'$ in $\mathfrak{g}(M)$ und die Fundamentalmatrix $X := B^{-1}X_2$ in $G(N)$ liegt. Es folgt die H-Äquivarianz von A bezüglich ι_Z.

Es bleibt noch die 3. Aussage von Definition 4.1.3 zu zeigen. Sei $\tilde{X} := ZX$. Für $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/M)$ gilt

$$\iota_{\tilde{X}}(\sigma) = X_2^{-1}BZ^{-1}ZB^{-1}\sigma(X_2) = \iota_{X_2}(\sigma) = \iota_{X_1}(\sigma) = \alpha(\sigma).$$

Für $\sigma \in \kappa(\mathrm{Gal}(M/K))$ gilt

$$\begin{aligned} \iota_{\tilde{X}}(\sigma) &= X_2^{-1}BZ^{-1}\sigma(Z)\sigma(B)^{-1}\sigma(X_2) \\ &= X_2^{-1}BZ^{-1}Z\iota_Z(\sigma) \cdot \iota_Z(\sigma)^{-1}B^{-1}\iota_Z(\sigma)\iota_Z(\sigma)^{-1}X_2\iota_Z(\sigma) \\ &= \iota_Z(\sigma) = \alpha(\sigma). \end{aligned}$$

Da $\mathrm{Gal}(N/K)$ von $\mathrm{Gal}(N/M)$ und $\kappa(\mathrm{Gal}(M/K))$ erzeugt wird, folgt $\iota_{\tilde{X}} = \alpha$. □

4.2 H-effektive Einbettungsprobleme

Definition 4.2.1. *Sei H eine endliche Gruppe. Seien $\overline{G}$, G H-Gruppen und $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \twoheadrightarrow G \rtimes H$ ein H-semidirekter Epimorphismus. Wir sagen dann auch, zu π gehörige Einbettungsprobleme seien H-**semidirekt**. Das H-semidirekte Einbettungsproblem*

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \rtimes H \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \rtimes H \\ & \mathrm{Gal}(N/K) \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

*heißt H-**effektiv**, wenn α H-effektiv ist. Eine Lösung*

$$\overline{\alpha}\colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \hookrightarrow \overline{G} \rtimes H$$

*des Einbettungsproblems heißt H-**effektiv**, wenn der Monomorphismus $\overline{\alpha}$ H-effektiv ist und für die beiden zu $\alpha, \overline{\alpha}$ gehörigen Isomorphismen $\iota_{\overline{Z}}$,ι_Z aus Definition 4.1.3 (1) die Gleichung $\pi \circ \iota_{\overline{Z}} = \iota_Z$ gilt.*

*Wir sagen, ein H-semidirekter Epimorphismus sei H-**effektiv einbettend** (über K), wenn alle zugehörigen H-effektiven Einbettungsprobleme eine eigentliche, H-effektive Lösung haben.*

Notation 4.2.2. *Sei H eine endliche Gruppe. Seien $\overline{G}$, G H-Gruppen mit semidirekten Produkten $\overline{G} \rtimes H \leq \mathrm{GL}_m(C)$ und $G \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Sei weiter ein H-semidirekter Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \to G \rtimes H$ gegeben. Ein zugehöriges H-effektives Einbettungsproblem läßt sich dann durch folgende Daten beschreiben:*

- *Eine PVE N/K.*
- *Eine Matrix $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$, so dass $\iota_Z\colon \mathrm{Gal}(M/K) \to H$ ein Isomorphismus ist (wobei M den algebraischen Abschluss von K in N bezeichnet).*
- *Eine bezüglich ι_Z H-äquivariante Matrix $A \in \mathfrak{g}(M)$ mit Fundamentalmatrix $X \in G(N)$.*
- *Einen Isomorphismus $\iota_{\tilde{X}}\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to G \rtimes H$, mit $\tilde{X} := ZX$.*

Mit π° bezeichnen wir wie in Abschnitt 2.7.2 den zusammenhängenden H-Epimorphismus $\pi|_{\overline{G}}$. Wir erhalten ein zugehöriges zusammenhängendes Einbettungsproblem über M:

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[r, two heads, "\pi^\circ"] & G \\ & \mathrm{Gal}(N/M) \arrow[u, "\iota_X"'] \end{tikzcd}$$

Sei $\overline{Z} \in \mathrm{GL}_m(M)$, so dass $\pi \circ \iota_{\overline{Z}} = \iota_Z$ (dies ist möglich wegen Aussage 1 von Bemerkung 4.1.2 und da $\pi|_H = \mathrm{id}$).

Bemerkung 4.2.3. *Sei ein H-semidirektes, H-effektives Einbettungsproblem in der Notation 4.2.2 gegeben.*

Sei $B \in (d\pi)^{-1}(A) \subseteq \overline{\mathfrak{g}}(M)$ eine (bezüglich $\iota_{\overline{Z}}$) H-äquivariante Matrix mit PVE $\overline{N}/M$ und Fundamentalmatrix $Y \in \overline{G}(\overline{N})$. Dann existiert eine Injektion $N \hookrightarrow \overline{N}$, so dass $\pi(Y) = X$ und die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[r, two heads, "\pi^\circ"] & G \\ \mathrm{Gal}(\overline{N}/M) \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[r, two heads, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Gal}(N/M) \arrow[u, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{G} \rtimes H \arrow[r, two heads, "\pi"] & G \rtimes H \\ \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \arrow[u, "\iota_{\tilde{Y}}"] \arrow[r, two heads, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Gal}(N/K) \arrow[u, "\iota_{\tilde{X}}"'] \end{tikzcd}$$

Hierbei haben wir $\tilde{Y} := \overline{Z}Y \in \mathrm{GL}_m(\overline{N})$ gesetzt.

$\iota_{\tilde{Y}}$ ist genau dann eine eigentliche Lösung des gegebenen Einbettungsproblems, wenn ι_Y eine eigentliche Lösung des zugehörigen zusammenhängenden Einbettungsproblems über M ist.

Beweis. Die Existenz einer Injektion $N \hookrightarrow \overline{N}$, so dass $\pi(Y) = X$ und das linke Diagramm kommutiert, folgern wir aus Bemerkung 3.2.6. Die 2. Aussage von Bemerkung 4.1.2 zeigt, dass $\overline{N}/K$ eine PVE ist, welche durch die Matrix $\overline{Z}'\overline{Z}^{-1} + \overline{Z}BZ^{-1}$ mit Fundamentalmatrix $\tilde{Y}$ definiert wird. Dass das Bild von $\iota_{\tilde{Y}}$ in $\overline{G} \rtimes H$ liegt, wird von Bemerkung 4.1.2 (3) impliziert. Wir müssen nun nur noch nachrechnen, dass auch das rechte Diagramm kommutiert. Sei dazu $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{N}/K)$ beliebig.

$$\begin{aligned}
(\pi \circ \iota_{\tilde{Y}})(\sigma) &= \pi(Y^{-1}\iota_{\overline{Z}}(\sigma|_M)\sigma(Y)) \\
&= \pi(Y)^{-1}\pi(\iota_{\overline{Z}}(\sigma|_M))\pi(\sigma(Y)) \\
&= X^{-1}\iota_Z(\sigma|_M)\sigma|_N(X) \\
&= \iota_{\tilde{X}}(\sigma|_N) = (\iota_{\tilde{X}} \circ \mathrm{res})(\sigma)
\end{aligned}$$

Wir haben dabei zweimal Bemerkung 4.1.2 (3) benutzt.

Der Zusatz folgt direkt aus der 4. Aussage von Bemerkung 4.1.2. □

4.3 H-effektive Frattini-Einbettungsprobleme

Sei in diesem Abschnitt H eine endliche Gruppe.

Bemerkung 4.3.1. *Jedes H-semidirekte, H-effektive Einbettungsproblem besitzt eine H-effektive Lösung.*

Beweis. Wir geben uns ein H-semidirektes, H-effektives Einbettungsproblem in der Notation 4.2.2 vor. Wir wählen ein $B \in (d\pi)^{-1}(A) \subseteq \overline{\mathfrak{g}}(M)$ und definieren

$$\tilde{B} := \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \iota_{\overline{Z}}(\sigma)\sigma(B)\iota_{\overline{Z}}(\sigma)^{-1}.$$

Nach Konstruktion liegt $\tilde{B}$ in $\overline{\mathfrak{g}}(M)$ und ist H-äquivariant bezüglich $\iota_{\overline{Z}}$. Da $\pi \circ \iota_{\overline{Z}} = \iota_Z$, gilt aber auch

$$\begin{aligned} d\pi(\tilde{B}) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \pi(\iota_{\overline{Z}}(\sigma)) d\pi(\sigma(B)) \pi(\iota_{\overline{Z}}(\sigma))^{-1} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \iota_Z(\sigma)\sigma(A)\iota_Z(\sigma)^{-1} = A, \end{aligned}$$

denn A ist H-äquivariant bezüglich ι_Z. Die Behauptung folgt dann aus Bemerkung 4.2.3. □

Daraus erhält man sofort:

Korollar 4.3.2. *Jeder H-semidirekte Frattini-Epimorphismus ist H-effektiv einbettend.*

4.4 H-effektive, direkt H-zerfallende Einbettungsprobleme

Sei in diesem Abschnitt H eine endliche Gruppe. Wir beginnen mit der folgenden einfach nachzurechnenden Beobachtung.

Bemerkung 4.4.1. *Sei H eine endliche Gruppe, G eine H-Gruppe mit semidirektem Produkt $G \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Sei weiter $m \in \mathbb{N}$ und $\Delta_m \colon \mathrm{GL}_n(C) \to \mathrm{GL}_{nm}(C)$ die Diagonalabbildung $\sigma \mapsto \mathrm{diag}(\sigma, \ldots, \sigma)$. Dann gelten:*

1. *Durch Δ_m wird in natürlicher Weise eine H-Gruppe G^m mit semidirektem Produkt $G^m \rtimes H \leq \mathrm{GL}_{nm}(C)$ definiert. Die m kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_i \colon G^m \rtimes H \to G \rtimes H$ sind H-semidirekt.*
2. *Ist M/K eine PVE und $\iota_Z \colon \mathrm{Gal}(M/K) \to H \leq \mathrm{GL}_n(C)$ mit $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$ ein Isomorphismus, dann gilt $\Delta_m \circ \iota_Z = \iota_{\Delta_m(Z)}$ mit $\Delta_m(Z) \in \mathrm{GL}_{nm}(M)$. Ist $A \in \mathrm{Lie}(G^m)(M)$ H-äquivariant bezüglich $\iota_{\Delta_m(Z)}$, dann ist $d\mathrm{pr}_i(A) \in \mathfrak{g}(M)$ bezüglich ι_Z H-äquivariant.*

Die folgende Bemerkung ist eine H-semidirekte Variante von Bemerkung 3.4.2.

Bemerkung 4.4.2. *Sei ein H-semidirektes, direkt H-zerfallendes, H-effektives Einbettungsproblem mit Kern W in der Notation 4.2.2 gegeben (direkt H-zerfallend heißt, dass $\overline{G} = W \times G$ gilt). Ist für $k := \dim G+1$ das Produkt W^k bezüglich $\Delta_k \circ \iota_{\overline{Z}}$ H-äquivariant realisierbar über M, dann besitzt das Einbettungsproblem eine eigentliche, H-effektive Lösung.*

Beweis. Sei $B \in \mathrm{Lie}(W^k)(M)$ eine bezüglich $\Delta_k \circ \iota_{\overline{Z}}$ H-äquivariante Matrix, die W^k über M realisiert. Wir identifizieren, dank des homomorphen Schnitts, G als Untergruppe von $\overline{G}$ und $\mathfrak{g}(M)$ als Unterliealgebra von $\overline{\mathfrak{g}}(M)$. Da π H-zerfallend ist, ist A dann auch H-äquivariant bezüglich $\iota_{\overline{Z}}$.

Der Beweis von Bemerkung 3.4.2 zeigt, dass ein i existiert, so dass $d\mathrm{pr}_i(B)+A \in \overline{\mathfrak{g}}(M)$ eine eigentliche Lösung des zugehörigen zusammenhängenden Einbettungsproblems über M induziert. Da nach Bemerkung 4.4.1 $d\mathrm{pr}_i(B) + A$ bezüglich $\iota_{\overline{Z}}$ H-äquivariant ist, erhält man nach Bemerkung 4.2.3 auch eine eigentliche, H-effektive Lösung des gegebenen Einbettungsproblems. $\square$

Wir betrachten nun H-semidirekte Einbettungsprobleme mit endlichem Kokern. In der Notation 4.2.2 heißt dies, dass G die triviale Gruppe ist. Der Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \to H$ ist dann automatisch H-zerfallend. Aus Bemerkung 4.4.2 folgt dann sofort:

Korollar 4.4.3. *Sei H eine endliche Gruppe, W eine H-Gruppe mit semidirektem Produkt $W \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$. Sind für alle $k \in \mathbb{N}$ die Epimorphismen $W^k \rtimes H \to H$ H-effektiv einbettend, dann sind alle direkt H-zerfallenden, H-semidirekten Epimorphismen mit Kern W H-effektiv einbettend.*

4.5 H-effektive, H-zerfallende Einbettungsprobleme mit Toruskern

Sei in diesem Abschnitt H eine endliche Gruppe.

Bemerkung 4.5.1. *Seien alle H-semidirekten Epimorphismen von der Form $T \rtimes H \to H$ mit Toruskern T H-effektiv einbettend über K.*

Dann sind alle H-semidirekten, H-zerfallenden Epimorphismen mit Toruskern H-effektiv einbettend über K.

Beweis. Nach Bemerkung 2.7.4 sind die Voraussetzungen für Korollar 4.4.3 erfüllt. $\square$

Korollar 4.5.2. *Sei $K = C(t)$. Jedes H-semidirekte, H-zerfallende Einbettungsproblem mit Toruskern hat eine eigentliche Lösung über K.*

Beweis. Da $\mathrm{cd}(K) \leq 1$, ist nach Bemerkung 4.1.4 jedes H-semidirekte Einbettungsproblem H-effektiv. Das Korollar folgt aus Bemerkung 4.5.1 und [Har, Lemma 4.7]. $\square$

4.6 H-effektive, H-zerfallende Einbettungsprobleme mit halbeinfachem Kern

Sei in diesem Abschnitt H eine endliche Gruppe.

Bemerkung 4.6.1. *Seien alle H-semidirekten Epimorphismen von der Form $S \rtimes H \to H$ mit halbeinfachem Kern S H-effektiv einbettend über K.*

Dann sind alle H-semidirekten, H-zerfallenden Epimorphismen mit halbeinfachem Kern H-effektiv einbettend über K.

Beweis. Wir geben uns einen H-semidirekten, H-zerfallenden Epimorphismus $\pi\colon \overline{G} \rtimes H \to G \rtimes H$ mit halbeinfachem Kern S vor. Da $Z(S)$ eine charakteristische Untergruppe von S ist, zerlegen wir mit Lemma 2.7.3 π in den H-semidirekten Frattini-Epimorphismus $\overline{G} \rtimes H \to \overline{G}/Z(S) \rtimes H$ und den H-zerfallenden, H-semidirekten Epimorphismus $\overline{G}/Z(S) \rtimes H \to G \rtimes H$ mit halbeinfachem Kern $S/Z(S)$.

Der Frattini-Epimorphismus ist H-effektiv einbettend nach Korollar 4.3.2. Mit Lemma 2.4.1 sehen wir, dass die Gruppe $S/Z(S)$ ein triviales Zentrum hat. Aus Bemerkung 2.7.5 und Korollar 4.4.3 folgt dann, dass auch der H-zerfallende Epimorphismus H-effektiv einbettend ist (beachte, dass das Produkt halbeinfacher Gruppen wieder halbeinfach ist). Schließlich folgt, dass π H-effektiv einbettend ist. □

4.7 H-effektive, H-zerfallende Einbettungsprobleme mit unipotentem Kern

Sei in diesem Abschnitt H eine endliche Gruppe.

Satz 4.7.1. *Sei $0 < \operatorname{trdeg}_C K < \infty$. Jedes H-semidirekte, H-zerfallende, H-effektive Einbettungsproblem mit minimalem, unipotentem Kern hat eine eigentliche, H-effektive Lösung.*

Beweis. Sei ein H-semidirektes, H-effektives Einbettungsproblem mit nichttrivialem, minimalem, unipotentem Kern U in der Notation 4.2.2 gegeben.

Wir werden das zugehörige zusammenhängende Einbettungsproblem über M wie in Abschnitt 3.3.5 lösen, wobei wir zusätzlich auf die H-Äquivarianz achten müssen.

Vergleiche im folgenden mit Notation 3.5.1. Wir identifizieren, dank des homomorphen Schnitts, G als Untergruppe von $\overline{G}$ und $\mathfrak{g}(M)$ als Unterliealgebra von $\overline{\mathfrak{g}}(M)$. Da π H-zerfallend ist, ist A dann auch H-äquivariant bezüglich $\iota_{\overline{Z}}$. Da U abelsch ist, exisitiert ein Isomorphismus $\phi\colon U \to C^k$ mit zugehörigem M-Liealgebraisomorphismus $d\phi\colon \mathfrak{u}(M) \to M^k$. Der Morphismus $p\colon G \rtimes H \to \operatorname{Aut} U$ bezeichne die Konjugationsoperation von $G \rtimes H$ auf U. Sei q der zusammengesetzte Morphismus $G \rtimes H \xrightarrow{p} \operatorname{Aut}(U) \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}_k(C)$, wobei der Isomorphismus von ϕ induziert wird. Sei $W := q(X)$ die Fundamentalmatrix von $dq(A)$.

Es gilt (vergl. Beweis von Lemma 3.5.3) für alle $g \in (G \rtimes H)(N)$ die Gleichung

$$d\phi \circ p(g) = q(g) \cdot d\phi. \tag{4.1}$$

Wir rechnen jetzt nach, wie die H-Äquivarianz vermöge ϕ transformiert wird. Für ein $B \in \mathfrak{u}(M)$, $b := d\phi(B)$ und $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ gelten

$$\begin{aligned} d\phi(\iota_{\overline{Z}}(\sigma)^{-1} B \iota_{\overline{Z}}(\sigma)) &= (d\phi \circ p(\iota_{\overline{Z}}(\sigma)^{-1}))(B) \\ &\overset{4.1}{=} (q(\iota_{\overline{Z}}(\sigma)^{-1}) \cdot d\phi)(B) \\ &= q(\iota_{\overline{Z}}(\sigma)^{-1}) \cdot b \end{aligned}$$

und $d\phi(\sigma(B)) = \sigma(d\phi(B)) = \sigma(b)$. Die Matrix B ist also genau dann H-äquivariant (bezügl. $\iota_{\overline{Z}}$), wenn für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ die Gleichung $\sigma(b) = q(\iota_{\overline{Z}}(\sigma)^{-1}) \cdot b$ gilt.

Nach Aussage 1 von Bemerkung 4.1.2 existiert eine Matrix $\hat{Z} \in \mathrm{GL}_k(M)$, so dass $\iota_{\hat{Z}} = q \circ \iota_{\overline{Z}}$ gilt. Dann gilt für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ die Gleichung $\sigma(\hat{Z}^{-1}) = q(\iota_{\overline{Z}}(\sigma)^{-1})\hat{Z}^{-1}$.

Sei $\tilde{b}$ eine Spalte von $\hat{Z}^{-1}$, dann ist $\tilde{b} \neq 0$ und $d\phi^{-1}(\tilde{b})$ eine H-äquivariante Matrix. Sei nun w eine Zeile von W^{-1} mit $w \cdot \tilde{b} \neq 0$, dann zeigt Satz 3.5.6, dass ein $c \in C$ existiert, so dass $Y' = w \cdot \tilde{b} \cdot \frac{1}{t-c}$ keine Lösung in der Differentialkörpererweiterung N von $C(t)$ hat (wegen Lemma 3.5.10 dürfen wir $C(t) \subseteq K$ mit $t' = 1$ voraussetzen). Wir setzen $b := \tilde{b} \cdot \frac{1}{t-c}$. Dann ist auch $d\phi^{-1}(b) \in \mathfrak{u}(M)$ H-äquivariant und die Gleichung $Y' = W^{-1} \cdot b$ hat keine Lösung in N^k.

Satz 3.5.2 zeigt, dass das zugehörige zusammenhängende Einbettungsproblem über M eine von der H-äquivarianten Matrix $d\phi^{-1}(b) + A \in \overline{\mathfrak{g}}(M)$ (mit Fundamentalmatrix $Y \in \overline{G}(\overline{N})$) induzierte Lösung $\iota_Y \colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/M) \to \overline{G}$ hat, für die $\overline{N} \supsetneq N$ gilt. Nun sieht man mit Bemerkung 4.2.3, dass der Monomorphismus $\iota_{\tilde{Y}} \colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/K) \to \overline{G} \rtimes H$ mit $\tilde{Y} = \overline{Z}Y$ eine Lösung des gegebenen H-semidirekten Einbettungsproblems ist. Wegen Bemerkung 3.5.4, ist diese Lösung eigentlich. □

Korollar 4.7.2. *Sei $0 < \mathrm{trdeg}_C K < \infty$. Jedes H-semidirekte, H-zerfallende, H-effektive, levistabile Einbettungsproblem mit unipotentem Kern hat eine eigentliche, H-effektive Lösung.*

Beweis. Bemerkung 2.7.13 und Korollar 4.3.2 reduzieren die Aussage auf Einbettunsprobleme mit minimalem, unipotentem Kern und wir können Satz 4.7.1 anwenden. □

4.8 H-effektive Realisierung über Funktionenkörpern

Satz 4.8.1. *Sei K ein Funktionenkörper in endlich vielen Variablen über C. Sei H eine endliche Gruppe und G eine H-Gruppe.*

Dann ist das semidirekte Produkt $G \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$ H-effektiv realisierbar über K.

Beweis. Sei $m := \mathrm{trdeg}_C K$. Nach dem noetherschen Normalisierungssatz existiert eine Transzendenzbasis $t, u_1, \ldots, u_{m-1}$ von K über C, so dass K eine endliche Erweiterung von $C(t, u_1, \ldots, u_{m-1})$ ist. Wir dürfen wegen Lemma 3.5.10 annehmen, dass $t' = 1$ und $C(t) \subseteq K$ eine Differentialkörpererweiterung ist.

Sei L der algebraische Abschluss von $C(t)$ in K. Als erstes zeigen wir, dass $L/C(t)$ eine endliche Körpererweiterung ist. Da die Elemente $u_1, \ldots, u_{m-1}$

auch algebraisch unabhängig über L sind, zeigt [Lan, VIII, Proposition 3.3], dass über $C(t)$ linear unabhängige Elemente dann auch linear unabhängig über $C(t, u_1, \ldots, u_{m-1})$ sind. Da $K/C(t, u_1, \ldots, u_{m-1})$ eine endliche Erweiterung ist, folgt die Endlichkeit von $L/C(t)$.

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass man $G \rtimes H \leq \mathrm{GL}_n(C)$ über $C(t)$ durch eine PVE $N/C(t)$ H-effektiv realisieren kann, so dass für den algebraischen Abschluss M von $C(t)$ in N zusätzlich $M \cap K = C(t)$ und $KM \cap N = M$ gelten (Hierbei kann man wegen Bemerkung 1.3.3 alle Körper als Teilkörper eines Kompositums $N \cdot K$ ansehen).

Wir gehen in drei Schritten vor:

Schritt 1. Realisierung einer linearen algebraischen Gruppe über $C(t)$ (siehe auch [Har]):

Sei W eine lineare algebraische Gruppe. Nach [Mos, 1. Theorem] kann man $W = R_u(W) \rtimes W_v$ mit einer vollständig reduziblen Gruppe W_v schreiben. Wegen Satz 1.5.6 existiert eine endliche Untergruppe $\tilde{H}$ von W_v, so dass $W_v = L \cdot \tilde{H}$ gilt, wobei L die Zusammenhangskomponente von W_v bezeichnet. Wir erhalten den Epimorphismus

$$(R_u(W) \rtimes L) \rtimes \tilde{H} \cong R_u(W) \rtimes (L \rtimes \tilde{H}) \twoheadrightarrow R_u(W) \rtimes W_v = W$$

und es reicht zu zeigen, dass man $(R_u(W) \rtimes L) \rtimes \tilde{H}$ über $C(t)$ realisieren kann. L ist eine Leviuntergruppe von $R_u(W) \rtimes L = W^\circ$. Daraus folgt, dass W° eine levistabile $\tilde{H}$-Gruppe ist. Also ist auch der $\tilde{H}$-zerfallende, $\tilde{H}$-semidirekte Epimorphismus $W^\circ \rtimes \tilde{H} \twoheadrightarrow L \rtimes \tilde{H}$ mit unipotentem Kern levistabil. Nach Korollar 4.7.2 ist er also $\tilde{H}$-effektiv einbettend. Da nach [Har, Proposition 4.8] $L \rtimes \tilde{H}$ $\tilde{H}$-effektiv realisierbar ist, gilt dies also auch für $W^\circ \rtimes \tilde{H}$.

Schritt 2. Realisierung von $G \rtimes H$*, so dass* $M \cap K = C(t)$ *gilt*:

Sei $k := [L : C(t)] + 1$. Wir bilden die kanonische direkte Produktdarstellung $(G \rtimes H)^k \leq \mathrm{GL}_{nk}(C)$. Nach dem ersten Schritt existiert eine PVE $N/C(t)$, so dass $\mathrm{Gal}(N/C(t)) \cong (G \rtimes H)^k$. Genau wie in der gewöhnlichen Galoistheorie sieht man, dass die k Projektionen $(G \rtimes H)^k \twoheadrightarrow G \rtimes H$ Picard-Vessiot-Erweiterungen $N_i/C(t)$ mit $\mathrm{Gal}(N_i/C(t)) \cong G \rtimes H$ und $N_i \cap \prod_{j \neq i} N_j = C(t)$ definieren (vergl. [Lan, Chapter VI, Corollary 1.16]). Sei M_i der algebraische Abschluss von $C(t)$ in N_i. Dann gilt auch $M_i \cap \prod_{j \neq i} M_j = C(t)$. Aus Dimensionsgründen existiert also ein $1 \leq j \leq k$, so dass $M_j \cap L = C(t)$. Wir erhalten $M_j \cap K = C(t)$.

Schritt 3. H*-effektive Realisierung von* $G \rtimes H$*, so dass* $M \cap K = C(t)$ *und* $KM \cap N = M$ *gelten*:

Wir bilden nun vermöge Δ_m wie in Bemerkung 4.4.1 das semidirekte Produkt $G^m \rtimes H \leq \mathrm{GL}_{nm}(C)$ und wenden Schritt 2 darauf an. Es existiert also eine Realisierung $N/C(t)$ von $G^m \rtimes H$, so dass für den algebraischen Abschluss M von $C(t)$ in N die Gleichung $M \cap K = C(t)$ gilt.

Dank Bemerkung 4.1.4 ist die gefundene Realisierung sogar H-effektiv. Wenden wir Bemerkung 4.2.3 auf die Identität $G^m \rtimes H \to G^m \rtimes H$ an, dann dürfen wir ein $\overline{Z} \in \mathrm{GL}_{nm}(M)$ wählen, so dass $\iota_{\overline{Z}}$ mit einem gegeben Isomorphismus $\mathrm{Gal}(M/C(t)) \to H \leq \mathrm{GL}_{nm}(C)$ übereinstimmt (vgl. mit letztem Satz in Notation 4.2.2). Dank der speziellen Darstellung von H gibt es nach Bemerkung 4.1.2 eine Matrix $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$, so dass $\overline{Z} := \Delta_m(Z) \in \mathrm{GL}_{nm}(M)$ das Gewünschte leistet. Außerdem existiert eine bezüglich $\iota_{\Delta_m(Z)}$ H-äquivariante Matrix $A \in \mathrm{Lie}(G^m)(M)$ mit Fundamentalmatrix $X \in G^m(N)$, so dass $\iota_{\tilde{X}} \colon \mathrm{Gal}(N/C(t)) \to G^m \rtimes H$ mit $\tilde{X} := \Delta_m(Z)X$ ein Isomorphismus ist.

Seien pr_i die Projektionen $G^m \rtimes H \to G \rtimes H$ und $A_i := dpr_i(A)$. Dann ist laut Bemerkung 4.4.1 die Matrix A_i H-äquivariant bezüglich ι_Z. Für alle $1 \leq i \leq m$ bezeichnen wir mit N_i/M die durch A_i definierte PVE. Es ist $X_i := pr_i(X) \in G(N_i)$ eine Fundamentalmatrix von A_i und $\iota_{X_i} \colon \mathrm{Gal}(N_i/M) \to G$ ein Isomorphismus. Der Körper M ist auch der algebraische Abschluss von $C(t)$ in N_i und es gilt $K \cap N_i = C(t)$. Bemerkung 4.1.2 zeigt, dass jedes $1 \leq i \leq m$ eine H-effektive Realisierung von $G \rtimes H$ liefert.

Es gilt

$$\mathrm{trdeg}_M(N \cap MK) \leq \mathrm{trdeg}_M(MK) = \mathrm{trdeg}_{C(t)}K = m - 1. \qquad (4.2)$$

Angenommen, für alle $1 \leq i \leq m$ wäre $N_i \cap MK \neq M$.

Da M algebraisch abgeschlossen in N_i ist, gilt $\mathrm{trdeg}_M(N_i \cap MK) \geq 1$. Wie im Beweis von Bemerkung 3.4.2 sieht man, dass $\mathrm{trdeg}_M N = \sum_i \mathrm{trdeg}_M N_i$ gilt. Es folgt $\mathrm{trdeg}_M(N \cap MK) \geq m$, im Widerspruch zu Gleichung 4.2.

Es existiert also ein i mit $N_i \cap MK = M$.

Wir haben bisher folgendes gezeigt:

Es existiert eine PVE $N/C(t)$, so dass für den algebraischen Abschluss M von $C(t)$ in N die Gleichungen $M \cap K = C(t)$ und $KM \cap N = M$ gelten. Es existiert ein $Z \in \mathrm{GL}_n(M)$, eine bezüglich $\iota_Z \colon \mathrm{Gal}(M/K) \to H$ H-äquivariante Matrix $A \in \mathfrak{g}(M)$ die N/M definiert und eine Fundamentalmatrix $X \in G(N)$ von A, so dass $\iota_{\tilde{X}} \colon \mathrm{Gal}(N/C(t)) \to G \rtimes H$ mit $\tilde{X} = ZX$ ein Isomorphismus ist.

Wir bilden ein Kompositum $\overline{N} = KN$ und setzen $\overline{M} := KM$. Es folgt, dass $\overline{N}/\overline{M}$ eine durch $A \in \mathfrak{g}(\overline{M})$ definierte PVE ist und, dass $\overline{N} = \overline{M}(X)$ gilt. Da $\overline{M} \cap N = M$ folgt aus dem Beweis von Bemerkung 3.2.8, dass

$$\mathrm{Gal}(\overline{N}/\overline{M}) = \mathrm{Gal}(KMN/KM) \cong \mathrm{Gal}(N/M) \xrightarrow{\iota_X} G$$

mit dem Isomorphismus $\iota_X \colon \mathrm{Gal}(\overline{N}/\overline{M}) \to G$ übereinstimmt.

Die Matrix $A \in \mathfrak{g}(\overline{M})$ ist H-äquivariant bezüglich

$$\mathrm{Gal}(\overline{M}/K) \cong \mathrm{Gal}(M/C(t)) \xrightarrow{\iota_Z} H.$$

Hier erhält man den ersten Isomorphismus wegen $M \cap K = C(t)$ aus der gewöhnlichen Galoistheorie. Die Behauptung folgt nun mit Bemerkung 4.1.2. $\square$

Das folgende Theorem ist eine Verallgemeinerung von [Har, Theorem 4.17]:

Theorem 3. *Sei K ein Funktionenkörper in endlich vielen Variablen über C. Dann ist jede lineare algebraische Gruppe als Differentialgaloisgruppe über K realisierbar.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 4.8.1 und Lemma 2.7.7. $\square$

Literaturverzeichnis

[Bor] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, 2nd enlarged edition, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[BS] A. Borel und J.-P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comment. Math. Helv. **39** (1964), 111-164.

[FJ] M. D. Fried und M. Jarden, *Field Arithmetic*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986.

[Har] J. Hartmann, *On the inverse problem in differential Galois theory*, Dissertation, Heidelberg, 2002.

[Hup] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **134**, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983.

[Hum] J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981.

[Ko1] J. Kovacic, *The inverse problem in the Galois theory of differential fields*, Ann. of Math. **89** (1969), 583-608.

[Ko2] J. Kovacic, *On the inverse problem in the Galois theory of differential fields*, Ann. of Math. **93** (1971), 269-284.

[Kol] E. R. Kolchin, *Algebraic groups and algebraic dependence*, Amer. J. Math. **90** (1968), 1151-1164.

[Lan] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, third edition, 1993.

[Mag] A. R. Magid, *Lectures on Differential Galois Theory*, volume 7, University Lecture Series, American Mathematical Society, 1994.

[Mat] B. H. Matzat, *Differential Galois Theory in Positive Characteristic*, Preprint 2001-35, IWR, 2001.

[MS1] C. Mitschi, M. F. Singer, *Connected linear groups as differential Galois groups*, J. Algebra **184** (1996), 333-361.

[MS2] C. Mitschi, M. F. Singer, *Solvable-by-Finite Groups as Differential Galois Groups*, Preliminary Version, 2000.

[Mos] G. D. Mostow, *Fully reducible subgroups of algebraic groups*, Amer. J. Math., **78** (1956), 200-221.

[Neu] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992.

[PR] V. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press, Pure and Applied Mathematics **139**.

[PS] M. van der Put, M. F. Singer, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **328**, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2003.

[Ser] J.-P. Serre, *Galois Cohomology*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997.

[Spr] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser, Boston, 2nd edition, 1998.