INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen

Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Tobias Horn

aus Röslau

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Februar 2005

Instabile rationale Konjugationsklassen in reduktiven Gruppen

Erster Gutachter: Prof. Dr. Rainer Weissauer

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Eberhard Freitag

„Und ehrlich gesagt“, fügte der alte Logiker hinzu, während er sich diskret den Kreidestaub von den Händen klopfte, die in ihrer scheuen Schmalheit den Eindruck machten, nie eine Frau liebkost zu haben, am Ende eines langen und verschwitzten Beweises, „ehrlich gesagt habe ich nie verstanden, warum gerade die Existenz als so wichtig gelten soll. Einhörner und imaginäre Zahlen kommen auch so zu recht [. . .] Und den Rest behandeln wir in der nächsten Stunde.“

(Lars Gustafsson)

Abstract

Let G be a connected, quasi-split, reductive group over a perfect field K of good characteristic. Steinberg and Kottwitz study whether a rational conjugacy class x in G contains an element of $\mathrm{G(K)}$. Their approach investigates the conjugacy class x in the simply connected cover $\mathrm{G_{sc}}$ of G.

The main purpose of this paper is to give a different second approach for quasi-split, semisimple groups. First of all we show that each rational conjugacy class of a connected, split, semisimple group contains an element of $\mathrm{G(K)}$. This result leads to a classification of all rational conjugacy classes in connected, quasi-split, simple groups which have no element of $\mathrm{G(K)}$. They are classified by the cup product of both approaches.

Zusammenfassung

Sei G eine zusammenhängende quasizerfallende reduktive Gruppe über einem perfekten Körper K und sei die Charakteristik von K gut. Steinberg und Kottwitz untersuchen die Frage, ob eine rationale Konjugationsklasse x ein Element aus $\mathrm{G(K)}$ enthält. Hierbei studieren sie die Konjugationsklasse in der einfach zusammenhängenden Überlagerung $\mathrm{G_{sc}}$ von G.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen weiteren Zugang für quasizerfallende halbeinfache Gruppen anzugeben. Zu allererst beweisen wir, daß eine rationale Konjugationsklasse in einer zusammenhängenden zerfallenden Gruppe G ein Element aus $\mathrm{G(K)}$ besitzt. Dieses Resultat führt zu einer Klassifikation aller rationaler Konjugationsklassen in zusammenhängenden, quasizerfallenden, einfachen Gruppen, die kein rationales Element enthalten. Das Cupprodukt beider Zugänge beschreibt dies.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

K, L	vollkommene Körper
$\overline{\mathrm{K}}$	algebraischer Abschluß von K
K_s	separable Hülle von K
$\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K}),\ \Gamma$	absolute Galoisgruppe von K
G	reduktive, halbeinfache bzw. einfache Gruppe über K
$\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$	derivierte Gruppe von G
G_{ad}	adjungierte Gruppe von G
G_{sc}	einfach zusammenhängende Überlagerung von G
$\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$	Menge der $\overline{\mathrm{K}}$-wertige Punkte von G
$\mathrm{G}(\mathrm{K})$	Menge der K-wertige Punkte in G
G_x	Zentralisator von x in G
R	Radikal von G
R_u	unipotentes Radikal von G
Z	Zentrum von G
B	Boreluntergruppe von G
T, S	maximaler Torus in G
Φ	Wurzelsystem von G
$\mathrm{W}(\mathrm{G})$	Weylgruppe von G
$\mathfrak{g}$	Liealgebra von G
$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$	multiplikative Gruppe
$\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$	additive Gruppe
$\pi_1(\mathrm{G})$	Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}(\mathrm{K}))$ von G
C_x	gewisse Untergruppe der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$
$\mathrm{H}^k(\mathrm{K}, *)$	k-te (Galois-)Kohomologiegruppe mit Werten in $*$
$\mathrm{Z}^k(\mathrm{K}, *)$	Gruppe der k-$\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$-Kozykel mit Werten in $*$
$c_{\sigma,\tau}$	Kozykel aus $\mathrm{Z}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$
$(c_{\sigma,\tau})$	Kohomologieklasse aus $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, Aussagen über die Existenz von rationalen Elementen in rationalen Konjugationsklassen von reduktiven algebraischen Gruppen zu treffen. Die Fragestellung, ob rationale Konjugationsklassen rationale Elemente enthalten, kann als Teil des Langlandsprogrammes angesehen werden. Hier entsteht die Frage in natürlicher Weise bei der Stabilisierung der Selbergschen Spurformel. Der Beweis des sogenannte Fundamentallemma ist jedoch ein schwieriges kombinatorisches Problem der lokalen harmonischen Analysis, das bislang nur in wenigen Spezialfällen verstanden ist. Es identifiziert eine geometrische Entwicklung und eine Spektralentwicklung der Selbergschen Spurformel. Anscheinend muß man die Spurformel in Termen von rationalen Konjugationsklassen und stabilen Distributionen schreiben und diese Term für Term vergleichen, um entsprechende Anwendungen für die Zahlentheorie zu erhalten [La79].

Für die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{G} := \mathrm{GL}_n$ über einem vollkommenen Körpern K ist für die Konjugation in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ und $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$, $\overline{\mathrm{K}}$ ein algebraischer Abschluß von K, neben der Tatsache, daß zwei Elemente aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ genau dann in $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$ konjugiert sind, wenn sie es bereits über $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ sind, die folgende Eigenschaft bekannt:

E Eine Konjugationsklasse x in $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$, die über K definiert ist, enthält bereits ein Element aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$.

Wir untersuchen in dieser Arbeit, für welche Gruppen G die Eigenschaft E erfüllt ist. Die einzigen hierzu in der Literatur vorhandenen Resultate sind die von Steinberg [St65] und ihre Verallgemeinerung von Kottwitz [Ko82]. Im Fall, daß die Charakteristik von K gleich null ist, gibt Kottwitz für reduktive Gruppen ein notwendiges und hinreichendes kohomologisches Kriterium in Termen der zweiten Kohomologiegruppe mit Werten in einer gewissen Untergruppe C_x der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ an. Eine praktische Anwendung der durch Kottwitz gegebenen Obstruktion stellt sich jedoch oft als schwierig dar.

Ohne Beweis bemerkt Kottwitz, daß die Aussagen nicht nur in Charakteristik null, sondern auch in sogenannter guter Charakteristik richtig sind. Wir führen in dieser Arbeit den Beweis aus. In den Anwendungen ist die Bedingung der guten Charakteristik meist erfüllt, da die Charakteristik p, abhängig von der Gruppe, nur für $2, 3, 5$ (oder $p|n+1$ für Gruppen vom Typ A_n) schlecht sein kann. Für halbeinfache rationale Konjugationsklassen ist diese Bedingung sogar unnötig.

Im Wesentlichen hat Steinberg für quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppen gezeigt, daß für Körper mit kohomologischer Dimension kleiner eins jede rationale

Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter besitzt, also diese Aussage insbesondere für endliche Körper richtig ist.

Wir zeigen:

Theorem (vgl. Theorem 22). *Sei* K *ein vollkommener Körper und* G *eine reduktive Gruppe über* K*. Darüber hinaus sei die Charakteristik von* K *gut. Falls die Konjugationsklasse von* $x \in \mathrm{G}$ *rational ist, dann gilt für die zugehörige Kohomologieklasse* $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$*: Die Konjugationsklasse von* x *enthält genau dann ein rationales Element, falls* α *trivial ist.*

Für halbeinfache, rationale Konjugationsklassen gibt es keine Einschränkung an die Charakteristik.

Wir zeigen dieses Resultat, in dem wir Kottwitz Beweis folgen und mit Hilfe des verallgemeinerten Satzes von Jacobson-Morozov [Pr95] für gute Charakteristik zeigen:

Theorem (vgl. Theorem 19). *Sei* K *ein vollkommener Körper und* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe über* K*. Darüber hinaus sei die Charakteristik von* K *gut. Dann besitzt jede unipotente rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

In den obigen Resultaten geht stets die Bedingung ein, daß die auftretenden Gruppen quasizerfallend sind. Nach Ergebnissen von Steinberg [St65] ist diese Bedingung für einfach zusammenhängende halbeinfache Gruppen notwendig. Wir zeigen, daß dies allgemeiner für reduktiven algebraische Gruppen der Fall ist.

Theorem (vgl. Theorem 9). *Sei* K *ein vollkommener Körper und* A *eine zusammenhängende reduktive Gruppe. Falls jede rationale Konjugationsklasse ein rationales Element enthält, dann ist* A *quasizerfallend.*

Für quasizerfallende halbeinfache Gruppen läßt sich die Konstruktion der Obstruktion α in der 2-Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ einer halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse x dahingehend modifizieren, daß sie als Bild einer Klasse $\beta(x) \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ unter der zur exakten Sequenz

$$1 \to \mathrm{C}_x \to \pi_1(\mathrm{G})^D \to \pi_1(\mathrm{G})^D/\,\mathrm{C}_x \to 1$$

gehörigen langen exakten Kohomologiesequenz beschreiben läßt. Für eine quasizerfallende halbeinfache Gruppe verschwindet die Obstruktion α nach dem Theorem 22 genau dann, wenn die Konjugationsklasse x einen rationalen Vertreter besitzt. Die Analyse der kurzen exakten Sequenz liefert den Input für die weiteren Untersuchungen, denn es gilt:

Theorem (vgl. Theorem 32). *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe. Falls* $\pi_1(\mathrm{G})$ *bzw. das Zentrum* Z *in der Kategorie der* Γ*-Moduln ein halbeinfaches Objekt ist, dann besitzt jede rationale Konjugaitonsklasse einen rationalen Vertreter.*

Unter den quasizerfallenden halbeinfachen Gruppen sind die zerfallenden Gruppen von besonderer Wichtigkeit. Steinberg zeigt zwar für zerfallende einfach zusammenhängende halbeinfache Gruppen, daß jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter besitzt, aber wir zeigen mit Hilfe von Kummertheorie und dem obigen Theorem, daß die Voraussetzung einfach zusammenhängend nicht notwendig ist:

Theorem (vgl. Theorem 48). *Sei* K *ein vollkommener Körper und* G *eine zerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe. Darüber hinaus sei die Charakteristik von* K *gut. Dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Die schwächere Bedingung, quasizerfallend zu sein, ist jedoch nicht hinreichend. Kottwitz gab hierfür ein Gegenbeispiel [Ko82] in $\mathrm{PU}_4(\mathbb{R})$ an, dessen Konjugationsklasse rational ist, jedoch eine nichttriviale Kottwitz-Obstruktion besitzt, d.h. keinen rationalen Vertreter hat.

Wir werden in dieser Arbeit zunächst alle einfachen algebraischen Gruppen G in guter Charakteristik klassifizieren, für die die Eigenschaft E erfüllt ist. Nur die einfachen Gruppen vom Typ A_{4n-1} und D_n^{Ad} stellen hiervon eine Ausnahme dar. Für diese Gruppen werden wir diejenigen Elemente klassifizieren, deren rationale Konjugationsklasse keinen rationalen Vertreter enthält. Hierfür geben wir jeweils Kriterien an das charakteristische Polynom an und interpretieren die Kottwitz Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ in Abhängigkeit des charakteristischen Polynoms.

Für gute Charakteristik können wir alle halbeinfachen rationalen Konjugationsklassen, die kein rationales Element enthalten, klassifizieren. Die Klassifikationsresultate werden wir anschließend auf fasteinfache und K-einfache Gruppen übertragen.

Die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ kann für quasizerfallende absolut einfache Gruppen G als Cupprodukt zweier 1-Kozykel verstanden werden. Dies gilt ebenso in einigen allgemeineren Fällen. Der eine Kozykel β_1 liegt in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x)$ und wird via des kanonischen Verbindungshomomorphismus auf $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ abgebildet. Der andere Kozykel $\beta_2 \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_x))$ beschreibt, in wie weit die Gruppe G davon entfernt ist, zerfallend zu sein. Dies wird im Abschnitt 4.7 genauer beschrieben.

Es gilt im Fall, daß C_x ein direkter abelscher Summand von $\pi_1(\mathrm{G})$ ist, der Satz:

Satz (vgl. Satz 54). *Sei die Charakteristik von* K *gut. Sei die exakte Sequenz*

$$1 \to \mathrm{C}_x \to \pi_1(\mathrm{G})^D \to \pi_1(\mathrm{G})^D/\mathrm{C}_x \to 1$$

in der Kategorie der abelschen Gruppen zerfallend. Die rationale Konjugationklasse von x *enthält genau dann ein rationales Element, wenn das Cupprodukt von* β_1 *in* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x)$ *und* β_2 *in* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_x))$ *trivial ist.*

Dies bedeutet, daß der Zugang von Kottwitz/Steinberg über die einfach zusammenhängende Überlagerung G_{sc} von G und der durch Theorem 48 beschriebene Zugang in vielen Fällen die konkrete Beschreibung der abstrakten Kottwitz-Obstruktion liefern.

Interessant erscheint die Frage, welcher Art die Probleme sind, die durch die Kottwitz-Obstruktion beschrieben werden. Es sind keine Klassifikationsresultate für halbeinfache, reduktive oder lineare algebraische Gruppen zu erwarten. Die Problematik liegt am Übergang von einem Produkt von fasteinfachen Gruppen zu halbeinfachen Gruppen. Für jede halbeinfache Gruppe G gibt es bekannterweise eine Isogenie zu einem Produkt von fasteinfachen Gruppen $\prod \mathrm{G}_i$, jedoch wissen wir über die induzierte Abbildung zwischen den Fundamentalgruppen $\prod \pi_1(\mathrm{G}_i)$ und $\pi_1(\mathrm{G})$ nicht genug. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ könnte beispielsweise diagonal in das Produkt der jeweiligen Fundamentalgruppen eingebettet sein. Es stellt sich heraus, daß dies der schwierigste zu betrachtende Fall ist.

Zur Berechnung der Obstruktion der zweiten Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ aus Theorem 22 müßten wir in der Lage sein, alle $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$-invarianten Untermoduln C_x des $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$-Moduls $\pi_1(\mathrm{G})$ zu klassifizieren. Wir können nur zeigen:

Satz (vgl. Satz 83). *Es gilt*

$$\mathrm{C}_x = \pi_1(\mathrm{G}) \cap \mathrm{C}_x^{\mathrm{ad}},$$

mit $\mathrm{C}_x^{\mathrm{ad}} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{C}_x^i$*, wobei* $\mathrm{C}_x^i \subset \pi_1(\mathrm{G}_i)$ *die* C_x*-Komponente für den fasteinfachen Faktor* G_i *ist.*

Dies hilft, um in konkreten Fällen festzustellen, ob eine gegebene rationale Konjugationsklasse die Eigenschaft E besitzt. Damit können wir folgendes erreichen:

Satz (vgl. Satz 90). *Sei* K *ein vollkommener Körper und* G *eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe. Sei die Charakteristik von* K *gut. Falls keiner der Faktoren in der Produktzerlegung von* G_{ad} *in fasteinfache Gruppen vom Typ* A_{n-1}*, n nicht quadratfrei, oder* D_n^{Ad} *ist, dann enthält jede rationale Konjugationsklasse ein rationales Element.*

Beim Übergang zu reduktiven Gruppen und – falls jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter besitzt – zu linear algebraischen Gruppen, treten neue Probleme auf, für die wir ein Beispiel angeben.

Die Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel, wobei die Kapitel drei und vier die eigenen Resultate enthalten. Das zweiten Kapitel dient der Klärung der Begriffe und gibt einige wohlbekannte Resultate über reduktive Gruppen wieder.

Im dritten Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse aus dem Artikel [Ko82] vorgestellt und für den Fall guter Charakteristik verallgemeinert. Im Wesentlichen ist dies die Konstruktion der Gruppe C_x und der Beweis des Hauptresultat von Kottwitz (Theorem 22) für gute Charakteristik.

Im Kapitel vier werden wir das kohomologische Kriterium auf zerfallende Gruppen anwenden und für einfache algebraische Gruppen die Elemente klassifizieren, deren Konjugationsklasse zwar rational ist, jedoch keinen rationalen Vertreter besitzt. Diese Ergebnisse werden auf fasteinfache und K-einfache Gruppen übertragen. Ebenso wird der Übergang zu halbeinfachen Gruppen und zu reduktiven Gruppen genauer studiert, um aufzuzeigen, an welchen Stellen Probleme entstehen.

Das Kapitel fünf bildet den Anhang. Hier werden wir die Konjugation in der orthogonalen Gruppe anhand der Arbeit [Mi69] vorstellen. Darüber hinaus zeigen wir den Zusammenhang zwischen der Berechnung des Hilbertsymbols und den Problemfällen in der orthogonalen Gruppe auf. Zusätzlich zeigen wir, wie die Fundamentalgruppe einer einfachen Gruppe nach [Hi75] explizit berechnet wird.

Ich möchte mich bei Prof. Dr. R. Weissauer für die Themenstellung und Betreuung in den vergangenen drei Jahren bedanken, bei Dr. J. Ballmann, Dr. U. Weselmann und Dr. Denis Vogel für die Unterstützung.

Der Friedrich-Ebert-Stiftung gebührt der Dank für meine finanzielle Unterstützung während der Zeit, in der die Arbeit entstanden ist, und Prof. Dr. W. Jäger für die Unterstützung.

Grundlagen und Methoden

Dieses Kapitel stellt die wichtigsten Begriffe und Methoden, die wir später in der Arbeit benötigen, vorzustellen. Ebenso werden viele Resultate über reduktive Gruppen zusammengetragen. Als Standardreferenz dienen die Arbeiten und Bücher [BFW99], [Bo91], [Ca85], [NSW00], [Se02] und [Ti66].

2.1. Reduktive Gruppen

Eine algebraische Gruppe G über einem Körper K der Charakteristik null ist eine algebraische Varietät über K, die eine Gruppenstruktur besitzt. Jede algebraische Gruppe G besitzt eine ausgezeichnete abgeschlossene normale Untergruppe G°, die Zusammenhangskomponente der Eins in G ([Bo91] 1.1/1.2).

Eine große Anzahl von Beispielen liefern die sogenannten linearen algebraischen Gruppen. Eine lineare algebraische Gruppe G ist eine abgeschlossene Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe GL_n ([Bo91] 1.6). Die Jordan-Zerlegung ist ein wichtiger Schüssel zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen. Darunter verstehen wir das folgende: Für jedes Element $x \in \mathrm{G}$, in diesem Sinne bezeichnet G immer die $\overline{\mathrm{K}}$-rationalen Punkte $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$ von G, gibt es ein eindeutiges halbeinfaches Element $x_s \in \mathrm{G}$ und ein eindeutiges unipotentes Element $x_u \in \mathrm{G}$, so daß gilt

$$x = x_s \cdot x_u = x_u \cdot x_s.$$

Diese Zerlegung heißt die Jordan-Zerlegung von x ([Bo91] 4.2). Häufig werden x_s und x_u einfach mit s und u bezeichnet. Eine analoge Zerlegung existiert für Liealgebren ([Bo91] 4.4).

In einer zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppe G hat die Menge der abgeschlossenen zusammenhängenden auflösbaren normalen Untergruppen genau ein maximales Element bezüglich der Inklusion. Dieses wird von allen solchen Untergruppen von G erzeugt, und heißt Radikal $\mathrm{R}(\mathrm{G})$ von G ([Bo91] 11.21). Ebenso besitzt die Menge aller abgeschlossenen zusammenhängenden unipotenten normalen Untergruppen von G ein maximales Element bezüglich der Inklusion, das sogenannte unipotente Radikal $\mathrm{R}_u(\mathrm{G})$. Da jede unipotente Gruppe nilpotent ist, liegt das unipotente Radikal $\mathrm{R}_u(\mathrm{G})$ als Untergruppe im Radikal $\mathrm{R}(\mathrm{G})$ ([Bo91] 11.21).

Eine lineare algebraische Gruppe G heißt halbeinfach, falls das Radikal $\mathrm{R}(\mathrm{G}) = 1$ ist. Die Gruppe $\mathrm{G} / \mathrm{R}(\mathrm{G})$ ist immer halbeinfach. Eine lineare algebraische Gruppe G heißt reduktiv, falls $\mathrm{R}_u(\mathrm{G}) = 1$ ist. Insbesondere ist jede halbeinfache Gruppe reduktiv, umgekehrt stimmt dies nicht ([Bo91] 11.21).

Falls G keine eigentliche abgeschlossene zusammenhängende normale Untergruppe enthält, dann heißt G einfach. Das Zentrum $\mathrm{Z(G)}$ einer einfachen Gruppe ist endlich und enthält jede eigentliche normale Untergruppe. Als abstrakte Gruppe ist die Gruppe $\mathrm{G} / \mathrm{Z(G)}$ einfach. Im Anhang 5.5 findet sich eine Übersicht über den Aufbau dieser Gruppen.

Die Gruppe der K-wertigen Punkte $\mathrm{G(K)}$ von G ist definiert als die Fixpunktmenge von G unter der Operation der absoluten Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ von K ([Hu75] 34.2.), also

$$\mathrm{G(K)} = \mathrm{G} \cap \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathrm{K}}).$$

2.2. Weylgruppe und Wurzelsysteme

Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ ein maximaler Torus. Betrachten wir den Normalisator $\mathrm{N(T)}$ und den Zentralisator $\mathrm{C(T)}$ von T in G, dann ist der Quotient $\mathrm{N(T)}/\mathrm{C(T)}$ eine endliche Gruppe, die sogenannte Weylgruppe $\mathrm{W(G,T)}$ von G bezüglich T ([Bo91] 11.19). Da alle maximalen Tori in G zueinander konjugiert sind, ist die Weylgruppe bis auf Isomorphie eindeutig definiert ([Bo91] 14.7). Wir bezeichnen die Gruppe mit $\mathrm{W(G)}$ und fassen sie als abstrakte Gruppe auf. Falls die Gruppe G reduktiv ist, gilt $\mathrm{C(T)} = \mathrm{T}$. Dann erhalten wir als Weylgruppe

$$\mathrm{W(G,T)} = \mathrm{N(T)}/\mathrm{T}\,.$$

Wir betrachten die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad_G} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, wobei $\mathfrak{g}$ die Liealgebra von G ist. $\mathrm{Ad_G}$ ist ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen, daher besteht das Bild $\mathrm{Ad_G(T)}$ aus kommutierenden, halbeinfachen Elementen und ist folglich diagonalisierbar. Wir können daher $\mathfrak{g}$ bezüglich der Operation von T in eine direkte Summe

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in X(\mathrm{T})} \mathfrak{g}_\alpha$$

zerlegen, wobei für jeden Charakter α aus der Charaktergruppe $X(\mathrm{T}) := \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ der Summand $\mathfrak{g}_\alpha$ definiert ist als

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad_G}(t)X = \alpha(t)X \text{ für alle } t \in \mathrm{T}\}.$$

Die nichttrivialen Charaktere $\alpha \in X(\mathrm{T})$, für die $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ ist, heißen die Wurzeln von G bezüglich T. Die Menge aller Wurzeln wird mit $\Phi(\mathrm{G,T})$ bezeichnet und ist eine endliche Teilmenge von $X(\mathrm{T})$. Da alle maximalen Tori in G konjugiert sind, ist das Wurzelsystem $\Phi(\mathrm{G,T})$ eindeutig bis auf Isomorphie. Daher schreiben wir der Einfachheit halber Φ anstelle von $\Phi(\mathrm{G,T})$. Das Wurzelsystem Φ besitzt eine Basis $\Delta \subset \Phi^+$, so daß sich jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ als Linearkombination $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} m_\beta \beta$ darstellen läßt, wobei alle Koeffizienten m_β das gleiche Vorzeichen haben. Ein Wurzel α heißt positiv, wenn alle Koeffizienten m_β größer gleich null sind. Φ^+ ist die Menge aller positiven Wurzeln von Φ. Die Menge $\Pi \subset \Phi$ bezeichnet die Menge aller Fundamentalwurzeln. Dies sind alle positiven Wurzeln, die sich nicht als Summe von zwei positiven Wurzeln schreiben lassen. Als Standardreferenz hierzu dienen [Bo91] 14.7 oder [St74] §3.2.

Die Weylgruppe $\mathrm{W}(\mathrm{G})$ permutiert die Wurzeln α ([Bo91] 14.6). Diese Permutationen $w \in \mathrm{W}(\mathrm{G})$ werden von Spiegelungen an einer Wurzel α

$$s_\alpha(\beta) = \alpha_j - 2\frac{<\alpha, \beta>}{<\alpha, \alpha>}\alpha.$$

erzeugt ([Bo91] 14.8). Mit Hilfe der Weylgruppe $\mathrm{W}(\mathrm{G})$ und der Fundamentalwurzeln können wir das ganze Wurzelsystem Φ rekonstruieren; $\Phi(\mathrm{G}, \mathrm{T}) = \mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T}) \cdot \Pi$.

Tits benutzt die Theorie der Wurzelsysteme, um einfache Gruppen über dem algebraischen Abschluss $\overline{\mathrm{K}}$ zu klassifizieren ([Ti66] Theorem 1, §3). Nach der Klassifikation der zugrundeliegenden Wurzelsysteme gibt es als einfache Gruppen über $\overline{\mathrm{K}}$ die vier unendlichen Serien vom Typ A_n, B_n, C_n, D_n und die fünf exzeptionellen Gruppen vom Typ E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2. Diese werden durch sogenannte Dynkindiagramme beschrieben. In der folgenden Tabelle, entnommen aus [Ti66] Tabelle 1, sind die zugehörigen erweiterten Dynkindiagramme abgebildet, d.h. das Dynkindiagramm ist durch die Hinzunahme der längsten Wurzel α_0 erweitert worden, die mit $\bullet$ gekennzeichnet wurde.

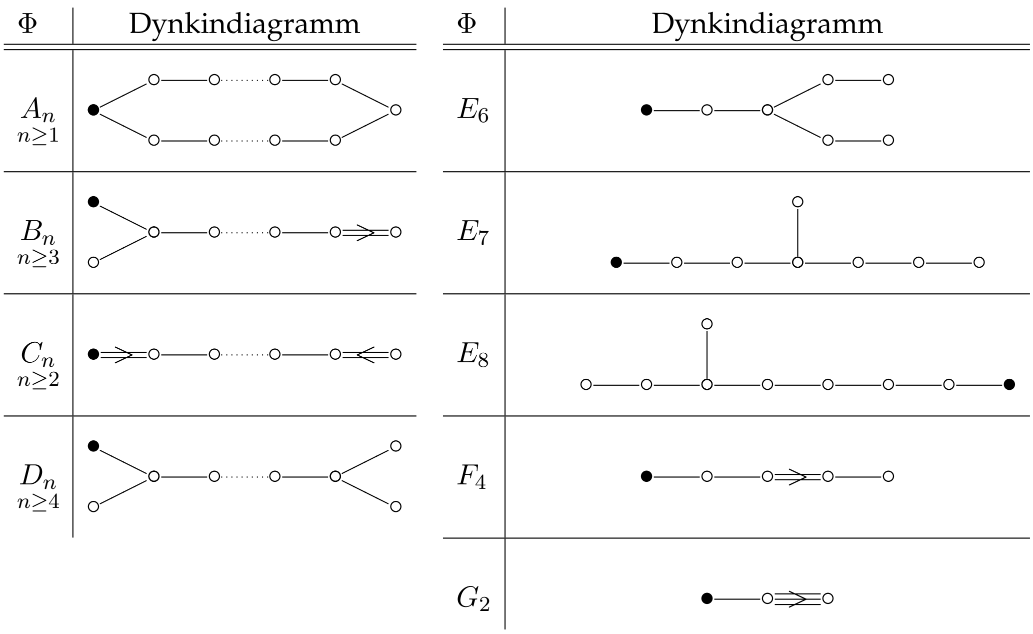


Tabelle A: Erweiterte Dynkindiagramme der Wurzelsysteme einfacher Gruppen

Für eine reduktive Gruppe mit dem Wurzelsystem Φ unterscheidet man zwischen guter und schlechter Charakteristik p des Grundkörpers. Die Charakteristik $p > 0$ heißt schlecht (bezüglich Φ), wenn p in der folgenden Tabelle B aus [Bo70] E §4.3 aufgeführt ist.

Wurzelsystem	schlechte Charakteristik
A_n	keine
B_n, C_n, D_n	2
E_6, E_7, F_4, G_2	2 und 3
E_8	2, 3 und 5

Tabelle B: Schlechte Charakteristik für Φ

Die längste Wurzel α ist die Summe von einfachen Wurzeln α_i, d.h. $\alpha = \sum m_i \alpha_i$. Falls es ein i gibt mit $m_i = p$, dann ist dies äquivalent dazu, daß die Charakteristik p schlecht ist. Die Charakteristik p heißt gut, wenn sie nicht schlecht ist und im Fall A_n nicht $n+1$ teilt; in der englisch sprachigen Literatur wird dies als *very good* bezeichnet.

2.3. Galoiskohomologie

Sei $\overline{\mathrm{K}}$ der algebraische Abschluß des vollkommenen Körpers K und $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$ die absolute Galoisgruppe von K. Sei A ein diskreter $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$-Modul. Die n-te Galoiskohomologiegruppe ist als die n-te Gruppenkohomologiegruppe

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{K}, A) := \mathrm{H}^n(\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K}), A) \text{ für } n \geq 0$$

definiert.

In [Se02] §5.1. ist die nullte und erste Kohomologiegruppe definiert. Die nullte Kohomologiegruppe ist gegeben als die Fixpunktmenge von A unter der Operation von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{K}, A) = A^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})}.$$

Die Menge der 1-Kozykel $\mathrm{Z}^1(\mathrm{K}, A)$ besteht aus den stetigen Abbildungen a von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$ nach A, welche für $a_\sigma := \sigma(a)$ die Relation

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma a_\tau^\sigma$$

für alle $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$ erfüllen. Wir nennen zwei Kozykel a, a' äquivalent $(a \sim a')$, falls $a_\sigma = b^{-1}(a'_\sigma)^\sigma b$ für ein $b \in A$ und für alle $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$ gilt. Die erste Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, A)$ ist definiert als

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, A) := \mathrm{Z}^1(\mathrm{K}, A)/\sim.$$

In dieser Arbeit spielt später die zweite Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, A)$ eine besondere Rolle. Die Gruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, A)$ kann man als Menge der Äquivalenzklassen aller zentraler Gruppenerweiterungen

$$1 \to A \to X \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K}) \to 1$$

betrachten. Hierbei nennen wir zwei Gruppenerweiterungen äquivalent, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : X \to X'$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & X \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[dr] & & & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K}) \arrow[r] & 1 \\ & & X' \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ein wichtiges Beispiel für die späteren Betrachtungen ist die Kummersequenz

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_\mathrm{m} \xrightarrow{g^n} \mathbb{G}_\mathrm{m} \to 1.$$

Mit Hilfe der langen exakten Kohomologiesequenz und dem Satz Hilbert 90 ([NSW00] 6.2.1) folgern wir, daß $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mu_n) \cong \mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^n$ ist und $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mu_n)$ isomorph zur n-Torsion ${}_n \mathrm{Br}(\mathrm{K})$ in der Brauergruppe $\mathrm{Br}(\mathrm{K}) := \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \overline{\mathrm{K}}^\times)$ ist ([Se02] II §1.2).

Weiter Resultate kann der Leser im Buch von Serre [Se02] finden.

2.4. Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$

Für reduktive Gruppen G hat Borovoi in der Arbeit [Boro98] §1 eine Definition der sogenannten Borovoi-Fundamentalgruppe gegeben. Die Borovoi-Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}) := \pi_1(\mathrm{G}(\mathrm{K}))$ liefert einen exakten Funktor von der Kategorie der reduktiven Gruppen über K in die Kategorie der $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$-Moduln ist. Für $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ entspricht $\pi_1(\mathrm{G})$ der gewöhnlichen topologischen Fundamentalgruppe.

Betrachten wir die (einfach zusammenhängende) universelle Überlagerung G_{sc} der derivierten Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$. Für die von Deligne definierte Abbildung

$$\rho : \mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \hookrightarrow \mathrm{G}$$

definieren wir für einen maximalen Torus $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ das Urbild $\rho^{-1}(\mathrm{T})$ in G_{sc} als T_{sc}. Die Borovoi Fundamentalgruppe ist definiert als

$$\pi_1(\mathrm{G}) := X_*(\mathrm{T}(\overline{\mathrm{K}}))/\rho_* X_*(\mathrm{T}_{\mathrm{sc}}(\overline{\mathrm{K}})),$$

wobei X_* die Kocharaktergruppe bezeichnet. In [Boro98] Remark 0.1 deutet Borovoi an, wie man die Definition auf lineare algebraische Gruppen übertragen kann.

Die Definition der Fundamentalgruppe für einfache Gruppen ist bereits seit längerem bekannt. Sie stellt einen Spezialfall der Definition der Borovoi-Fundamentalgruppe dar.

In weiten Teilen der Arbeit werden vorallem (halb-)einfache Gruppen und deren Fundamentalgruppe betrachtet. Hierzu können wir die Resultate und Definitionen von Tits ([Ti66] §1.5.) übernehmen. Sei $\Phi^\vee$ die Menge der Kowurzeln und $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ das davon erzeugte Gitter. Damit definieren wir das Gewichtsgitter $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ als

$$\mathbb{Z}[\Phi]^* := \{x \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R} \,|< \alpha, x >\in \mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in \Phi\}.$$

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ einer einfachen Gruppe ist nun definiert als der Quotient des Gewichtegitters $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ nach dem Kowurzelgitter $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$

$$\pi_1(\mathrm{G}) = \mathbb{Z}[\Phi]^*/\mathbb{Z}[\Phi^\vee].$$

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ einer einfachen Gruppe G ist eine endliche, abelsche Gruppe ([Hu75] 31.1).

Die Gruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ läßt sich kombinatorisch als Symmetriegruppe des wie in Tabelle A (bzw. [Ti66] Tabelle I) dargestellten, erweiterten Dynkindiagramms des entsprechenden Wurzelsystems auffassen.

Für vollkommene Körper K hat Tasaka in den Arbeiten [Ta69] und [Ta71] sowohl die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ der einfachen Gruppen G als auch die zweite Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G}))$ in Termen der Brauergruppe von K berechnet.

Satz 1 ([Ta71] Theorem 1). *Sei* G *eine zerfallende einfache Gruppe vom adjungierten Typ. Dann besitzt* G *die aus Tabelle C ersichtliche Fundamentalgruppe* $\pi_1(\mathrm{G})$.

Wurzelsystem	$\pi_1(\mathrm{G})$	$\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G}))$
A_n	μ_{n+1}	${}_{n+1}\,\mathrm{Br}$
B_n	μ_2	${}_2\,\mathrm{Br}$
C_n	μ_2	${}_2\,\mathrm{Br}$
D_{2n}	$\mu_2 \times \mu_2$	${}_2\,\mathrm{Br} \times {}_2\,\mathrm{Br}$
D_{2n+1}	μ_4	${}_4\,\mathrm{Br}$
E_6	μ_3	${}_3\,\mathrm{Br}$
E_7	μ_2	${}_2\,\mathrm{Br}$
E_8	1	1
F_4	1	1
G_2	1	1

Tabelle C: Fundamentalgruppen und $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G}))$

2.5. z-Erweiterungen

Viele Aussagen lassen sich für zusammenhängende reduktive Gruppen, bei denen die derivierte Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ einfach zusammenhängend ist, leichter beweisen, da wir hier auf einige Resultate von Steinberg u.a. zurückgreifen können. Deshalb liegt es nahe, zu entsprechenden Überlagerungen von G überzugehen, und nachzuprüfen, wie sich hier die zu untersuchende Eigenschaft verhält. Diese Überlagerungen heißen z-Erweiterungen, deren Existenz Langlands ([La79] Seite 721-722) gezeigt hat. Dort befinden sich in bereits einige Anwendungen, ebenso wie in den Arbeiten [Ko82], [Ko84] und [Ko86].

Definition 2. *Seien* G *und* G' *zusammenhängende reduktive Gruppen über* K. *Ein Homomorphismus von reduktiven Gruppen* $\alpha : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ *heißt* **z-Erweiterung**, *falls*

(i) *die derivierte Gruppe* $\mathrm{G}'_{\mathrm{Der}}$ *von* G' *einfach zusammenhängend ist,*

(ii) α *surjektiv ist,*

(iii) *der* $\mathrm{Kern}(\alpha)$ *im Zentrum von* G' *liegt und isomorph zu einem Produkt von Tori der Form* $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ *ist für endliche Körpererweiterungen* L *über* K.

Später werden wir zahlreiche Anwendungen von z-Erweiterungen kennenlernen, ein Beispiel hierfür ist:

Lemma 3 ([Ko82] Lemma 1.1). *Sei* $\alpha : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ *eine z-Erweiterung über* K, $\mathrm{Z} := \mathrm{Kern}(\alpha)$. *Dann gilt für jeden Körper* $\mathrm{K} \subset \mathrm{K}' \subset \overline{\mathrm{K}}$, *daß* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}', \mathrm{Z}) = 1$ *und* $\mathrm{G}'(\mathrm{K}') \to \mathrm{G}(\mathrm{K}')$ *surjektiv ist.*

Beweis: Nach dem Lemma von Shapiro ([NSW00] 1.6.3) und dem Theorems Hilbert 90 ([NSW00] 6.2.1) ist $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}', \mathrm{Z})$ trivial. Insbesondere erhalten $1 \to \mathrm{Z}^{\Gamma_{\mathrm{K}'}} \to \mathrm{G}'^{\Gamma_{\mathrm{K}'}} \to \mathrm{G}^{\Gamma_{\mathrm{K}'}} \to 1$, weshalb $\mathrm{G}'(\mathrm{K}') \to \mathrm{G}(\mathrm{K}')$ surjektiv ist. □

2.6. Konjugation in Gruppen

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über K. Zwei Elemente $x, y \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$ heißen konjugiert in $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$, wenn es ein $g \in \mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$ gibt, so daß $gxg^{-1} = y$ ist.

Nun betrachten wir die Operation der Galoisgruppe $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ auf G. Sei $g^\sigma := \sigma(g)$. Dann erhalten wir für beliebiges $\sigma \in \Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$, daß das Element

$$a_\sigma := g^{-1}g^\sigma,$$

im Stabilisator G_x von x in G liegt, und für beliebige $\sigma, \tau \in \Gamma$ erhalten wir

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma a_\tau^\sigma.$$

Ersetzt man g durch $g \cdot z$ mit $z \in \mathrm{G}_x(\overline{\mathrm{K}})$, so erhalten wir einen zu a_σ äquivalenten 1-Kozykel.

Jedem $y \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$, welches konjugiert in $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$ zu x ist, entspricht daher eine 1-Kohomologieklasse in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{G}_x)$, die wegen $a_\sigma = g^{-1}g^\sigma$ im Kern der Abbildung

$$\varphi : \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{G}_x) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{G})$$

liegt. Ist umgekehrt $(a_\sigma) \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{G}_x)$ im Kern dieser Abbildung, ist also etwa $a_\sigma = g^{-1}g^\sigma$ mit $g \in \mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$, so setzen wir einfach $y := gxg^{-1}$ und rechnen nach: $y^\sigma = y$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Also ist $y \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$. Damit hat man

Lemma 4 ([Bo70] E10/E11). *Sei* $x \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$, $\mathrm{C}(x) := \{y \in \mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}}) \mid x \sim y \text{ in } \mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})\}$ *und* $m := |\operatorname{Kern}\varphi|$. *Dann zerfällt* $\mathrm{G}(\mathrm{K}) \cap \mathrm{C}(x)$ *in genau* m *Konjugationsklassen in* $\mathrm{G}(\mathrm{K})$.

Die Frage, wann zwei Elemente zueinander konjugiert sind, läßt sich für die meisten klassischen Gruppen wie folgt beantworten:

Satz 5 ([Ba81] Lemma 3). *Sei* G *eine* K*-Form der Gruppen* $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{O}_n$ *oder* SP_n. *Falls* $x, y \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$ *das dasselbe irreduzible Minimalpolynom bezüglich der trivialen Darstellung von* G *besitzen, dann ist* $x \sim y$ *in* $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$.

Falls G eine äußere Form der Gruppe GL_n oder SL_n bzgl. einer zugehörigen Erweiterung L/K ist, dann müssen x und y das gleiche Minimalpolynom $m(t) \in \mathrm{L}[t]$ besitzen, damit die Aussage des Satzes gilt.

2.7. Stabile Konjugation

Langlands hat den Begriff der *stabilen Konjugation* eingeführt, der zwischen K-Konjugation und $\overline{\mathrm{K}}$-Konjugation liegt. Für die Fälle, in denen $\overline{\mathrm{K}}$-Konjugation und stabile Konjugation sich voneinander unterscheiden, scheint die Definition der stabilen Konjugation für die harmonische Analysis relevanter zu sein [La79].

Definition 6. *Sei* G *eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über* K. *Zwei* K*-rationale Elemente* x *und* y *sind* **stabil zueinander konjugiert**, *wenn es ein* $g \in \mathrm{G}$ *gibt, so daß*

$$gxg^{-1} = y \text{ und } g^{-1}g^\sigma \in \mathrm{G}_s^\circ \text{ für alle } \sigma \in \Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$$

ist, wobei s *der halbeinfache Anteil von* x *ist.*

Aus der Definition folgt, daß $g^{-1}g^{\sigma}$ ein 1-Kozykel von Γ in $\mathrm{G}_s^{\circ} \cap \mathrm{G}_x$ ist, da $g^{-1}g^{\sigma}$ in G_x und somit in $\mathrm{G}_s^{\circ} \cap \mathrm{G}_x$ liegt. Die Kohomologieklasse davon liegt im Kern der Abbildung

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{G}_s^{\circ} \cap \mathrm{G}_x) \rightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{G}).$$

Es ist $\mathrm{G}_x = \mathrm{G}_s \cap \mathrm{G}_u$. Aufgrund der Definition der Konjugation gilt folglich

Lemma 7 ([La79] 701/702). *Sei $x \in \mathrm{G}$, $x = us = su$ und G_s zusammenhängend. Dann stimmt die $\overline{\mathrm{K}}$-Konjugation mit der stabilen Konjugation überein.*

Kottwitz′ Resultat über rationale Konjugationsklassen

Für eine zusammenhängende halbeinfache Gruppe studieren wir in diesem Kapitel rationale Konjugationsklassen. Als Beispiel hierfür rufen wir die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{G} := \mathrm{GL}_n$ über einem vollkommenen Körper K in Erinnerung. Für die Konjugation in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ und $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$ gilt das folgende Resultat:

E Eine Konjugationklasse in $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$, die über K definiert ist, enthält bereits ein Element aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$.

Für reduktive Gruppen ist diese Aussage im allgemeinen falsch, wie das Beispiel von Kottwitz ([Ko82] 798f) für die Gruppe $\mathrm{PU}_4(\mathbb{R})$ zeigt. Wir werden weitere Beispiele im nächsten Kapitel angeben und diese nach Möglichkeit klassifizieren.

Dieses Kapitels widmet sich der Arbeit [Ko82]. Wir werden alle notwendigen Voraussetzungen, Begriffe und Konstruktionen erklären, um den Satz 8 aus seiner Arbeit zu formulieren.

Die Hauptidee in [Ko82] besteht darin, daß jede Invariante einer zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppe G, die trivial für einfach zusammenhängende Gruppen, für unipotente Gruppen und für quasi-triviale Tori ist, in Termen der Fundamentalgruppe von G berechnet werden kann. Dies ist insbesondere durch Steinbergs Artikel motiviert.

Die Arbeit folgt dieser Idee und gibt zusätzlich ein Kriterium in Termen einer gewissen Untergruppe C_x der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ an:

Theorem 8 ([Ko82] Theorem 4.7). *Sei G eine quasizerfallende reduktive Gruppe. Sei die Charakteristik des vollkommenen Körpers K null oder x halbeinfach. Falls die Konjugationsklasse $[x]$ von x über K definiert ist, dann sind äquivalent:*

(i) $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ *ist trivial.*

(ii) Die Konjugationsklasse von x besitzt einen rationalen Vertreter

In [Ko82] wird zwar bemerkt, daß dieses Theorem für gute Charakteristik gültig ist. Ein Beweis wird jedoch nicht gegeben.

Steinberg zeigt in seiner Arbeit [St65] im Theorem 9.8, daß eine einfach zusammenhängende, halbeinfache Gruppe G, welche die Eigenschaft E erfüllt, quasizerfallend ist, d.h. sie enthält eine Boreluntergruppe, die über dem gleichen Grundkörper definiert ist. Wir werden dies im nächsten Abschnitt für reduktive algebraische Gruppen formulieren und zeigen, daß die Voraussetzung an die Gruppe, quasizerfallend zu sein, notwendig ist.

Außerdem zeigt Steinberg für Körper der Charakteristik null, daß eine quasizerfallende halbeinfache Gruppe, die einfach zusammenhängend ist, die gewünschte Eigenschaft E besitzt. Dieses Resultat wurde in [Ko82] verallgemeinert für den Fall, daß die derivierte Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ einfach zusammenhängend ist.

3.1. G ist quasizerfallend

Für halbeinfache Gruppen G über einem vollkommenen Körper K studiert Steinberg in [St65] im Abschnitt 9 die Frage, ob jede Gruppe G, in der jede rationale Konjugationsklasse ein rationales Element enthält, quasizerfallend ist. Hierzu wählt man eine abgeschwächte Beschreibung der Eigenschaft, das jede rationale Konjugationsklasse ein rationales Element enthält. Diese lautet: Die natürliche Abbildung von der Menge der rationalen regulären halbeinfachen Elemente in die Menge der rationalen regulären halbeinfachen Konjugationsklassen ist surjektiv. Steinberg zeigt:

Theorem 9 ([St65] Theorem 9.10). *Sei* K *ein vollkommener Körper und* G *eine einfach zusammenhängende, halbeinfache Gruppe über* K. *Falls die natürliche Abbildung der Menge der regulären halbeinfachen rationalen Elemente in die Menge der regulären halbeinfachen rationalen Konjugationsklassen surjektiv ist, dann enthält* G *eine Borelgruppe, die bereits über* K *definiert ist, d.h.* G *ist quasizerfallend.*

Beweis: Falls der Körper K endlich ist, dann ist nach Langs Theorem ([La56] Seite 557, [Mü03]) eine Borelgruppe über K definiert.

Sei daher K unendlich. Wir wählen ein feste Borelgruppe $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}$, sowie festes T und Φ^+. Sei $\mathrm{Z} \subset \mathrm{G}$ das Zentrum von G und n die Ordnung von Z. Seien $c, c' \in \mathrm{K}^\times$ mit $c = c'^n$, und die Ordnung von c sei größer als die Coxeterzahl des Wurzelsystems Φ. Sei $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ ein maximaler Torus über K. Dieser existiert in G nach [St65] Theorem 9.4. Wir wählen ein $t' \in \mathrm{T}$, so daß für jede einfache Wurzel $\alpha_i \in \Phi^+$ gilt, daß $\alpha_i(t') = c'$ ist. Definiert man $t := t'^n$, dann folgt nach Voraussetzung $\alpha_i(t) = c$. Für jede Wurzel α vom Gewicht m ist $\alpha(t) = c^m \neq 1$, da m kleiner als die Coxeterzahl ist. Daher ist t ein reguläres Element. Darüber hinaus ist $c^m = c$ nur für $m = 1$ und wir erhalten, daß alle Wurzeln α mit $\alpha(t) = c$ einfach sein müssen.

Wir werden zeigen, daß die Konjugationsklasse des regulären Elements t über K definiert ist, und daß wir T bzw. t durch einen geeigneten konjugierten Torus T'' bzw. $t'' \in \mathrm{T}''$ ersetzen können, so daß die Borelgruppe B über K definiert ist. Damit ist das Theorem dann bewiesen.

Jedes Element $\gamma \in \Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ operiert als Automorphismus auf dem Wurzelsystem Φ, daher gibt es ein eindeutig bestimmtes Element w_γ in der Weylgruppe $\mathrm{W(G)}$ von G, so daß $w_\gamma \circ \gamma$ die einfachen Wurzeln von Φ^+ permutiert. Da $\alpha_i(t')$ unabhängig von i ist und in K liegt, folgt

$$\alpha_i(w_\gamma \circ \gamma)(t') = (w_\gamma \gamma^{-1})(\alpha_i)(t') = \alpha_i(t').$$

Somit gibt es ein $k \in \mathrm{Z}$ mit $(w_\gamma \circ \gamma)(t') = k \cdot t'$ und die Konjugationsklasse von t ist über K definiert, da $(w_\gamma \circ \gamma)(t) = k^n \cdot t = t$ gilt.

Nach Voraussetzung ist die Abbildung der Menge der halbeinfachen rationalen Elemente in die Menge der halbeinfachen rationalen Konjugationsklassen surjektiv, deshalb gibt es ein $t'' \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$, welches in der Konjugationsklasse von t liegt. Jeder innere Automorphismus, der t in t'' überführt, bildet den maximalen Torus T in den maximalen Torus T'' ab.

Der Torus T'' ist über K definiert, da nach [Bo91] Proposition 12.2. das reguläre Element t'' in einem eindeutig bestimmten maximalen Torus T'' enthalten ist. Zusätzlich bildet dieser $\Phi(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ in $\Phi(\mathrm{G}, \mathrm{T}'')$ ab, jedoch so, daß die Gleichung $\alpha_i(t) = c$ erhalten bleibt. Wenn wir den Torus T durch T'' und t durch t'' ersetzen, definiert $\Phi(\mathrm{G}, \mathrm{T}'')$ eine Boreluntergruppe B von G, die über K definiert ist. □

Wir verallgemeinern dieses Resultat auf reduktive Gruppen:

Theorem 10. *Sei* K *ein vollkommener Körper und* G *eine zusammenhängende reduktive Gruppe über* K*. Falls die natürliche Abbildung der Menge der regulären halbeinfachen rationalen Elemente in die Menge der regulären halbeinfachen rationalen Konjugationsklassen surjektiv ist, dann enthält* G *eine Borelgruppe, die bereits über* K *definiert ist, d.h.* G *ist quasizerfallend.*

Beweis: Wir betrachten eine z-Erweiterung $\alpha : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$. Nach Lemma 3 ist die Abbildung $\mathrm{G}'(\mathrm{K}) \to \mathrm{G}(\mathrm{K})$ surjektiv und bildet die Menge der regulären halbeinfachen Elemente aus $\mathrm{G}'(\mathrm{K})$ surjektiv auf die Menge der regulären halbeinfachen Elemente in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ ab. Ebenso ist die Abbildung zwischen den Mengen der regulären halbeinfachen Konjugationsklassen von $\mathrm{G}'(\mathrm{K})$ und von $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ eindeutig.

Sei $s \in \mathrm{G}$ ein reguläres halbeinfaches Element mit rationaler Konjugationsklasse und $s = s'z$ mt $s' \in \mathrm{G}'$ und $z \in \mathrm{Kern}(\alpha)$. Da die Konjugationsklasse von s rational ist, gilt für alle Elemente $x \in [s]$: $x^\sigma = g_\sigma x g_\sigma^{-1}$. Nach Voraussetzung besitzt die Konjugationsklasse von s einen rationalen Vertreter. Sei o.B.d.A $s \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$, dann liegt ebenso wegen der Surjektivität der Abbildung $\mathrm{G}'(\mathrm{K}) \to \mathrm{G}(\mathrm{K})$ das Element s' in $\mathrm{G}'(\mathrm{K})$ und es gilt

$$s'z^\sigma = (s'z)^\sigma = g_\sigma s' z g_\sigma^{-1}.$$

Da $\alpha(s')$ regulär ist, ist ebenso g_σ regulär und vertauscht mit z. Wir erhalten somit $(s'z)^\sigma = g_\sigma s' g_\sigma^{-1} z$. Da $s' \in \mathrm{G}'(\mathrm{K})$ liegt, können wir o.B.d.A. $g_\sigma = 1$ wählen. Daher ist $s'z^\sigma = s'z$ und somit $z^\sigma z^{-1}$ trivial. Nun gibt es ein $\lambda \in \mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ für das $z^\sigma z^{-1}$ durch $s'\lambda(s')^{-1}\lambda^{-1}$ dargestellt wird. Die Wahl der Konjugationsklasse ist somit eindeutig.

Nach Theorem 9 besitzt die einfach zusammenhängende, halbeinfache Gruppe $\mathrm{G}'_{\mathrm{Der}}$ eine Borelgruppe B, die über K definiert ist. Das Bild $\alpha(\mathrm{B}\,\mathrm{Z}') \subset \mathrm{G}$ ist nach [Bo91] Proposition 11.14 wiederum eine Borelgruppe, die in G liegt und über K definiert ist. Somit ist G quasizerfallend. □

3.2. Über die Arbeit von Kottwitz

Nach den Ergebnissen des ersten Abschnitts ist die Bedingung, daß G eine reduktive Gruppe ist, die eine über K definierte Boreluntergruppe enthält, eine notwendige Voraussetzung dafür, daß die halbeinfachen rationalen Konjugationsklassen von G einen Vertreter aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ besitzen.

Sei $x \in \mathrm{G}$ und Z das Zentrum von G. Um im nächsten Abschnitt den Theorem 8 zu formulieren, konstruieren wir eine gewisse Untergruppe C_x der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ und rechnen einige Eigenschaften nach.

Wir betrachten die Abbildung ρ aus Abschnitt 2.4:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r] & \mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\rho"] & \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \arrow[r] & \mathrm{G}, \end{tikzcd}$$

wobei Kottwitz mit C die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$ bezeichnet. Mit Hilfe von ρ konstruieren wir einen Quotienten C_x in zwei Schritten:

1. Wir betrachten den kanonischen Homomorphismus $\rho : \mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \to \mathrm{G}$. Als Kern erhält man die Fundamentalgruppe $\mathrm{C} = \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$. Insbesondere ist C endlich und abelsch.

2. Wir definieren einen Homomorphismus $\varphi : \mathrm{G}_x \to \mathrm{C}$. Dann ist $\mathrm{C}_x := \varphi(\mathrm{G}_x)$.

Schritt 1 ist bekannt und befindet sich ansatzweise im Abschnitt 2.4. Daher widmen wir uns der Konstruktion eines Homomorphismus $\varphi : \mathrm{G}_x \to \mathrm{C}$.

Hierfür wählen wir ein $y \in \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}$ und ein $z \in \mathrm{Z}$ mit $\rho(y) = y'$ und $x = y'z$. Für $g \in \mathrm{G}_x$ folgt aus

$$y'z = x = gxg^{-1} = gy'zg^{-1} = gy'g^{-1}z$$

die Bedingung $gy' = y'g$, weshalb g im Zentralisator von y' liegt.

Sei $\Delta : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{ad}}$. Für $h \in \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}$ mit $\Delta(\rho(h)) = \Delta(g)$ gilt, daß hyh^{-1} und y das gleiche Bild in G haben, d.h. $\rho(hyh^{-1}) = \rho(y)$. Daher gibt es ein

$$k \in \pi_1(\mathrm{G}) \text{ mit } hyh^{-1} = yk.$$

Aufgrund der Bedingungen an y und h folgt aus der Konstruktion, daß $hyh^{-1}y^{-1}$ in $\pi_1(\mathrm{G})$ liegt. Da zwei verschiedene Elemente y und $\tilde{y}$ in G_{sc} sich nur um ein Element in Z_{sc} unterscheiden – und h und $\tilde{h}$ in G_{sc} um ein Element in $\pi_1(\mathrm{G})$ – ist k unabhängig von der Wahl von y und h.

Wir erhalten einen wohldefinierten Homomorphismus $\varphi : \mathrm{G}_x \to \mathrm{C}$ mit $g \mapsto k$ im Sinne von algebraischen Gruppen. Dies liefert für $\mathrm{C}_x := \varphi(\mathrm{G}_x)$ den kanonischen Homomorphismus $\varphi_x : \mathrm{G}_x \to \mathrm{C}_x$. Die Gruppe C_x ist endlich und abelsch als Untergruppe von $\pi_1(\mathrm{G})$.

Wir geben nun eine ad hoc-Beschreibung für C_x an. Hierzu benötigen wir vorher eine weitere Eigenschaft von z-Erweiterungen aus [Ko82] §1 und §3.

Lemma 11 ([Ko82] Lemma 3.1). *Sei $\alpha : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ eine z-Erweiterung. Dann gelten:*

(i) Sei $x \in \mathrm{G}$ und $y \in \mathrm{H}$ mit $\alpha(y) = x$. Dann gilt $\alpha^{-1}(\mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x) = \mathrm{H}_y$ und $\alpha(\mathrm{H}_y) = \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x$.

(ii) Seien $x, x' \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$. Genau dann sind x und x' stabil konjugiert, wenn es zwei stabil konjugierte Elemente $y, y' \in \mathrm{H}(\mathrm{K})$ mit $\alpha(y) = x$ und $\alpha(y') = x'$ gibt.

Beweis: zu (i). Nach Definition ist α surjektiv. Damit folgt die zweite Behauptung aus der Ersten.

Um $\alpha^{-1}(\mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x) = \mathrm{H}_y$ zu beweisen, zeigen wir, daß $h \in \mathrm{H}_y$ bereits in $\alpha^{-1}(\mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x)$ liegt. Das Bild $\alpha(h)$ ist in G_x enthalten, also genügt es, daß $\alpha(h) \in \mathrm{G}_s^\circ$ ist. Betrachten wir hierzu die Jordanzerlegung $x = us = su$ und $y = tu' = u't$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung ([Bo91] 4.2) ist $\alpha(t) = s$. Daher liegt $\alpha(h)$ in $\alpha(\mathrm{H}_t) \subset \mathrm{G}_s$. Da die derivierte Gruppe $\mathrm{H}_{\mathrm{Der}}$ nach Voraussetzung zusammenhängend ist, ist $\alpha(\mathrm{H}_t)$ zusammenhängend. Somit gilt: $h \in \alpha^{-1}(\mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x)$.

Wir müssen noch beweisen, daß jedes $h \in \alpha^{-1}(\mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x)$ in H_y liegt. Es gilt $\alpha(hyh^{-1}) = \alpha(y)$. Daher gibt es ein $z \in \mathrm{Kern}(\alpha)$ mit $hyh^{-1} = yz$. Wegen der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung gilt für den halbeinfachen Anteil t von y die Gleichung $hth^{-1} = tz$. Wegen der Surjektivität von α ist $\alpha(H_t) = \mathrm{G}_s^\circ$. Wir wählen ein $h' \in \mathrm{H}_t$ mit $\alpha(h') = \alpha(h)$. Nach Definition einer z-Erweiterung ist $\mathrm{Kern}(\alpha)$ im Zentrum Z enthalten, weswegen bereits h in H_t liegt und somit z trivial ist. Aus diesem Grund gilt $hyh^{-1} = y$, d.h. $h \in \mathrm{H}_y$.

Zu (ii). Falls es zwei stabil konjugierte Elemente $y, y' \in \mathrm{H(K)}$ mit $\alpha(y) = x$ und $\alpha(y') = x'$ gibt, dann sind x und x' in $\mathrm{G(K)}$ stabil konjugiert. Falls andererseits x und x' in $\mathrm{G(K)}$ stabil konjugiert sind, dann gibt es ein $g \in \mathrm{G}$ mit $gxg^{-1} = x'$ und $g^{-1}g^\sigma \in \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Wir wählen ein $y \in \mathrm{H}(K)$ mit $\alpha(y) = x$ und ein $h \in \mathrm{H}$ mit $\alpha(h) = g$. Hier benötigen wir, daß die Abbildung α nach Definition surjektiv ist. Wir definieren $y' := hyh^{-1}$. Da $\alpha(h^{-1}h^\sigma) = g^{-1}g^\sigma \in \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x$ ist, folgt $h^{-1}h^\sigma \in \mathrm{H}_y$ nach (i), also ist

$$(h^{-1}h^\sigma)y(h^{-1}h^\sigma)^{-1} = y.$$

Somit gilt

$$y' = hyh^{-1} = h^\sigma y h^{-\sigma} = h^\sigma y^\sigma h^{-\sigma} = (hyh^{-1})^\sigma = (y')^\sigma.$$

Also haben wir ein Element y' gefunden, das in $\mathrm{H(K)}$ mit $\alpha(y') = x'$ liegt und über $\overline{\mathrm{K}}$ zu y konjugiert ist. Die Elemente y und y' sind somit stabil zueinander konjugiert. □

Lemma 12 ([Ko82] Lemma 4.5.(1)). *Sei $x \in \mathrm{G}$. Der Kern von φ_x ist $\mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x$. Somit erhalten wir den natürlichen Isomorphismus $\mathrm{G}_x \,/\, \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x \to \mathrm{C}_x$.*

Beweis: Sei s der halbeinfache Anteil von x, dann gilt $\mathrm{G}_x \subset \mathrm{G}_s$. Per Definition ist der Homomorphismus $\varphi : \mathrm{G}_x \to \mathrm{C}$ die Einschränkung des Homomorphismus $\mathrm{G}_s \to \mathrm{C}$ auf G_x. Da das Bild der Zusammenhangskomponente von G_s in der endlichen Gruppe C trivial sein muß, sieht man, daß $\mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x$ im $\mathrm{Kern}(\varphi_x)$ enthalten sein muß. Sei anderseits $g \in \mathrm{Kern}(\varphi_x)$. Benutzen wir die Notation von Lemma 11, dann gilt

$$hyh^{-1} = yk \text{ mit } k = 1,$$

und somit ist $h \in (\mathrm{G}_{\mathrm{sc}})_y$. Sei t der halbeinfache Anteil von y, dann ist $h \in (\mathrm{G}_{\mathrm{sc}})_t$. Da sich das Bild t' von t in G von dem Element s nur um ein Element aus dem Zentrum Z unterscheidet, ist das Bild von $(\mathrm{G}_{\mathrm{sc}})_t$ unter der Abbildung $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \to \mathrm{G}$ in G_s enthalten. Darüber hinaus ist das Bild zusammenhängend, da die Gruppe $(\mathrm{G}_{\mathrm{sc}})_t$ zusammenhängend ist, und enthält das Bild von h, also g. Somit ist $g \in \mathrm{G}_s^\circ$, und folglich gilt $g \in \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_x$. □

Lemma 13 ([Ko82] Lemma 4.5. (2),(3)). *Seien $x, g \in \mathrm{G}$ und $\sigma \in \Gamma$. Dann gilt:*

(i) Sei $y = gxg^{-1}$. Dann ist $\mathrm{C}_y = \mathrm{C}_x$ mit $\varphi_x = \varphi_y \circ \mathrm{Int}(g)$.

(ii) Sei $y = x^\sigma$. Dann ist $\mathrm{C}_y = \mathrm{C}_x^\sigma$ mit $\sigma \circ \varphi_x = \varphi_y \circ \sigma$.

Beweis: Zu (i). Für die Abbildung φ gilt

$$\varphi_x = \varphi|_{\mathrm{G}_x} = \varphi|_{g^{-1}\,\mathrm{G}_y\,g} = (\varphi_y \circ \mathrm{Int}(g))$$

für alle $x \in \mathrm{G}$. Für C_x bedeutet dies

$$\mathrm{C}_x = \varphi_x(\mathrm{G}_x) = (\varphi_y \circ \mathrm{Int}(g))(\mathrm{G}_x) = \varphi_y(\mathrm{G}_y) = \mathrm{C}_y\,.$$

Für (ii) gilt:

$$\mathrm{C}_x^\sigma = (\sigma \circ \varphi_x)(\mathrm{G}_x) = (\varphi_y \circ \sigma)(\mathrm{G}_x) = \varphi_y(\mathrm{G}_y^\sigma) = \mathrm{C}_y\,.$$

□

Eine Folgerung ist

Lemma 14 ([Ko82] Lemma 4.5.(4)). *Sei $x \in \mathrm{G}$ und die Konjugationsklasse von x über K definiert, dann ist C_x über K definiert, d.h. die Gruppe C_x ist eine Γ-invariante Untergruppe von $\pi_1(\mathrm{G})$.*

Beweis: Die Konjugationsklasse $[x]$ ist über K definiert, d.h. $[x]^\sigma = [x]$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$. Somit folgt nach Lemma 13, daß $\mathrm{C}_x = \mathrm{C}_x^\sigma$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ ist, weswegen C_x über K definiert ist. □

Ist die Konjugationsklasse von $x \in \mathrm{G}$ über K definiert, dann ist nach Lemma 14 die Gruppe C_x über K definiert. Daher können wir die Galoiskohomologiegruppen von C_x betrachten.

Als nächstes konstruieren wir eine Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$, um die Existenz eines rationalen Vertreters aus der Konjugationsklasse von x zu beweisen. Für jedes $\sigma \in \Gamma$ wählen wir ein $g_\sigma \in \mathrm{G}$ mit $x^\sigma = g_\sigma x g_\sigma^{-1}$. Für $\sigma, \tau \in \Gamma$ erhalten wir zwei Ausdrücke für $x^{\sigma\tau}$:

$$x^{\sigma\tau} = (g_\sigma x g_\sigma^{-1})^\tau = g_\sigma^\tau x^\tau g_\sigma^{-\tau} = g_\sigma^\tau g_\tau x g_\tau^{-1} g_\sigma^{-\tau}$$

und

$$x^{\sigma\tau} = g_{\sigma\tau} x g_{\sigma\tau}^{-1}.$$

Also gilt

$$x = (g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) x (g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau)^{-1}$$

Somit erhalten wir $g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau \in \mathrm{G}_x$. Das Bild von $g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau$ unter φ_x definieren wir als $c_{\sigma,\tau}$ und erhalten

Lemma 15 ([Ko82] Lemma 4.6). *Die 2-Kokette $c_{\sigma,\tau}$ ist ein 2-Kozykel von Γ mit Werten in C_x. Die Kohomologieklasse $(c_{\sigma,\tau})$ ist unabhängig von der Wahl von g_σ. Falls x und y konjugiert sind, dann ist $\mathrm{C}_x = \mathrm{C}_y$ und x und y bestimmen die gleiche Kohomologieklasse in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$.*

Beweis: Im folgenden bezeichnen wir φ_x mit φ. Der Korand $(\partial c_{\sigma,\tau})_{\rho,\sigma,\tau}$ von $c_{\sigma,\tau}$ ist

$$(\partial c_{\sigma,\tau})_{\rho,\sigma,\tau} = c^{\tau}_{\rho,\sigma} c^{-1}_{\rho,\sigma\tau} c_{\rho\sigma,\tau} c^{-1}_{\sigma,\tau},$$

wobei $c_{\sigma,\tau} = \varphi(g^{-1}_{\sigma\tau} g^{\tau}_{\sigma} g_{\tau})$ ist. Wenn wir die Definition von $c_{*,*'}$ einsetzen, gilt

$$(\partial c_{\sigma,\tau})_{\rho,\sigma,\tau} = c^{\tau}_{\rho,\sigma} \cdot \varphi(g^{-1}_{\sigma\tau} g^{-\sigma\tau}_{\rho} g_{\rho\sigma\tau} g^{-1}_{\rho\sigma\tau} g^{\tau}_{\rho\sigma} g_{\tau} g^{-1}_{\tau} g^{-\tau}_{\sigma} g_{\sigma\tau}),$$

wir erhalten

$$(\partial c_{\sigma,\tau})_{\rho,\sigma,\tau} = c^{\tau}_{\rho,\sigma} \cdot \varphi(g^{-1}_{\sigma\tau} g^{-\sigma\tau}_{\rho} g^{\tau}_{\rho\sigma} g^{-\tau}_{\sigma} g_{\sigma\tau}).$$

Da $\mathrm{Int}(g^{-\tau}_{\sigma} g_{\sigma\tau})\, x = x^{\tau}$ gilt, folgt mit dem Lemma 12, daß

$$\tau \circ \varphi_x = \varphi_{x^{\tau}} \circ \tau = \varphi_x \circ \mathrm{Int}(g^{-\tau}_{\sigma} g_{\sigma\tau})^{-1} \circ \tau$$

und deshalb

$$c^{\tau}_{\rho,\sigma} = \varphi((g^{-\tau}_{\sigma} g_{\sigma\tau})^{-1} g^{-\tau}_{\rho\sigma} g^{\sigma\tau}_{\rho} g^{\tau}_{\sigma} (g^{-\tau}_{\sigma} g_{\sigma\tau})) = \varphi(g^{-1}_{\sigma\tau} g^{\tau}_{\sigma} g^{-\tau}_{\rho\sigma} g^{\sigma\tau}_{\rho} g_{\sigma\tau})$$

ist. Somit ist $c_{\sigma,\tau}$ ein 2-Kozykel.

Wir zeigen, daß die Kohomologieklasse von $c_{\sigma,\tau}$ unabhängig von der Wahl von g_{σ} ist, da wir g_{σ} durch $g'_{\sigma} = g_{\sigma} h_{\sigma}$ mit $h_{\sigma} \in \mathrm{G}_x$ ersetzen können. Sei$(c'_{\sigma,\tau})$ der Kozykel, den wir nach dem Ersetzen von g_{σ} durch g'_{σ} erhalten, also

$$c'_{\sigma,\tau} := (g'_{\sigma\tau})^{-1} (g'_{\sigma})^{\tau} g'_{\tau} := (g_{\sigma\tau} h_{\sigma\tau})^{-1} (g_{\sigma} h_{\sigma})^{\tau} g_{\tau} h_{\tau}.$$

Bezeichnen wir $\varphi(h_{\sigma})$ mit d_{σ}, dann ergibt sich:

$$c'_{\sigma,\tau} = d^{-1}_{\sigma\tau}\, \varphi(g^{-1}_{\sigma\tau} g^{\tau}_{\sigma} g_{\tau} g^{-1}_{\tau} h^{\tau}_{\sigma} g_{\tau})\, d_{\tau} = d^{-1}_{\sigma\tau}\, c_{\sigma,\tau}\, \varphi(g^{-1}_{\tau} h^{\tau}_{\sigma} g_{\tau})\, d_{\tau}.$$

Aufgrund von Lemma 13 ist

$$\varphi(g^{-1}_{\tau} h^{\tau}_{\sigma} g_{\tau}) = \varphi(h_{\sigma})^{\tau} = d^{\tau}_{\sigma}.$$

Die Kozykel $c'_{\sigma,\tau}$ und $c_{\sigma,\tau}$ unterscheiden sich nur um den Kozykel

$$d^{-1}_{\sigma\tau} d^{\tau}_{\sigma} d_{\tau}.$$

Dieser ist ein Korand, weswegen die Kohomologieklasse α von der Wahl von g_{σ} unabhängig ist.

Sei y zu x konjugiert, also $y = g^{-1} x g$ mit $g \in \mathrm{G}$. Aufgrund von Lemma 13 erhalten wir $\mathrm{C}_x = \mathrm{C}_y$ mit $\varphi_x = \varphi_y \circ \mathrm{Int}(g)$. Somit ist

$$y^{\sigma} = (g^{-1} x g)^{\sigma} = g^{-\sigma} x^{\sigma} g^{\sigma} = g^{-\sigma} g_{\sigma} x g^{-1}_{\sigma} g^{\sigma} = g^{-\sigma} g_{\sigma} g y g^{-1} g^{-1}_{\sigma} g^{\sigma}.$$

Mit $\gamma_{\sigma} := g^{-\sigma} g_{\sigma} g$ erhalten wir als Kozykel für y

$$c''_{\sigma,\tau} = \varphi_y(\gamma^{-1}_{\sigma\tau} \gamma^{\tau}_{\sigma} \gamma_{\tau}) = \varphi_y(g^{-1}(g^{-1}_{\sigma\tau} g^{\tau}_{\sigma} g_{\tau}) g) = \varphi_x(g^{-1}_{\sigma\tau} g^{\tau}_{\sigma} g_{\tau}) = c_{\sigma,\tau}.$$

Also stimmen die Kohomologieklassen überein und somit ist das Lemma bewiesen. □

Daraus ergeben sich Schlußfolgerungen für die Γ-Operation.

Lemma 16. *Seien $\sigma, \tau \in \Gamma$. Falls σ oder τ trivial ist, ist der Kozykel $c_{\sigma,\tau}$ trivial. Falls x in $\mathrm{G(K)}$ liegt, ist $c_{\sigma,\tau}$ trivial.*

Beweis: Falls x in $\mathrm{G(K)}$ liegt, d.h. es gilt $x = x^\tau$ für alle $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$, weswegen wir $g_{\mathrm{id}} = 1$ wählen können. Somit ist $c_{\sigma,\tau}$ trivial.

Für triviales τ gilt

$$c_{\sigma,\tau} = \varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) = \varphi_x(g_\sigma^{-1} g_\sigma) = 1.$$

Falls σ trivial ist, erhält man analog $c_{\sigma,\tau} = 1$. □

3.3. Verallgemeinerung von Kottwitz' Theorem

In der Arbeit [Ko82] §4 beweist Kottwitz, daß jede Konjugationsklasse eines unipotenten Elementes von G, die über K definiert ist, ein Element aus $\mathrm{G(K)}$ enthält, solange die Charakteristik des Körpers K null ist. Diese Aussage geht wesentlich in die weiteren Beweis von Theorem 22 ein. Nachdem wir Theorem 19 für den Fall guter Charakteristik bewiesen haben, können wir alle anderen Sätze umformulieren.

Um den Zusammenhang der Sätze klar erkenntlich zu machen, beweisen wir sie erst im nächsten Abschnitt.

Wir beginnen mit dem Satz von Kottwitz über halbeinfache Konjugationsklassen, der bereits eine Verallgemeinerung des Satzes von Steinberg darstellt:

Satz 17 ([Ko82] Theorem 4.1). *Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und $\mathrm{G_{Der}}$ einfach zusammenhängend. Dann besitzt jede halbeinfache Konjugationsklasse, die über K definiert ist, ein Element aus $\mathrm{G(K)}$.*

Für den Beweis des Satzes 17 verweisen wir vollständig auf den Beweis von [Ko82] Theorem 4.1.

Folgerung 18 ([St65] Theorem 9.8.). *Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe. Falls G einfach zusammenhängend ist, dann besitzt jede halbeinfache Konjugationsklasse, die über K definiert ist, ein Element aus $\mathrm{G(K)}$.*

Mit dem verallgemeinerten Satz von Jacobson-Morozov von Premet [Pr95] Theorem 2.5 lassen wir die Einschränkung an die Charakteristik weitestgehend fallen und beweisen für unipotente Elemente den

Theorem 19. *Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und die Charakteristik des Grundkörpers K gut. Dann gibt es in jeder unipotenten Konjugationsklasse, die über K definiert ist, ein Element aus $\mathrm{G(K)}$.*

Anmerkung. Für einen perfekten Körper positiver Charakteristik hat Steinberg in [St65] Remark 6.15c zwei Vermutungen für quasizerfallende halbeinfache Gruppen aufgestellt.

(1) Jede unipotente Konjugationsklasse ist über K definiert.

(2) Jede unipotente Konjugationsklasse besitzt ein Element aus $\mathrm{G(K)}$.

Mit Hilfe der Aussage des Theorem 19 sehen wir, daß die erste Vermutung die zweite impliziert.

Für halbeinfache Elemente gilt

Satz 20 ([Ko82] Theorem 4.7). *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe. Sei* $x \in \mathrm{G}$ *halbeinfach und die Konjugationsklasse von* x *über* K *definiert. Die Konjugationsklasse von* x *enthält genau dann ein Element aus* $\mathrm{G}(\mathrm{K})$*, wenn die zugehörige Obstruktion* $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ *trivial ist.*

Damit verallgemeinern wir schließlich den Satz von Steinberg und Kottwitz:

Satz 21. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe,* $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ *einfach zusammenhängend und die Charakteristik des Grundkörpers* K *gut. Dann gibt es in jeder Konjugationsklasse, die über* K *definiert ist, ein Element aus* $\mathrm{G}(\mathrm{K})$*. Für halbeinfache Konjugationsklassen gibt es keine Einschränkung an die Charakteristik.*

Wir erhalten letztendlich

Theorem 22. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und die Charakteristik des Grundkörpers* K *gut. Sei die Konjugationsklasse von* $x \in \mathrm{G}$ *über* K *definiert. Dann sind äquivalent:*

(i) $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ *ist trivial.*

(ii) Die Konjugationsklasse von x *besitzt einen rationalen Vertreter.*

Für halbeinfache Konjugationsklassen gibt es keine Einschränkung an die Charakteristik von K.

Eine Anwendung ist die

Folgerung 23. *Sei* x *ein Vertreter einer rationalen Konjugationsklasse. Falls es eine galoische Körpererweiterung* $\mathrm{K}' \,/\, \mathrm{K}$ *gibt, so daß die Konjugationsklasse ein Element aus* $\mathrm{G}(\mathrm{K}')$ *enthält und die Obstruktion* α *in* $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\mathrm{K}' \,/\, \mathrm{K}), \mathrm{C}_x)$ *trivial ist, dann enthält die Konjugationsklasse von* x *einen rationalen Vertreter.*

Anmerkung. In der Arbeit [BS68] §8.6. von Borel und Springer wird darauf hingewiesen, daß sich der ursprüngliche Beweis des Theorems 9.8. von Steinberg [St65] auf beliebige Körper verallgemeinern läßt, sofern man an der Bedingung, daß G eine reduktive Gruppe ist, festhält.

3.4. Beweis von Theorem 22

Wir beweisen die Aussage für gute Charakteristik. Einige Beweise aus [Ko82] §4 sind ebenso für gute Charakteristik gültig und werden der Einfachheit halber übernommen. Die eigentliche Idee für den Fall guter Charakteristik steckt in der Anwendung des verallgemeinerten Satzes von Jacobson-Morozov.

Die weiteren Beweise orientieren sich an der Reihenfolge der Sätze.

3.4.1. Beweis von Satz 19

Wir werden zeigen:

Satz (vgl. Satz 19). *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und die Charakteristik des Grundkörpers* K *gut. Dann gibt es in jeder unipotenten Konjugationsklasse, die über* K *definiert ist, ein Element aus* $\mathrm{G}(\mathrm{K})$.

Sei $u \in \mathrm{G}$ ein unipotentes Element. Bekanntlich liegt dieses bereits in der derivierten Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ und wir können uns im Beweis somit auf halbeinfache Gruppen beschränken. Falls die Charakteristik von K gut ist, betrachten wir das zugehörige nilpotente Element in der Algebra $\mathfrak{g}$. Die Expotentialabbildung, die nilpotente Elemente über K auf unipotente Elemente über K abbildet, ist bekanntlich über K definiert ([Ca85] §1.15).

Mit Hilfe des Satzes von Jacobson-Morozov kann man zeigen, daß unter gewissen Einschränkungen jedes nichttriviale nilpotente Element A in einer geeigneten 3-dimensionalen Unteralgebra $\mathfrak{s}$ liegt, die isomorph zu $\mathfrak{sl}(2)$ ist. Springer und Steinberg zeigen mit Hilfe der Dynkin-Konstant-Theorie in [St68] III §4, daß die Konjugationsklasse von nilpotenten Elementen eineindeutig den Konjugationsklassen von 3-dimensionalen einfachen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ entspricht.

Wir greifen hier auf eine Verallgemeinerung des Satzes von Jacobson-Morozov zurück und zitieren, unter Verwendung der Bezeichnungen aus [Pr95], ohne Beweis:

Satz 24 ([Pr95] Theorem 2.5.). *Jedes nichttriviale nilpotente Element* $A \in \mathfrak{g}$ *hat mindestens einen Dynkin-Torus* $\lambda \in X_*(\mathrm{G})$, *d.h.* $A \in \mathfrak{g}(2)$ *und* $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A) \subset \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}(i)$ *bezüglich* λ.

Dieser Satz gilt in beliebiger guter Charakteristik. Es genügt folgendes Lemma zu zeigen:

Lemma 25. *Sei die Charakteristik von* K *gut. Jede nilpotente Klasse von* $\mathfrak{g}$, *die über* K *definiert ist, enthält ein Element aus* $\mathfrak{g}(\mathrm{K})$.

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{g}$ nilpotent und die Konjugationsklasse von A über K definiert. Nach Satz 24 gibt es einen Dynkin-Torus, so daß A ein Element in $\mathfrak{g}(2)$ ist. Somit enthält die Konjugationsklasse von A eine nichttriviale Untermenge von $\mathfrak{g}(2)$. Falls $\mathfrak{g}(2)$ bereits über K definiert ist, dann liegen die K-rationalen Punkte in $\mathfrak{g}(2)$ Zariski-dicht ([BS66] Theorem A). Somit enthält die Konjugationsklasse von A ein Element aus $\mathfrak{g}(\mathrm{K})$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{g}(2)$ bereits über K definiert ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn wir den Charakter λ aus Satz 24 durch einen geeigneten konjugierten Charakter μ ersetzen können, der über K definiert ist.

Es gibt eine Einparameteruntergruppe $\mu : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{T}$, die konjugiert zum Charakter λ ist und zum Abschluß der positiven Weylkammer von X_* gehört. Da μ^σ und μ unter G konjugiert sind und beide in der Weylkammer liegen, gibt es ein Element w der Weylgruppe, für das $w\mu = \mu^\sigma$ gilt. Da μ in der Weylkammer liegt, gilt $\mu = \mu^\sigma$. Somit ist μ über K definiert und die Aussage bewiesen. □

3.4.2. Beweis von Satz 21

Vorher benötigen wir noch

Lemma 26 ([Ko82] Lemma 3.3.). *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende Gruppe und* $x \in \mathrm{G(K)}$ *halbeinfach. Dann gibt es ein zu* x *stabil konjugiertes Element* $y \in \mathrm{G(K)}$ *mit der Eigenschaft, daß* G_y° *quasizerfallend ist.*

Beweis: Sei H eine quasizerfallende Form von G_x° und $\varphi : \mathrm{H} \to \mathrm{G}_x^\circ$ ein innerer Twist. Wir können für jedes $\sigma \in \Gamma$ ein $g_\sigma \in \mathrm{G}_x^\circ$ wählen, so daß die Eigenschaft $\varphi^\sigma \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Int}(g_\sigma)$ erfüllt ist. Wir wählen einen maximalen K-zerfallenden Torus $\mathrm{S} \subset \mathrm{H}$, d.h. S ist über K isomorph zu einem Produkt endlich vieler Kopien der Gruppe $\mathbb{G}_\mathrm{m}$, und betrachten den Zentralisator $\mathrm{T} := \mathrm{C(S)}$ von S. Dieser ist ein maximaler Torus in H. Sei i die Abbildung $\mathrm{T} \to \mathrm{G}$, die wir durch Hintereinanderausführung von $\varphi|_\mathrm{T}$ und der Inklusion $\mathrm{G}_x^\circ \hookrightarrow \mathrm{G}$ erhalten. Für alle $\sigma \in \Gamma$ ist i^σ unter G_x° – und damit auch unter G – zu i konjugiert.

Wenn wir den maximalen Torus T durch die Abbildung i nach G einbetten, ist das Bild $i(\mathrm{T})$ ein maximaler Torus in G_x°. Da G nach Voraussetzung quasizerfallend ist, gibt es nach [Ko82] Lemma 2.2. ein $g \in \mathrm{G}$, so daß $j := \mathrm{Int}(g) \circ i$ über K definiert ist. Nun ist j genau dann über K definiert, wenn $g^{-1}g^\sigma g_\sigma$ in $i(\mathrm{T})$ für alle $\sigma \in \Gamma$ ist. Somit gilt für alle $\sigma \in \Gamma$, daß $g^{-1}g^\sigma$ in G_x° ist. Damit ist das Element $y := gxg^{-1}$ aus $\mathrm{G(K)}$ und stabil zu x konjugiert und dadurch G_y° eine innere Form von G_x°. G_y° besitzt einen maximalen K-zerfallenden Torus $j(\mathrm{T})$. Dieser hat $j(\mathrm{S})$ als zerfallende Komponente mit der gleichen Dimension wie S. Nun ist $j(\mathrm{S})$ ein maximaler K-zerfallender Torus der quasizerfallenden Form H von G_x° und somit ist G_y° quasizerfallend. □

Wir kommen zum Beweis von Satz 21.

Satz (vgl. Satz 21). *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe,* G_Der *einfach zusammenhängend und die Charakteristik des Grundkörpers* K *gut. Dann gibt es in jeder Konjugationsklasse, die über* K *definiert ist, ein Element aus* $\mathrm{G(K)}$*. Für halbeinfache Konjugationsklassen gibt es keine Einschränkung an die Charakteristik.*

Insbesondere nehmen wir den Fall guter Charaktersitik an, um Satz 19 anwenden zu können.

Beweis: Nehmen wir an, daß für $x \in \mathrm{G}$ die zugehörige Konjugationsklasse über K definiert ist. Dann gibt es für jedes σ ein $g_\sigma \in \mathrm{G}$, so daß

$$g_\sigma^{-1} x g_\sigma = x^\sigma$$

ist. Sei $x = su = us$ die Jordanzerlegung von x, und sei $\sigma \in \Gamma$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung erhalten wir

$$g_\sigma^{-1} s g_\sigma = s^\sigma.$$

Da die Konjugationsklasse von x über K definiert ist, können wir wegen Satz 17 annehmen, daß s bereits in $\mathrm{G(K)}$ liegt. Dann gilt also $g_\sigma \in \mathrm{G}_s$.

Außerdem können wir nach dem obigen Lemma annehmen, daß G_s quasizerfallend ist, wenn wir x durch ein geeignetes stabil konjugiertes Element ersetzen. Da G_Der einfach zusammenhängend und s halbeinfach ist, folgt, daß G_s zusammenhängend ist. Daher ist $\mathrm{G}_s = \mathrm{G}_s^\circ$.

Mit σ und g_σ wie oben erhalten wir aufgrund der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung die Gleichung $g_\sigma^{-1} u g_\sigma = u^\sigma$. Die Konjugationsklasse von u liegt wegen $g_\sigma \in \mathrm{G}_s$ in G_s und ist über K definiert, weswegen wir Satz 19 anwenden können. Daher ist u zu einem Element $u' \in \mathrm{G}_s(\mathrm{K})$ in G_s konjugiert. Setzen wir beides zusammen, sehen wir, daß die Konjugationsklasse von x ein Element aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ enthält. □

3.4.3. Beweis von Theorem 22

Wir zeigen nun:

Theorem (vgl. Theorem 22). *Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und die Charakteristik des Grundkörpers K gut. Sei die Konjugationsklasse von $x \in \mathrm{G}$ über K definiert. Dann sind äquivalent:*

(i) $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ ist trivial.

(ii) Die Konjugationsklasse von x besitzt einen rationalen Vertreter.

Für halbeinfache Konjugationsklassen gibt es keine Einschränkung an die Charakteristik von K.

Beweis: Zu (i). Sei x ein Vertreter einer rationalen Konjugationsklasse, die einen rationalen Vertreter besitzt. Nach Lemma 15 ist die Obstruktion α nur von der Konjugationsklasse abhängig und wir können ohne Einschränkung annehmen, daß x bereits aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ ist, d.h. es gilt $x = x^\sigma$ und $x^\sigma = g_\sigma x g_\sigma^{-1}$. Daher kann $g_\sigma = 1$ für alle $\sigma \in \Gamma$ angenommen werden. Somit ist

$$\alpha = (c_{\sigma,\tau}) = \varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) = \varphi_x(1) = 1$$

für alle $\sigma, \tau \in \Gamma$. Dies beweist, daß α trivial ist.

Zu (ii). Sei G quasizerfallend und α trivial. Da die Obstruktion α unabhängig von der Wahl von g_σ ist, wählen wir ein $g_\sigma \in \mathrm{G}$, so daß $x^\sigma = g_\sigma x g_\sigma^{-1}$ und $\varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) = 1$ für alle $\sigma, \tau \in \Gamma$ gilt.

Sei $\beta : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ eine z-Erweiterung mit $\mathrm{Z} := \mathrm{Kern}(\beta)$. Wählen wir ein $y \in \mathrm{H}$ und ein $h_\sigma \in \mathrm{H}$ mit $\beta(y) = x$ bzw. $\beta(h_\sigma) = g_\sigma$ für jedes $\sigma \in \Gamma$, dann gilt

$$y^\sigma = h_\sigma y h_\sigma^{-1} z_\sigma$$

für ein eindeutig bestimmtes $z_\sigma \in \mathrm{Z}$. Mit dieser Relation erhalten wir zwei Ausdrücke für $y^{\sigma\tau}$,

$$y^{\sigma\tau} = h_{\sigma\tau} y h_{\sigma\tau}^{-1} z_{\sigma\tau}$$

und

$$y^{\sigma\tau} = h_\sigma^\tau h_\tau y (h_\sigma^\tau h_\tau)^{-1} z_\sigma^\tau z_\tau,$$

die wir miteinander vergleichen und erhalten:

$$y = t y t^{-1} (z_\tau z_\sigma^\tau z_{\sigma\tau}^{-1}) \text{ mit } t = h_{\sigma\tau}^{-1} h_\sigma^\tau h_\tau.$$

Wir betrachten diese Gleichung in $\mathrm{H}_{\mathrm{Der}}$. Seien $y = y_0 c$ und $t = t_0 d$ mit $y_0, t_0 \in \mathrm{H}_{\mathrm{Der}}$ und $c, d \in \mathrm{Z}(\mathrm{H})$. In $\mathrm{H}_{\mathrm{Der}}$ gilt nun die Gleichung

$$y_0 = t_0 y_0 t_0^{-1}(z_\tau z_\sigma^\tau z_{\sigma\tau}^{-1}).$$

Da $\mathrm{H}_{\mathrm{Der}}$ einfach zusammenhängend ist, gilt $\varphi_x(\beta(h_{\sigma\tau}^{-1} h_\sigma^\tau h_\tau)) = 1$. Aus der Definition von $\varphi_x : \mathrm{G}_x \to \mathrm{C}_x$ folgt

$$\varphi_x(\beta(t)) = \varphi_x(\beta(h_{\sigma\tau}^{-1} h_\sigma^\tau h_\tau z_\tau z_\sigma^\tau z_{\sigma\tau}^{-1})) = 1 \cdot \varphi_x(\beta(z_\tau z_\sigma^\tau z_{\sigma\tau}^{-1})).$$

Aus der obigen Gleichung sehen wir leicht, daß wir h_σ bereits aus $\mathrm{H}_{\mathrm{Der}}$ wählen können. Darüber hinaus gilt, daß $z_\tau z_\sigma^\tau z_{\sigma\tau}^{-1}$ in $\mathrm{Z} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{Der}}$ liegt.

Nach Voraussetzung ist $\alpha = \varphi_x(\beta(t))$ trivial. Da $z_\sigma \in \mathrm{Z} = \mathrm{Kern}(\beta)$ liegt, gilt $z_\tau z_\sigma^\tau z_{\sigma\tau}^{-1} = 1$. Dies zeigt, daß (z_σ) ein 1-Kozykel von Γ mit Werten in Z ist. Da die Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Z})$ trivial ist, gibt es ein $z \in \mathrm{Z}$ mit $z_\sigma = z z^{-\sigma}$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Somit gilt für das Element $yz \in \mathrm{H}_{\mathrm{Der}} \cdot \mathrm{Z}(\mathrm{H})$:

$$(yz)^\sigma = y^\sigma z^\sigma = h_\sigma y h_\sigma^{-1} z_\sigma z^\sigma = h_\sigma y h_\sigma^{-1} z z^{-\sigma} z^\sigma = h_\sigma (yz) h_\sigma^{-1}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Konjugationsklasse von yz über K definiert ist. Der Satz 21 zeigt, daß die Konjugationsklasse von yz ein Element aus $\mathrm{H}(\mathrm{K})$ enthält. Somit enthält die Konjugationsklasse von $\beta(yz) = x$ ein Element aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$. □

Stabile und instabile rationale Konjugationsklassen

Dieses Kapitel stellt den Kern der Arbeit dar. Wir verfolgen das Ziel, eine Liste von Gruppen und eine Liste von Elementen anzugeben, für welche die Konjugationsklassen stabil bzw. instabil unter der Operation der absoluten Galoisgruppe sind.

Ein erster Schritt ist es, für einen beliebigen Vertreter x einer rationalen Konjugationsklasse in einer reduktiven Gruppe zu zeigen, daß bereits der halbeinfache Anteil der Jordanzerlegung von x die notwendigen Informationen darüber enthält. In den weiteren Untersuchungen werden wir uns daher auf halbeinfache rationale Konjugationsklassen beschränken.

Sei G eine quasizerfallende halbeinfache Gruppe. Ein entscheidenes Resultat in diesem Kapitel ist die Beobachtung, daß die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ aus Theorem 22 im Bild der Gruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ liegt. Dieses Ergebnis geht in die weiteren Untersuchungen ein.

Um erste Phänomene zu studieren, widmen wir uns zunächst dem Beispiel einer instabilen Konjugationsklasse aus [Ko82] Seite 798f. Danach werden wir in den quasizerfallenden einfachen Gruppen alle Möglichkeiten für x klassifizieren, in denen eine rationale Konjugationsklasse keinen rationalen Vertreter enthält. In einem ersten Schritt zeigen wir für zerfallende halbeinfache Gruppen, daß es derartige Probleme nicht gibt.

In einem zweiten Schritt zeigen wir, daß für jede quasizerfallende einfache Gruppe die rationalen Konjugationsklassen jedes Elementes einen rationalen Vertreter besitzen - Ausnahmen hiervon sind die einfache Gruppe vom Typ A_{4n-1} und die einfache adjungierte Gruppe vom Typ D_n^{Ad}. Anschließend werden wir diese Aussagen auf halbeinfache Gruppen verallgemeinern, sofern die Gruppe G keinen Faktor des genannten Typs enthält.

Darüber hinaus bestimmen wir alle halbeinfachen Elemente $s \in \mathrm{G}$, falls G eine einfache Gruppe vom Typ A_{4n-1} oder eine einfache adjungierte Gruppe vom Typ D_n ist, deren rationale Konjugationsklasse keinen rationalen Vertreter besitzt. Diese Untersuchungen werden wir ebenso für K-einfache und fast-einfache Gruppen durchführen. Wir zeigen darüber hinaus auf, welche Probleme entstehen, wenn wir zu halbeinfachen Gruppen übergehen.

Abschließend werden wir die hier erzielten Resultate am Beispiel einfacher und halbeinfacher Gruppen über $\mathbb{R}$ mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ veranschaulichen.

4.1. Das Beispiel von Kottwitz

Es schien lange Zeit, daß jede rationale Konjugationsklasse in einer quasizerfallenden zusammenhängenden reduktiven Gruppe einen rationalen Vertreter besitzt. In der Arbeit [Ko82] hat Kottwitz im Jahr 1982 ein Beispiel angegeben, für das die Aussage von Theorems [Ko82] 4.7 nichttrivial ist. An diesem einfachen Beispiel können wir bereits einige Phänomene, die wir später genauer studieren werden, angeben.

Sei G die projektive unitäre Gruppe $\mathrm{PU}_4(\mathbb{R})$, die zur Grammatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört. Diese Gruppe ist quasizerfallend über $\mathbb{R}$. Die Gruppe G ist über $\mathbb{C}$ isomorph zu PGL_4. Wir können daher die Elemente von G bis auf die Multiplikation mit einem Skalaren durch 4×4 Matrizen darstellen. Für eine komplexe Zahl $a \neq 0$ mit Realteil 0 und Imaginärteil ungleich $\pm i$ definieren wir das Element x in G durch

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Dieses Element ist regulär und halbeinfach. Die komplexe Konjugation σ bildet x auf

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} -\overline{a}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{a}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ab. Somit ist die Konjugationsklasse über $\mathbb{R}$ definiert, und daß $\mathrm{C}_x = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. Die Kohomologieklasse von x in $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathrm{C}_x)$ wird durch $c_{\sigma,\tau}$ dargestellt, wobei $c_{\sigma,\tau} = -1$ ist, falls σ und τ nichttrivial sind. Die Gruppe $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathrm{C}_x)$ hat die Ordnung zwei.

Es läßt sich beobachten, daß $c_{\sigma,\tau}$ für $a = \pm i$ trivial wird und die Spur des nicht notwendig regulären Elements x null sein muß (z.B. $\rightarrow$ Lemma 64).

Wir werden nun genauer untersuchen, wieso $\mathrm{C}_x \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. Die Galoisoperation σ auf der Gruppe PGL_4 läßt sich auf die Gruppe G übertragen. Dies bedeutet für $g \in \mathrm{G}$ und $x \in \mathrm{PGL}_4$:

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\sigma"'] & x \arrow[d, "\sigma^\times"] \\ \sigma(g) \arrow[r, leftrightarrow] & \sigma^\times(x), \end{tikzcd}$$

wobei $\sigma^\times = \sigma \circ \mathrm{Flip}$ mit

$$\mathrm{Flip}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} (g^t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Wir können das Element x so abändern, daß x in SL_4 liegt. Hierzu multiplizieren wir das Element x mit $\sqrt{a}^{-1}$, d.h.

$$\sqrt{a}^{-1} \cdot x = \sqrt{a}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

mit $b := r \cdot \zeta_8 = \sqrt{a}$. Der Automorphismus $\sigma^\times$ operiert auf x durch

$$\sigma^\times\left(\begin{pmatrix} b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{b^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{b^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ib^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ib \end{pmatrix}.$$

Wenn wir dies in der Form $\sigma^\times(x) = k_\sigma w_\sigma(x)$ mit $k_\sigma \in \mathrm{Z}^1(\Gamma, \pi_1(\mathrm{G}))$ und $w_\sigma \in \mathrm{Z}^1(\Gamma, \mathrm{W}(\mathrm{G}))$ schreiben, erhalten wir wegen $-\overline{b^{-1}} = ib^{-1}$

$$\sigma^\times\left(\begin{pmatrix} b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}\right) = i \cdot (12) \cdot \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

In diesem Schritt geht ein, daß $r \neq \pm 1$ ist, und somit $a \neq \pm i$. Andernfalls ist k_σ trivial, also bleibt nur die Möglichkeit $k_\sigma = i$. Berechnen wir den Kozykel $c_{\sigma,\tau}$, so erhalten wir

$$c_{\sigma,\tau} = k_{\sigma\tau}^{-1} k_\tau^{\sigma^\times} k_\sigma = 1 \cdot \sigma^\times(i) \cdot i = \begin{cases} -1 & \text{falls } \sigma = \tau \neq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Bedingung, die hier eine nichttriviale Obstruktion liefert, ist für $r \neq \pm 1$ die Relation

$$-\overline{b^{-1}} = ib^{-1}.$$

Um diese besser zu verstehen, zerlegen wir x in seinen reellen und kompakten Anteil, den wir mit x_R bzw. mit x_K bezeichnen:

$$x = x_R \cdot x_K = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\zeta_8^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_8^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta_8 \end{pmatrix}$$

Für den reellen Anteil x_R gilt $\sigma^\times(x_R) = x_R$. Der reelle Anteil läßt nur solche Symmetrien bzw. Weylgruppenelemente zu, die die ersten oder die letzten beiden Vektoren vertauschen.

Beim kompakten Anteil gilt hingegen

$$\sigma^\times(x_K) = 1 \cdot w_\sigma(x_K).$$

Die Symmetrien der Weylgruppe reichen aus, damit das Element k_σ trivial ist. Man könnte vermuten, daß dies daran liegt, daß mit ζ_8 auch $-\zeta_8, \zeta_8^{-1}$ und $-\zeta_8^{-1}$ Eigenwerte von x_K sind.

Somit gibt es sowohl für den reellen Anteil als auch für den kompakten Anteil einen rationalen Vertreter. Jedoch sind die Symmetrien, die der kompakte Anteil erlaubt, die Vertauschung des 1. mit dem 4. Vektor oder des 2. mit dem 3. Vektor.

Die Frage, ob das Element x einen rationalen Vertreter hat, wird durch die Verträglichkeit der Symmetrien beschrieben. Durch die obige Bedingung an b und $x_R \neq 1$ erzwingt man, daß sich die Symmetrien nicht ausschließlich durch die Weylgruppe ausdrücken lassen. Das Element k_σ ist nichttrivial und liefert eine nichttriviale Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$. Dies ist nach Kottwitz' Theorem 8 ein hinreichender Grund dafür, daß es für die Konjugationsklasse von x keine Vertreter in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ gibt.

4.2. Ein Satz in der Kategorie der Γ-Moduln

Der folgende Abschnitt studiert die Konstruktion der Gruppe C_x aus Abschnitt 3.2 für eine quasizerfallende halbeinfache Gruppe über K. Dies liefert ein Hilfsmittel, mit dem wir in vielen Fällen berechnen, ob die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ aus dem Theorem 22 trivial ist. Wir zeigen, daß die Obstruktion α im Bild von $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ liegt.

Sei $x \in \mathrm{G}$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ ist der Kern der Abbildung $\rho : \mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \to \mathrm{G}$. Jedem $\sigma \in \Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$ ordnen wir ein Element $z_\sigma \in \pi_1(\mathrm{G})$ zu, so daß gilt

$$x_{\mathrm{sc}}^\sigma = g_\sigma x_{\mathrm{sc}} g_\sigma^{-1} z_\sigma,$$

wobei x_{sc} ein Urbild von x in G_{sc} ist. Wir wenden nun $\sigma, \tau \in \Gamma$ auf x_{sc} an und erhalten

$$(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) x_{\mathrm{sc}} (g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau)^{-1} = z_{\sigma\tau}(z_\sigma^\tau z_\tau)^{-1} x_{\mathrm{sc}}.$$

Nun gilt

$$\varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) = c_{\sigma,\tau} = z_{\sigma\tau}(z_\sigma^\tau z_\tau)^{-1} = \partial(z_\sigma) \in \mathrm{C}_x\,.$$

Daher ist das Element z_σ eindeutig in $\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x$ und wir können einen stetigen Morphismus definieren, der jedem Element $\sigma \in \Gamma$ das Element z_σ zuordnet. Wir fassen das Element z_σ als Vertreter des Kozykels β_1 in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ auf.

Es gilt

$$z_{\sigma\tau} = z_\tau z_\sigma^\tau \text{ für alle } \sigma, \tau \in \Gamma,$$

woraus sich ergibt, daß z_σ ein 1-Kozykel ist und in $\mathrm{Z}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ liegt. Daher ist $z_\sigma = z \cdot z^{-\sigma}$. Ersetzen wir in diesem Fall z durch $z \cdot w$ mit $w \in \mathrm{G}_x$, so erhalten wir anstelle von z_σ einen zu z_σ äquivalenten Kozykel z'_σ, der wegen

$$z'_\tau z'^\tau_\sigma z'^{-1}_{\sigma\tau} = zww^{-\tau} z^{-\tau}(zww^{-\sigma} z^{-\sigma})^\tau (zww^{\sigma\tau} z^{\sigma\tau})^{-1} = 1$$

in der gleichen Kohomologieklasse in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ liegt.

Wir betrachten die exakte Sequenz

$$1 \to \mathrm{C}_x \to \pi_1(\mathrm{G}) \to \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x \to 1.$$

Diese Sequenz zerfällt im Allgemeinen nicht in der Kategorie der Γ-Moduln. Durch die lange exakte Kohomologiesequenz erhalten wir den kanonischen Verbindungshomomorphismus $\Delta : \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x), \beta_1 \mapsto \alpha$:

$$\cdots \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x) \to \cdots$$

Die Kohomologieklasse von α in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ aus Theorem 22 liegt im Bild von einer Kohomologieklasse β in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ unter dem Homomorphismus Δ, wie man aus dem Beweis von Theorem 22 entnehmen kann. Daher gilt:

Theorem 27. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe und die Charakteristik von* K *gut. Sei* x *ein Vertreter einer rationalen Konjugationsklasse von* G*. Falls die kurze exakte Sequenz*

$$1 \to \mathrm{C}_x \to \pi_1(\mathrm{G}) \to \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x \to 1$$

in der Kategorie der Γ*-Moduln zerfällt, dann enthält die Konjugationsklasse von* x *ein rationales Element.* □

Ein Γ-Modul N heißt einfach, wenn 0 und N die einzigen Teilmoduln von N sind. Falls $\pi_1(\mathrm{G})$ ein einfacher Γ-Modul ist, so treten nur die folgende beiden Extremfälle für die Gruppe C_x auf: Zum einen der Fall, in der C_x trivial ist, zum anderen der, in dem C_x gleich der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ ist. Hierfür gilt:

Dies bedeutet für den Γ-Modul $\pi_1(\mathrm{G})$:

Folgerung 28. *Falls der* Γ*-Modul* $\pi_1(\mathrm{G})$ *in der Kategorie der* Γ*-Moduln ein einfaches Objekt ist, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.* □

Eine weitere Konsequenz aus Theorem 27 ist, daß die Ordnungen der Gruppen C_x und $\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x$ einen gemeinsamen, nichttrivialen Teiler besitzen müssen, damit die Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ nicht verschwindet, denn es gilt

Lemma 29. *Falls* $\mid \mathrm{C}_x \mid$ *und* $\mid \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x \mid$ *teilerfremd sind, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Beweis: Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus zerfällt die obige Gruppenerweiterung, wenn die Gruppen C_x und $\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x$ teilerfremde Ordnung haben. Es gibt einen stetigen Schnitt

$$\varphi : \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x \to \pi_1(\mathrm{G}).$$

Aufgrund von Theorem 27 folgt die Aussage. □

Folgerung 30. *Falls die Ordnung von* $\pi_1(\mathrm{G})$ *quadratfrei ist, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse in* G *einen rationalen Vertreter.* □

Ein Γ-Modul M heißt halbeinfach, wenn M eine direkte Summe von einfachen Teilmoduln von M ist. In unserem Fall gilt:

Satz 31. *Falls der* Γ*-Modul* $\pi_1(\mathrm{G})$ *in der Kategorie der* Γ*-Moduln ein halbeinfaches Objekt ist, dann besitzt jede rationale Konjugaitonsklasse einen rationalen Vertreter.*

Beweis: Nach [Lo90] §28 F 12 ist jeder Teilmodul und jeder Restklassenmodul eines halbeinfachen Moduls halbeinfach. Daher läßt sich sowohl $\pi_1(\mathrm{G})$ als auch C_x simultan in einfache Teilmoduln zerlegen. Für jeden dieser einfachen Teilmoduln zerfällt die Sequenz aus Theorem 27. □

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ liegt im Zentrum Z, weswegen sich als einfacheres Kriterium für die halbeinfache Gruppe ergibt:

Theorem 32. *Falls* $\pi_1(\mathrm{G})$ *oder das Zentrum* Z *ein halbeinfaches Objekt in der Kategorie der* Γ*-Moduln ist, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Falls wir quasizerfallende halbeinfache Gruppen klassifizieren wollen, die eine rationale Konjugationsklasse besitzen, die keinen rationalen Vertreter hat, dann genügt es solche zu betrachten, für die $\mathrm{C}_x \subset \pi_1(\mathrm{G})$ ein echter, nichttrivialer Γ-Untermodul ist und die exakte Sequenz

$$1 \to \mathrm{C}_x \to \pi_1(\mathrm{G}) \to \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x \to 1$$

nicht spaltet.

4.3. Die Reduktion auf halbeinfache Elemente

Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe. Sei x ein Vertreter einer rationalen Konjugationsklasse von G mit der Jordanzerlegung $x = su = us$. Nach dem Satz 19 hat eine unipotenten rationalen Konjugationsklassen von G ein rationales Element enthält, sofern die Charakteristik des Grundkörpers gut ist. Somit ergibt sich die Frage, ob es hinreichend ist, nur den halbeinfachen Anteil eines Elementes x zu betrachten, d.h. den Quotienten $\mathrm{C}_s := \mathrm{G}_s\,/\,\mathrm{G}_s^\circ$ zu untersuchen.

Lemma 33. *Sei* $x \in \mathrm{G}$ *mit* $x = us$*. Falls die Konjugationsklasse von* x *über* K *definiert ist, dann sind die Konjugationsklassen von* s *und* u *über* K *definiert.*

Beweis: Wir betrachten die Jordanzerlegung $x = us = su$. Da die Konjugationsklasse von x über K definiert ist, gibt es für alle $\sigma \in \Gamma$ ein $g \in \mathrm{G}$ mit $x^\sigma = gxg^{-1}$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung gilt $gsg^{-1} = s^\sigma$, weshalb die Konjugationsklasse von s über K definiert ist. Dies gilt analog für den unipotenten Anteil. □

Daher können wir annehmen, daß die Konjugationsklasse von s über K definiert ist. Nun läßt sich die Gruppe C_x in die Gruppe $\mathrm{C}_s := \mathrm{G}_s\,/\,\mathrm{G}_s^\circ$ einbetten, da gilt

Lemma 34. *Sei* $x \in \mathrm{G}$ *mit* $x = us$*. Die Abbildung* $\mathrm{C}_x \to \mathrm{C}_s$ *existiert und ist injektiv.*

Beweis: Betrachten wir das exakte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_u & \longrightarrow & \mathrm{G}_s^\circ & \longrightarrow & \mathrm{G}_s^\circ \,/\, \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_u & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{G}_s \cap \mathrm{G}_u & \longrightarrow & \mathrm{G}_s & \longrightarrow & \mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s \cap \mathrm{G}_u & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Nach Lemma 12 ist der Quotient $\mathrm{G}_s \cap \mathrm{G}_u \,/\, \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_u$ isomorph zu C_x. Daher erhalten wir mit dem Schlangenlemma die exakte Sequenz

$$1 \to \mathrm{C}_x \to \mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ \to \dots,$$

weswegen die gesuchte Abbildung injektiv ist. □

Nach Konstruktion ist die Gruppe C_x in $\mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ enthalten. Somit genügt es, zuerst halbeinfache Elemente zu klassifizieren. Wenn $\mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ bereits trivial ist, so enthält die rationale Konjugationsklasse eines Elementes, dessen halbeinfacher Anteil s ist, einen rationalen Vertreter.

Falls $\mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ nichttrivial ist, kann C_x eine beliebige Untergruppe von $\mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ sein. Dies könnte dazu führen, daß die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial ist, während sie für $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_s)$ nichttrivial ist. Dies ist nicht immer der Fall, wie folgender Satz zeigt.

Satz 35. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und die Charakteristik von* K *gut. Sei* x *ein Vertreter einer rationalen Konjugationsklasse mit* $x = su$*. Falls* G_s *zusammenhängend ist, dann gibt genau dann ein rationales Element in der Konjugationsklasse von* x*, wenn die Konjugationsklasse von* s *einen rationalen Vertreter besitzt.*

Beweis: Nach Lemma 33 ist die Konjugationsklasse von s über K definiert, da bereits die Konjugationsklasse von x rational ist. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß x bereits in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ liegt, d.h. daß $x^\sigma = x$ für alle $\sigma \in \Gamma$ gilt. Aufgrund der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung gilt

$$s^\sigma u^\sigma = x^\sigma = x = su.$$

Die Konjugationsklasse von u besitzt nach Satz 19 einen rationalen Vertreter und wir können ohne Einschränkung annehmen, daß u bereits in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ liegt. Andernfalls können wir u durch ein geeignetes in G_s° konjugiertes rationales unipotentes Element ersetzen. Somit gilt

$$s^\sigma u = su,$$

und die Konjugationsklasse von s enthält einen rationalen Vertreter.

Andererseits können wir ohne Einschränkung annehmen, daß bereits s in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ liegt. Aufgrund von Lemma 26 können wir s durch ein geeignetes stabil konjugiertes Element ersetzen, so daß G_s° quasizerfallend ist. Das unipotente Element u liegt in G_s°. Nach Satz 19 besitzt die Konjugationsklasse von u einen rationalen Vertreter in G_s°, sofern die Charakteristik gut ist. Daher gibt es ein $h \in \mathrm{G}_s^\circ$, so daß $huh^{-1} \in \mathrm{G}_s^\circ(\mathrm{K})$ ist. Dann liegt $h\,x\,h^{-1} = shuh^{-1}$ in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ und wir erhalten einen rationalen Vertreter in der Konjugationsklasse von x. □

Folgerung 36. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und die Charakteristik gut. Falls jede halbeinfache rationale Konjugationsklasse in* G *einen rationalen Vertreter besitzt, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse in* G *einen rationalen Vertreter.*

Für ein Element $x = su \in \mathrm{G}$, für das u regulär ist, ist der Beweis einfacher.

Lemma 37. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe. Sei* $x = us \in \mathrm{G}$ *und die Konjugationsklasse von* x *über* K *definiert. Falls* u *regulär ist, enthält die Konjugationsklasse von* x *ein Element aus* $\mathrm{G}(\mathrm{K})$.

Beweis: Die Jordanzerlegung von $x = su = us$ bedeutet, daß die Gleichung $\mathrm{G}_x = \mathrm{G}_s \cap \mathrm{G}_u$ gilt und s in G_u liegt. Da u regulär ist, gilt nach [Ca85] Proposition 5.1.5. für jedes halbeinfache Element $s \in \mathrm{G}_u$, daß s im Zentrum Z von G liegt und somit $\mathrm{G}_s^\circ = \mathrm{G}$ ist. Folglich gilt

$$\mathrm{C}_x = \mathrm{G}_x \,/\, \mathrm{G}_x^\circ = \mathrm{G}_s \cap \mathrm{G}_u \,/\, \mathrm{G}_s^\circ \cap \mathrm{G}_u = \mathrm{G} \cap \mathrm{G}_u \,/\, \mathrm{G} \cap \mathrm{G}_u = 1,$$

weswegen jede Obstruktion in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial ist und nach Theorem 22 die Behauptung folgt. □

Für halbeinfache Gruppen G läßt sich der Quotient $\mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ beschreiben durch

Satz 38 ([Bo70] E 38). *Sei* G *eine halbeinfache Gruppe und* $\pi : \mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \to \mathrm{G}$ *die universelle Überlagerung mit* $\pi_1(\mathrm{G}) := \mathrm{Kern}(\pi)$. *Dann ist für jedes halbeinfache Element* $s \in \mathrm{G}$ *der Quotient* $\mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ *isomorph zu einer Untergruppe von* $\pi(\mathrm{G})$. □

Als Untergruppe der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ einer halbeinfachen Gruppe G ist C_s eine endliche, abelsche Gruppe.

4.4. Die Reduktion auf halbeinfache Gruppen

Sei $[s]$ eine halbeinfache rationale Konjugationsklasse in G. Jede reduktive Gruppe G läßt sich als fast semidirektes Produkt ihrer derivierten Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ mit der Zusammenhangskomponente des Zentrums Z° schreiben (Abschnitt 2.1 bzw. 5.5). Wir betrachten ein halbeinfaches Element s aus G. Wir schreiben $s = s'z$ mit $s' \in \mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ und $z \in \mathrm{Z}^\circ$, wobei s' und z beide halbeinfach sind. Falls g in G_s liegt, dann ist g bereits in $\mathrm{G}_{s'}$. Nun gilt für den Zentralisator von s

$$\mathrm{G}_s = \mathrm{G}_{s'z} = \mathrm{G}_{s'} = (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}\, \mathrm{Z}^\circ \,.$$

Die Konjugationsklasse von s' ist nicht notwendig rational, weshalb wir uns nicht ohne weiteres auf halbeinfache Gruppen bzw. adjungierte beschränken können. Hierfür gibt es jedoch ein kohomologisches Kriterium.

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$1 \to \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \times \mathrm{Z} \,/\, \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \to 1$$

folgt, daß die Abbildung $\Delta : \mathrm{G}(\mathrm{K}) \to \mathrm{G}_{\mathrm{Der}}(\mathrm{K}) \times (\mathrm{Z} \,/\, \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}})(\mathrm{K})$ dann surjektiv ist, wenn die Gruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$ verschwindet. Die Gruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$ ist im Allgemeinen nicht trivial und somit Δ nicht surjektiv.

Betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$1 \to \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{ad}} \to 1.$$

Hiermit sehen wir, daß die Gleichung

$$(s')^\sigma = g_\sigma s' g_\sigma^{-1} \mod \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$$

erfüllt ist. Falls die Konjugationsklasse von s' in G_{ad} einen rationalen Vertreter besitzt, folgt

$$(s')^\sigma = s' \cdot \zeta_\sigma$$

in $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$. Damit erhalten wir ein Element

$$z^\sigma z^{-1} \zeta_\sigma \in \widetilde{\mathrm{C}}_{s'} := \{s' g s'^{-1} g^{-1} \in \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}} \mid g \in \mathrm{G}\}.$$

Dieser 1-Kozykel $z^\sigma z^{-1}\zeta_\sigma$ liefert eine Invariante $\gamma \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$.

Lemma 39. *Falls $\gamma \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Z} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$ trivial ist, ist die Konjugationsklasse von s' rational.*

Falls die Konjugationsklasse von s' bereits in $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ rational ist, werden wir als Nächstes zeigen, daß $\mathrm{C}_s = \mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ bei reduktiven Gruppen eine einfachere Gestalt annimmt als im halbeinfachen Fall. Mit anderen Worten: Der Quotient $\mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ$ läßt sich auf die Zentralisatoren in der derivierten Gruppe zurückführen.

Aufgrund der Tatsache, daß die derivierte Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ eine zusammenhängende halbeinfache Gruppe ist, beschränken wir uns in diesen Fällen auf halbeinfache Gruppen, wenn wir die Frage studieren, ob jede rationale Konjugationsklasse ein rationales Element besitzt.

Sei die Konjugationsklasse von s' in $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ rational. Wir betrachten C_s für das halbeinfache Element s, dann gilt

$$\mathrm{C}_s \cong \mathrm{G}_s \,/\, \mathrm{G}_s^\circ = (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}\, \mathrm{Z}^\circ \,/((\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}\, \mathrm{Z}^\circ)^\circ = (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}\, \mathrm{Z}^\circ \,/(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ\, \mathrm{Z}^\circ$$

und somit

$$\mathrm{C}_s \cong (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}/(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ(\mathrm{Z}^\circ \cap (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}).$$

Die Gruppe $(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ$ ist in $(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ(\mathrm{Z}^\circ \cap (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'})$ enthalten. Der Kern der Surjektion

$$\varphi : (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}/(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ \to (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}/(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ(\mathrm{Z}^\circ \cap (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'})$$

ist gegeben durch

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = (\mathrm{Z}^\circ \cap (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'})/(\mathrm{Z}^\circ \cap (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ).$$

Hiermit haben wir bewiesen:

Lemma 40. *Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe und $s \in \mathrm{G}$ halbeinfach. Sei $s = s'z$ mit $s' \in \mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ und $z \in \mathrm{Z}^\circ$. Sei darüber hinaus die Konjugationsklassen von s und s' rational. Die Abbildung $(\mathrm{C}_{\mathrm{Der}})_{s'} \to \mathrm{C}_s$ mit $(\mathrm{C}_{\mathrm{Der}})_{s'} := (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}/(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ$ ist surjektiv mit*

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = (\mathrm{Z}^\circ \cap (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'})/(\mathrm{Z}^\circ \cap (\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})_{s'}^\circ).$$

Insbesondere ist die Gruppe C_s isomorph zu einer abelschen Untergruppe der Fundamentalgruppe von $\pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$.

Für die Obstruktion α bedeutet dies

Folgerung 41. *Sei die Konjugationsklasse von s' in $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ rational. Falls für die derivierte Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, (\mathrm{C}_{\mathrm{Der}})_{s'})$ trivial ist, dann ist das Bild von α in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_s)$ trivial.*

4.5. Ein Satz über Körper der kohomologischen Dimension ≤ 1

Ein Körper der kohomologischen Dimension ≤ 1 ist ein Körper für den die Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}, M)$ für alle natürlichen Zahlen n und alle diskreten Torsions-Γ-Moduln M verschwinden, insbesondere sind endliche Körper von der kohomologischen Dimension ≤ 1 ([Se02] II §3).

Jede endliche abelsche Gruppe, aufgefasst als $\mathbb{Z}$-Modul, ist ein Torsionsmodul. Somit ist für alle $x \in \mathrm{G}$ die Gruppe C_x ein diskreter Torsions-Γ-Modul, weshalb die zweite Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ verschwindet.

Nach [Se02] III §2.2. ist jede reduktive Gruppe über einem perfekten Körper der kohomologischen Dimension ≤ 1 quasizerfallend, weshalb wir auf diese Bedingung verzichten können.

Das folgende Resultat über Körper der kohomologischen Dimension ≤ 1 findet sich bereits in der Arbeit von Steinberg [St65] Corollary 10.2. Unter Anwendung des Theorem von Lang [Mü03] wir die Aussage für halbeinfache Gruppen. Alternativ kann es ebenso mit den obigen Argumenten und dem Satz 22, den wir hierfür im Kapitel 3 verallgemeinert haben, für reduktive Gruppen bewiesen werden.

Satz 42 ([St65] Theorem 1.9.). *Sei* K *ein perfekter Körper der kohomologischen Dimension* ≤ 1 *und* G *eine reduktive Gruppe über* K. *Dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.* □

Beispiel 43. Endliche Körper sind Beispiele für Körper der kohomologischen Dimension kleiner gleich eins. Mit anderen Methoden hat Tits in [Ti66] 54ff für endliche Körper bewiesen, daß jede halbeinfache Gruppe quasizerfallend ist. Andere Beispiele für Körper der kohomologischen Dimension kleiner gleich eins findet man bei Serre ([Se02] II. §3.3).

4.6. Ein Satz über zerfallende halbeinfache Gruppen

Sei G eine zerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe, d.h. die halbeinfache Gruppe G besitzt einen maximalen Torus $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$, der über dem Grundkörper isomorph zu einem Produkt von endlich vielen Kopien der multiplikativen Gruppen $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ ist, d.h. $\mathrm{T} = \prod \mathbb{G}_\mathrm{m}$. Jede zerfallende Gruppe ist quasizerfallend.

Steinberg zeigt

Satz 44 ([St65] Theorem 9.2.). *Sei* G *eine einfach zusammenhängende zerfallende halbeinfache Gruppe. Dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Wir werden diese Aussage verallgemeinern, indem wir zeigen, daß die Bedingung, einfach zusammenhängend zu sein, für halbeinfache Gruppen nicht notwendig ist. Zuerst werden wir dies für zerfallende einfache Gruppen (außer Gruppen vom Typ D_{2n}) mit Hilfe der Kummertheorie beweisen, um die Beweisidee klarer hervorzuheben.

Für zerfallende zusammenhängende einfache Gruppen G (außer D_{2n}) ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ eine Gruppe von Einheitswurzeln. Wegen der Kummersequenz ist bekannt, daß für $\pi_1(\mathrm{G}) = \mu_k$ die Gruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G}))$ isomorph zu $\mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^k$ ist. Damit gilt:

Lemma 45. *Sei $\pi_1(\mathrm{G})$ zyklisch von der Ordnung k und l die Ordnung von $\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x$. Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}^\times/(\mathrm{K}^\times)^k \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{K}^\times/(\mathrm{K}^\times)^l \arrow[d, "\cong"] & \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})) \arrow[r, "\Psi"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^2(\mathrm{K},\mathrm{C}_x)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Wir identifizieren $\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x$ mit μ_l. Die Abbildung $f : \pi_1(\mathrm{G}) \to \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x$ ist die Potenzierung mit k/l. Die Abbildungen

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})) \to \mathrm{K}^\times/(\mathrm{K}^\times)^k$$

und

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x) \to \mathrm{K}^\times/(\mathrm{K}^\times)^l$$

sind Isomorphismen und die Abbildung $\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ wird durch die Abbildung f induziert. Daher kann man leicht sehen, daß das Diagramm kommutiert. □

Die Quotientenabbildung $\mathrm{K}^\times/(\mathrm{K}^\times)^k \to \mathrm{K}^\times/(\mathrm{K}^\times)^l$ ist surjektiv, daher gilt

Lemma 46. *Sei G eine zerfallende zusammenhängende einfache Gruppe mit zyklischer Fundamentalgruppe. Dann ist die Abbildung*

$$\Psi : \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$$

surjektiv. □

Somit ist das δ-Bild von $\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G}))$ in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K},\mathrm{C}_x)$ trivial und es folgt

Satz 47. *Sei G eine zerfallende zusammenhängende einfache Gruppe über K und die Charakteristik von K gut. Dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse von G einen rationalen Vertreter.*

Beweis: Nach Lemma 46 ist die Abbildung Ψ surjektiv und somit ist

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{K},\mathrm{C}_x)$$

die Nullabbildung. Das Bild von $\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ ist in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K},\mathrm{C}_x)$ trivial. Für jedes $x \in \mathrm{G}$ ist die zugehörige Obstruktion in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K},\mathrm{C}_x)$ trivial und nach dem Theorem 22 enthält die Konjugationsklasse von x ein Element aus $\mathrm{G}(\mathrm{K})$. □

Jede halbeinfache Gruppe G besitzt eine Isogenie zu einem Produkt von fasteinfachen Gruppen G_i ([Bo91] 14.10). Im Idealfall ist hier die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}) = \prod \pi_1(\mathrm{G}_i)$ mit $\mathrm{C}_{x,i} \subset \pi_1(\mathrm{G}_i)$; dafür können wir das Ergebnis übertragen. Dieser naive Ansatz ist jedoch nicht möglich, da sich die Fundamentalgruppe einer halbeinfachen Gruppe G nicht einfach als Produkt der Fundamentalgruppen der einzelnen fasteinfachen Gruppen schreiben läßt.

Um die Aussage von Satz 47 auf halbeinfache Gruppen übertragen zu können, würden wir eine verschärfte Version des Untergruppentheorems bzw. des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen A benötigen, in der es für jede Zerlegung einer Untergruppe

$\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ eine simultane Zerlegung der Gruppe A gibt. Dafür gibt es jedoch zahlreiche Gegenbeispiele.

Daher müssen wir für halbeinfache Gruppen oder für einfache Gruppen vom Typ D_{2n} einen anderen Beweis führen, um zu zeigen:

Theorem 48. *Sei* G *eine zerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe. Darüber hinaus sei die Charakteristik von* K *gut. Dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse von* G *einen rationalen Vertreter.*

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ einer zerfallenden zusammenhängenden halbeinfachen Gruppe G ist von der Form $\mathrm{A}(1) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{A}, \overline{\mathrm{K}}^{\times})$ mit dem entsprechenden zyklotomischen Charakter, wobei A eine endliche abelsche Gruppe ist, falls die Isogenie seperabel ist. Dies ist der Fall, da die Charakteristik gut ist. Ziel ist es, die Sätze 45 und 47 zu verallgemeinern, um den folgenden Satz zu zeigen:

Satz 49. *Sei* A *eine endliche abelsche Gruppe und* $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ *eine Untergruppe. Sei* $\mathrm{B} := \mathrm{A} / \mathrm{A}'$. *Dann kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{A}(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & \mathrm{A} \otimes \mathrm{K}^{\times} \arrow[d, "\widehat{\Psi}"] \\ \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{B}(1)) \arrow[r] & \mathrm{B} \otimes \mathrm{K}^{\times} . \end{tikzcd}$$

Darüber hinaus ist die Abbildung Ψ *surjektiv.*

Wenn wir den Satz 49 bewiesen haben, folgt ebenso wie im Fall einfacher Gruppen das Theorem 48, denn es gilt:

Folgerung 50. *Das Bild von* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{B}(1))$ *in* $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ *ist trivial.* □

Somit bleibt noch der Satz 49 zu zeigen:

Beweis von Satz 49: Sei $\mathrm{A}^{\vee}$ das Pontryagindual von A, d.h. $\mathrm{A}^{\vee} := \mathrm{Hom}(\mathrm{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, und $\mathrm{B}^{\vee}$ das Pontryagindual von B. Die surjektive Abbildung $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ induziert eine injektive Abbildung von $\mathrm{B}^{\vee}$ nach $\mathrm{A}^{\vee}$. Für die freien Auflösungen von $\mathrm{B}^{\vee}$ und $\mathrm{A}^{\vee}$ erhalten wir das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & \mathrm{A}^{\vee} \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & L_3 \arrow[r] \arrow[u, dotted, "\widehat{\varphi}"] & L_4 \arrow[r] \arrow[u, dotted, "\varphi"] & \mathrm{B}^{\vee} \arrow[r] \arrow[u] & 1. \end{tikzcd}$$

Der $\mathbb{Z}$-Modul L_4 ist ein projektiver Modul, weswegen wir den Homomorphismus $L_4 \to \mathrm{A}^{\vee}$ zu dem Homomorphismus $\varphi : L_4 \to L_2$ liften können. Dieser induziert eine Abbildung $\widehat{\varphi} : L_3 \to L_1$ zwischen den Untergittern.

Wir zeigen zuerst, daß $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{A}(1)) \cong \mathrm{A} \otimes \mathrm{K}^{\times}$ ist. Wir wenden $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Q})$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ auf die Auflösung von $\mathrm{A}^{\vee}$ an, so erhalten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{A}^\vee, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_2, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_1, \mathbb{Z}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{A}^\vee, \mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_2, \mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_1, \mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{A}^\vee, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Die $\mathbb{Z}$-Moduln L_1 und L_2 sind frei, weswegen die beiden rechten Spalten des Diagramms exakt sind. Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektive $\mathbb{Z}$-Moduln sind, folgt, daß die beiden unteren Zeilen exakt sind. Die Gruppen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{A}^\vee, \mathbb{Z})$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{A}^\vee, \mathbb{Q})$ sind darüber hinaus trivial, da $\mathrm{A}^\vee$ endlich ist. Wir erhalten nach dem Schlangenlemma – wenn wir es auf die beiden exakten Zeilen anwenden – die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_2, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_1, \mathbb{Z}) \to (\mathrm{A}^\vee)^\vee \to 0$$

und deshalb mit $L_i^\perp := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_i, \mathbb{Z})$ die Sequenz

$$0 \to L_2^\perp \to L_1^\perp \to \mathrm{A} \to 0.$$

Wenn wir diese Sequenz mit dem rechts-exakten Funktor $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times$ tensorieren, erhalten wir die exakte Sequenz

$$L_2^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times \to L_1^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times \to \mathrm{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times \to 0.$$

Wir vergleichen nun diese Sequenz mit dem Ausschnitt

$$(L_2^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{K}}^\times)^\Gamma \to (L_1^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{K}}^\times)^\Gamma \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{A}(1)) \to 0$$

aus der langen exakten Kohomologiesequenz von

$$1 \to \mathrm{A}(1) \to L_2^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{K}}^\times \to L_1^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{K}}^\times \to 1.$$

Da Γ auf $L_1^\perp$ und $L_2^\perp$ trivial und nur auf $\overline{\mathrm{K}}^\times$ nicht-trival operiert, erhalten wir

$$(L_i^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{K}}^\times)^\Gamma = L_i^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times$$

und deshalb

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{A}(1)) \cong \mathrm{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times,$$

Analog erhalten wir für B

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{B}(1)) \cong \mathrm{B} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times .$$

Aufgrund der Konstruktion zu Beginn des Beweises sind diese Isomorphismen funktoriell, d.h. das Diagramm kommutiert. Da $* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^{\times}$ ein rechtsexakter Funktor ist, folgt, daß die Abbildung $\Psi : \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{A}(1)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{B}(1))$ surjektiv ist. □

Jede zusammenhängende halbeinfache Gruppe ist über einer endlichen separablen Körpererweiterung L über K zerfallend [BS66] Corollary 8.3. Hierfür ist die Obstruktion in $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{L}), \mathrm{C}_x)$ trivial (vgl. Folgerung 23).

Ein Kriterium, um zu prüfen, ob eine quasizerfallende Gruppen zerfallend ist, lautet:

Lemma 51 ([KMRT98] §27.8). *Falls* G *quasizerfallend ist und* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Dyn}(\mathrm{G})) = 1$, *dann ist* G *zerfallend.* □

Anmerkung. Die Dynkindiagramme $\mathrm{Dyn}(\mathrm{G})$ mit den irreduziblen Komponenten vom Typ B_n, C_n, E_7, E_8, F_4 und G_2 erfüllen die Voraussetzung an die Automorphismengruppe. Wir werden einfache Gruppen (dieser Typen) im nächsten Abschnitt genauer studieren.

Satz 52. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe. Falls* $\mathrm{Dyn}(\mathrm{G})$ *trivial ist, besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Wir werden abschließend alle zerfallenden einfachen klassischen Gruppen angeben, um zu zeigen, daß die Aussage des Satzes eine große Klasse von Gruppen abdeckt.

Theorem 53 ([KMRT98] §25). *Es gilt:*

(i) *Jede zerfallende zusammenhängende einfache Gruppe vom Typ* A_n *ist isomorph zu einer Gruppe von der Form* $\mathrm{SL}(\mathrm{V})/\mu_k$, *wobei* k *die Zahl* $n+1$ *teilt und* V *ein* K*-Vektorraum der Dimension* $n+1$ *ist.*

(ii) *Jede zerfallende einfache Gruppe vom Typ* B_n *ist isomorph zu einer Gruppe von der Form* $\mathrm{Spin}(\mathrm{V}, q)$ *oder* $\mathrm{O}^+(\mathrm{V}, q)$, *wobei* (V, q) *ein nicht-ausgearteter quadratischer Raum der Dimension* $2n+1$ *ist.*

(iii) *Jede zerfallende einfache Gruppe vom Typ* C_n *ist isomorph zu einer Gruppe von der Form* $\mathrm{SP}(\mathrm{V}, h)$ *oder* $\mathrm{PGSp}(\mathrm{V}, h)$, *wobei* (V, h) *eine nicht-ausgeartete alternierende Form der Dimension* $2n$ *ist.*

(iv) *Jede zerfallende einfache Gruppe vom Typ* D_n *ist isomorph zu einer Gruppe von der Form* $\mathrm{Spin}(\mathrm{V}, q)$, $\mathrm{O}^+(\mathrm{V}, q)$, $\mathrm{PGO}^+(\mathrm{V}, q)$ *oder zu* $\mathrm{Spin}^{\pm}(\mathrm{V}, q)$, *wobei* (V, q) *ein hyperbolischer quadratischer Raum der Dimension* $2n$ *ist.* □

4.7. Beschreibung der Kottwitz-Obstruktion

Die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ kann für quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache Gruppen G als Cupprodukt zweier 1-Kozykel verstanden werden. Dies gilt ebenso in einigen allgemeineren Fällen. Der eine Kozykel β_1 liegt in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x)$ und wird via des kanonischen Verbindungshomomorphismus auf $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ abgebildet. Der andere Kozykel $\beta_2 \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Hom}(\pi_1(G)/\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_x))$, dies ist nichts anderes als ein Element im Kern der Abbildung $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(\pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_x) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_x)^\Gamma$, das die kurze exakte Sequenz liefert, beschreibt, in wie weit die Gruppe G davon entfernt ist, zerfallend zu sein. Es gilt im Fall, daß C_x ein direkter abelscher Summand von $\pi_1(\mathrm{G})$ ist, der Satz:

Satz 54. *Sei die exakte Sequenz*

$$1 \to \mathrm{C}_x \to \pi_1(\mathrm{G}) \to \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x \to 1$$

in der Kategorie der abelschen Gruppen zerfallend. Die rationale Konjugationklasse von x enthält genau dann ein rationales Element, wenn das Cup-Produkt von β_1 in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ und β_2 in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Hom}(\pi_1(G)/\,\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_x))$ trivial ist.

Beweis: Die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ beschreibt nach Theorem 22, ob eine rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter besitzt. Somit genügt es zu zeigen, daß

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x) \supseteq \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x) \cup \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Hom}(\pi_1(G)/\,\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_x))$$

und

$$\alpha = \beta_1 \cup \beta_2$$

ist. Nach [NSW00] 1.4.5 erhalten wir für $p = 0, q = 2$ und $B = \mathrm{C}_x$ die Behauptung. □

Dies bedeutet, daß der Zugang von Kottwitz/Steinberg über die einfach zusammenhängende Überlagerung G_{sc} von G und der durch Theorem 48 beschriebene Zugang in vielen Fällen die konkrete Beschreibung der abstrakten Kottwitz-Obstruktion liefern.

Aus nicht bekannten Gründen gilt dies auch im Fall der Orthogonalen Gruppe, wie wir im Abschnitt 4.8.3 und Anhang 5.3 sehen werden. Im nächsten Abschnitt wird dies für quasizerfallende absolut einfache Gruppen Fall für Fall gezeigt.

4.8. Aussagen über quasizerfallende absolut einfache Gruppen

Für zerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppen haben wir bereits gesehen, daß jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter besitzt. Nach [Ko82] Seite 798f ist dies nicht für jede quasizerfallende zusammenhängende reduktive Gruppe der Fall. Wir betrachten daher quasizerfallenden halbeinfache Gruppen G, die nicht zerfallend sind.

Jede dieser halbeinfachen Gruppen besitzt eine Isogenie zu einem Produkt von fasteinfachen Gruppen G_i ([Bo91] 14.10), d.h. $\mathrm{G}_i\,/\,\mathrm{Z}(\mathrm{G}_i)$ ist einfach.

Alle absolut einfachen Gruppen sind fasteinfach (Abschnitt 5.5). Wir betrachten daher zuerst die quasizerfallenden zusammenhängenden absolut einfachen Gruppen Fall für Fall, um später im Abschnitt 4.9 auf quasizerfallende zusammenhängende fasteinfache Gruppen schließen zu können.

4.8.1. Der Fall A_{N-1}

Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache Gruppe vom Typ A_{N-1} mit n teilt N und $n = k \cdot l$, die nicht zerfallend ist. In diesem Fall ist die Gruppe G isomorph zu einer speziellen unitären Gruppe $\mathrm{PSU}_N^{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}$ für eine hermitesche Form in N Variablen über einer quadratischen Körpererweiterung L von K.

Betrachten wir die quadratische Körpererweiterung $\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}$ mit den zugehörigen Galoisgruppen:

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathrm{K}} \arrow[d, dash, "\Gamma_{\mathrm{L}}:=\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{L})"'] \arrow[dd, dash, bend left, "\Gamma"] \\ \mathrm{L} \arrow[d, dash, "\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}:=\mathrm{Gal}(\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K})"'] \\ \mathrm{K} \end{tikzcd}$$

Sei $\widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$ definiert als

$$\widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} := \mathrm{Kern}(\mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{\mathrm{Norm}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}).$$

Die Gruppe $\widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$ ist eine L-Form, die über L isomorph zu $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ ist. Damit ist $\widetilde{\overline{\mathrm{K}}^{\times}} := \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}(\overline{\mathrm{K}})$ zu $\overline{\mathrm{K}}^{\times}$ als abstrakte Gruppe isomorph. Sei $\varphi : \Gamma \times \overline{\mathrm{K}}^{\times} \to \overline{\mathrm{K}}^{\times}$ die gewöhnliche Galoisoperation auf $\overline{\mathrm{K}}^{\times}$. Die (getwistete) Galoisoperation auf $\widetilde{\overline{\mathrm{K}}^{\times}}$ ist gegeben durch

$$\widetilde{\varphi} : \Gamma \times \widetilde{\overline{\mathrm{K}}^{\times}} \to \widetilde{\overline{\mathrm{K}}^{\times}},\ \ (\sigma, x)\ \mapsto\ \widetilde{\varphi}(\sigma, x)\ :=\ \begin{cases} \varphi(\sigma, x) & \text{für } \sigma \in \Gamma_{\mathrm{L}} \\ \varphi(\sigma, x^{-1}) & \text{für } \sigma \notin \Gamma_{\mathrm{L}}. \end{cases}$$

Die Gruppe mit getwisteter Galoisoperation, die als abstrakte Gruppe isomorph zur Gruppe μ_n der n-ten Einheitswurzeln ist, wird durch

$$\widetilde{\mu_n} := \mathrm{Kern}(\mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mu_n) \xrightarrow{\mathrm{Norm}} \mu_n)$$

definiert. Offensichtlich gilt:

Lemma 55. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \widetilde{\mu_n} \arrow[r] \arrow[d, "l"] & \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} \arrow[r, "n"] \arrow[d, "l"] & \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \widetilde{\mu_k} \arrow[r] & \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} \arrow[r, "k"] & \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

kommutiert und ist exakt. □

Damit berechnen wir die Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^1(\Gamma, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}})$:

Lemma 56. *Es gilt:*

(i) $\mathrm{H}^0(\Gamma, \overline{\mathrm{K}}^{\times}) = \mathrm{N}_1^{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}} := \{\alpha \in \mathrm{L} \mid \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\, \alpha = 1\}$

(ii) $\mathrm{H}^1(\Gamma, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}) = \mathrm{K}^{\times}\,/\,\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\, \mathrm{L}^{\times}$.

Beweis: Aufgrund der Hochschild-Serre-Spektralsequenz gilt für $B \trianglelefteq A$ und einem A-Modul M:

$$\mathrm{H}^i(B, \mathrm{H}^j(A/B, M)) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(A, M).$$

Sei nun $i = j = 0$. Für die Gruppe $\mathrm{H}^0(\Gamma, \overline{\mathrm{K}}^{\times})$ bedeutet dies

$$\mathrm{H}^0(\Gamma, \overline{\mathrm{K}}^{\times}) = \mathrm{H}^0(\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}, \mathrm{H}^0\widetilde{(\Gamma_{\mathrm{L}}, \overline{\mathrm{K}}^{\times})}) = \left(\widetilde{(\overline{\mathrm{K}}^{\times})}^{\Gamma_{\mathrm{L}}}\right)^{\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}} = (\widetilde{\mathrm{L}^{\times}})^{\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}} = \mathrm{N}_1^{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}},$$

mit $\widetilde{(\overline{\mathrm{K}}^{\times})} = \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}(\overline{\mathrm{K}})$ und $\widetilde{\mathrm{L}^{\times}} := \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}(\mathrm{L})$.

Wir betrachten die exakte Sequenz

$$1 \to \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}, \widetilde{\mathrm{L}^{\times}}) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}) \to \mathrm{H}^0(\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}, \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}))$$

Aufgrund des Satzes Hilbert 90 ist $\mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}})$ trivial. Die Gruppe $\mathrm{H}^0(\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}, \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}))$ verschwindet und es gilt $\mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}, \widetilde{\mathrm{L}^{\times}}) \cong \mathrm{H}^1(\Gamma, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}})$, wodurch wir für $\mathrm{H}^1(\Gamma, \widetilde{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}})$ die Gruppe $\mathrm{K}^{\times}\,/\,\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times}$ erhalten. □

Mit Hilfe der langen exakten Kohomologiesequenz erhalten wir aus Lemma 55:

Lemma 57. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}_1^{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "n"] & \mathrm{N}_1^{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \arrow[d, "l"] & \\
\mathrm{N}_1^{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta_0"] & \mathrm{N}_1^{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \arrow[d, "\Delta_1"] & \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_n}) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_l}) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_2"] & \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_k}) \\
\mathrm{K}^{\times}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "n"] & \mathrm{K}^{\times}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times} \arrow[d, "l"] & \\
\mathrm{K}^{\times}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times} \arrow[r, equal] & \mathrm{K}^{\times}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times} &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und ist exakt. □

Wir untersuchen die Abbildung ε aus Lemma 57 und das Bild von $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_l})$ in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_k})$ unter ε.

Lemma 58. *Falls k ungerade ist, dann ist die Abbildung $\varepsilon : \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_n}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_l})$ surjektiv.*

Beweis: Sei k ungerade. Die zweite und die letzte Zeile sind jeweils die identische Abbildung. Die $\mathrm{K}^{\times}\,/\,\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times} \xrightarrow{k} \mathrm{K}^{\times}\,/\,\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times}$ ist surjektiv, da die Ordnung von $\mathrm{K}^{\times}\,/\,\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times}$ durch zwei teilbar und k ungerade ist. Somit folgt nach dem Fünferlemma, daß die Abbildung ε auch surjektiv ist. □

Lemma 59. *Falls l ungerade ist, dann ist die Abbildung $\varepsilon : \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_n}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_l})$ surjektiv.*

Beweis: Sei l ungerade. Dann ist die Abbildung $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times \xrightarrow{l} \mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ bijektiv. Folglich ist das Bild von Δ_2 in $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ trivial, weshalb die Abbildung Δ_1 surjektiv ist. Weil das Diagramm nach Lemma 57 kommutiert, gilt $\Delta_1 \circ \mathrm{Id} = \varepsilon \circ \Delta_0$. Somit ist die Abbildung ε surjektiv. □

Nach Abschnitt 2.4 ist die Ordnung der Fundamentalgruppe $\pi_1(G)$ gleich $n = k \cdot l$. Daher gilt:

Satz 60. *Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende einfache Gruppe vom Typ A_{n-1} über K und die Charakteristik von K gut. Falls vier kein Teiler von n ist, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.* □

Aus dem Lemma 57 erhalten wir zusätzlich:

Lemma 61. *Falls k und l gerade sind, dann ist $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ eine Untergruppe von $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_k})$.*

Beweis: Sei l gerade. Die Abbildung

$$\delta : \mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times \to \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_k})$$

existiert, da für gerades l die Abbildung $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times \to \mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ die Nullabbildung ist und somit die Abbildung Δ_2 aus Lemma 57 surjektiv ist. Daher sind die Elemente aus $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_l})$ bis auf ein Element in $\mathrm{N}_1^{\mathrm{L}/\mathrm{K}}$ eindeutig bestimmt und landen wegen der Abbildung $\varepsilon \circ \Delta_0$ auf dem gleichen Bild in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_k})$.

Die Abbildung δ ist injektiv, da die Abbildung $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times \to \mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ für gerades k die Nullabbildung ist, und somit die Elemente von $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ aufgrund der Exaktheit des Diagramms aus Lemma 57 injektiv in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_k})$ abgebildet werden. □

Nach dem Lemma 56 und 57 erhalten wir für gerade k und l das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_n}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_l}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\
& \mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_k}). &
\end{tikzcd}$$

Anmerkung. Die Ordnung der Fundamentalgruppe muß nach diesem Satz durch vier teilbar sein, um rationale Konjugationsklassen zu finden, die keinen rationalen Vertreter besitzen. Darüber hinaus müssen nach den Lemmata 58 und 59 die Ordnungen von C_x und $\pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x$ hierfür jeweils durch 2 teilbar sein.

Berechnung von x mit nichttrivialer Gruppe C_x

Für eine quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache Gruppe G vom Typ A_{n-1} muss $n \equiv 0 \mod 4$ gelten, damit wir eine rationale Konjugationsklasse finden können, die keinen rationalen Vertreter besitzt. Dann ist G_{sc} die Gruppe SU_N.

Sei $x \in \mathrm{G}$ halbeinfach. Wir werden im folgenden die Gruppe C_x untersuchen, um mit Hilfe des charakteristischen Polynoms eines Vertreters der Konjugationsklasse von x Aussagen darüber zu treffen, ob die Ordnung von C_x ein Vielfaches von 2 und ein echter Teiler der Ordnung von $\pi_1(\mathrm{G})$ ist.

Über dem algebraischen Abschluß $\overline{\mathrm{K}}$ von K läßt sich die zyklische Gruppe $\mathrm{C}_x \subset \pi_1(\mathrm{G})$ wie folgt beschreiben:

$$\mathrm{C}_x = \{\zeta \in \pi_1(\mathrm{G}) \mid \exists h \in \mathrm{G} \text{ mit } h\,x\,h^{-1} = \zeta x\}.$$

Sei T ein maximaler Torus in G, der das halbeinfache Element x enthält, und sei x von der Form

$$x = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_N) \text{ in } \mathrm{SU}_N\,.$$

Die Konjugation mit einem Gruppenelement läßt sich im Torus T beschreiben als die Konjugation mit einem Weylgruppenelement aus der Weylgruppe $\mathrm{W(G,T)}$. Da die Weylgruppe $\mathrm{W(G)}$ auf dem Torus T wie die symmetrische Gruppe S_n operiert ([Bou68] Planche I), zerfällt die Gruppe C_x in ζ_l-Orbiten, für eine l-te Einheitswurzel ζ_l. Daher können wir C_x beschreiben als

$$\mathrm{C}_x = \{\zeta \in \pi_1(\mathrm{G}) \mid \zeta \text{ operiert als Permutation auf } (x_1, \dots, x_N)\}.$$

O.B.d.A. sei ζ ein Eigenwert von C_x. Daß eine l-te Einheitswurzel ζ ein Element in C_x ist, heißt nichts anderes als, daß für jeden Eigenwert x_i von x auch $\zeta_l x_i$ ein Eigenwert von x mit derselben Multiplizität ist. Daher muß x – bis auf Konjugation – die Diagonalgestalt

$$\mathrm{diag}(x_1, \zeta_l x_1, \zeta_l^2 x_1, \dots, \zeta_l^{l-1} x_1, x_2, \zeta_l x_2, \dots, \zeta_l^{l-1} x_k)$$

haben, wobei $n = l \cdot k$ ist. Nach Lemma 13 ändert sich die Gruppe C_x nicht, wenn wir x durch ein anderes Element der Konjugationsklasse ersetzen. Daher können wir annehmen, daß x bereits die obige Gestalt hat. Wenn wir das charakteristische Polynom von x in der Unbestimmten T betrachten, erhalten wir

$$\mathrm{char}_x(t) = \prod (t - x_i) = \prod_j \prod_{i=0}^{l-1} (t - \zeta_l^i x_j) = \prod_j (t^l - x_j^l).$$

Das charakterische Polynom ist demzufolge ein Polynom in t^l. Es gilt im Falls $\mathrm{G} = \mathrm{PSU}_n$:

$$\mathrm{C}_x \supseteq \mu_l \Rightarrow \mathrm{char}_x(t) \text{ ist Polynom in } t^l.$$

Auch die umgekehrte Implikation ist richtig: Sei das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_x(t)$ von x ein Polynom in t^l, d.h. wir können über dem algebraischen Abschluß $\overline{\mathrm{K}}$ das Polynom schreiben als

$$\mathrm{char}_x(t) = \prod_{i \in \mathrm{I}} (t^l - x_i).$$

Jeder der Faktoren $(t^l - x_i) = \prod_{j=1}^{l} (t - \zeta_l^j x_i)$ wird durch eine l-te Einheitswurzel ζ_l permutiert, weswegen wir $\mathrm{C}_x \cong \mu_l$ erhalten, wenn l maximal gewählt ist.

Damit haben wir bewiesen

Lemma 62. *Sei* $x \in \mathrm{G}$ *und* $\mathrm{char}_x(t) = a_N t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ *das zugehörige charakteristische Polynom. Dann ist* $\mathrm{C}_x \cong \mu_l$ *mit* $l = \mathrm{ggT}(i \mid a_i \neq 0)$.

Aufgrund der Tatsache, daß die Ordnung von C_x von zwei geteilt werden muß, wenn man eine rationale Konjugationsklasse finden möchte, die keinen rationalen Vertreter besitzt, erhalten wir

Lemma 63. *Die ungeraden Koeffizienten des charakteristischen Polynoms* $\mathrm{char}_x(t)$ *verschwinden identisch, falls die Konjugationsklasse von* x *rational ist, aber keinen rationalen Vertreter besitzt.* □

Da n gerade ist, verschwindet somit der Koeffizient a_{n-1} und es gilt:

Lemma 64. *Sei* x *ein Vertreter einer halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse. Falls die Spur von* x *ungleich null ist, dann besitzt die Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Beweis: Wir geben hierfür einen anderen Beweis. Ein Element x hat die Spur null, falls x zur Form

$$(x_1, \zeta_l x_1, \zeta_l^2 x_1, \ldots, \zeta_l^{l-1} x_1, x_2, \zeta_l x_2, \ldots, \zeta_l^{l-1} x_k)$$

konjugiert ist, weil gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}(x) &= (x_1 + \cdots + x_k) + \zeta_l(x_1 + \cdots + x_k) + \cdots \\ &= (x_1 + \cdots + x_k) \textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \zeta_l^i = (x_1 + \cdots + x_k) \frac{1-\zeta_l^l}{1-\zeta_l} \quad = 0. \end{aligned}$$

Da ein Vertreter einer rationalen Konjugationsklasse von dieser Gestalt ist, falls die Klasse keinen rationalen Vertreter besitzt, folgt die Behauptung. □

Anmerkung. Sei Γ die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ und G eine quasizerfallende zusammenhängende einfache Gruppe vom Typ A_3 über $\mathbb{R}$. Wenden wir die bisherigen Resultate auf das Beispiel aus dem Abschnitt 4.1 an und erhalten für das Element $x = \mathrm{diag}(1, -1, a, -a)$, daß die Gruppe C_x isomorph zu μ_2 ist. Wir erhalten als charakteristisches Polynom $\mathrm{char}_x(t)$ das Polynom $t^4 - (a^2+1)t^2 + a^2$. Falls $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist, liegt x nicht in $\mathrm{G}(\mathbb{R})$. Da $\mathrm{char}_x(t)$ ein Polynom in $\mathbb{R}[t]$ ist, folgt $a^2 \in \mathbb{R}$, und somit ist $a = ri$ mit $r \in \mathbb{R}$. Für den Fall, daß $a^2 \neq -1$ ist, verschwindet der Term $(a^2 + 1)$ nicht und der $\mathrm{ggT}(0, 2, 4)$ ist 2. Deswegen wird in [Ko82] 798f die Bedingung $a \neq \pm i$ gestellt, um eine nichttriviale Obstruktion in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ zu erhalten. Das Element x beschreibt in diesem Fall alle auftretenden Möglichkeiten.

Wir haben bisher berechnet, für welche Elemente x die Gruppe $\mathrm{C}_x \subset \pi_1(\mathrm{G})$ ein nichttrivialer Γ-Modul ist. Wir nehmen nun an, daß die Konjugationsklasse von x rational ist, und studieren, welche Eigenschaften das charakteristische Polynom von x hat, wenn $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ nichttrivial ist.

Ist die Konjugationsklasse von x rational, dann ist auch ihr Bild in $\mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}})$ rational und es gilt:

$$w({}^\sigma x_1, \ldots, {}^\sigma x_N) = (x_1^{-1}, \ldots, x_N^{-1}) y_\sigma$$

für ein $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_{\mathrm{L}}$ und $y_\sigma \in \overline{\mathrm{K}}$.

Lemma 65. *Das Element* x *kann in der Ähnlichkeitsklasse in* $\mathrm{GU}_N(\overline{\mathrm{K}})$*, dass gilt:* $\mathrm{charp}_x(t) \in \mathrm{L}[t]$.

Beweis: o.B.d.A. zerfällt G über L und die Klasse enthält ein L-rationales Element. Es gibt ein Weylgruppenelement w mit

$$w({}^{\sigma}x_1, \ldots, {}^{\sigma}x_N) = (x_1, \ldots, x_N)y_\sigma$$

für ein $\sigma \in \Gamma_{\mathrm{L}}$ und $y_\sigma \in \overline{\mathrm{K}}$. Somit gilt für die Koeffizienten $a_\nu(x)^\sigma = y_\sigma^\nu a_\nu(x)$

o.B.d.A. teilt l die Zahl ν und wir können für die Koeffizienten schreiben $a_\nu(x)^\sigma = \lambda_\sigma a_\nu(x)$ mit $\lambda_\sigma := y_\sigma^\nu \in \pi_1(G)/\,\mathrm{C}_x$. Nun ist $\beta_1 = (\lambda_\sigma)$ und $\delta(\beta_1) = (y_\sigma^l) \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \cong \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^\times$. Somit gibt es ein $\rho \in \overline{\mathrm{K}}^\times$ mit $y_\sigma^l = \frac{\rho^\sigma}{\rho} a_\sigma$ mit $a_\sigma \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \cong \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^\times$. Für $b := \sqrt[l]{\rho}$ läßt die Abbildung $x \mapsto bx$ die Gleichungen invariant und o.B.d.A. $y_\sigma^l = 1$ für alle $\sigma \in \Gamma_{\mathrm{L}}$. Daher können wir in der Ähnlichkeitsklasse von x ein Element wählen, so dass die Koeffizienten $a_0, a_l, a_2l, \ldots$ in L liegen. □

Die Koeffizienten $a_\nu(x)$ des charakteristischen Polynoms von x sind elementarsymmetrische Polynome der Gestalt

$$a_\nu(x) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I| = \nu}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Es gilt

Die Polynome erfüllen dabei die Relation

$$a_\nu(x^{-1}) = a_{n-\nu}(x) \prod_{i=1}^{n} x_i^{-1},$$

wobei $x^{-1} = (x_0^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$ ist. Dies bedeutet für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von x, daß sie sich unter der Involution σ verhalten wie

$$\sigma(a_\nu) = \overline{a_\nu} = a_{n-\nu} a_n^{-1} y_\sigma^\nu \text{ für } \sigma \in \Gamma_{\mathrm{L}}. \tag{4.1}$$

o.B.d.A. liegt nach Satz 65 $a_\nu(x) \in \mathrm{L}$. Diese Relation bleibt invariant, wenn wir a_ν durch $a_\nu b^\nu$ und y durch $yb\overline{b}$ mit $b \in \mathrm{L}^\times$ ersetzen

$$\overline{a_\nu}\overline{b}^\nu = a_{n-\nu} b^{n-\nu} a_n^{-1} b^{-n} y^\nu \, (b\overline{b})^\nu.$$

Die Substitution entspricht der Multiplikation von x mit zentralem $b \in \overline{\mathrm{L}}$.

Lemma 66. *Die Substitutionen $a_\nu \mapsto a_\nu b^\nu$ und $y \mapsto yb\overline{b}$ für $b\overline{b} \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^\times$ lassen die obige Formel 4.1 invariant.* □

Falls wir die Involution σ nochmals auf $\sigma(a_\nu)$ anwenden, erhalten wir die Identität auf a_ν, d.h.

$$\begin{aligned} \sigma^2(a_\nu) &= \overline{\overline{a_\nu}} = \overline{a_{n-\nu}}\,\overline{a_n}^{-1}\overline{y}^\nu &&= \\ &= a_\nu a_n^{-1}\overline{a_n}^{-1} y^{n-\nu}\overline{y}^\nu &&= a_\nu. \end{aligned}$$

Somit erfüllt der Koeffizient a_n die Relation $a_n\overline{a_n} = y^n \left(\frac{\overline{y}}{y}\right)^\nu$ für alle ν mit $a_\nu \neq 0$. Da keine anderen Koeffizienten a_ν auftreten, gilt dies insbesondere für $\nu = 0, l, 2l, \ldots$, weshalb $\overline{y}^l = y^l$ ist. Folglich erhalten wir die Relation

$$a_n\overline{a_n} = y^n$$

und es gilt:

Lemma 67. *Sei* $\mathrm{C}_x \cong \mu_l$. *Dann ist* $y^l \in \mathrm{K}^\times$ *bis auf Elemente aus* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^\times$ *eindeutig bestimmt.*

Der Koeffizient a_n hat folglich die Gestalt

$$a_n = y^{\frac{n}{2}}\frac{z}{\overline{z}}$$

für ein geeignetes $z \in \overline{\mathrm{K}}$. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von x erfüllen die Symmetrie

$$\overline{\left(\frac{a_\nu}{z}\right)} = \left(\frac{a_{n-\nu}}{z}\right) y^{\nu-\frac{n}{2}}. \tag{4.2}$$

Wir berechnen nun die Determinante des obigen Elementes x und erhalten

$$\det(x) = (\prod_{i=0}^{l-1}\zeta_l^i)^k\, x_0^l \cdot\ \ldots\ \cdot x_k^l = x_0^l \cdot\ \ldots\ \cdot x_k^l.$$

Das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_x(t)$ ist ein Polynom in $\mathrm{K}[t]$, weshalb der Ausdruck $x_0^l \cdot \ldots \cdot x_k^l$ rational. Es gilt:

Satz 68. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache Gruppe vom Typ* A_{4n-1}. *Sei* x *ein Vertreter einer halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse. Falls das charakteristische Polynom* $\mathrm{char}_x(t)$ *von* x *ein nichttriviales, im Sinne von (4.2) symmetrisches, normiertes Polynom in* $t^{2l'}$ *vom Grad* $4n = 4k'l'$ *ist, dann besitzt die Konjugationsklasse keinen rationalen Vertreter, sofern* y^l *keine Norm aus* $\mathrm{Norm}\,\mathrm{L}^\times$ *ist.*

In den einfachen Gruppen vom Typ A_{n-1} sind durch diesen Satz alle halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse bestimmt, die keinen rationalen Vertreter besitzen. Im Abschnitt 4.1 erklärt, wie dieses Ergebnis auf beliebige rationale Konjugationsklassen übertragen werden.

4.8.2. Die Fälle B_n und C_n

Für die (quasi-)zerfallenden zusammenhängende absolut einfachen Gruppen G vom Typ B_n oder C_n hat die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ jeweils die Ordnung zwei nach Abschnitt 2.4. Wegen [Hu75] 35.1 sind die Gruppen von diesen Typen zerfallend, weshalb aufgrund von Theorem 48 folgt:

Satz 69. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache Gruppe vom Typ* B_n *oder* C_n *über* K. *Darüber hinaus sei die Charakteristik von* K *gut. Dann enthält jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

4.8.3. Der Fall D_n

Wir nehmen an, dass die Charakteristik sehr gut ist, d.h. $p \neq 2$. Für eine quasizerfallende, nicht zerfallende, zusammenhängende absolut einfache Gruppe vom Typ D_n betrachten wir folgende Fälle: Für $n > 4$ kann man zwischen ungeradem $n = 2n' + 1$ mit Fundamentalgruppe $\pi_1(D_{2n'+1}) = \mu_4$ und geradem $n = 2n'$ mit $\pi_1(D_{2n'}) = \mu_2 \times \mu_2$ unterscheiden (siehe Abschnitt 2.4). Die Gruppe D_4 nimmt eine gewisse Sonderrolle ein, da die Automorphismengruppe des zugehörigen Dynkindiagramms die Ordnung sechs hat. Hier unterscheiden wir zwischen den Gruppen $D_4, {}^3D_4$ und ${}^6D_4$.

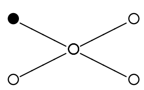
Genau dann, wenn die Fundamentalgruppe von G mit der Fundamentalgruppe der adjungierten Gruppe G_{ad} übereinstimmt, gibt es einen nichttrivialen, echten Γ-Untermodul C_x von $\pi_1(\mathrm{G})$, der zu μ_2 isomorph ist. Nach Lemma 28 gilt:

Satz 70. *Sei* G *eine einfache Gruppe vom Typ* D_n*. Falls* G *nicht adjungiert ist, dann besitzen alle halbeinfachen Konjugationsklassen, die über* K *definiert sind, ein Element aus* $\mathrm{G}(\mathrm{K})$. □

Also betrachten wir im Folgenden die Fälle, in denen G eine quasizerfallende, nicht zerfallende, zusammenhängende absolut einfache adjungierte Gruppe vom Typ D_n ist und untersuchen, unter welchen Bedingungen einem Vertreter einer halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse die Gruppe $\mathrm{C}_x \cong \mu_2$ zugeordnet wird.

Konkret heißt dies für uns:

Der Fall D_4: Für eine einfache Gruppe G vom Typ D_4 betrachten wir das erweiterte Dynkindiagramm



Die Automorphismengruppe des Dynkindiagrammes $\mathrm{Aut(Dyn)}$ vertauscht die Ecken α_1, α_3 und α_4, alle mit $\circ$ gekennzeichnet, und diese ist daher isomorph zur Gruppe S_3.

Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut(Dyn)}$ ist isomorph zu S_3, es gibt jedoch keinen nichttrivialen Γ-Untermoduln. Nach den Lemmata 28 ist somit die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial und somit folgt:

Lemma 71. *Für die quasizerfallenden zusammenhängende einfachen Gruppen vom Typ* $D_4, {}^3D_4$ *und* ${}^6D_4$ *besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.* □

Der Fall D_{2n+1} ($n > 1$): Für eine einfache Gruppen vom Typ D_{2n+1} ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ isomorph zu μ_4. Wir suchen alle möglichen Untergruppen $U \subset \pi_1(\mathrm{G})$, für die $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, U)$ nichttrivial ist und anschließend die Elemente $x \in \mathrm{G}$ mit $\mathrm{C}_x = U$.

Dieser Fall stimmt mit den Untersuchungen im Abschnitt 4.8.1 überein. Wir erhalten daher aus Lemma 61:

Lemma 72. *Sei* G *eine adjungierte, quasizerfallende zusammenhängende einfache Gruppe vom Typ* D_{2n+1}*. Dann ist das Bild von* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)$ *in* $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ *isomorph zu* $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}\, \mathrm{L}^\times$

Der Fall D_{2n} ($n > 2$): Die Fundamentalgruppe einer einfachen Gruppen vom Typ D_{2n} ist isomorph zu $\mu_2 \times \mu_2$. Sie hat drei Untergruppen der Ordnung zwei, aber es gibt nur einen nichttrivialen Γ-Untermodul der Ordnung zwei, falls G nicht spaltet ([Ta71] Seite 255). Sei L eine quadratische Körpererweiterung von K mit Galoisgruppe $\Gamma_{\mathrm{L}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{L}) \subset \Gamma$. Nach dem Abschnitt über die Kategorie der Γ-Moduln (Theorem 27) ist nur die exakte nichtzerfallende Sequenz

$$1 \to \mu_2 \xrightarrow{diag} \widetilde{\mu_2 \times \mu_2} \xrightarrow{prod} \mu_2 \to 1$$

weiter zu untersuchen, um eine rationale Konjugationsklasse zu finden, die keinen rationalen Vertreter besitzt.

Die Galoisgruppe Γ operiert trivial auf μ_2. Auf der Gruppe $\widetilde{\mu_2 \times \mu_2}$ definieren wir die Galoisoperation für $\sigma \in \Gamma$ wie folgt: Für $\sigma \in \Gamma_{\mathrm{L}}$ ist sie durch $\sigma(x, y) := ({}^{\sigma}x, {}^{\sigma}y)$ und für $\sigma \notin \Gamma_{\mathrm{L}}$ durch $({}^{\sigma}y, {}^{\sigma}x)$ gegeben.

Lemma 73. *Es gilt* $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})(\overline{\mathrm{K}}) = (\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}^{\times}) \cong (\overline{\mathrm{K}}^{\times} \times \overline{\mathrm{K}}^{\times})$ *via* $(l \otimes x) \mapsto (lx, \bar{l}x)$. □

Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Kokern}_1 := \mathrm{Kokern}(\mathrm{L}^{\times} \xrightarrow{\mathrm{Norm}} \mathrm{K}^{\times})$$

und mit

$$\mathrm{Kokern}_2 = \mathrm{Kokern}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_2 \times \mu_2}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mu_2)),$$

wobei $\widetilde{\mu_2 \times \mu_2}$ definiert ist als $\mathrm{Kern}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mu_2 \times \mu_2) \to \mu_2 \times \mu_2$. Wegen $\mathrm{char}(\mathrm{K}) \neq 2$ ist bekanntlich $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mu_2) \cong \mathrm{K}^{\times}/(\mathrm{K}^{\times})^2$, daher gilt

Lemma 74. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^{\times} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "\mathrm{Norm}"] & \mathrm{L}^{\times} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{Norm}"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \widetilde{\mu_2 \times \mu_2}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
\mathrm{K}^{\times} \arrow[r, "2"] & \mathrm{K}^{\times} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mu_2) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & \mathrm{Kokern}_1 \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{Kokern}_2 &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und ist exakt. □

Es gilt sogar

Lemma 75. *Die Abbildung* $\varepsilon : \mathrm{Kokern}_1 \to \mathrm{Kokern}_2$ *ist bijektiv.*

Beweis: Die Abbildungen ϕ und ψ sind beide surjektiv, daher ist die Abbildung ε surjektiv. Die Abbildung ε ist ebenso injektiv, da das $\mathrm{Bild}(\mathrm{K}^{\times} \xrightarrow{2} \mathrm{K}^{\times})$ im $\mathrm{Bild}(\mathrm{L}^{\times} \xrightarrow{\mathrm{Norm}} \mathrm{K}^{\times})$ enthalten ist. Die beiden Bilder unterscheiden sich nur um ein Element in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mu_2)$ und landen daher im Kokern_2 auf dem gleichen Element. □

Wieder ist die einzige Situation, in der die rationale Konjugationsklasse keinen rationalen Vertreter enthalten kann, der Fall $\mathrm{C}_x \cong \mu_2$. Nun ist $\mathrm{Kokern}_1 = \mathrm{K}^{\times}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}\,\mathrm{L}^{\times}$ und Kokern_2 das Bild von $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x)$ in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$. Daher folgt

Lemma 76. *Das Bild der Kohomologiegruppe* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G})/\mathrm{C}_x)$ *in* $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ *ist isomorph zu* $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$. □

Nach Klassenkörpertheorie entspricht für einen lokalen Körper K die Ordnung der Gruppe $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ der Ordnung der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$. Daher gilt

Lemma 77 ([OMe63] Seite 167). *Sei* K *ein lokaler Körper und* L/K *eine quadratische Körpererweiterung und die Charakteristik ungleich zwei. Dann hat die Gruppe* $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times$ *die Ordnung zwei.* □

Berechnung von x mit nichttrivialer Gruppe C_x

Wir betrachten quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache adjungierte Gruppen G vom Typ D_n mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}) = \mu_4$ für ungerades n und $\pi_1(\mathrm{G}) = \mu_2 \times \mu_2$ für gerades n. Im Folgenden werden wir die Gruppe $\mathrm{C}_x \subset \pi_1(\mathrm{G})$ analog wie im Fall A_n untersuchen und die Frage klären, für welche Elemente x die Gruppe C_x isomorph zu μ_2 ist.

Wir betrachten die Überlagerung

$$\mathrm{G}_{\mathrm{sc}} = \mathrm{Spin}_{2n} \to \mathrm{SO}_{2n} \to \mathrm{PSO}_{2n} = \mathrm{G}_{\mathrm{ad}}\,.$$

Wir bezeichnen die halbeinfachen Elemente

$$x = \begin{pmatrix} t_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t_n & & & \\ & & & t_n^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & t_1^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_{2n}$$

der Einfachheit halber mit $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Erster $n \times n$ Block geht zu einem maximal isotropen Teilraum von SO_{2n} über $\overline{\mathrm{K}}$ über.

Unter der Abbildung $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \to \mathrm{SO}_{2n}$ wird der Torus T_{sc} auf den Torus T_{SO} abgebildet. In Koordinatenschreibweise bedeutet dies für $t_0^2 = \prod_{i=1}^n t_i$

$$(t_0, t_1, \ldots, t_n) \;\mapsto\; (t_1, \ldots, t_n).$$

Die Gruppe C_x läßt sich in G_{sc} beschreiben als

$$\mathrm{C}_x \cong \pi_1(\mathrm{SO}_{2n}) = \{\pm 1_{\mathrm{Spin}}\} = \{(\pm 1, 1, \ldots, 1)\}.$$

Die Weylgruppe $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ ist für einfache Gruppen vom Typ D_n isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \times \mathrm{S}_n$ und wird im folgenden Sinne von den beiden Typen von Elementen

$$s_i : (t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n) \mapsto (\frac{t_0}{t_i}, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i^{-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$$

und Permutationen

$$\sigma : (t_0, t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_0, t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$$

erzeugt ([Bou68] Planche IV). Es gilt

$$\mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T}) = \left\{ \sigma \cdot \prod_{\substack{i \in I \\ |I| \text{ gerade}}} s_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Für gerades n hat $\pi_1(\mathrm{G_{ad}})$ drei nichttriviale Untergruppen der Ordnung zwei, aber nur eine galois-invariante Untergruppe ([Ta71] Seite 255). Für diese zerfällt die Sequenz

$$1 \to \mu_2 \to \widetilde{\mu_2 \times \mu_2} \to \mu_2 \to 1$$

nicht, wobei $\widetilde{\mu_2 \times \mu_2}$ der Gruppe $\pi_1(\mathrm{G_{ad}})$ entspricht. Dies ist die Gruppe $\pi_1(\mathrm{SO}_{2n})$. Ebenso ist die Untergruppe von Ordnung zwei für ungerades n die Gruppe $\pi_1(\mathrm{SO}_{2n}) = \mu_2$, für die gilt

$$1 \to \mu_2 \to \widetilde{\mu_4} \to \mu_2 \to 1.$$

In beiden Fällen erhalten wir für C_x somit

$$\mathrm{C}_x \cong \pi_1(\mathrm{SO}_{2n}) = \{\pm 1_{\mathrm{Spin}}\},$$

wobei 1_{Spin} das Einselement in der Gruppe $\mathrm{G_{sc}} = \mathrm{Spin}_{2n}$ ist. Damit für ein halbeinfaches Element x die Gruppe C_x gleich μ_2 ist, muß für ein Urbild von x in $\mathrm{G_{sc}}$ gelten:

$$\exists\, h \in \mathrm{G_{sc}} \;\;:\;\; h\, x_{\mathrm{sc}}\, h^{-1} = -1_{\mathrm{Spin}} \cdot x_{\mathrm{sc}}.$$

Folglich gilt in SO_{2n} die Gleichung $\overline{h}\,\overline{x}\,\overline{h}^{-1} = \overline{x}$ bzw. $\overline{h}\,\overline{x} = \overline{x}\,\overline{h}$.

Da x_{sc} ein halbeinfaches Element in $\mathrm{G_{sc}}$ ist, gibt es einen maximalen Torus $\mathrm{T_{sc}} \subset \mathrm{G_{sc}}$, der x_{sc} enthält. Wegen $\mathrm{G_{sc}} / \sim \cong \mathrm{T_{sc}} / \sim$ ist die Konjugation im Torus $\mathrm{T_{sc}}$ mit einem Element $h \in \mathrm{G_{sc}}$ nichts anderes als die Konjugation mit einem Weylgruppenelement $w \in \mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T})$, d.h. es gilt

$$\{h\, x_{\mathrm{sc}}\, h^{-1} \mid h \in \mathrm{G_{sc}}\} \cap \mathrm{T_{sc}} = \{w x_{\mathrm{sc}} w^{-1} \mid w \in \mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T})\}.$$

Sei $h \in \mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T})$ und $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit k gerade. Um die Gleichung

$$h\, x_{\mathrm{sc}}\, h^{-1} = -1_{\mathrm{Spin}} \cdot x_{\mathrm{sc}}$$

zu erfüllen, muß es ein i und ein σ geben, so daß

$$\left(\frac{t_0}{t_{i_1} \dots t_{i_k}}, t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(i_1)}^{-1}, \dots\right) = (-t_0, t_1, \dots, t_n)$$

ist. Für $k = 0$ erhalten wir den Widerspruch $t_0 = -t_0 \neq 0$. Daher können wir annehmen, daß $k > 0$ ist.

Wir betrachten die Operation von s_i. Um t_0 in $-t_0$ überzuführen, muß es $i, j \in I$ geben, so daß

$$t_j = -t_i^{-1}$$

gilt. Für den Fall, daß $t_i = -1$ ist, gilt

$$s_i(t_0, t_1, \ldots, -1, \ldots, t_n) = (-t_0, t_1, \ldots, -1, \ldots, t_n).$$

Falls es zusätzlich ein j mit $t_j = 1$ gibt, so erhalten wir mit

$$(s_i \circ s_j)(t_0, t_1, \ldots, 1, \ldots, -1, \ldots, t_n) = (-t_0, t_1, \ldots, 1, \ldots, -1, \ldots, t_n)$$

die gewünschte Eigenschaft. Daher erfüllt jedes halbeinfache Element x, welches 1 und -1 als Eigenwert besitzt, die Gleichung $h\, x_{\mathrm{sc}}\, h^{-1} = -1_{\mathrm{Spin}} \cdot x_{\mathrm{sc}}$.

Sei $t := (t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Durch

$$\mathrm{mult}_\tau(t) := \sharp\{i \mid 1 \le i \le n, t_i = \tau\}$$

wird die Multiplizität von τ definiert. Die Multiplizität $\mathrm{mult}_\tau(t)$ ist nichts anderes als die Summe von $\sharp\{i \in I \mid 1 \le i \le n, t_i = \tau\}$ und $\sharp\{i \notin I \mid 1 \le i \le n, t_i = \tau\}$. Es gilt nun:

$$\mathrm{mult}_\tau(t) = \mathrm{mult}_\tau(\sigma \cdot \prod_{i \in I} s_i(t)) = \sharp\{i \in I \mid 1 \le i \le n, t_i = \tau^{-1}\} + \sharp\{i \notin I \mid 1 \le i \le n, t_i = \tau\}.$$

Hieraus erhalten wir

$$\sharp\{i \in I \mid 1 \le i \le n, t_i = \tau\} = \sharp\{i \in I \mid 1 \le i \le n, t_i = \tau^{-1}\},$$

weshalb t jeden Eigenwert τ mit der gleichen Multiplizität wie τ^{-1} besitzt. Nun ist

$$\prod_{i \in I} t_i = \prod_{\tau} \tau^{\sharp\{i \in I \mid t_i = \tau\}}.$$

Für $\tau \neq \pm 1$ heben sich die Anteile von τ^{-1} und τ auf, da sie die gleiche Multiplizität besitzen, so daß nur noch die Anteile $\tau = -1$ und $\tau = 1$ übrig bleiben. Letzterer ist trivial, weshalb gilt:

$$\mathrm{mult}_\tau(t) = (-1)^{\sharp\{i \in I \mid t_i = -1\}},$$

d.h. falls die Anzahl $m := \sharp\{i \in I \mid t_i = -1\}$ des Eigenwertes -1 von t gerade ist, dann besitzt die rationale Konjugationsklasse von t einen rationalen Vertreter. Daher gilt:

Satz 78. *Sei* $\mathrm{G} = \mathrm{PSO}_{2n}$ *eine quasizerfallende zusammenhängende adjungierte absolut einfache Gruppe vom Typ* D_n *und* x *ein Vertreter einer halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse in* SO_{2n}. *Falls* x *nicht* 1 *und* -1 *als Eigenwerte besitzt oder die Multiplizität des Eigenwertes* -1 *gerade ist, enthält die Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Beweis: Sei $w \in \mathrm{W(G)}$ o.B.d.A. ein Produkt von signierten Zykeln. Nach [BFW99] laäßt sich w in gerade und ungerade Zykel zerlegen. Für die geraden Zykel heben sich die Beiträge von $\sharp I$ weg und die ungeraden Zykel liefern jeweils einen Eigenwert ± 1. □

Anmerkung. Es gibt den Ausnahmeisomorphismus von D_3 nach A_3 [KMRT98] §27, der jedes Element $x \in \mathrm{PGL}_4$ auf ein Element $x' \in \mathrm{PSO}_6$ abbildet. Für das Beispiel aus Abschnitt 4.1 bedeutet dies für das Element

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

daß es auf das Element

$$x' = -\frac{1}{ab} \cdot \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix} = (\frac{a}{b}, -1, 1)$$

abgebildet wird. Für $t := \frac{a}{b} \neq 0$ erhalten wir das Element

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = (t, -1, 1)$$

in D_3, das sowohl den Eigenwert 1 und -1 besitzt.

Für Elemente mit Eigenwerten ± 1 gilt es nun den Fall auszuschließen, für den die Gruppe C_x gleich der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ ist. Wir nehmen an, daß x nicht selbst in $\mathrm{G}(\mathrm{K})$ liegt, da wir ansonsten einen rationalen Vertreter hätten.

Für gerades n gilt für die Gruppe C_x

$$\mathrm{C}_x \cong \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}) = \left\{ \begin{array}{r} (-i, -1, \ldots, -1), \\ (i, -1, \ldots, -1), \\ (-1, 1, \ldots, 1), \\ (1, 1, \ldots, 1) \end{array} \right\}$$

und für ungerades n gilt

$$\mathrm{C}_x \cong \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}) = \left\{ \begin{array}{r} (1, 1, \ldots, 1), \\ (-1, 1, \ldots, 1), \\ (1, -1, \ldots, -1), \\ (-1, -1, \ldots, -1) \end{array} \right\}.$$

Für diese Gruppen müssen wir die Gleichung

$$h\, x_{\mathrm{sc}}\, h^{-1} = k \cdot x_{\mathrm{sc}} \text{ mit } k \in \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}})$$

studieren. Der Fall $k = (1, 1, \ldots, 1)$ ist trivial, und das Element $k = (-1, 1, \ldots, 1) \in \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}})$ haben wir am Anfang dieses Unterabschnittes betrachtet.

Für die weiteren Elemente $k \in \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}})$ gilt für t ohne Berücksichtigung der t_0-Koordinate:

$$(t_1, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1}) \sim (-t_1, \dots, -t_n, -t_n^{-1}, \dots, -t_1^{-1}),$$

daher muß es einen Eigenwert τ von t geben, der diese Symmetrie stört, d.h. für einen Eigenwert τ gilt:

$$\mathrm{mult}_\tau(t) + \mathrm{mult}_{\tau^{-1}}(t) \neq \mathrm{mult}_{-\tau}(t) + \mathrm{mult}_{-\tau^{-1}}(t).$$

Satz 79. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende adjungierte absolut einfache Gruppe vom Typ D_n und sei x ein Vertreter einer halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse. Falls das Element x die Eigenwerte ± 1 hat und die Multiplizität des Eigenwertes -1 ungerade ist, dann besitzt die Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter, wenn zusätzlich für jeden Eigenwert τ von x gilt:*

$$\mathrm{mult}_\tau(t) + \mathrm{mult}_{\tau^{-1}}(t) = \mathrm{mult}_{-\tau}(t) + \mathrm{mult}_{-\tau^{-1}}(t).$$

Wir wollen dies nun, wie im Unterabschnitt 4.8.1 für die einfachen Gruppen vom Typ A_{n-1}, in Termen des charakteristischen Polynoms ausdrücken.

Der Fall, daß die zweielementige Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{SO}_{2n})$ in C_x enthalten ist, wird durch die Bedingung beschrieben, daß ± 1 Eigenwerte von x sind, d.h. in Termen des charakteristischen Polynoms:

$$\mathrm{char}_x(1) = \mathrm{char}_x(-1) = 0.$$

Der Fall, daß die Gruppe C_x gleich der vierelementigen Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}})$ der adjungierten Gruppe ist, wird durch die folgende Bedingungen beschrieben:

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathrm{char}_x(1) = \mathrm{char}_x(-1) = 0, \\ (2) & \mathrm{char}_x(T) = \sum a_{2i} T^{2i}. \end{array}$$

Der Satz 79 heißt umformuliert in Terme des charakteristischen Polynoms:

Satz 80. *Sei* G *eine quasizerfallende adjungierte zusammenhängende absolut einfache Gruppe vom Typ D_n und sei x ein Vertreter einer halbeinfachen rationalen Konjugationsklasse. Falls das charakteristische Polynom* $\mathrm{char}_x(T)$ *von x der Bedingung*

$$\mathrm{char}_x(1) = \mathrm{char}_x(-1) = 0$$

genügt, dann besitzt die Konjugationsklasse von x einen rationalen Vertreter, wenn es keinen nichttrivialen Koeffizienten a_{2i+1} von $\mathrm{char}_x(T)$ *gibt.*

Wir betrachten die Abbildung, die x in SO_{2n} auf $\overline{x}$ in PSO_{2n} abbildet. Die Konjugationsklasse von $\overline{x}$ ist somit rational und es gilt in SO_{2n}

$$[x]^\sigma = \pm[x].$$

Falls $[x]^\sigma = [x]$ ist, gibt es einen rationalen Vertreter x_0 in $[x]$, da SO_{2n} nicht vom adjungierten Typ ist (vgl. Satz 70). Daher können wir o.B.d.A. annehemen, dass $[x]^\sigma = -[x]$ ist, d.h. es gibt ein w in $\mathrm{W(G)}$ mit $w({}^\sigma t_1, \dots, {}^\sigma t_n) = -(t_1, \dots, t_n)$. Da $\mathrm{char}_x(w(t)) = \mathrm{char}_x(t)$ für alle $w \in \mathrm{W(G)}$ ist, folgt ${}^\sigma\,\mathrm{char}_x(t) = \mathrm{char}_x(-t)$.

Lemma 81. *Sei* $\mathrm{char}_x(t) = \sum a_i X^i$. *Es gilt:* $a_{2\mu} \in \mathrm{K}$ *und falls es ein* $a_{2\mu+1} \neq 0$ *gibt, dann gibt es eine quadratische Körpererweiterung* L *über* K, *wobei* L *der Fixkörper des charakteristischen Polynoms ist, mit* $\mathrm{L} = \mathrm{K}(\sqrt{A})$ *und* $a_{2\mu+1} \in \sqrt{A}\,\mathrm{K}$.

Hieraus folgt, daß sich das charakteristische Polynom schreiben läßt als

$$\mathrm{char}_x(T) = \sum a_{2i} T^{2i} + \sqrt{A} \sum a_{2i+1} T^{2i+1},$$

für ein $A \in \mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^2$. Nun gilt $A \in \mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^2 \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \pi_1(\mathrm{G}) / \mathrm{C}_x)$ und es gilt für das davon erzeugte Ideal (A):

Im Fall $\pi_1(\mathrm{PSO}) = \mu_2 \times mu_2$ folgt aus Satz 54 oder dem Anhang, dass $A \cup B \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ genau dann trivial ist, wenn die rationale Konjugationsklasse von x einen rationalen Vertreter besitzt, wobei (B) das Ideal ist, das zu der Körpererweiterung, die die quasizerfallende Form in die zerfallende überführt, gehört.

Im Fall $\pi_1(\mathrm{PSO}) = \mu_4$ erhält man nach Lemma 72 Dies führt zu einer analogen Situation wie im Abschnitt 4.8.1, die nicht exakt die gleiche ist.

Nach dem Satz 105 ist dies dasselbe Kriterium.

Anmerkung. Sei K ein lokaler Körper. Es gilt $\mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times \cong \{\pm 1\}$. Sei l die Ordnung von C_x. Für $l = 2$ erhalten wir die Abbildung

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mu_2) = \mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^2 \to \mathrm{K}^\times / \mathrm{Norm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \mathrm{L}^\times .$$

Die Aussage, daß $[\alpha] \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ nichttrivial ist, ist äquivalent zur Aussage, daß das Hilbertsymbol $\varphi(A) := (A, B)_{\text{Hilbert}}$ nichttrivial ist. Seien $(A), (B)$ die Kohomologieklassen in $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mu_2)$, von denen A bzw. B Vertreter wie oben sind. Dann können wir zeigen, daß das Cup-Produkt $(A) \cup (B)$ genau dann in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial ist, wenn A in Norm_B liegt (siehe dazu Anhang 5.3).

4.8.4. Die Fälle E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2

Für exzeptionelle Gruppen zeigen wir:

Satz 82. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache exzeptionelle Gruppe über einem vollkommenen Körper* K, *d.h. G ist vom Typ* E_6, E_7, E_8, F_4 *oder* G_2. *Darüber hinaus sei die Charakteristik von* K *gut. Dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Beweis: Bis auf die einfachen Gruppen vom Typ E_6 sind die exzeptionellen Gruppen zerfallend ([Hu75] 35.1), weshalb wir für die Gruppen vom Typ E_7, E_8, F_4 oder G_2 das Theorem 48 anwenden können. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(E_6)$ hat die Ordnung 3 (Abschnitt 2.4) und ist somit ein einfacher Γ-Modul. Nach Lemma 28 folgt die Behauptung. □

4.9. Fasteinfache Gruppen G

Um die bisherigen Resultate zu verallgemeinern, müssen wir nachprüfen, ob sich die Ergebnisse über quasizerfallende zusammenhängende absolut einfache Gruppen aus dem vorherigen Abschnitt 4.8 auf zusammenhängende fasteinfache Gruppen G übertragen lassen.

Wir betrachten eine halbeinfache rationale Konjugationsklasse in G. Für zerfallende Gruppen haben wir bereits gezeigt, daß jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter besitzt (E).

Für quasizerfallende absolut einfache Gruppen haben wir die folgende Tabelle

Wurzelsystem	E
einfach zusammenhängend	Ja
zerfallend	Ja
A_{4n-1}	Nein
A_{sonst}	Ja
B_n	Ja
C_n	Ja
D_n (adjungiert)	Nein
D_n (sonst)	Ja
E_6, E_7, E_8	Ja
F_4, G_2	Ja

Tabelle D: Eigenschaft E erfüllt?

Damit eine halbeinfache rationale Konjugationsklasse, die ein halbeinfaches Element s enthält, keinen rationalen Vertreter besitzt, muß für absolut einfache Gruppen G vom Typ A_{4n-1} das Element s konjugiert zu einem Element der Gestalt

$$s \sim (s_1, \zeta_l s_1, \ldots, \zeta_l^{l-1} s_1, s_2, \ldots, \zeta_l^{l-1} s_k)$$

sein. Für absolut einfache adjungierte Gruppen G vom Typ D_n hat das Element s den Eigenwert -1 mit ungerader Multiplizität und keinen Eigenwerte τ von s mit

$$\mathrm{mult}_\tau(s) + \mathrm{mult}_{\tau^{-1}}(s) \neq \mathrm{mult}_{-\tau}(s) + \mathrm{mult}_{-\tau^{-1}}(s).$$

Die Abbildung G $\to$ G / Z bildet rationale Konjugationsklassen wieder auf rationale Konjugationsklassen ab und ist, eingeschränkt auf eine halbeinfache Konjugationsklasse, eine Isogenie.

Sei $s \in$ G halbeinfach und seien

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{G_{sc}} & \to & \mathrm{G_{Der}} & \to & \mathrm{G / Z} \\ \tilde{s} & \mapsto & s' & \mapsto & \overline{s} \end{array}$$

die Bilder von s in den jeweiligen Gruppen. Nach Konstruktion gibt es für $\overline{s} \in$ G / Z ein Element $k \in \overline{\mathrm{C}}_{\overline{s}} \subset \pi_1(\mathrm{G / Z})$, für daß

$$\tilde{s} g \tilde{s}^{-1} g^{-1} = k$$

gilt. Die Wahl von k ist unabhängig von der Wahl von $\tilde{s}$ und $g \in \overline{\mathrm{G}}_{\overline{s}}$. Alle oben konstruierten Elemente k, die in $\pi_1(\mathrm{G_{Der}})$ liegen, müssen ebenso in C_s liegen.

Satz 83. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe und* $s \in \mathrm{G}$ *ein halbeinfaches Element. Dann gilt* $\overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}} \cap \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}) = \mathrm{C}_s$. □

Folgerung 84. *Falls* $\mathrm{C}_{\overline{s}} \cap \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}})$ *trivial ist, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

Betrachten wir die exakte Sequenz

$$1 \to \mathrm{C}_s \to \overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}} \to \overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}}/\,\mathrm{C}_s \to 1,$$

dann erhalten wir die Kohomologiesequenz

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}}/\,\mathrm{C}_s) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_s) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}}).$$

Falls $\overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}} \cap \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}) \neq \mathrm{C}_s$ und die Obstruktion $\alpha' \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_s)$ trivial ist, muß $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}})$ trivial sein. Dies bedeutet nichts anderes, als daß jede nichttrivialen Obstruktionen α in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}})$ nichttriviale Obstruktionen α' in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_s)$ liefern. Wir können daher alle nichttrivialen Obstruktionen, die wir für Konjugationsklassen in einfachen Gruppen konstruieren, ebenso in Konjugationsklassen in gewissen halbeinfachen Gruppen konstruieren. Die Frage ist nun, ob aus der Tatsache, daß die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \overline{\mathrm{C}_{\overline{s}}})$ trivial ist, bereits folgt, daß $\alpha' \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_s)$ trivial ist.

Für fasteinfache Gruppen G heißen die bisherigen Resultate konkret: Wir betrachten nochmal die Abbildung

$$\mathrm{G} \to \mathrm{G}\,/\,\mathrm{Z}\,.$$

Diese induziert eine Abbildung zwischen den Konjugationsklassen von G und $\mathrm{G}\,/\,\mathrm{Z}$. Die Einschränkung auf rationale Konjugationsklassen ist eine Isogenie. Aus dem Abschnitt 4.4 ist bekannt, daß für ein halbeinfaches Element $s \in \mathrm{G}$ die Gruppe C_s eine Untergruppe von $\mathrm{C}_{\overline{s}}$ ist. Da die Sequenz

$$1 \to \mathrm{C}_s \to \pi_1(\mathrm{G}) \to \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_s \to 1$$

für die absolut einfachen Gruppen G vom Typ B_n, C_n, D_n (sonst), E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2 zerfällt, ist deren Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_s)$ trivial. Im Fall der Gruppen A_{4n-1} und D_n (adjungiert) gilt folgende Relation in $\pi_1(\mathrm{G}\,/\,\mathrm{Z})$:

$$\mathrm{C}_s = \mathrm{C}_{\overline{s}} \cap \pi_1(\mathrm{G}).$$

Die Gruppe C_s hat die Ordnung $\mathrm{ggT}(\mathrm{C}_{\overline{s}}, \pi_1(\mathrm{G}))$. Nach Definition ist die Gruppe $\mathrm{G}\,/\,\mathrm{Z}$ einfach und die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ ist in $\pi_1(\mathrm{G}\,/\,\mathrm{Z})$ enthalten, d.h. $\pi_1(\mathrm{G}) \subset \mu_n, \mu_4$ oder $\mu_2 \times \mu_2$ (Abschnitt 2.4). Somit sind als nichttriviale und nicht-spaltende Untermoduln von $\pi_1(\mathrm{G})$ alle μ_k, wobei k ein Teiler der Ordnung von $\pi_1(\mathrm{G})$ ist, möglich. Für D_n (adjungiert) bleibt wiederum nur der Fall $\mathrm{C}_x \cong \mu_2$ und für A_{n-1} der Fall $|\pi_1(\mathrm{G})| = 4n'$ zu betrachten. Die Rechnungen für einfache Gruppe lassen sich auf den Fall der fasteinfachen Gruppen übertragen.

Im Fall guter Charakteristik können wir von halbeinfachen rationalen Konjugationsklassen auf alle rationalen Konjugationsklassen schließen, wie wir es im Satz 35 bewiesen haben.

Satz 85. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende fasteinfache Gruppe über einem vollkommenen Körper* K. *Darüber hinaus sei die Charakteristik von* K *gut. Falls vier kein Teiler der Ordnung der Fundamentalgruppe von* G *ist, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter.*

4.10. K-einfache Gruppen

Eine quasizerfallende zusammenhängende K-einfache Gruppe I ist isogen zu einer durch die Weilrestriktion der Skalare einer einfachen Gruppe G definierte Gruppe ([PR94] §2.1.2), d.h. $\mathrm{I} \sim \mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mathrm{G})$ für eine Körpererweiterung L über K. Wir untersuchen zuerst den Fall $\mathrm{I} := \mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mathrm{G})$. Für die K-einfache Gruppe I stimmen die K-wertigen Punkte I(K) mit den L-wertigen Punkten G(L) überein. Falls L / K galoisch ist, zerfällt I über L in ein Produkt von G(L), d.h.

$$\mathrm{I(L)} \cong \mathrm{G(L)} \times \cdots \times \mathrm{G(L)}.$$

Andernfalls gilt für eine K-Algebra M

$$\mathrm{I}(M) = \mathrm{G}(M \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{L}).$$

Über dem algebraischen Abschluß $\overline{\mathrm{K}}$ von K läßt sich die Gruppe I darstellen durch

$$\mathrm{I} \times \overline{\mathrm{K}} = \prod_{\mathrm{Hom}(\mathrm{L},\overline{\mathrm{K}})} \mathrm{G} \times \overline{\mathrm{K}}.$$

Wir betrachten das Verhalten der rationalen Konjugationsklassen von G, wenn wir diese via $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{I}$ abbilden und untersuchen, ob jede rationale Konjugationsklasse in I einen rationalen Vertreter besitzt. A priori wissen wir jedoch nicht, ob die Konjugationsklasse von $\varphi(x)$ rational ist. Aber aufgrund der Identität $\mathrm{I(K)} = \mathrm{G(L)}$ können wir schließen:

Lemma 86. *Die Abbildung der* L*-rationalen Konjugationsklassen in* G *auf die* K*-rationalen Konjugationsklassen in* I *ist surjektiv.*

Beweis: Sei L / K eine endliche Körpererweiterung vom Grad n. Sei $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\,\mathrm{K})$ die absolute Galoisgruppe und $\Gamma_{\mathrm{L}} := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}\,/\,\mathrm{L})$. Dann läßt sich Γ schreiben als

$$\Gamma = \sigma_1 \Gamma_{\mathrm{L}} \cup \cdots \cup \sigma_n \Gamma_{\mathrm{L}}.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \{\mathrm{L} - \text{rat. Konjugationsklassen}\,\} \to \{\mathrm{K} - \text{rat. Konjugationsklasse}\,\}$$

mit

$$g \mapsto \Phi(g) = (g, \ldots, g)$$

zwischen den L-rationalen Konjugationsklassen in G und den K-rationalen Konjugationsklassen in I. Wir zeigen zuerst, daß die Abbildung wohldefiniert ist.

Hier gilt für $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{L}}$ und $\delta_\gamma \in \mathrm{G}$:

$${}^{\gamma}g = {}^{\gamma}\Phi(\sigma_i) = \Phi({}^{\gamma}\sigma_i) = \Phi(\delta_\gamma \sigma_i \delta_\gamma^{-1}) = \Phi(\delta_\gamma)\,\Phi(\sigma_i)\,\Phi(\delta_\gamma^{-1}) = \Delta_\gamma\, g\, \Delta_\gamma^{-1},$$

mit $\Delta_\gamma := \Phi(\delta_\gamma) \in \mathrm{I}$.

Als Nächstes zeigen wir, daß die Abbildung Φ surjektiv ist. Ohne Einschränkung können wir in der Konjugationsklasse von $(g_1, \ldots, g_n)$ in I einen Vertreter mit $g_1 = 1$ wählen. Somit gilt

$$g_i = \Phi(\sigma_i) = \Phi(\sigma_i \cdot 1) = {}^{\sigma_i}\Phi(1) = \Delta_{\sigma_i}\,\Phi(1)\,\Delta_{\sigma_i}^{-1} = \Delta_{\sigma_i}\,g_1\,\Delta_{\sigma_i}^{-1},$$

weshalb jede Komponente g_i zu g_1 konjugiert ist. Daher gibt es in der Konjugationsklasse von $(g_1, \ldots, g_n)$ in I einen Vertreter $(\hat{g}, \ldots, \hat{g})$ und somit ist die Abbildung zwischen den Konjugationsklassen surjektiv. □

Für den Fall $\mathrm{I} = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{G})$ stimmen daher die Aussagen über K-rationale Konjugationsklassen mit denen über L-rationale Konjugationsklassen überein. Nun sind jedoch K-einfache Gruppen I nur isogen zu $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{G})$.

Die Weilrestriktion $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(-)$ der Skalare ist ein linksexakter Funktor von der Kategorie der L- Gruppen und L-Homomorphismen in die Kategorie der K-Gruppen und K-Homomorphismen ([PR94] §2.1.2). Daher gilt

Lemma 87. *Es gilt:* $\mathrm{C}_{\widetilde{x}} = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{C}_x)$ *und* $\pi_1(\mathrm{I}) = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\pi_1(\mathrm{G}))$.

Beweis: Der Funktor $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(-)$ führt einfach zusammenhängende Gruppen in einfach zusammenhängende Gruppen über ([Sp98] 12.4.7.), daher ist $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{G}_{\mathrm{sc}})$ einfach zusammenhängend und somit $\mathrm{I}_{\mathrm{sc}} = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{G}_{\mathrm{sc}})$. Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(\mathrm{G}) \times \overline{\mathrm{K}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}_{\mathrm{sc}} \times \overline{\mathrm{K}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \times \overline{\mathrm{K}} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(\mathrm{I}) \times \overline{\mathrm{K}} \arrow[r] & \mathrm{I}_{\mathrm{sc}} \times \overline{\mathrm{K}} \arrow[r] & \mathrm{I} \times \overline{\mathrm{K}} \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Hieraus folgt $\pi_1(\mathrm{I}) = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\pi_1(\mathrm{G}))$ und analog erhalten wir $\mathrm{C}_{\widetilde{x}} = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{C}_x)$. □

Die Aussage von Theorem 22 läßt sich auf quasizerfallende zusammenhängende K-einfache Gruppen anwenden. Mit Hilfe des Lemmas von Shapiro ([NSW00] 1.6.3) erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\pi_1(\mathrm{G}))) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{C}_x)) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{L}, \pi_1(\mathrm{G})) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{L}, \pi_1(\mathrm{G})/\,\mathrm{C}_x) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(\mathrm{L}, \mathrm{C}_x),
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Abbildungen nach Shapiro Isomorphismen sind. Wir können daher die Ergebnisse, die wir bereits für einfache Gruppen erzielt haben, auf K-einfache Gruppen übertragen.

Satz 88. *Sei* $\mathrm{I} \sim \mathrm{Res}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathrm{G})$ *eine quasizerfallende zusammenhängende* K*-einfache Gruppe. Falls* G *zerfallend, einfach zusammenhängend oder* G *keine Gruppe vom Typ* A_{4n-1} *oder* D_n^{Ad} *ist, dann besitzt jede rationale Konjugationsklasse in* I *einen rationalen Vertreter.* □

4.11. Produkte von einfachen Gruppen

Wir werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse über quasizerfallende fasteinfache Gruppen, soweit wie möglich, auf quasizerfallende halbeinfache Gruppen verallgemeinern. Hierzu betrachten wir die Isogenie von fasteinfachen Gruppen G_i zu halbeinfachen Gruppe G

$$\mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_n \to \mathrm{G}\,.$$

Diese Isogenie führt rationale Konjugationsklassen bzw. rationale Elemente in rationale Konjugationsklassen bzw. rationale Elemente in G über.

Die Bedingung im Satz 52, daß die Automorphismengruppe des Dynkindiagramms trivial ist, heißt nichts anderes, als daß keine irreduzible Komponente des Dynkindiagramms vom Typ A_n bzw. D_n ist. Daher gilt

Satz 89. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe über einem vollkommenen Körper* K*. Falls keiner der Faktoren* G_i *in der Produktzerlegung von* G *in fasteinfache Gruppen vom Typ* A_{n-1} *oder* D_n *ist, dann enthält jede rationale Konjugationsklasse in* G *einen rationalen Vertreter.*

Beweis: Wir betrachten die adjungierte Gruppe G_{ad} von G mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}})$. Nach Voraussetzung ist die Gruppe $\pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}})$ ein halbeinfaches Objekt in der Kategorie der Γ-Moduln und somit ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ von G ebenso halbeinfach ([Lo90] §28 F 12). Nach dem Satz 32 besitzt daher jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter. □

Es gilt sogar mehr: Betrachten wir die Phänomene, die auftreten, wenn wir eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe G haben, die eine Isogenie zu einem Produkt von fasteinfachen Gruppen besitzt, in dem der Faktor A_{n-1} oder D_n^{Ad} auftritt.

Nehmen wir an, daß nur einfache Faktoren des Types A_{n-1} oder D_n auftreten, dann ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ halbeinfach und nach Theorem 27 bleibt die Aussage des Satzes 89 richtig.

Die Aussage des Satzes 89 gilt allgemeiner, falls wir - aufgrund von Folgerung 30 - Faktoren vom Typ A_{n-1}, n quadratfrei, zulassen. In diesen Fällen können wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}_{A_{n-1}})$ in die p-primären Anteile zerlegen, die jeweils galoisstabil sind. Nach dem Theorem 27 gilt

Satz 90. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe über einem vollkommenen Körper* K*. Falls keiner der Faktoren* G_i *in der Produktzerlegung von* G_{ad} *in fasteinfache Gruppen vom Typ* A_{n-1}*,* n *nicht quadratfrei, oder* D_n^{Ad} *ist, dann enthält jede rationale Konjugationsklasse in* G *einen rationalen Vertreter.* □

In diesem Fall läßt sich die Klassifikation der Elemente x aus den Abschnitten 4.8.1 und 4.8.3 übertragen.

4.12. Probleme bei einer Klassifikation für halbeinfache Gruppen

Es sind keine Klassifikationsresultate rationaler Konjugationsklasse ohne rationale Elemente für halbeinfache oder reduktive Gruppen zu erwarten. Die Problematik liegt am Übergang von einem Produkt von fasteinfachen Gruppen zu halbeinfachen Gruppen. Für jede halbeinfache Gruppe G gibt es bekannterweise eine Isogenie zu einem Produkt von fasteinfachen Gruppen $\prod \mathrm{G}_i$, jedoch wissen wir über die induzierte Abbildung zwischen den Fundamentalgruppen $\prod \pi_1(\mathrm{G}_i)$ und $\pi_1(\mathrm{G})$ nicht genug. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ könnte diagonal in das Produkt der jeweiligen Fundamentalgruppen eingebettet sein. Somit läßt sich die Gruppe C_x nur in konkreten Situationen Fall für Fall ausrechnen. Generelle Aussagen sind nicht zu erwarten. Wir werden dieses Phänomen an einigen Beispielen im Folgenden zeigen.

Es genügt hierfür den Fall zu betrachten, daß sich die halbeinfache Gruppe G als Produkt zweier fasteinfacher Gruppen G_1 und G_2 schreiben läßt. Für die Fundamentalgruppe von G gilt

$$\pi_1(\mathrm{G}) \subset \pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}) \cong \pi_1(\mathrm{G}_1^{\mathrm{ad}}) \times \pi_1(\mathrm{G}_2^{\mathrm{ad}}),$$

und für die Gruppe C_x gilt nach 83 folglich

$$\mathrm{C}_x = (\mathrm{C}_{x_1}^{\mathrm{ad}} \times \mathrm{C}_{x_2}^{\mathrm{ad}}) \cap \pi_1(\mathrm{G}).$$

Wir folgen der Idee, daß wir durch die Verknüpfung der beiden Komponenten (x_1, x_2) von x eine nichttriviale Untergruppe C_x in der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ erhalten. Hier können zwei Phänomene auftreten. Zum einen kann die Konjugationsklasse eines Elementes x keinen rationalen Vertreter enthalten, obwohl die jeweiligen Komponenten x_1 und x_2 in den fasteinfachen Gruppen G_1 und G_2 jeweils einen rationalen Vertreter haben (Beispiel 91 (A)). Zum anderen kann das umgekehrte Phänomen auftreten, daß die Komponenten in einer Gruppe G_i keinen rationalen Vertreter besitzen, wohingegen x in G einen rationalen Vertreter besitzt (Beispiel 91 (B)).

Falls wir für die Gruppe G_1 eine k-einfache Gruppe wählen, treten die gleichen Probleme auf (Beispiel 92 (C)). Selbst für k-einfache Gruppe ist nicht mit einem besseren Klassifikationsresultat zu rechnen (Beispiel 92 (D)).

Beispiel 91. Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe und G_{ad} die adjungierte Gruppe von G. Die adjungierte Gruppe ist isomorph zu $\mathrm{SL}_4 \times \mathrm{SL}_4$ mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}) = \mu_4 \times \mu_4$.

(A) Die Gruppe G hat die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}) = \{((-1)^n, \zeta_4^n) \mid n = 0,1,2,3\}$. Ein Element $x \in \mathrm{G}$ hat die Koordinaten (x_1, x_2), welche komponentenweise die Gruppen $\mathrm{C}_{x_1}^{\mathrm{ad}} = 1$ und $\mathrm{C}_{x_2}^{\mathrm{ad}} = \mu_4$ besitzen. Das Element hat die Gruppe $\mathrm{C}_x = \mu_2$ und liefert eine nichttriviale Obstruktion $c_{\sigma,\tau}$ für nichttriviale $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$. Folglich enthält die Konjugationsklasse von x kein rationales Element, obwohl die Projektion der Konjugationsklassen auf die x_1-Koordinate, so wie die auf die x_2-Koordinate jeweils einen rationalen Vertreter in G_1 bzw. G_2 besitzen.

In diesem Fall muß jede Möglichkeit einzeln berechnen. Einfache Regeln sind nicht in Sicht, anders verhält es sich in folgendem Beispiel.

(B) Die Gruppe G besitzt die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}) = \mu_4$, die durch Multiplikation mit einer vierten Einheitswurzeln auf $x \in \mathrm{G}$ operiert. Ein Element x hat wiederum die Koordinaten (x_1, x_2), welche komponentenweise die Gruppen $\mathrm{C}_{x_1}^{\mathrm{ad}} = \mu_2$ und $\mathrm{C}_{x_2}^{\mathrm{ad}} = 1$ besitzen. Die Konjugationsklasse von x liefert dennoch eine triviale Obstruktion, da die Gruppe C_x trivial ist. Folglich besitzt die Konjugationsklasse von x einen rationalen Vertreter, obwohl nach Abschnitt 4.1 die Projektion der rationale Konjugationsklasse auf die x_1-Koordinate keinen rationalen Vertreter besitzt.

Für dieses Beispiel gilt:

(i) Falls $\mathrm{C}_{x_1}^{\mathrm{ad}}$ oder $\mathrm{C}_{x_2}^{\mathrm{ad}}$ trivial ist, so ist die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial.

(ii) Falls $\mu_2 = \mathrm{C}_{x_1}^{\mathrm{ad}} \subset \mathrm{C}_{x_2}^{\mathrm{ad}}$, dann ist die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ nichttrivial.

(iii) Falls $\mu_4 = \mathrm{C}_{x_1}^{\mathrm{ad}} = \mathrm{C}_{x_2}^{\mathrm{ad}}$, dann ist die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial.

In diesem Beispiel hängt die Obstruktion von x nur von der Projektion auf die x_1-Koordinate ab und es gelten die gleichen Resultate wie für absolut einfache Gruppen vom Typ A_{n-1} aus Abschnitt 4.8.1.

Beispiel 92. Ähnliche Probleme treten auf, wenn wir zusätzlich k-einfache Gruppen als Faktoren betrachten:

(C) Sei G eine quasizerfallende zusammenhängende halbeinfache Gruppe, deren adjungierte Gruppe isomorph zu $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mathrm{SL}_2) \times \mathrm{SL}_2$ ist. Jeder dieser Faktoren hat die Eigenschaft, daß jede rationale Konjugationsklasse einen rationalen Vertreter besitzt. Für die Gruppe G ist dies nicht der Fall, weil für die Fundamentalgruppe $\pi_1(G) = \{(x, \mathrm{Norm}(x)) \in \mathrm{Z} \mid x \in \mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mu_2)\} \subset \mathrm{Z} = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mu_2) \times \mu_2$ die Gruppe $\mathrm{C}_x = \mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mu_2) \times 1$ auftritt. Sofern die Projektion auf die zweite Koordinate von x unter der Abbildung $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^2$ auf ein Element geht, das keine Norm von E nach F ist, erhalten wir eine rationale Konjugationsklasse ohne rationalen Vertreter.

(D) Sei $\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}$ eine Körpererweiterung vom Grad 3. Wir betrachten eine K-einfache quasizerfallende zusammenhängende Gruppe G, deren adjungierte Gruppe G_{ad} isomorph zu $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mathrm{SL}_9)$ ist. Für geeignete Gruppen G ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ schief in μ_9 eingebettet, wodurch analog zu (A) - (C) weitere Beispiele für rationale Konjugationsklassen ohne rationalen Vertreter auftreten werden.

Diese Beispiele lassen sich leicht auf weitere Fälle verallgemeinern. Im Abschnitt 4.14 finden sich für $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ einige Beispiele explizit nachgerechnet.

4.13. Theorem 22 für algebraische Gruppen?

Interessant erscheint die Frage, inwieweit sich Theorem 22 auf zusammenhängende lineare Gruppen A verallgemeinern läßt.

Hierzu müßte man die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{A})$ definieren, um ein entsprechendes Kriterium für eine Γ-invariante Untergruppe von $\pi_1(\mathrm{A})$ zu formulieren. Borovoi bemerkt am

Rande ([Boro98] Remark 0.1), daß wir die Definitionen für die reduktive Gruppe $\mathrm{G} := \mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}_u$ einfach auf algebraische Gruppen übertragen können, indem wir

$$\pi_1(\mathrm{A}(\overline{\mathrm{K}})) := \pi_1(\mathrm{G}) \text{ und } \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{A}) := \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{G})$$

setzen. Somit scheint es, als ob wir die Aussage des Theorems 22 ebenso für algebraische Gruppen formulieren können. Wir werden am Ende dieses Abschnittes ein Beispiel angeben, das zeigt, welche Schwierigkeiten im unipotenten Radikal versteckt sind, die sich nicht mit der Borovoi-Fundamentalgruppe erklären lassen.

Damit wir das Resultat von Kottwitz anwenden können, benötigen wir, daß sich die Eigenschaft quasizerfallend zu sein, von der linearen algebraischen Gruppe auf die reduktive Gruppe vererbt. Für die Definition von quasizerfallend für lineare algebraische Gruppen siehe [St65] §11.

Satz 93 ([St65] §11). *Sei* K *ein vollkommener Körper und* A *eine zerfallende lineare algebraische Gruppe. Sei* R *das Radikal von* A *und* Z *das Zentrum von* $\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}$. *Dann ist die Gruppe* $(\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R})/\,\mathrm{Z}$ *quasizerfallend.*

Beweis: Sei R das Radikal von A und Z das Zentrum von $\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}$. Dann gibt es eine quasizerfallende Gruppe G_0 über K und einen Isomorphismus $\varphi : \mathrm{G}_0 \to (\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R})/\,\mathrm{Z}$, der über K definiert ist. Sei $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}_0$ eine Borelgruppe über K. Da G_0 eine halbeinfache Gruppe ohne Zentrum ist, zerfällt die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathrm{G}_0) = G_0 E$, wobei E eine endliche Gruppe ist, die B fest läßt. Für ein Element $\gamma \in \Gamma$ in der absoluten Galoisgruppe von K gilt

$$\varphi^{-1}\gamma(\varphi) = g_\gamma e_\gamma.$$

Da nach Voraussetzung die Gruppe A quasizerfallend ist, ist die erste Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{A})$ nach [St65] §11 trivial, weswegen der Kozykel g_γ ein Korand ist. Der Kozykel $g_\gamma e_\gamma$ ist äquivalent zu $e_y \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{Aut}(\mathrm{G}))$, und es gilt

$$\varphi^{-1}\gamma(\varphi) = e_\gamma.$$

Somit bleibt die Borelgruppe B unter der Galoisoperation auf φ fest und $\varphi(\mathrm{B})$ ist eine Borelgruppe in $(\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R})/\,\mathrm{Z}$, die über K definiert ist. Die Gruppe $(\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R})/\,\mathrm{Z}$ ist damit quasizerfallend. □

Steinberg bemerkt in der Arbeit [St65] §Remark 9.9 folgendes: Falls das Bild einer rationalen Konjugationsklasse in $\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}_u$ ein rationales Element besitzt, dann besitzt diese schon ein rationales Element in A. Die angebene Beweisskizze ist jedoch nicht ausreichend, wie wir nun erläutern werden.

Lemma 94. *Die Abbildung* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}_u(\mathrm{A})$ *bildet rationale Elemente in* A *auf rationale Elemente in* $\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}_u(\mathrm{A})$ *und rationale Konjugationsklassen in* A *auf rationale Konjugationsklassen in* $\mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}_u(\mathrm{A})$ *ab.*

Für den Beweis dieser Aussage genügt es zu zeigen, daß die Abbildung

$$\mathrm{A}(\mathrm{K}) \to \mathrm{A}\,/\,\mathrm{R}_u(\mathrm{A})(\mathrm{K})$$

surjektiv ist. Wir betrachten hierzu die exakte Sequenz

$$1 \to \mathrm{R}_u(\mathrm{A}) \to \mathrm{A} \to \mathrm{A} \,/\, \mathrm{R}_u(\mathrm{A}) \to 1.$$

Hieraus erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{A}(\mathrm{K}) \to \mathrm{A} \,/\, \mathrm{R}_u(\mathrm{A})(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{R}_u(\mathrm{A})) \to \dots$$

Lemma 95. *Sei* K *ein vollkommener Körper. Die Kohomologiegruppe* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{R}_u(\mathrm{A}))$ *ist trivial.*

Beweis: Das unipotente Radikal R_u ist eine zusammenhängende, unipotente Gruppe, weswegen wir Satz 3.1.1. aus [Se62] anwenden können, nachdem für jede zusammenhängende, unipotente Gruppe U die erste Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{U})$ trivial ist. Dies folgt aus der Aussage, daß $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbb{G}_\mathrm{a})$ trivial ist. □

Jede unipotente Gruppe zerfällt und somit gilt nach Satz 47

Lemma 96. *Jede rationale Konjugationsklasse in* $\mathrm{R}_u(\mathrm{A})$ *besitzt einen rationalen Vertreter.* □

Nach den bisherigen Aussagen ist es zwar richtig, daß jede rationale Konjugationsklasse in $\mathrm{A} \,/\, \mathrm{R}_u$ ein rationales Element besitzt, falls diese bereits ein rationalen Vertreter in A hat. Es ist jedoch nicht klar, daß die gewünschte Umkehrung richtig ist. Zwar wird dies in [St65] Remark 9.9 für einfach zusammenhängende Gruppen behauptet, hierfür gibt es jedoch kein ausreichende Argumente, weshalb der Lift in die lineare algebraische Gruppe über dem Grundkörper K definiert ist.

Nach Voraussetzung gibt es einen rationalen Vertreter w' einer rationalen Konjugationsklasse in $\mathrm{A} \,/\, \mathrm{R}_u$, der eine rationale Konjugationsklasse in A repräsentiert. Wenn wir diesen Vertreter w' nach A zurückziehen, erhalten wir ein rationales Element wu^{-1}, mit $u \in \mathrm{R}_u(\mathrm{K})$, von dem wir nicht wissen, ob w und wu^{-1} in der gleichen Konjugationsklasse liegen. So haben wir das Problem zwar auf ein Konjugationsproblem reduziert. Es scheinen jedoch nichttriviale Resultate notwendig zu sein, um dies zu lösen. Das Argument für die Gültigkeit von [St65] Remark 9.9 ist nicht stichhaltig.

Beispiel 97. Das unipotente Radikal ist auflösbar, daher genügt es folgendes Beispiel zu betrachten: Sei (V, q) ein quadratischer Raum und $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(q)$. Wir betrachten $V \ltimes \mathrm{G}$. Zwei Elemente v, v' sind zueinander konjugiert, wenn die quadratische Form auf v und v' übereinstimmt, d.h. $q(v) = q(v')$. Die Konjugationsklasse von v ist rational, wenn $q(v) \in \mathrm{K}$ liegt. Sei $x = v \times 1$ mit $q(v) \in \mathrm{K}$. Falls die Gruppenoperation nicht den Eigenwert 1 hat, besitzt die rationale Konjugationsklasse von v einen rationalen Vertreter. Anderfalls, wenn 1 ein Eigenwert ist, entstehen Probleme. Wir betrachten hierzu das reelle Beispiel:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & x \\ -b & a & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\},$$

wobei die Konjugationsklasse von

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rational ist, aber es offensichtlich keinen rationalen Vertreter gibt.

4.14. Beispiele für $\mathrm{K} = \mathbb{R}$

In diesem Abschnitt werden wir die Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathrm{C}_x)$ aus Theorem 22 im Fall quasizerfallender zusammenhängender einfacher bzw. halbeinfacher Gruppen über $\mathbb{R}$ berechnen. Die Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ hat die Ordnung 2. Sei $\iota \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ die komplexe Konjugation.

Sei vorerst G eine quasizerfallende zusammenhängende einfache Gruppe über $\mathbb{R}$ und $x \in \mathrm{G}$ halbeinfach. Seien $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ und sei $c_{\sigma,\tau}$ ein Vertreter der Kohomologieklasse α. Der Kozykel $c_{\sigma,\tau}$ ist für triviales σ oder τ trivial. Falls σ und τ nichttrivial sind, gilt somit

$$c_{\sigma,\tau} = \varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) = \varphi_x(g_\iota^\iota g_\iota).$$

Wir wählen für $g_\iota \in \mathrm{G}_x$ einen Steinbergrepräsentanten als Vertreter. Dies können wir machen, da g_ι unabhängig von der Wahl des Vertreters in G_x ist. Bekanntlich sind die Steinbergrepräsentanten für eine adjungierte oder einfach zusammenhängend Gruppe G rational.

Damit ist die Konjugationsklasse von x über $\mathbb{R}$ definiert und es gilt

$$c_{\sigma,\tau} = \varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) = \varphi_x(g_\iota^\iota g_\iota) = \varphi_x(g_\iota g_\iota) = \varphi_x(g_\iota)^2.$$

Somit nimmt $\varphi_x(g_\iota)^2$ einen Wert aus $\mathrm{C}_x \subset \pi_1(\mathrm{G})$ an.

Falls G vom Typ B_n, C_n, D_n(nicht adjungiert), E_6, E_7, E_8, F_4 oder G_2 ist, dann enthält folglich jede rationale Konjugationsklassen einen rationalen Vertreter, da $\varphi_x(g_\iota)^2 = 1$ für alle $g_\iota \in \mathrm{G}$ gilt.

Für eine einfache Gruppe vom Typ A_{n-1} ist die Obstruktion für x in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ nur für $n \equiv 0 \mod 4$ nichttrivial. Die Ordnung von C_x sei $2l$ für geeignete $l \in \mathbb{N}$, wobei $n = 4l \cdot n$ ist.

Für die Gruppen vom Typ D_n ist nur der Fall mit $\mathrm{C}_x = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ weiter zu untersuchen. Da die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ die Ordnung zwei hat, ist bekanntlich die Ordung von $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ zwei. Es gilt:

Satz 98. *Sei* G *eine quasizerfallende zusammenhängende einfache Gruppe über* $\mathbb{R}$. *Sei* x *ein Vertreter einer rationalen Konjugationsklasse. Die Konjugationsklasse von* x *besitzt genau dann einen rationalen Vertreter (Eigenschaft* E*), wenn die zugehörige Obstruktion in* $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathrm{C}_x)$ *trivial ist. Die Eigenschaft* E *gilt entsprechend der folgenden Tabelle:*

Wurzelsystem	E	x	$\mid \mathrm{C}_x \mid$	$\mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathrm{C}_x)$
A_{4n-1}	–	$(x_1, \zeta_l x_1, \cdots, \zeta_l^{l-1} x_k)$	$2l$ $l = 1, \ldots, n$	μ_2
A_{sonst}	E	–	*1*	*1*
B_n, C_n	E	–	*1*	*1*
D_n*(adjungiert)*	–	$(1, -1, x_1, \ldots)$	2	μ_2
D_n *nicht adjungiert*	E	–	*1*	*1*
E_6, E_7, E_8	E	–	*1*	*1*
F_4, G_2	E	–	*1*	*1*

Wir geben ein Beispiel für eine rationale Konjugationsklasse, die keinen rationalen Vertreter besitzt, in einer quasizerfallenden halbeinfachen Gruppe G an. Sei G die quasizerfallende halbeinfache Gruppe vom Typ $A_3 \times A_1$ mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}) = \{(i^n, (-1)^n) \mid n = 0, 1, 2, 3\}$, die zur Grammatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört. Diese Gruppe ist quasizerfallend über $\mathbb{R}$. Für zwei reelle Zahlen $a, b \neq 0, 1$ definieren wir folgendes Element x in G, welches durch die Matrix

$$x = \begin{pmatrix} ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ai & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann. Das Element x ist halbeinfach und für $a \neq b$ regulär. Sei σ die komplexe Konjugation und $\sigma^\times$ die wie in Abschnitt 4.1 durch σ induzierte Abbildung.

Nun operiert $\sigma^\times$ auf x durch

$$\sigma^\times(x) = \begin{pmatrix} ai & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ai & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Konjugationsklasse von x über $\mathbb{R}$ definiert. Da die Einträge b und $-b$ unter der Operation von σ vertauschen, gibt es ein Element $k_\sigma \in \mathrm{C}_x$, so daß $k_\sigma = -1$ ist. Wir erhalten somit, daß die Ordnung von C_x zwei ist. Für $w_\sigma \in \mathrm{W}(\mathrm{G})$ gilt folglich:

$$\sigma^\times(x) = k_\sigma \cdot w_\sigma \cdot x = -1 \cdot (23) \cdot x.$$

Die Konjugationsklasse von x liefert eine Obstruktion α in $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathrm{C}_x)$. Ein Vertreter der Kohomologieklasse α kann durch den Kozykel $c_{\sigma,\tau} := k_{\sigma\tau}^{-1} k_\sigma^\tau k_\tau$ dargestellt werden, wobei

$$c_{\sigma,\tau} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \text{ und } \tau \text{ trivial sind} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Die Gruppe $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}, \mathrm{C}_x)$ hat die Ordnung zwei und die rationale Konjugationsklasse von x besitzt keinen rationalen Vertreter.

Abschließend werden wir ein weiteres Beispiel zu dem aus Abschnitt 4.1 angeben, in dem ein Element in einer quasizerfallenden einfachen Gruppe G über $\mathbb{R}$ eine nichttriviale Obstruktion $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ liefert. Wir betrachten die projektive unitäre Gruppe PU_8, die über $\mathbb{C}$ isomorph zu PGL_8 ist. Bis auf Multiplikation mit einem Skalar können wir einem Element von G eine 8×8 Matrix zuordnen. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ die komplexe Konjugation mit $\sigma(\zeta) = \overline{\zeta} = \zeta^{-1}$. Wir betrachten das Element

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ia & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ia & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ia^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ia^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Es ist regulär und halbeinfach.

Wir erhalten

$$\sigma^\times(x) = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{-a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{ia} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{-ia} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{ia^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{-ia^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{-a^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{a^{-1}} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\sigma^\times(x) = \zeta_4^3 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ia & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ia & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ia^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ia^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{-1} \end{pmatrix} = \zeta_4^3 \cdot (34)\,(78) \cdot x.$$

Die Permutationen (34) ud (78) vertauschen die entsprechenden Einträge in x. Berechnen wir den Kozykel $c_{\sigma,\tau} := k_{\sigma\tau}^{-1} k_\sigma^\tau k_\tau$, erhalten wir

$$c_{\sigma,\tau} = 1 \cdot \sigma^\times(\zeta_4^3) \cdot \zeta_4^3 = \begin{cases} -1 & \sigma = \tau \text{ Konjugation} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies zeigt uns, wie wir das Beispiel aus Abschnitt 4.1 für eine rationale Konjugationsklasse, die keinen rationalen Vertreter besitzt, verallgemeinern können.

Anhang

5.1. Alternative Beschreibung von $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$

Sei G eine reduktive Gruppe über einem vollkommenen Körper K und die Charakteristik von K gut. Sei Γ die absolute Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ von K. In [Ko82] wird ein beliebiges Element $x \in \mathrm{G}$ betrachtet, für das die Konjugationklasse rational ist, d.h. für alle $\sigma \in \Gamma$ gilt:

$$x^\sigma = g_\sigma x g_\sigma^{-1}.$$

In Theorem 22 wird jeder Konjugationsklasse eine Obstruktion in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ zugeordnet. Sei $c_{\sigma,\tau}$ ein Vertreter dieser Kohomologieklasse. In diesem Abschnitt beschreiben wir den 2-Kozykel $c_{\sigma,\tau}$ mit Hilfe einer Arbeit von R. Langlands und D. Shelstad [LS87] §2.2. Wir übernehmen die Notation der beiden Autoren.

Im Abschnitt 4.3 haben wir gezeigt, daß wir uns auf halbeinfache Elemente $s \in \mathrm{G}$ beschränken können. Sei $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ ein maximaler Torus, der s enthält. Für halbeinfache Elemente x in einem Torus T erhalten wir folglich die Konjugation

$$s^\sigma = w_\sigma^{-1}(s) \text{ für ein } w_\sigma \in \mathrm{W}(\mathrm{G}).$$

Wir wählen für w_σ^{-1} einen Vertreter $n(w_\sigma^{-1})$ im Normalisator $\mathrm{N}(\mathrm{T})$ von T. In G_{sc} erhalten wir die Gleichung

$$k_\sigma s_{\mathrm{sc}}^\sigma = n(w_\sigma^{-1}) s_{\mathrm{sc}} n(w_\sigma^{-1})^{-1} \text{ mit } k_\sigma \in \pi_1(\mathrm{G}).$$

Den Elementen g_σ bei Kottwitz entsprechen nun die Elemente $n(w_\sigma^{-1})$ im Normalisator. In der Notation von [LS87] §2.2 wird w_σ^{-1} mit $w_T(\sigma)$ bezeichnet.

Wir betrachten den Kozykel $c_{\sigma,\tau} = \varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau)$ aus dem Theorem 22. Nach Lemma 15 ist $c_{\sigma,\tau}$ unabhängig von der Wahl von g_σ. Daher können wir für g_σ Steinbergrepräsentanten $n(w_T(\sigma\tau))$ wählen. Somit gilt für alle $\sigma, \tau \in \Gamma$:

$$c_{\sigma,\tau} = \varphi_x(g_{\sigma\tau}^{-1} g_\sigma^\tau g_\tau) = \varphi_x(n(w_T(\sigma\tau)) n(w_T(\sigma))^{-\tau} n(w_T(\tau))^{-1}).$$

Wir wissen, daß $w_T(\sigma)$ ein 2-Kozykel in $\mathrm{W}(\mathrm{G})$ ist, d.h.

$$w_T(\sigma) w_T(\tau)^\sigma w_T(\sigma\tau)^{-1} = 1.$$

Für das weitere Studium dieser Realisierung des Kozykels $c_{\sigma,\tau}$ benötigen wir

Lemma 99 ([LS87] §2.2). *Es gilt:*

(i) $\sigma_T := w_T(\sigma) \rtimes \sigma \in \mathrm{W(G)} \rtimes \Gamma$

(ii) $n(\sigma_T) = n(w_T(\sigma) \rtimes \sigma) = n(w_T(\sigma)) \rtimes \sigma$ *Steinbergrepräsentant mit* $n \in \mathrm{N(T)}$

(iii) $n(\sigma_T)n(\tau_T)n((\sigma\tau)_T)^{-1} = (\partial x)(\sigma_T, \tau_T)^{-1}$ □

Aufgrund von Lemma 99 gilt:

$$\begin{aligned} n(w_T(\sigma))n(w_T(\tau))^\sigma n(w_T(\sigma\tau))^{-1} &= n(w_T(\sigma))n(w_T(\tau))^\sigma \rtimes (\sigma\tau)(\sigma\tau)^{-1}n(w_T(\sigma\tau))^{-1} \\ &= (n(w_T(\sigma)) \rtimes \sigma)(n(w_T(\tau)) \rtimes \tau)(n(w_T(\sigma\tau)) \rtimes (\sigma\tau))^{-1} \\ &= n(\sigma_T)n(\tau_T)n((\sigma\tau)_T)^{-1} \\ &= (\partial x)(\sigma_T, \tau_T)^{-1}. \end{aligned}$$

Das Element $x(\tau_T)$ liegt im Torus T. Daher erhalten wir, wenn wir φ_x an der Stelle $(\partial x)(\sigma_T, \tau_T)$ auswerten:

$$\varphi_x((\partial x)(\sigma_T, \tau_T)) = \varphi_x(x(\tau_T)^\sigma)\varphi_x(x(\sigma_T, \tau_T))^{-1}\varphi_x(x(\sigma_T)).$$

Für den Fall, daß $\varphi_x(x(\tau_T)^\sigma) = \varphi_x(x(\tau_T))^\sigma$ gilt, ist die Abbildung φ_x galoisäquivariant und $c_{\sigma,\tau}$ ein 2-Korand. In diesem Fall wird die Obstruktion in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ berandet und wir haben gezeigt:

Lemma 100. *Falls für φ_x die Bedingung $\varphi_x(x(\tau_T)^\sigma) = \varphi_x(x(\tau_T))^\sigma$ in C_x erfüllt ist, dann besitzt die rationale Konjugationsklasse von x einen rationalen Vertreter.* □

Zur Berechnung von $x(\tau_T)$ definieren wir zu jedem Wurzelsystem Φ mit Galoisaktion sogenannte a-Data:

Definition 101. *Ein* **a-Datum** *ist eine Menge $\{a_\alpha \in \overline{\mathrm{K}}^\times \mid \alpha \in \Phi\}$, so daß*

$$a_{-\alpha} = -a_\alpha \text{ und } a_{\sigma\alpha} = \sigma a_\alpha \text{ für alle } \alpha \in \Phi \text{ und } \sigma \in \Gamma.$$

In der Arbeit [LS87] §2.2 wird die Formel

$$x(\tau_T) = \prod_{1,\sigma}^{p} a_\alpha^{\alpha^\vee}$$

für geeignete a-Data gezeigt.

Anmerkung. Für Γ-Orbiten unterscheiden wir die beiden Fälle:

(i) Für asymmetrische Γ-Orbiten gilt: Ohne Einschränkung können wir alle a-Data $a_\alpha^{\alpha^\vee}$ gleich 1 wählen. In diesem Fall ist $x(\tau_T)$ trivial und die Obstruktion in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial.

(ii) Für symmetrische Γ-Orbiten gilt: Die Wurzeln α und $-\alpha$ liegen im gleichen Γ-Orbit. Sei τ das nichttriviale Element in $\mathrm{Stab}(\pm\alpha)/\mathrm{Stab}(\alpha)$, dann gilt nach Definition der a-Data:

$$\tau(a) = a_{\tau(\alpha)} = a_{-\alpha} = -a.$$

Folglich liegt a im $\mathrm{Kern}(\mathrm{Spur}_{L/L^\tau})$ mit $[L : L^\tau] = 2$.

5.2. Konjugation in der Orthogonalen Gruppe

Sei V ein quadratischer Raum der Dimension n über einem lokalen Körper K der Charakteristik ungleich zwei. Sei $t \in \mathrm{O(V)}$ ein Element der orthogonalen Gruppe.

Sei $p(t) = a_0 t^k + \cdots + a_k$ ein beliebiges Polynom vom Grad k über K. Wir bezeichnen $p(t)$ als ε-symmetrisch, falls $a_i = \varepsilon a_{k-i}$ für ein festes $\varepsilon \in \mathrm{K}$ ist. Offensichtlich ist $\varepsilon^2 = +1$, weshalb ε nur ± 1 sein kann.

Lemma 102 ([Mi69] Lemma 1.2). *Das Minimalpolynom $m(t)$ ist ε-symmetrisch.* □

Im Allgemeinen hat jedes ε-symmetrische Polynom $m(t)$ geraden Grad und es gilt $\varepsilon = 1$. Die einzigen beiden Ausnahmen sind die Polynome $(t-1)$ und $(t+1)$ und ihre Vielfachen.

Für $\varepsilon \neq 1$ gilt $m(1) = 0$ und so muß $m(t)$ ein Vielfaches von $(t-1)$ sein. Falls der Grad ungerade und $\varepsilon = 1$ ist, gilt $m(-1) = 0$. Somit ist $m(t)$ ein Vielfaches von $(t+1)$.

In einigen unveröffentlichen Fällen konnte Levine den folgenden Satz zeigen, jedoch erst Milnor beweist in der Arbeit [Mi69] die Vermutung von Levine:

Satz 103 ([Mi69] Theorem 2.1). *Falls zwei Isometrien t und t' eines quadratischen Raumes V über* K *das gleiche Minimalpolynom haben, dann sind t und t' in der orthogonalen Gruppe zueinander konjugiert.* □

Für beliebige Körper, beispielsweise den Körper der rationalen Zahlen, ist der Satz definitiv falsch.

Milnor studiert zusätzlich die Frage, für welches irreduzible Polynom $m(t)$ es eine Isometrie gibt, so daß $m(t)$ das zugehörige Minimalpolynom ist. Hierauf gibt Milnor die Antwort:

Satz 104 ([Mi69] Remark 1.3). *Sei* V *ein nicht-ausgearteter quadratischer Raum der Dimension n über* K. *Sei $m(t)$ ein normiertes, irreduzibles Polynom in* $\mathrm{K}[t]$ *vom Grad k, also $m(t) = t^k + \cdots + a_k$. Falls $m(t)$ ungleich $(t \pm 1)$ ist, dann gilt:*

(M1) *$m(t)$ ist genau dann Minimalpolynom eines Elementes aus* $\mathrm{O(V)}$, *wenn k gerade ist und n teilt, $m(t)$ symmetrisch und die Diskriminante* $\mathrm{disc(V)} = (m(1)m(-1))^{\frac{n}{k}} \mod (\mathrm{K}^\times)^2$ *ist.*

(M2) *Für jedes solche Polynom $m(t)$ gibt es genau eine Konjugationsklasse in* $\mathrm{O(V)}$ *mit Minimalpolynom $m(t)$.* □

Für einen lokalen Körper der Charakteristik ungleich zwei sind der Rang $n \geq 1$, die Determinante $\det(\mathrm{V}) \in \mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^2$ und das Hasse-Symbol $S(\mathrm{V}) \in \{\pm 1\}$ eine vollständige Menge der Invarianten für den quadratischen Raum V ([OMe63] 13 §63 B). Falls $n = 1$ oder 2 und $\det$ in $-\mathrm{K}^\times$ ist, ist das Hasse-Symbol gleich dem Hilbert-Symbol $(\det \mathrm{V}, -1)$.

Anmerkung. Die Voraussetzung im Satz 104, daß $m(t)$ irreduzibel ist, kann nicht fallengelassen werden. Falls wir annehmen, daß $m(t)$ reduzibel ist, liefert jede nicht-total ausgeartete Eichlertransformation mit dem Minimalpolynom $(t-1)^3$ ein Beispiel dafür, daß die Eigenschaft M 1 nicht mehr gilt.

Darüber hinaus sind alle nichttrivialen total ausgearteten Elemente mit Minimalpolynom $(t-1)^2$ im Allgemeinen ein Gegenbeispiel zu der Eigenschaft M 2.

5.3. Der Fall $C_x = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - Das Hilbertsymbol

Für den Fall einer einfachen Gruppe vom Typ D_{2n} wurde im Abschnitt 4.8.3 angedeutet, daß mit Hilfe des Cupproduktes beschrieben werden kann, ob die zu einer rationalen Konjugationsklasse zugehörige Obstruktion α in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mathrm{C}_x)$ trivial ist (siehe auch [We02] Lemma 4.5). In der kürzlich erschienen Arbeit [Pf03] von Pfister werden diese Rechnungen ebenso durchgeführt. Die Bezeichnungen und Rechnungen sind daher der Einfachheit halber übernommen worden.

Sei K ein vollkommener Körper und die Charakteristik $\mathrm{char}(\mathrm{K})$ von K ungleich zwei. Sei K_s die separable Hülle von K und Γ die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_s \,/\, \mathrm{K})$. Wir fassen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als trivialen Γ-Modul auf.

Es gilt: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir haben somit eine kommutative Cupproduktpaarung

$$\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Bekanntlich ist die Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Für jedes von null verschiedene Element $\lambda \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ erhalten wir eine Untergruppe $\Delta = \mathrm{Kern}(\lambda) \subset \Gamma$ vom Index 2. Zu dieser Untergruppe gehört eine quadratische Körpererweiterung $\mathrm{K}(\sqrt{a'})$ von K. Jeder Quadratklasse $a \in \mathrm{K}^\times / (\mathrm{K}^\times)^2$ läßt sich bijektiv auf eine Untergruppe von Γ vom Index höchstens 2 abbilden. Diese bezeichnen wir mit Δ_a. Für $\sigma \in \Gamma$ definieren wir

$$\lambda_a(\sigma) = \frac{\sigma(\sqrt{a})}{\sqrt{a}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \in \Delta_a \\ -1 & \text{falls } \sigma \notin \Delta_a. \end{cases}$$

Außerdem ist $\lambda_a(\sigma)$ multiplikativ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d.h. es gilt $\lambda_{ab}(\sigma) = \lambda_a(\sigma) \cdot \lambda_b(\sigma)$.

Wir fassen λ_a als Element von $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ auf, und bezeichnen es als (a). Dann ist das Ziel dieses Abschnittes, zu zeigen

Satz 105. *Seien $a, b \in \mathrm{K}^\times(\sqrt{a'})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $b \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{K}(\sqrt{a'})/\,\mathrm{K}}$.

(ii) $(a) \cup (b)$ *trivial in* $\mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Erster Beweisabschnitt: $(i) \Rightarrow (ii)$. Falls $b \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{K}(\sqrt{a'})/\,\mathrm{K}}$ ist, dann ist $(a) \cup (b) \in \mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ trivial.

Falls $a \sim 1$ bzw. $b \sim 1$ ist, dann ist der zugehörige Kozykel (a) bzw. (b) trivial und folglich ist das Cupprodukt $(a) \cup (b)$ trivial. Daher können wir davon ausgehen, daß sowohl $a \not\sim 1$ als auch $b \not\sim 1$ und $b = \alpha\overline{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathrm{K}(\sqrt{a'})$ ist. Für $b \not\sim 1$ folgt, daß gilt: $\alpha \notin \mathrm{K}$, $\alpha \neq \overline{\alpha}$ und α, $\overline{\alpha}$ sind jeweils keine Quadrate.

Wir zeigen, daß zu je zwei Elementen (a) und (b) aus $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ das Cupprodukt $(a) \cup (b) = a_\sigma b_\tau$ durch einen Korand berandet wird, d.h.

$$a_\sigma b_\tau = (\partial c)_{\sigma,\tau} = c_\sigma c_\tau c_{\sigma\tau}^{-1} = 1,$$

wobei

$$c_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha} \text{ bzw. } \sigma(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\overline{\alpha}} \\ -1 & \text{falls } \sigma(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\alpha} \text{ bzw. } \sigma(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\overline{\alpha}} \end{cases}$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen aller Fälle:

(1) $\tau(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\alpha}$. In diesem Fall ist $\tau(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ und somit $b_\tau = 1$.

(A) $\tau(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}$. Hieraus folgt, daß nach Definition $c_\tau = 1$ und $c_\sigma = c_{\sigma,\tau}$ ist. Daher ist $a_\sigma b_\tau = 1 \cdot (\pm 1)^2 = 1$.

(B) $\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\alpha}$. Hieraus folgt, daß nach Definition $c_\tau = -1$ und $\sigma\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sigma(\sqrt{\alpha})$ ist, weswegen $c_\sigma \neq c_{\sigma,\tau}$ gilt. Daher ist $a_\sigma b_\tau = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1$.

(2) $\tau(\sqrt{\alpha}) = \mp\sqrt{\overline{\alpha}}$. In diesem Fall ist $\tau(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ und somit $b_\tau = -1$.

(A) $\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\overline{\alpha}}$. Hieraus folgt, daß nach Definition $c_\tau = 1$ und $\sigma\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ ist. Es ist genau dann $(\partial c)_{\sigma,\tau} = c_\sigma c_{\sigma,\tau}^{-1} \neq 1$, wenn $c_\sigma \neq c_{\sigma\tau}^{-1}$ ist. In den folgenden 16 bzw. 8 weiteren Fällen - die Anzahl ist davon abhängig, ob $\sqrt{b}$ bereits in $K(\sqrt{\alpha})$ liegt - erhalten wir stets $a_\sigma = 1$ und somit ist das Cupprodukt $(a) \cup (b)$ trivial.

(B) $\tau(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\overline{\alpha}}$. Hieraus folgt, daß nach Definition $c_\tau = -1$ und $\sigma\tau(\sqrt{\alpha}) = \sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ ist. Es ist genau dann $(\partial c)_{\sigma,\tau} = -c_\sigma c_{\sigma\tau}^{-1} \neq 1$, wenn $c_\sigma = c_{\sigma\tau}^{-1}$ ist. Hierfür erhalten wir wiederum $a_\sigma = 1$.

Somit haben wir in allen Fällen nachgerechnet, daß $(a) \cup (b)$ trivial ist, falls b in $\mathrm{Norm}_{K(\sqrt{a'})/K}$ liegt.

Zweiter Beweisabschnitt: $(ii) \Rightarrow (i)$. Falls $(a) \cup (b)$ in $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ trivial ist, dann ist b in $\mathrm{Norm}_{K(\sqrt{a'})/K}$.

Hierzu beweisen wir, daß das Element $\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}} \in K_s$ unter allen Automorphismen $\sigma \in \Gamma$ fest bleibt, falls $(a) \cup (b)$ trivial ist. Somit folgt, daß $b \sim \alpha\overline{\alpha}$ in K ist.

Falls $a \sim 1$ ist, ist $K(\sqrt{a'}) = K$ und somit $b \in \mathrm{Norm}^\times_{K(\sqrt{a'})/K} = K^\times$. Wenn andernfalls $b \sim 1$ ist, dann folgt $b = c^2 = \mathrm{Norm}_{K(\sqrt{a'})/K}(c)$ mit $c \in K \subset K(\sqrt{a'})$ für alle $a \in K^\times$. Daher nehmen wir an, daß $a \not\sim 1$ und $b \not\sim 1$ sind.

Nach Voraussetzung existiert ein c mit

$$(\partial c)_{\sigma,\tau} = c_\sigma c_\tau c_{\sigma,\tau}^{-1} = a_\sigma b_\tau.$$

Falls $a \sim b$ ist, gibt es nichts zu zeigen. Sei daher $a \not\sim b$. Dann gibt es ein Element $\sigma_1 \in \Gamma$, das weder $\sqrt{a}$ noch $\sqrt{b}$ festläßt, d.h. $\sigma_1(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ und $\sigma_1(\sqrt{b}) = -\sqrt{b}$. Somit ist $a_{\sigma_1} b_{\sigma_1}$ nach Definition nichttrivial und daher gilt $(\partial c)_{\sigma_1,\sigma_1} = c_{\sigma_1^2} = -1$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Andererseits ist $(\partial c)_{\sigma,1} = c_1 c_\sigma c_\sigma^{-1} = c_1 = 1$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Also ist $\sigma_1^2 \neq 1$ und es gilt $\sigma_1 \notin \Gamma_a, \sigma_1^2 \in \Gamma_a$.

Für $\sigma, \tau \in \Gamma_a$ gilt $a_\sigma b_\tau = -1$, und somit folgt $c_{\sigma,\tau} = c_\sigma c_\tau$. Mit anderen Worten ist die Abbildung

$$c\,|_{\Gamma_a} \colon \Gamma_a \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus, der wegen $c_{\sigma_1^2} = 1$ surjektiv ist.

Sei $\Delta := \mathrm{Kern}\, c\,|_{\Gamma_a}$. Der Index $[\Gamma_a : \Delta]$ ist zwei. Somit ist der zu Δ gehörende Fixkörper der Körper $\mathrm{K}(\sqrt{a}, \sqrt{\alpha})$ mit $\alpha \in \mathrm{K}(\sqrt{a})$ und $\alpha \not\sim 1$ in $\mathrm{K}(\sqrt{a})$. Die Quadratklasse von α ist damit in $\mathrm{K}(\sqrt{a})$ vollständig bestimmt.

Bezeichnen wir mit $\overline{\alpha}$ das Konjugierte von α in $\mathrm{K}(\sqrt{a})$. Für jedes $\sigma_1 \in \Gamma$ gilt bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{\overline{\alpha}}$

$$\sigma_1(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}, \sigma_1(\alpha) = \overline{\alpha} \neq \alpha \text{ und } \sigma_1(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\overline{\alpha}}.$$

Wir erhalten allgemein für jedes $\sigma \in \Gamma$ die Kozykelrelationen

$$c_\sigma c_{\sigma^{-1}} = a_\sigma b_{\sigma^{-1}} = a_\sigma b_\sigma,$$

und es gilt

$$c_\sigma c_{\sigma^{-1}} = 1 \Leftrightarrow \sigma|_{\mathrm{K}(\sqrt{a},\sqrt{b})} = \sigma_1|_{\mathrm{K}(\sqrt{a},\sqrt{b})}.$$

Da $\sigma_1^2 \notin \Delta$ ist, gilt außerdem $\sigma_1^2(\sqrt{\alpha}) = \sigma_1(\sqrt{\overline{\alpha}}) = -\sqrt{\alpha}$. Für $\sigma_1^4 \in \Delta$ erhalten wir damit eine direkte Zerlegung von Γ durch

$$\Gamma = \dot{\bigcup}_{i \bmod 4} \sigma_1^i \Delta \text{ und } \Gamma_a = \Delta \,\dot{\cup}\, \sigma_1^2 \Delta.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $c_{\sigma_1} = 1$ und $c_{\sigma_1^{-1}} = -1$ ist, andernfalls vertauschen wir einfach σ_1 und σ_1^{-1}. Für $\delta \in \Delta$ gilt $c_\delta = b_\delta = -1$. Wegen der Kozykelrelation $c_\sigma c_\tau c_{\sigma,\tau}^{-1} = a_\sigma b_\tau$ folgt, daß $c_\sigma c_{\sigma,\delta}^{-1} = -1$ erfüllt ist. Damit folgt für ein beliebiges Element $\gamma = \sigma_1^i \delta \in \Gamma$

$$c_\gamma = \begin{cases} 1 & i \equiv 1, 2 \bmod 4 \\ -1 & i \equiv 3, 4 \bmod 4. \end{cases}$$

Es bleibt zu zeigen, daß das Element $\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}} \in \mathrm{K}_s$ unter allen Automorphismen $\sigma \in \Gamma$ fest bleibt. Wenn wir Γ in $\sigma_1^i \Delta$ direkt zerlegen, können wir folgende Fälle unterscheiden:

(1) $\sigma = \sigma_1$. Nach Konstruktion gilt

$$\sigma_1(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}, \sigma_1(\sqrt{\overline{\alpha}}) = -\sqrt{\alpha} \text{ und } \sigma_1(\sqrt{b}) = -\sqrt{b},$$

weswegen offensichtlich folgt: $\sigma_1(\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}) = \sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}$.

(2) Für $\sigma = \delta \in \Delta$ unterscheiden wir zwei Fälle:

(A) Es ist $\delta\sigma_1 = \sigma_1\delta' \in \sigma_1\Delta$, somit gilt $c_{\delta,\sigma_1} = c_{\sigma_1} = 1$ und $a_\delta = a_\delta b_{\sigma_1} = c_\delta c_{\sigma_1} c_{\delta,\sigma_1}^{-1} = -1$. Hieraus ergibt sich

$$\delta(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \delta\sigma_1(\sqrt{\alpha}) = \sigma_1\delta'(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = \sqrt{\overline{\alpha}}.$$

Zusätzlich gilt $\delta(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}$ und $\delta(\sqrt{b}) = \sqrt{b}$, weswegen $\delta(\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}) = \sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}$ ist.

(B) Es ist $\delta\sigma_1 = \sigma_1^{-1}\delta' \in \sigma_1^{-1}\Delta$, somit gilt $c_{\delta\sigma_1} = c_{\sigma_1^{-1}} = -1$ und $a_\delta = 1$. Hieraus ergibt sich
$$\delta(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \delta\sigma_1(\sqrt{\alpha}) = \sigma_1^{-1}\delta'(\alpha) = \sigma_1^{-1}(\alpha) = -\sqrt{\overline{\alpha}}.$$
Zusätzlich gilt $\delta(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}$ und $\delta(\sqrt{b}) = -\sqrt{b}$, weswegen $\delta(\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}) = \sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}$ ist.

Der Ausdruck $\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}$ bleibt unter allen Automorphismen von $\mathrm{K}_s\,/\,\mathrm{K}$ fest. Nach der Galoistheorie folgt, daß $b \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{K}(\sqrt{a'})/\,\mathrm{K}}(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} \in \mathrm{K}$ ist und somit $b \in \mathrm{Norm}_{\mathrm{K}(\sqrt{a'})/\,\mathrm{K}}$ liegt. □

Anmerkung. Nach [KMRT98] Satz 30.2 gibt es folgende Beziehung zwischen quadratischen Formen und $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mu_2)$: Sei $\mathrm{char}(\mathrm{K}) \neq 2$, und seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K}^\times$. Dann hängt $(\alpha_1) \cup (\alpha_2)$ in $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}, \mu_2)$ nur von der Isometrieklasse der 2-Pfisterformen ab. Die Abbildung e_2 zwischen den Isometrieklassen, die gegeben ist durch $e_2(<< \alpha_1, \alpha_2 >>) = (\alpha_1) \cup (\alpha_2)$, ist injektiv.

5.4. Explizite Berechnung der Fundamentalgruppe

Sei G eine einfache Gruppe und $x \in \mathrm{G}$ halbeinfach. Wir berechnen explizit die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ und die Untergruppen von $\pi_1(\mathrm{G})$. Hier benutzen wir, daß wir sowohl G_x als auch G_x° berechnen können.

Satz 106 ([Hu95] Theorem 2.2.). *Sei* T *ein maximaler Torus von* G *mit* $x \in \mathrm{T}$. *Dann ist* G_x *reduktiv. Die Gruppe* G_x *wird erzeugt von* T, U_α *mit* $\alpha(x) = 1$ *und den Weylgruppenvertretern* $n_\omega \in \mathrm{N}(\mathrm{T})$, *die mit* x *vertauschen, während* G_x° *von* T *und* U_α *mit* $\alpha(x) = 1$ *erzeugt wird.* □

Nach diesem Resultat läßt sich die Gruppe C_x aus Theorem 22, die zum Quotienten $\mathrm{G}_x\,/\,\mathrm{G}_x^\circ$ isomorph ist, durch die entsprechenden Weylgruppenvertreter n_ω ausdrücken.

Nach [Hi75] Appendix I §1 und [Ha93] §4 erhalten wir folgendes Programm, die Elemente der Gruppe C_x auszurechnen.

(i) Berechne die hyperspeziellen Punkte $\beta_i^\vee$ bzgl. des zugehörigen Wurzelsystems Π.

(ii) Berechne die Abbildung $\rho_i(x) = \beta_i^\vee + w_{\Pi_i} w_{\Pi_0}(x)$ mit $\Pi_i := \Pi \setminus \{\alpha_i\}$.

(iii) Berechne die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ und deren Untergruppen.

(iv) Berechne die Fixpunktmenge des Alkoven $\bigcap A^{\rho_i}$ unter allen Abbildungen ρ_i.

(v) Prüfe, ob $|\bigcap A^{\rho_i}| > 1$.

(vi) Berechne über die Exponentialabbildung die Repräsentanten
$$n_{s_\alpha} = exp(X_\alpha)exp(-X_\alpha)exp(X_\alpha).$$

In Planche I bis X aus [Bou68] - sowie in [BFW99] - sind die wichtigsten Ausgangsdaten enthalten, der Einfachheit halber zitieren wir nur die für uns wichtigen Daten.

Hyperspezielle Ecken: Die hyperspeziellen Ecken im Alkoven sind die Ecken, die wir bei der Berechnung der gesuchten Weylgruppenelementen aus dem Diagramm entfernen. Die Definition des Begriffes hyperspeziellen wird in [Ti79] 1.10 und 1.11 gegeben. Die Gruppen vom Typ E_8, F_4 und G_2 besitzen keine hyperspeziellen Ecken [BFW99].

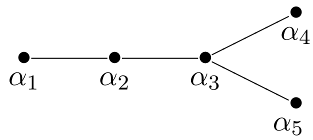
In den Koordinaten bzgl. der Bourbaki-Basis sind die hyperspeziellen Ecken:

Wurzelsystem	Hyperspezielle Ecken	Koordinaten
A_n	$\beta_1^\vee, \ldots, \beta_n^\vee$	$(1-\frac{i}{n+1}, \ldots, 1-\frac{i}{n+1}, -\frac{i}{n+1}, \ldots, -\frac{i}{n+1})^t$
B_n	$\beta_1^\vee$	$(1, 0, \ldots, 0)^t$
C_n	$\beta_n^\vee$	$(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})^t$
D_n	$\beta_1^\vee, \beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee$	$(1, 0, \ldots, 0)^t, (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^t, (\frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2})^t$
E_6	$\beta_1^\vee, \beta_6^\vee$	$(0,0,0,0,0,-\frac{2}{3})^t, (0,0,0,0,0,-\frac{1}{3})^t$
E_7	$\beta_7^\vee$	$(0,0,0,0,0,1,-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$

Weylgruppenelemente w_i: Die Weylgruppenelemente $w_0 := w_{\Pi_0}$ finden wir in der folgenden Tabelle, die aus [Bou68] Planche I bis X zusammengetragen ist. Sie werden zur Berechnung der Elemente $w_i := w_{\Pi_i}$ benötigt. Wir betrachten das zugehörige Dynkin-Diagramm, aus dem man eine hyperspezielle Ecke $\beta_i^\vee$ entfernt hat, dann erhalten wir das gesuchte Weylgruppenelement w_i mit Hilfe des Teildiagramms. Die meisten Fälle benötigen entweder einen Basisshift oder eine Basistransformation, um die Basis des Teildiagramms in die Bourbaki-Basis überzuführen.

Wurzelsystem	w_0
A_1	-1
$A_n (n \geq 2)$	$w_0(\alpha_i) = -\alpha_{n+1-i}$
B_n	-1
C_n	-1
D_{2n}	-1
D_{2n+1}	$w_0(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$, sonst fix
E_6	w_0 vertauscht $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ mit $-\alpha_6, -\alpha_2, -\alpha_5, -\alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_1$
E_7	-1
E_8	-1
F_4	-1
G_2	-1

Beispiel 107. Für die einfache Gruppe G vom Typ D_5 wollen wir exemplarisch die Werte w_i angeben. Die Gruppe G besitzt die hyperspeziellen Ecken $\beta_1^\vee, \beta_4^\vee$ und $\beta_5^\vee$ und das Dynkin-Diagramm



Somit erhalten wir für $w_i := w_{\Pi_i}$ mit $\Pi_i := \Pi \setminus \{\alpha_i\}$ die Elemente

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$w_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbildung $\rho_i(X)$: Die Abbildung $\rho_i(X)$ ist nach [Hi75] Appendix I §1.2 definiert durch $\rho_i(x) = \beta_i^\vee + w_{\Pi_i} w_{\Pi_0} x$, wobei $\beta_i^\vee$ die i-te hyperspezielle Ecke ist. Daher erhalten wir ebenso viele Abbildungen, wie es hyperspezielle Ecken gibt, d.h. für B_n, C_n und E_7 jeweils eine, für E_6 zwei, für D_n drei und für A_n n Stück. Das Resultat wird in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Wurzelsystem	i	Abbildung $\rho_i(X)$
A_n	i	$\beta_i^\vee + \begin{pmatrix} 0 & E_i \\ E_{n+1-i} & 0 \end{pmatrix}(X)$
B_n	1	$\beta_1^\vee + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}(X)$
C_n	n	$\beta_n^\vee - J_n(X)$
D_n	1	$\beta_1^\vee + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}(X)$
	$n-1$	$\beta_{n-1}^\vee + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -J_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}(X)$
	n	$\beta_n^\vee - J_n(X)$

Beispielsweise kann die Operation der Abbildung ρ_i für das Wurzelsystem vom Typ A_{n-1} auf dem Dynkin-Diagramm beschrieben werden als Drehung um i Wurzeln nach rechts.

Lemma 108. *Für D_n gilt: $\rho_1 \circ \rho_n = \rho_{n-1} = \rho_n \circ \rho_1$.*

Anmerkung. Die Abbildung $\rho_i(x)$ identifiziert

$$x - \beta_i^\vee = w_{\Pi_i} w_{\Pi_0}(x)$$

über die Exponentialabbildung mit

$$hyh^{-1} = ky.$$

Alkoven: Zur Berechnung der Fixpunkte und Relationen, die im Alkoven gelten, benötigen wir folgende Daten des Alkoven aus [BFW99]:

Wurzelsystem	Relationen im Alkoven
A_n	$1 + x_{n+1} \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1}$
B_n	$1 - x_2 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$
C_n	$\frac{1}{2} \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$
D_n	$1 - x_2 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq -x_{n-1}$
E_6	$x_5 \geq x_4 \geq x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq -x_2$
	und $-2 + \sum_{i=1}^5 x_i \leq 3x_6 \leq x_1 - \sum_{i=2}^5 x_i$
E_7	$x_6 \geq x_5 \geq x_4 \geq x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq -x_2$
	und $-x_1 + \sum_{i=2}^8 x_i \leq 2x_8 \leq 1$

Fundamentalgruppe: Mit Hilfe der Abbildungen $\rho_i(x)$ erhalten wir als Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$:

Wurzelsystem	$\pi_1(\mathrm{G})$	Explizit in Termen von $\rho_i(x)$
A_n	$\mathbb{Z}/n+1\mathbb{Z}$	$< \rho_1 \mid \rho_1^{n+1} = 1 >$
B_n	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$< \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 >$
C_n	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$< \rho_n \mid \rho_n^2 = 1 >$
D_{2n+1}	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$< \rho_1 \mid \rho_1^4 = 1 >$
D_{2n}	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$< \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 > \times < \rho_n \mid \rho_n^2 = 1 >$

Untergruppen der Fundamentalgruppe: Die zugehörigen Untergruppen der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G})$ sind:

Wurzelsystem	Untergruppen Γ
A_n	$< 1 >, < \rho_1^k \mid (\rho_1^k)^r = 1 >$ mit $k \cdot r = n+1$, $< \rho_1 \mid \rho_1^{n+1} = 1 >$
B_n	$< 1 >, < \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 >$
C_n	$< 1 >, < \rho_n \mid \rho_n^2 = 1 >$
D_{2n+1}	$< 1 >, < \rho_1^2 \mid (\rho_1^2)^2 = 1 >, < \rho_1 \mid \rho_1^4 = 1 >$
D_{2n}	$< 1 >, < \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 >, < \rho_n \mid \rho_n^2 = 1 >, < \rho_{n-1} \mid \rho_{n-1}^2 = 1 >,$
	$< \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 > \times < \rho_n \mid \rho_n^2 = 1 >$

Fixmengen: Durch Lösen von linearen Gleichungssystemen erhalten wir für den Alkoven unter der Operation der vollen Fundamentalgruppe

für $\boldsymbol{A_n}$ die Relation $x_j = x_{j-i} - \frac{i}{n+1}$ für $i < j \leq n+1$, wodurch die ersten i Einträge den Lösungsraum erzeugen.
für $\boldsymbol{B_n}$ die Bedingung $x_1 = \frac{1}{2}$ mit beliebigen $x_2, \dots, x_n$ im Alkoven.
für $\boldsymbol{C_n}$ die freie Wahl der ersten $\frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$ Einträge mit der Relation $x_{n+1-i} = \frac{1}{2} - x_i$; falls n ungerade ist, gilt außerdem $x_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{4}$.
für $\boldsymbol{D_n}$ die Einträge $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = 0$. Die weiteren ersten $\frac{n}{2} - 1$ bzw. $\frac{n-1}{2} - 1$ Einträge können frei gewählt werden, für die restlichen gilt die Relation $x_{n+1-i} = \frac{1}{2} - x_i$; falls n ungerade ist, gilt außerdem $x_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{4}$.

5.4.1. Eine alternative Methode

Wir können die Relationen im Alkoven auch bezüglich einer anderen Basis als der Bourbaki-Basis berechnen. Betrachten wir die Basis $\beta_1^\vee, \dots, \beta_n^\vee$. Dann hat der Alkoven die Gestalt

$$A = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} x_i \beta_i^\vee \mid x_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\} \text{ mit } \beta_0^\vee = 0.$$

Für ρ_i gilt:

$$\begin{array}{rclcl} \rho_i(x) & = & \beta_i^\vee + w_i w_0(x) & = & \sum x_j \beta_i^\vee + w_i w_0(\sum x_j \beta_j^\vee) \\ & = & \sum x_j(\beta_i^\vee + w_i w_0(\beta_j^\vee)) & = & x_0 \beta_i^\vee + \sum x_j \rho_i(\beta_j^\vee). \end{array}$$

Wir erhalten durch Koeffizientenvergleich die Relationen im Alkoven. Die erzielten Resultate lassen sich leicht in die Bourbaki-Basis übersetzen.

Die Berechnung liefert zusätzlich eine obere Schranke für die Dimension von $\mathrm{Fix}(\rho_i)$ und somit für A^{ρ_i}. Es scheint, als ob es hierbei einen Zusammenhang mit der Anzahl der Orbiten von G gibt.

5.5. Über den Aufbau von linearen algebraischen Gruppen

Wir geben abschließend einen kurzen Überblick über den Zusammenhang zwischen den verschiedenen in der Arbeit auftauchenden Gruppen. Die genauen Definitionen und Beschreibungen sind im Kaptiel 2 und in [Ti66] §3 und [Bo91] zu finden.

linear algebraisch
reduktiv
halbeinfach
einfach zusammenhängend
K-einfach
absolut einfach
quasizerfallend
zerfallend

Eine **zusammenhängende lineare algebraische Gruppe A** über einem vollkommenen Körper K ist eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe GL_n. Eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit trivialen unipotenten Radikal $\mathrm{R}_u(\mathrm{G})$ ist eine **zusammenhängende reduktive Gruppe G**. Jede zusammenhängende reduktive Gruppe läßt sich zerlegen in $\mathrm{Z}^\circ \cdot \mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$, wobei der Durchschnitt $\mathrm{Z}^\circ \cap \mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ endlich und $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ die derivierte Gruppe ist. Die derivierte Gruppe $\mathrm{G}_{\mathrm{Der}}$ ist eine halbeinfache Gruppe. Eine zusammenhängende reduktive Gruppe mit trivialen Radikal $\mathrm{R}(\mathrm{G}')$ ist eine **zusammenhängende halbeinfache Gruppe** G'. Eine zusammenhängende Gruppe mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{G}')$ heißt **einfach zusammenhängend**. Jede zusammenhängende halbeinfache Gruppe besitzt eine einfach zusammenhängende Überlagerung G_{sc}. Eine **einfach zusammenhängende halbeinfache Gruppe** G'' ist isomorph zu einem Produkt von **einfach zusammenhängenden K-einfachen Gruppen** H_i. Eine Gruppe H' heißt K-einfach (bzw. absolut einfach), falls sie (bzw. $\mathrm{H}' \times_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}$) keine über K (bzw. $\overline{\mathrm{K}}$) definierted bgeschlossene zusammenhängende normale Untergruppe außer $\{1\}$ und sich selber besitzt. Eine einfach zusammenhängende K-einfach Gruppe H ist isomorph zu einer durch die Weilrestriktion einer **einfach zusammenhängende absolut einfachen Gruppe** H' definierten Gruppe, d.h. sie ist von der Form $\mathrm{Res}_{\mathrm{L}\,/\,\mathrm{K}}(\mathrm{H}')$ für eine über einer endlichen Körpererweiterung L definierte absolut einfache Gruppe H'. Eine einfach zusammenhängende absolut einfache Gruppe ist eine innere Form einer **quasizerfallenden, einfach zusammenhängenden absolut einfachen Gruppe** I. Eine (einfach zusammenhängenden absolut einfache) Gruppe I heißt quasizerfallend, falls sie eine Boreluntergruppe über K enthält. Eine quasizerfallende einfach zusammenhängende absolut einfache Gruppe ist eine äußere Form einer **zerfallenden einfach zusammenhängenden absolut einfachen Gruppen** I'. Eine (einfach zusammenhängende absolut einfache) Gruppe I' heißt zerfallend, falls sie einen zerfallenden maximalen Torus besitzt. Diese werden durch Dynkindiagramme klassifiziert.

Literaturverzeichnis

[BFW99] Joachim Ballmann, Dan Fulea, Rainer Weissauer: *Abstieg anisotroper Konjugationsklassen*, DFG-Forschergruppe Arithmetik, Preprint **17** Heidelberg-Mannheim (1999) *http://www.math.uni-mannheim.de/~math2/FGArithmetikManuskripte/018-BaFuWe.ps*

[Ba81] Hans-Jochen Bartels: *Zur Arithmetik von Konjugationsklassen in algebraischen Gruppen*, J. Algebra **70**, 179-199 (1981) *Zbl. 0471.20032*

[Bo70] Armand Borel, Roger Carter, Charles Curtis, Nagayoshi Iwahori, Tonny Springer, Robert Steinberg: *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, Lecture Notes in Mathematics. **131**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970) *Zbl. 0192.36201*

[Bo91] Armand Borel: *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1991) *Zbl. 0726.20030*

[Bo01] Armand Borel: *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, History of Mathematics **21**, American Mathematical Society (2001) *Zbl. pre01637187*

[BS66] Armand Borel, Tonny Springer: *Rationality properties of linear algebraic groups*, Proc. Sympos. Pure Math. **9**, 26-32 (1966) *Zbl. 0199.06804*

[BS68] Armand Borel, Tonny Springer: *Rationality properties of linear algebraic groups. II*, Tohoku Math. J., II. Ser. **20**, 443-497 (1968) *Zbl. 0211.53302*

[Boro98] Mikhail Borovoi: *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Mem. Am. Math. Soc. **626** (1998) *Zbl. 0918.20037*

[Bou68] Nikolas Bourbaki: *Groupes et algebres de Lie. Chapitres IV, V et VI*, Hermann & Cie, Paris (1968) *Zbl. 0186.33001*

[Ca85] Roger Carter: *Finite groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, New York (1985) *Zbl. 0567.20023*

[Ha93] Thomas Hales: *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, AMS Contemp. Math. **145**, 109-134 (1993) *Zbl. 0828.22015*

[Hi75] Hiroaki Hijikata: *On the structure of semi-simple algebraic groups over valuation fields. I*, Jap. J. Math., new. Ser. **1**, 225-300 (1975) *Zbl. 0386.20021*

[Hu75] James Humphreys: *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics. **21**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1975) *Zbl. 0325.20039*

[Hu95] James Humphreys: *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, Mathematical Surveys and Monographs. **43**, American Mathematical Society (1995) *Zbl. 0834.20048*

[KW01] Reinhardt Kiehl, Rainer Weissauer: *Weil conjectures, perverse sheaves and l-adic Fourier transform*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. **42**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2001) *Zbl. pre01637291*

[KMRT98] Max-Albert Knus, Alexander Merkurjev, Markus Rost, Jean-Pierre Tignol: *The book of involutions*, Colloquium Publications American Mathematical Society **44** (1998) *Zbl 0955.16001*

[Ko82] Robert Kottwitz: *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49**, 785-806 (1982) *Zbl. 0506.20017*

[Ko84] Robert Kottwitz: *Stable trace formula: Cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51**, 611-650 (1984) *Zbl. 0576.22020*

[Ko86] Robert Kottwitz: *Stable trace formula: Elliptic singular terms*, Math. Ann. **275**, 365-399 (1986) *Zbl. 0591.10020*

[Ku55] A.G. Kurosh: *The Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company, New York (1955)

[La56] Serge Lang: *Algebraic groups over finite fields*, Am. J. Math. **78**, 555-563 (1956) *Zbl. 0073.37901*

[La79] Robert Langlands: *Stable conjugacy: Definitions and lemmas*, Can. J. Math. **31**, 700-725 (1979) *Zbl. 0421.12013*

[LS87] Robert Langlands, Diana Shelstad : *On the Definition of Transfer Factors*, Math. Ann. **278**, 219-271 (1987) *Zbl. 0644.22005*

[Lo90] Falko Lorenz: *Einführung in die Algebra Teil II*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1990) *Zbl 0727.12001*

[Mi69] John Milnor: *On Isometries of Inner Product Spaces*, Inventiones Math. **8**, 83-97 (1969) *Zbl. 0177.05204*

[Mü03] Peter Müller: *Algebraic groups over finite fields, a quick proof of Lang's theorem*, Proc. Am. Math. Soc. **131**, No.2, 369-370 (2003) *Zbl. 1013.20045*

[NSW00] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, Kay Wingberg: *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2000) *Zbl. 0948.11001*

[OMe63] O.Timothy O'Meara: *Introduction to quadratic forms*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **117**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1963) *Zbl 0107.03301*

[Pf03] Albrecht Pfister: *Eine Bemerkung zum Normresthomomorphismus*, Archiv der Mathematik, Vol. **81** Nr. 3, 272-284 (2003)

[PR94] Vladimir Platonov, Andrei Rapinchuk: *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics **139** Academic Press, Boston (1994) *Zbl. 0841.20046*

[Pr95] Alexander Premet: *An analogue of the Jacobson-Morozov theorem for Lie algebras of reductive groups of good characteristics*, Trans. Am. Math. Soc. **347**, No.8, 2961-2988 (1995), *Zbl. 0865.17015*

[Se62] Jean-Pierre Serre: *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires*, Centre Belge Rech. Math., Colloque Theor. Groupes algebr., Bruxelles 1962, 53-68 (1962), *Zbl. 0145.17501*

[Se02] Jean-Pierre Serre: *Galois cohomology*, Monographs in Mathematics, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2002) *Zbl. 1004.12003*

[Sp98] Tonny Springer: *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston (1998) *Zbl. 0927.20024*

[St65] Robert Steinberg: *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **25**, 281-312 (1965) *Zbl. 0136.30002*

[St68] Robert Steinberg: *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Am. Math. Soc. **80** (1968) *Zbl. 0164.02902*

[St74] Robert Steinberg: *Conjugacy classes in algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics **366** Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag (1974) *Zbl. 0281.20037*

[Ta69] Takashi Tasaka: *On the second cohomology groups of the fundamental groups of simple algebraic groups over perfect fields*, J. Math. Soc. Japan **21**, 244-258 (1969) *Zbl. 0242.20041*

[Ta71] Takashi Tasaka: *On certain character groups attached to algebraic groups*, J. Math. Soc. Japan **23**, 250-268 (1971)

[Ti66] Jacques Tits: *Classification of algebraic semisimple groups*, Proc. Sympos. Pure Math. **9**, 33-62 (1966) *Zbl. 0238.20052*

[Ti79] Jacques Tits: *Reductive groups over local fields*, Proc. Sympos. Pure Math. **33-1**, 29-69 (1979) *Zbl. 0415.20035*

[We02] Uwe Weselmann: *On double coset decompositions for the group G_2*, Preprint (2002) *http://www.math.uni-mannheim.de/$\sim$weselman/G2.ps*