

Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

**Diplomarbeit**  
**im Studiengang Physik**  
**vorgelegt von**

**Marina Seikel**

aus Aschaffenburg  
2006



**Branenkosmologie als alternative Erklärung  
der dunklen Energie**

Die Diplomarbeit wurde von Marina Seikel ausgeführt an der  
Landessternwarte Heidelberg  
unter der Betreuung von  
Herrn Prof. Max Camenzind



### **Branenkosmologie als alternative Erklärung der dunklen Energie**

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Theorie, der Branenkosmologie, die neben den üblichen vier Raumzeitdimensionen noch eine weitere Dimension annimmt. Demnach wäre die uns bekannte Raumzeit eine Hyperebene (die Bran), die in eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit (den Bulk) eingebettet ist. Diese Bran kann von Materiefeldern nicht verlassen werden. Die fünfte Dimension, die entweder raum- oder zeitartig sein kann, hat allerdings Einfluss auf das Expansionsverhalten des Universums und kann somit als dunkle Energie wirken. Neben den in der Standardkosmologie auftretenden Dichteparametern tauchen in der Branenkosmologie nämlich drei zusätzliche Parameter auf, die dafür sorgen, dass sich bestimmte Branenmodelle innerhalb großer Rotverschiebungsintervalle wie andere Modelle dunkler Energie verhalten, dabei allerdings einige Probleme, die in diesen Theorien auftauchen, vermeiden. Schließlich werden noch einige Methoden vorgestellt, mit denen kosmologische Modelle getestet werden können. Abschließend werden dann mit Hilfe dieser kosmologischen Tests Einschränkungen für die Parameterwerte des Branenmodells vorgenommen und die Verträglichkeit dieser Theorie mit den Beobachtungsdaten überprüft.

### **Braneworld Cosmology as an Alternative Explanation of Dark Energy**

In this work, a theory is considered – the braneworld cosmology – in which, in addition to the well-known four space-time dimensions, a fifth dimension is assumed. According to this theory, we live on a fourdimensional hypersurface, the brane, which is embedded in a five-dimensional manifold, the bulk. Ordinary matter fields are constrained to the brane. But the fifth dimension, which can be spacelike or timelike, influences the expansion history of the universe and thus acts as a form of dark energy. In addition to the density parameters used in standard cosmology, three more parameters are needed to describe braneworld cosmology. Due to these parameters certain braneworld models act like other models of dark energy within a large redshift range. At the same time some of the problems inherent to those models are avoided. Then some methods are introduced which can be used to test different cosmological models. Finally, using those tests the parameter values of the braneworld model are constrained using observational data.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Einheiten und Konventionen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>ART und Kosmologie</b>	<b>5</b>
2.1	Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	5
2.1.1	Metrik und kovariante Ableitung . . . . .	5
2.1.2	Innere und äußere Krümmung . . . . .	7
2.1.3	Projektion auf die Hyperebene . . . . .	8
2.2	Kosmologie . . . . .	9
2.2.1	Einstein- und Friedmanngleichungen . . . . .	9
2.2.2	Distanzen . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Modelle dunkler Energie</b>	<b>15</b>
3.1	Kosmologische Konstante . . . . .	15
3.2	Dynamische Modelle dunkler Energie . . . . .	17
3.2.1	Modelle mit konstanter Zustandsgleichung . . . . .	17
3.2.2	Phantomenergie . . . . .	18
3.2.3	Modelle mit variabler Zustandsgleichung . . . . .	18
3.3	Quintessenz . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Branenkosmologie</b>	<b>23</b>
4.1	Gravitation jenseits der vier Dimensionen . . . . .	23
4.1.1	Kompakte Extradimension . . . . .	23
4.1.2	Randall-Sundrum-Modell . . . . .	24
4.2	Ein Branenmodell . . . . .	25
4.2.1	Einsteingleichungen . . . . .	25
4.2.2	Friedmanngleichung . . . . .	26
4.3	Spezialfälle des Branenmodells . . . . .	29
4.3.1	Kosmische Mimikry . . . . .	30
4.3.2	Phantom- und quintessenzartiges Branenuniversum . . . . .	32
4.3.3	Verschwindende dunkle Energie . . . . .	33
4.4	Zeitartige Extradimension . . . . .	34
4.4.1	Allgemeine Gleichungen . . . . .	34
4.4.2	Flaches Universum ohne dunkle Strahlung . . . . .	35
4.4.3	Geschlossenes Universum mit dunkler Strahlung . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Überprüfung der Modelle</b>	<b>41</b>
5.1	Methoden . . . . .	41
5.1.1	Leuchtkraftdistanz . . . . .	41
5.1.2	Hintergrundstrahlung . . . . .	44
5.1.3	Number Counts . . . . .	46

5.1.4	Statefinder . . . . .	47
5.2	$\Lambda$ CDM oder Branenkosmologie? . . . . .	48
5.2.1	Grobe Abschätzung . . . . .	49
5.2.2	$\chi^2$ -Fit an Supernovadaten . . . . .	50
5.3	Zusammenfassung . . . . .	52
<b>A</b>	<b>Variation der Wirkung</b>	<b>55</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>59</b>
	<b>Danke an . . .</b>	<b>63</b>
	<b>Erklärung</b>	<b>65</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Winkeldurchmesser einer Galaxie mit Durchmesser $D = 30\text{kpc}$ für ein $\Lambda\text{CDM}$ -Universum ( $\Omega_m = 0,3$ , $\Omega_\Lambda = 0,7$ ) und ein $\text{SCDM}$ -Universum. . . . .	14
3.1	Winkeldurchmesser einer Galaxie für ein Modell mit dunkler Energie mit Zustandsgleichung $w(z) = -1 + w_1 z$ . . . . .	19
3.2	Winkeldurchmesser einer Galaxie für ein Modell mit dunkler Energie mit Zustandsgleichung $w(z) = -1 + w_1 \frac{z}{1+z}$ . . . . .	20
3.3	Entwicklung der Energiedichte eines Quintessenzfeldes mit Trackerpotential $V(\phi) = V_0[\exp(M_p/\phi) - 1]$ (Abb. aus [51]). . . . .	21
3.4	Entwicklung der Zustandsgleichung $w_Q(z)$ eines Quintessenzfeldes mit Trackerpotential $V(\phi) = V_0[\exp(M_p/\phi) - 1]$ (Abb. aus [51]). . . . .	22
4.1	Mimikryverhalten eines BRAN1-Modells (Abb. aus [37]). . . . .	31
4.2	Mimikryverhalten eines BRAN2-Modells (Abb. aus [37]). . . . .	31
4.3	Hubbleparameter $H^2(z)/H^2(0)$ eines BRAN1-Modells für verschiedene Werte von $\Omega_\ell$ mit $\Omega_m = 0,3$ und $\Omega_{\Lambda_5} = -2$ . . . . .	36
4.4	Hubbleparameter $H^2(z)/H^2(0)$ eines BRAN1-Modells für verschiedene Werte von $\Omega_{\Lambda_5}$ mit $\Omega_m = 0,3$ und $\Omega_\ell = 10^{16}$ . . . . .	37
4.5	Einschränkungen der Dichteparameter $\Omega_\ell$ und $\Omega_{\Lambda_5}$ eines BRAN1-Modells für $\Omega_m = 0,3$ . . . . .	37
4.6	$H(z)/H_{\Lambda\text{CDM}}(z)$ für ein geschlossenes BRAN1-Universum mit dunkler Strahlung ( $\Omega_m = 0,3$ , $\Omega_k = -0,02$ , $\Omega_{\Lambda_5} = -2$ und $\Omega_\ell = 10^{16}$ ). . . . .	38
5.1	Leuchtkraftdistanz für verschiedene kosmologische Modelle . . . . .	42
5.2	Fit des $\Lambda\text{CDM}$ -Modells an das WMAP Powerspektrum (Abb. aus [47]) . . . . .	45
5.3	Number Counts für verschiedene kosmologische Modelle . . . . .	46
5.4	Zeitentwicklung verschiedener kosmologischer Modell in der Statefinderebene $\{q, r\}$ (Abb. aus [1]) . . . . .	48
5.5	Winkeldurchmesser eines $\Lambda\text{CDM}$ -Modells ( $\Omega_m = 0,3$ , $\Omega_\Lambda = 0,7$ ) und eines BRAN1-Modells für verschiedene Werte von $\Omega_{\Lambda_5}$ mit $\Omega_m = 0,3$ , $\Omega_\ell = 10^{16}$ und $D_0 = 80\text{Mpc}$ . . . . .	49
5.6	Reduziertes Distanzmodul für ein $\Lambda\text{CDM}$ -Modell und ein geschlossenes BRAN1-Universum mit den Parameterwerten aus dem $\chi^2$ -Fit. . . . .	51
5.7	Winkeldurchmesser eines $\Lambda\text{CDM}$ -Modells und eines BRAN1-Modells mit den Parameterwerten aus dem $\chi^2$ -Fit. . . . .	52
5.8	Number Counts für die beiden gefitteten Branenmodelle mit und ohne dunkle Strahlung verglichen mit dem $\Lambda\text{CDM}$ -Modell. . . . .	53
5.9	Erwartete Genauigkeit des SNAP-Satelliten in der $\Omega_m$ - $\Omega_\Lambda$ -Ebene. Ebenfalls eingezeichnet sind die Ergebnisse aus anderen Beobachtungen. (Abb. aus [3]) . . . . .	54



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Kosmologie ist ein Gebiet, in dem – insbesondere in den letzten Jahren – große Fortschritte erzielt werden konnten. Bis vor nicht all zu langer Zeit waren astronomische Beobachtungsdaten mit extrem hohen Fehlern belastet, die nur eine sehr grobe Abschätzung relevanter Parameterwerte zuließen. Neuentwicklungen in der Instrumentierung und der Bau hochmoderner Teleskope ermöglichten jedoch in den letzten Jahren eine enorme Steigerung der Qualität der Beobachtungsdaten. Diese bescherten uns neue Erkenntnisse, beispielsweise über das Expansionsverhalten des Universums. Nun liegt es an den Theoretikerinnen und Theoretikern, ein konsistentes Modell zu entwickeln, das die Ursache dieses Verhaltens erklären kann.

Werfen wir aber zunächst einmal einen Blick darauf, wie sich die Sichtweise der Menschheit auf das Universum im Laufe der Zeit verändert hat. Bis Ende der 1920er Jahre herrschte die Meinung vor, dass das Universum statisch ist, also weder expandiert noch kollabiert. Um die Einsteingleichungen mit einem solchen statischen Universum konsistent zu machen, musste in diese eine Konstante eingefügt werden, die so genannte kosmologische Konstante [17]. Hubble entdeckte dann 1929, dass die Entfernung von Galaxien proportional zu ihrer Rotverschiebung ist [20]. Diese Feststellung impliziert ein expandierendes Universum. Auf Grund dieser Erkenntnisse wurde die kosmologische Konstante zunächst wieder verworfen, da sie nicht mehr zwingend nötig war.

In den 60er Jahren wurde von Penzias und Wilson eine weitere wichtige Entdeckung gemacht: die kosmische Hintergrundstrahlung [28]. Sie wurde zur Zeit der Rekombination, als Photonen und Materie entkoppelten, emittiert. Ihr Spektrum entspricht dem eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von etwa 2,7K und ist erstaunlich isotrop. Diese Isotropie wirft nun folgendes Problem auf: Betrachten wir Regionen am Himmel, die weiter als etwa ein Grad voneinander entfernt liegen, so waren diese zum Zeitpunkt der Photonenemission nicht kausal miteinander verbunden. D.h. diese Regionen konnten untereinander keine Informationen austauschen. Dennoch ist die Temperatur der Hintergrundstrahlung über den gesamten Himmel hinweg beinahe exakt gleich (die relativen Abweichungen betragen nur  $10^{-5}$ ).

Dieses und weitere Probleme können durch die Inflation gelöst werden [18, 19]. In dieser Theorie geht man davon aus, dass die Expansion des Universums kurz nach dem Urknall über eine gewisse Zeit hinweg exponentiell beschleunigt wird. Viele Gebiete, die zu Beginn also nahe genug beieinander lagen um Informationen austauschen zu können, sind nach der Inflation so weit voneinander entfernt, dass es scheint als wären sie nicht kausal miteinander verbunden. Als Grund für die Inflation scheidet die kosmologische Konstante aus. Sie ist zwar prinzipiell dazu

geeignet, eine beschleunigte Expansion herbeizuführen. Man benötigt aber einen Mechanismus, der dafür sorgt, dass die Phase der Inflation nur sehr kurze Zeit andauert. Ein solcher Mechanismus existiert für die kosmologische Konstante nicht. Als Lösung wurde ein skalares Feld vorgeschlagen, das so genannte Inflatonfeld, welches sehr langsam ein Potential herunterrollt. Es wird angenommen, dass das Inflatonfeld schließlich durch einen bisher nicht bekannten Mechanismus in Materie zerfällt.

Eine Auswirkung der Inflation besteht darin, dass das Universum hinterher beinahe exakt flach aussehen muss. Beobachtungen deuteten allerdings darauf hin, dass die Materiedichte des Universums viel zu klein ist, als dass allein durch diese eine solche Flachheit erreicht werden könnte. Neben der Materie müsste das Universum also noch eine andere Energieform beinhalten. Durch diese Überlegungen kam die kosmologische Konstante wieder in Mode. Alternativ wurden Quintessenzfelder vorgeschlagen. Dies sind skalare Felder, die, ähnlich dem Inflatonfeld, langsam ein Potential herunterrollen. Quintessenz hat in etwa die gleichen Auswirkungen wie eine kosmologische Konstante. Ihre Energiedichte ist allerdings nicht konstant, sondern zeitabhängig.

Die anfangs erwähnte enorm verbesserte Qualität der Beobachtungsdaten führte 1998 zu einer erstaunlichen Erkenntnis: Die Expansion des Universums findet zum heutigen Zeitpunkt beschleunigt statt und nicht abgebremst, wie man bis dahin angenommen hatte [32]. Das Universum durchlief zunächst eine Phase, in der die Expansion wie erwartet abgebremst wurde. Ab einem bestimmten Zeitpunkt ging die Ausdehnung allerdings in eine Beschleunigungsphase über. Die Ursache für diese Beschleunigung wird allgemein als dunkle Energie bezeichnet. Sie könnte in Form einer kosmologischen Konstante oder in Form von Quintessenz auftreten. Ein Problem der kosmologischen Konstante ist, dass sie eigentlich nur eine mathematisch eingeführte Größe ohne (bisher bekannte) physikalische Ursache ist. Ein Quintessenzfeld konnte bis zum heutigen Zeitpunkt noch nicht nachgewiesen werden. Diese und andere Probleme führten dazu, dass auch intensiv über alternative Erklärungen der dunklen Energie nachgedacht wurde.

Wenden wir uns nun der geschichtlichen Entwicklung eines völlig anderen Themengebietes zu: der der Extradimensionen. Bereits ab 1914 wurde von verschiedenen Theoretikern eine zusätzliche Raumdimension eingeführt [27, 21, 22]. Demnach würden wir also in einer fünfdimensionalen Raumzeit leben. Ihr Ziel war es, auf diese Weise Gravitation und elektromagnetische Kraft zu vereinigen. Das Konzept der Extradimensionen wurde später von der Stringtheorie aufgegriffen, wobei man hier von deutlich mehr als einer zusätzlichen Dimension ausgeht. Diesen Theorien gemeinsam ist, dass die Extradimensionen nicht unendlich ausgedehnt sind wie die uns bekannten vier Raumzeitdimensionen, sondern vielmehr kompaktifiziert, also quasi aufgerollt sind. Dies wäre der Grund dafür, dass wir die zusätzlichen Dimensionen weder im Alltag noch in bisherigen Experimenten wahrnehmen können. Der Kompaktifizierungsradius dieser Dimensionen läge der Theorie nach in etwa bei der Plancklänge, also bei ungefähr  $10^{-33}$ cm.

Erst Ende der 90er Jahre tauchte ein Modell auf, das einen deutlich größeren Kompaktifizierungsradius zuließ, nämlich einen von der Größenordnung 1mm [4]. Dieses Modell war dazu gedacht, das Hierarchieproblem zu lösen, d.h. die Unterschiede in der Stärke der Gravitation im Vergleich zu den übrigen Wechselwirkungskräften zu erklären. Das gleiche Ziel hatte ein Modell, das kurz darauf von Randall und Sundrum entwickelt wurde [30, 31]. Diese Theorie geht davon aus, dass die übliche vierdimensionale Raumzeit eine Hyperebene, die so genannte Bran, ist, die in eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit, den Bulk, eingebettet ist. Die fünfte Dimension kann dabei unendlich ausgedehnt, also nicht kompakt, sein. Wegen der extrem starken Krümmung dieser Dimension können Materiefelder die Bran nicht verlassen. Einzig die Gravitation wirkt auch in die fünfte Dimension, was erklärt,

warum sie im Vergleich zu den anderen Wechselwirkungskräften so schwach ist. Dadurch wird also das Hierarchieproblem gelöst.

Die beiden geschilderten geschichtlichen Entwicklungen treffen nun Ende der 90er Jahre zusammen. Ausgehend von dem unerwarteten Expansionsverhalten des Universums wurde untersucht, welchen Einfluss eine zusätzliche Dimension auf die kosmologische Entwicklung nimmt. In dem von Randall und Sundrum vorgeschlagenen Branenmodell spielen die Effekte der Extradimension nur im frühen Universum eine Rolle. Um die dunkle Energie zu erklären benötigt man allerdings ein Modell, bei dem die Effekte erst im späten Universum auftreten. Dieses Ziel wird von vielen Branenmodellen verwirklicht, die leicht vom Randall-Sundrum-Modell abweichen. Eine Vielzahl solcher Theorien wurde im Laufe der letzten Jahre entwickelt. Die beschleunigte Expansion des Universums ist dabei eine natürliche Konsequenz der fünften Dimension.

Diese Diplomarbeit ist nun wie folgt aufgebaut: Zunächst wird noch einmal die übliche vierdimensionale allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie rekapituliert. Kapitel 3 beschäftigt sich dann mit verschiedenen Modellen zur Erklärung der dunklen Energie, z.B. der kosmologischen Konstante und der Quintessenz. In Kapitel 4 wird ein recht allgemeines Branenmodell beschrieben, das als Spezialfall auch das Randall-Sundrum-Modell enthält. Anfangs wird der übliche Fall angenommen, dass es sich bei der Extradimension um eine raumartige Dimension handelt. Es werden verschiedene Spezialfälle, insbesondere in Bezug auf ihre Auswirkungen auf das Expansionsverhalten des Universums, durchdiskutiert. Dann betrachten wir den Fall eines Branenuniversums mit zeitartiger Extradimension. In diesem Fall müssen bereits starke Einschränkungen der Parameterwerte vorgenommen werden, damit überhaupt eine physikalische Lösung möglich ist. Dazu werden die entsprechenden Constraintgleichungen hergeleitet. In Kapitel 5 werden schließlich verschiedene kosmologische Tests vorgestellt, mit denen man kosmologische Modelle an Hand von Beobachtungsdaten überprüfen kann. Diese Tests werden dann auf ein Modell mit kosmologischer Konstante und auf das Branenmodell angewendet, mit dem Ziel die entsprechenden Parameterwerte einzuschränken oder ein Modell eventuell sogar ganz auszuschließen.

## 1.2 Einheiten und Konventionen

In dieser Arbeit werden die Konventionen von Wald [50] übernommen. Die metrische Signatur in der vierdimensionalen Raumzeit lautet also  $(-+++)$ . In fünf Dimensionen tritt ein weiteres  $+$ - oder  $-$ -Zeichen hinzu, je nachdem ob die fünfte Dimension raum- oder zeitartig ist.

Wir werden durchgängig geometrische Einheiten verwenden, d.h. sowohl die Gravitationskonstante  $G$ , als auch die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , wird gleich eins gesetzt. In einigen Fällen werden die beiden Konstanten dennoch explizit angegeben, und zwar dann, wenn es der besseren Verständlichkeit dient. Außerdem ist die Gravitationskonstante in der (reduzierten) Planckmasse enthalten, die in der Branenkosmologie eine wichtige Rolle spielt. Es ist nämlich  $M_P^2 = 1/(8\pi G)$ .

Eine häufige Konvention ist es, Indices, die von 0 bis 3 laufen, mit griechischen Buchstaben zu bezeichnen, und solche, die von 1 bis 3 laufen, mit lateinischen. Wald [50] verwendet aber eine abweichende Konvention, bei der lateinische Buchstaben für alle Relationen zwischen Tensoren verwendet werden. Sie bezeichnen also keine Komponenten, sondern sind vielmehr ein Teil der Tensornotation. Die einzelnen Komponenten werden hingegen mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Auch diese Konvention wird in dieser Arbeit übernommen.



# Kapitel 2

## ART und Kosmologie

Grundlage für Berechnungen in der Kosmologie ist die allgemeine Relativitätstheorie, da die Gravitation die wichtigste Kraft bei der Entwicklung des Universums darstellt. Eine gewisse Vertrautheit mit diesen Gebieten wird vorausgesetzt. Dennoch werden in diesem Kapitel die wichtigsten Formeln und Größen der Relativitätstheorie und der Kosmologie noch einmal aufgeführt, insbesondere diejenigen, die wir für spätere Berechnungen benötigen. Auf Beweise wird allerdings verzichtet, da diese in allen einschlägigen Standardbüchern nachzulesen sind.

### 2.1 Allgemeine Relativitätstheorie

#### 2.1.1 Metrik und kovariante Ableitung

Mathematisch gesehen ist die Raumzeit, in der wir leben, eine Mannigfaltigkeit. Das gilt unabhängig davon, ob wir die übliche vierdimensionale Raumzeit betrachten oder auch weitere Dimensionen zulassen. Sie kann also lokal injektiv auf den  $\mathbb{R}^n$  abgebildet werden, wobei  $n$  die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. D.h. man kann sie lokal durch Koordinaten  $x^\mu$  beschreiben. An jeden Punkt  $p$  der Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Tangentenraum  $TM_p$  angeheftet. Die Elemente dieses Tangentenraumes sind die Tangentenvektoren  $v_p$ . Oft verwendet man Vektorfelder  $v$ . Durch sie wird jedem Punkt  $p$  der Mannigfaltigkeit ein Vektor  $v_p$  zugeordnet.

Vektoren können wie folgt in eine Koordinatenbasis entwickelt werden:

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \quad (2.1)$$

$\partial/\partial x^\mu$  wird auch mit  $\partial_\mu$  bezeichnet. Die Transformation von einer Koordinatenbasis  $x$  zu einer neuen Koordinatenbasis  $x'$  erfolgt durch

$$v'^\nu = v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} . \quad (2.2)$$

Die zu den Vektoren dualen Objekte sind die 1-Formen  $w$ . Sie sind die Elemente des Kotangentenraumes  $TM_p^*$  und bilden Vektoren auf die reellen Zahlen ab, also  $w_p: TM_p \rightarrow \mathbb{R}$ . Auch die 1-Formen können durch eine Koordinatenbasis ausgedrückt werden:

$$w = w_\mu dx^\mu . \quad (2.3)$$

Das Transformationsgesetz lautet:

$$w'_\nu = w_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} . \quad (2.4)$$

Die Definitionen des Vektors und der 1-Form lassen sich leicht zur Beschreibung eines  $k$ - $l$ -Tensors verallgemeinern, nämlich:

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_k}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l} , \quad (2.5)$$

mit

$$T'^{\rho_1 \dots \rho_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} = T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \frac{\partial x'^{\rho_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\rho_k}}{\partial x^{\mu_k}} \cdot \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\sigma_l}} . \quad (2.6)$$

In einigen Fällen werden nur die symmetrischen oder die total antisymmetrischen Teile eines Tensors benötigt. Dazu verwendet man folgende abkürzende Notation:

$$T_{(a_1 \dots a_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(n)}} \quad (2.7)$$

$$T_{[a_1 \dots a_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(n)}} , \quad (2.8)$$

wobei die Summe über alle Permutationen  $\pi$  vorgenommen wird und  $\text{sgn}(\pi) = 1$  für eine gerade Anzahl von Transpositionen und  $-1$  für eine ungerade Anzahl.

Wollen wir den Abstand zweier infinitesimal voneinander entfernter Punkte in der Mannigfaltigkeit bestimmen, so benötigen wir eine Metrik. Diese wird durch einen symmetrischen 0-2-Tensor beschrieben, den metrischen Tensor  $g$ . Er bildet zwei Vektoren des selben Tangentenraumes auf die reellen Zahlen ab  $g(v_1, v_2) \mapsto \mathbb{R}$ . Er kann aber auch dazu verwendet werden einen Vektor in eine 1-Form zu verwandeln ( $v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$ ) und umgekehrt. Das Inverse des metrischen Tensors ist der 2-0-Tensor  $g^{ab}$ . Eine Metrik ist charakteristisch für eine Mannigfaltigkeit. Aus ihr kann man beispielsweise die Krümmung der Raumzeit herleiten oder die kovariante Ableitung bestimmen. Die Metrik wird durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.9)$$

angegeben.

Um Berechnungen in der Mannigfaltigkeit durchzuführen benötigt man außerdem häufig einen Ableitungsoperator  $\nabla_a$ .  $\nabla$  wird auch als Zusammenhang bezeichnet. Nun ist dieser Ableitungsoperator allerdings zunächst nicht eindeutig festgelegt. Zwei verschiedene Operatoren  $\nabla_a$  und  $\tilde{\nabla}_a$ , die auf ein Vektorfeld  $t$  wirken, können aber gemäß

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C^b_{ac} t^c \quad (2.10)$$

ineinander umgerechnet werden [50]. Im Spezialfall  $\tilde{\nabla}_a = \partial_a$  lautet die Gleichung:

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ac} t^c , \quad (2.11)$$

wobei die  $\Gamma^b_{ac}$  als Christoffelsymbole bezeichnet werden. Sie sind keine Tensoren, obwohl sie auf den ersten Blick so aussehen. Sie transformieren allerdings nicht gemäß der Vorschrift (2.6). Normalerweise fordert man, dass der Zusammenhang torsionsfrei ist, d.h.

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad (2.12)$$

erfüllt wird, wobei  $f$  eine glatte Funktion von der Mannigfaltigkeit nach  $\mathbb{R}$  ist.

Außerdem ist es in der allgemeinen Relativitätstheorie üblich den metrischen Zusammenhang zu verwenden, d.h. denjenigen Zusammenhang, der die Gleichung

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad (2.13)$$

erfüllt. In diesem Fall lassen sich die Christoffelsymbole aus der Metrik berechnen:

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) . \quad (2.14)$$



Aus dieser Gleichung erkennt man sofort, dass die Christoffelsymbole in den unteren beiden Indices symmetrisch sind, also  $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$ .

Durch den Ableitungsoperator wird nun auch der Paralleltransport definiert. Im  $\mathbb{R}^n$  ist es völlig klar, wann zwei Vektoren, die sich an verschiedenen Punkten befinden, parallel sind. In einer gekrümmten Mannigfaltigkeit ist dies nicht mehr eindeutig. Man muss den einen Vektor entlang einer glatten Kurve an den Punkt des anderen Vektors paralleltransportieren. Dabei ist der Paralleltransport dadurch definiert, dass  $\nabla t$  entlang der Kurve gleich Null ist. Das Ergebnis hängt allerdings davon ab, welche Kurve man wählt. Man kann somit nicht allgemein sagen, dass zwei Vektoren parallel sind, sondern nur, dass sie parallel im Bezug auf eine bestimmte Kurve sind.

Nach Behandlung der Ableitung in einer Mannigfaltigkeit, wenden wir uns nun noch kurz der Integration zu. Der wesentliche Unterschied zur Integration im euklidischen Raum besteht darin, dass innerhalb des Integrals noch ein von der Metrik  $g_{ab}$  abhängiger Term auftritt. In der vierdimensionalen Raumzeit mit Signatur  $(-+++)$  wird die Integration mittels des natürlichen Volumenelements  $\sqrt{-g} d^4x$  vorgenommen, wobei  $g$  die Determinante der Metrik  $g_{ab}$  ist. Führt man eine zusätzliche raumartige Dimension ein, wobei  $g_{ab}$  dann die Metrik der fünfdimensionalen Raumzeit ist, so wird über  $\sqrt{-g} d^5x$  integriert. Im Falle einer zeitartigen Extradimension, d.h. Signatur  $(--+++)$ , lautet das natürliche Volumenelement  $\sqrt{g} d^5x$ .

### 2.1.2 Innere und äußere Krümmung

Aus der Tatsache, dass der Paralleltransport von einem Punkt  $p$  zu einem Punkt  $q$  in der Mannigfaltigkeit im Allgemeinen von der gewählten Kurve abhängt, folgt sofort, dass ein Vektor  $t^a$ , der entlang einer geschlossenen Kurve zu seinem Ausgangspunkt zurücktransportiert wird, nicht unbedingt identisch mit dem untransportierten Vektor ist. Die Größe der Veränderung des Vektors bei einem solchen Transport ist ein Maß für die Krümmung der Mannigfaltigkeit. Diese wird durch den Riemannschen Krümmungstensor  $R_{abc}{}^d$  beschrieben, der durch die Gleichung

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)t^d = -R_{abc}{}^d t^c \quad (2.15)$$

definiert wird. Betrachtet man statt Vektoren 1-Formen, so lautet die entsprechende Gleichung:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)w_c = R_{abc}{}^d w_d. \quad (2.16)$$

Der Riemannstensor besitzt einige Eigenschaften, die für Berechnungen sehr nützlich sind. Manche dieser Eigenschaften folgen direkt aus der Definition, für andere muss man zuerst die Gleichungen (2.11) und (2.14) in die Definition einsetzen, d.h. sie gelten nur für den metrischen Zusammenhang. Der Krümmungstensor erfüllt folgende Gleichungen:

1. Er ist antisymmetrisch in den ersten beiden Indices, also  $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$ .
2.  $R_{[abc]}{}^d = 0$ .
3. Er ist antisymmetrisch in den letzten beiden Indices, d.h.  $R_{abcd} = -R_{abdc}$ .
4. Es gilt die Bianchiidentität  $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$ .
5. Aus den ersten drei Eigenschaften folgt außerdem  $R_{abcd} = R_{cdab}$ .

Weitere wichtige Größen lassen sich durch Kontraktion des Riemannstensors herleiten. Kontrahiert man über den zweiten und den vierten Index, oder äquivalent über den ersten und dritten, so ergibt sich der Riccitenor:

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b. \quad (2.17)$$

Aus der fünften Eigenschaft des Riemantensors folgt sofort, dass der Riccitenor symmetrisch ist, also  $R_{ab} = R_{ba}$  gilt. Durch weitere Kontraktion erhält man den Krümmungs- oder Ricciskalar:

$$R = R^a{}_a . \quad (2.18)$$

Kontraktion der Bianchiidentität ergibt:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^c = \frac{1}{3} (\nabla_a R_{bd} - \nabla_b R_{ad} + \nabla_c R_{abd}{}^c) = 0 . \quad (2.19)$$

Durch weitere Kontraktion über  $a$  und  $d$  erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla_a R_b{}^a - \nabla_b R + \nabla_c R_b{}^c &= 0 \\ \nabla^a G_{ab} = \nabla^a \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.20)$$

$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$  wird als Einsteintensor bezeichnet.

Die bisher erläuterten Größen, also der Riemantensor und seine Kontraktionen, beschreiben die innere Krümmung einer Mannigfaltigkeit. Dies bedeutet, dass man die Mannigfaltigkeit nicht in einen höherdimensionalen Raum einbetten muss, um die Krümmung zu messen. Bestimmt man z.B. die Summe der Winkel eines Dreiecks auf einer 2-Sphäre, so ist das Ergebnis kleiner als  $180^\circ$ , was das Ergebnis in einem flachen zweidimensionalen Raum wäre. Durch ein solches Experiment kann man also ohne höhere Dimensionen die innere Krümmung einer Mannigfaltigkeit bestimmen. Im Gegensatz dazu existiert aber noch die äußere Krümmung, für die eine zusätzliche Dimension benötigt wird. Diese Größe wird für uns später von Bedeutung sein, wenn wir unsere vierdimensionale Raumzeit als Hyperebene betrachten, die in einen fünfdimensionalen Raum eingebettet ist.

Um die äußere Krümmung zu definieren, betrachten wir eine Mannigfaltigkeit mit Metrik  $g_{ab}$ . In diese ist eine Hyperebene mit Metrik  $h_{ab}$  eingebettet. Dann ist auf dieser Hyperebene ein Normalenvektorfeld  $n^a$  definiert. Die Metrik  $h_{ab}$  kann nicht beliebig gewählt werden, sondern wird durch  $g_{ab}$  und die Art der Einbettung, also das Normalenvektorfeld, bestimmt:

$$h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b . \quad (2.21)$$

$h_{ab}$  wird als induzierte Metrik bezeichnet. Damit lässt sich nun die äußere Krümmung wie folgt definieren:

$$K_{ab} = h^c{}_a \nabla_c n_b . \quad (2.22)$$

Die äußere Krümmung ist also durch die Ableitung des Normalenvektorfeldes in einer Richtung tangential zur Hyperebene gegeben. Sie ist ebenso wie der Riccitenor ein symmetrischer 0-2-Tensor.

### 2.1.3 Projektion auf die Hyperebene

An dieser Stelle ist es sinnvoll einige Rechenregeln für die beiden Metriken und das Normalenvektorfeld aufzulisten. Die induzierte Metrik  $h_{ab}$  wird immer auf diejenigen Größen angewendet, die sich ausschließlich auf die Hyperebene beziehen. Für alle anderen Größen verwendet man die Metrik  $g_{ab}$ . Es leuchtet sofort ein, dass  $h_{ab}$  angewendet auf das Normalenvektorfeld  $n^a$  Null ergibt, da  $n^a$  keine Komponente ungleich Null in der Hyperebene besitzt. Dieses Ergebnis folgt aber auch direkt aus Gleichung (2.21):

$$h_{ab} n^a = g_{ab} n^a - n_a n_b n^a = n_b - n_b = 0 . \quad (2.23)$$

Damit gilt dann auch:

$$K_{ab}n^b = K_{ab}n^a = n^a h^c{}_a \nabla_c n_b = 0 . \quad (2.24)$$

Wendet man die Metrik  $h^a{}_b$  auf Vektoren der Mannigfaltigkeit an, so wirkt sie wie ein Projektionsoperator. Steht ein Vektor senkrecht auf der Hyperebene, also  $v^a = v n^a$ , so ist  $h^a{}_b v^b = 0$ . Für einen Vektor parallel zur Hyperebene gilt hingegen  $v^a = h^a{}_b v^b$ . Nun kann jeder Vektor in einen senkrechten und einen parallelen Teil zerlegt werden:

$$v^a = v_\perp n^a + v_\parallel^a . \quad (2.25)$$

Durch die Projektion mittels  $h^a{}_b$  bleibt dann nur der parallele Teil übrig:

$$h^a{}_b v^b = v_\parallel^a . \quad (2.26)$$

Äquivalent kann man auch Tensoren vom Tangentenraum der Mannigfaltigkeit auf den Tangentenraum der Hyperebene projizieren. Ist der Tensor bereits ein Tensor über den Tangentenraum der Hyperebene, so gilt analog zum Fall des parallelen Vektors:

$$T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} = h_{c_1}^{a_1} \dots h_{c_k}^{a_k} h_{b_1}^{d_1} \dots h_{b_l}^{d_l} T_{d_1 \dots d_l}^{c_1 \dots c_k} . \quad (2.27)$$

Als nächstes benötigen wir noch einen Ableitungsoperator  $D_a$  in der Hyperebene. Diesen erhält man einfach dadurch, dass man die Ableitung mit dem Operator  $\nabla_a$  in der Mannigfaltigkeit durchführt und das Ergebnis dann auf die Hyperebene projiziert:

$$D_e T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} = h_{c_1}^{a_1} \dots h_{c_k}^{a_k} h_{b_1}^{d_1} \dots h_{b_l}^{d_l} h_e^f \nabla_f T_{d_1 \dots d_l}^{c_1 \dots c_k} . \quad (2.28)$$

$D_a$  ist die mit der induzierten Metrik  $h_{ab}$  assoziierte Ableitung. Analog zu den Gleichungen (2.13) und (2.20) sind auch auf der Hyperebene der metrische und der Einsteinentensor kovariant erhalten, d.h.  $D^a G_{ab} = 0$  und  $D^a h_{ab} = 0$ .  $G_{ab}$  ist dabei der auf der Hyperebene definierte Einsteinentensor.

Sowohl die Mannigfaltigkeit, als auch die eingebettete Hyperebene, besitzen eine innere Krümmung. Der Riemanntensor der Mannigfaltigkeit wird im Folgenden mit  $\mathcal{R}_{abc}{}^d$ , der der Hyperebene mit  $R_{abc}{}^d$  bezeichnet. Die Hyperebene besitzt zusätzlich noch eine äußere Krümmung  $K_{ab}$ . Diese drei Größen sind allerdings nicht unabhängig voneinander, was man mit Hilfe der Definitionen dieser Größen feststellen kann. Der auf der Hyperebene definierte Riemanntensor erfüllt analog zu (2.16) die Gleichung

$$R_{abc}{}^d w_d = D_a D_b w_c - D_b D_a w_c . \quad (2.29)$$

Unter Verwendung der Definitionen von  $D_a$  und  $K_{ab}$  erhält man daraus folgenden Zusammenhang zwischen den verschiedenen Krümmungen [50]:

$$R_{abc}{}^d = h_a^f h_b^g h_c^k h^d{}_j \mathcal{R}_{f g k}{}^j + K_{ac} K_b{}^d - K_{bc} K_a{}^d . \quad (2.30)$$

Ebenfalls durch Einsetzen der Definitionen, kann gezeigt werden, dass folgende Gleichung erfüllt wird:

$$D_a K_b{}^a - D_b K_a{}^a = \mathcal{R}_{cd} n^d h^c{}_b . \quad (2.31)$$

Die beiden Gleichungen (2.30) und (2.31) werden als Gauss-Codacci-Relationen bezeichnet.

## 2.2 Kosmologie

### 2.2.1 Einstein- und Friedmanngleichungen

Die Einsteingleichung verbindet die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit in Form des Einsteinentensors  $G_{ab}$  mit dem Energie-Impuls-Tensor  $T_{ab}$ . Beide Tensoren sind kovariant erhalten. In der einfachsten Form nimmt man an, dass die beiden Größen proportional sind. Allgemeiner ist die Gleichung jedoch, wenn man als

zusätzlichen Term eine Konstante multipliziert mit dem metrischen Tensor einführt. Dann lautet die Einsteingleichung:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} . \quad (2.32)$$

$\Lambda$  wird als kosmologische Konstante bezeichnet.

Alternativ kann man auch folgende Wirkung angeben:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} dx^4 + \int L(g_{ab}, \phi) \sqrt{-g} dx^4 , \quad (2.33)$$

wobei  $L(g_{ab}, \phi)$  die Lagrangedichte der Materiefelder  $\phi$  in der Raumzeit ist. Durch Variation dieser Wirkung erhält man wieder Gleichung (2.32).

Für einfache Masseverteilungen (z.B. eine punktförmige Masse) kann man die Metrik der Raumzeit berechnen. In der Kosmologie geht man von einem homogenen, isotropen Universum aus (kosmologisches Prinzip). Dies ist sicherlich auf ausreichend großen Skalen verwirklicht. Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik (FRW), die sich aus dieser Annahme herleitet, sieht folgendermaßen aus:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) , \quad (2.34)$$

wobei  $k$  die räumliche Krümmung des Universums angibt.  $k = 0$  für ein flaches,  $k = +1$  für ein geschlossenes und  $k = -1$  für ein offenes Universum.  $a(t)$  bezeichnet den Skalenfaktor des Universums.  $a_0$  ist der Wert zum heutigen Zeitpunkt und wird gleich eins definiert:  $a_0 = a(0) = 1$ .

Mit Hilfe dieser Metrik erhält man aus der Einsteingleichung die Friedmanngleichungen, indem man den Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit, die durch die Dichte  $\rho$  und den Druck  $p$  charakterisiert ist, annimmt. Der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit lautet

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab} , \quad (2.35)$$

wobei  $u^a$  die Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeit ist.

Die resultierenden Friedmanngleichungen lauten:

$$H^2 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.36)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.37)$$

wobei  $H = \dot{a}/a$  der Hubbleparameter ist, durch den die Expansion des Universums beschrieben wird. Kombiniert man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich eine Gleichung für die Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\frac{d}{dt}(a^3 \rho) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0 . \quad (2.38)$$

Gleichung (2.36) wird meist mittels dimensionsloser Dichteparameter angegeben. Diese sind als Werte zum heutigen Zeitpunkt wie folgt definiert, wobei  $H_0 = H(z = 0)$  die Hubblekonstante ist:

$$\Omega_m = \frac{8\pi}{3H_0^2} \rho_{m0} \quad (\text{Nichtrelativistische Materie}) \quad (2.39)$$

$$\Omega_r = \frac{8\pi}{3H_0^2} \rho_{r0} \quad (\text{Strahlung}) \quad (2.40)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (\text{Kosmologische Konstante}) \quad (2.41)$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{H_0^2} \quad (\text{Räumliche Krümmung}) \quad (2.42)$$

In den meisten Fällen werden die dimensionslosen Dichteparameter als Konstanten verwendet, die die Dichte zum heutigen Zeitpunkt beschreiben. Deshalb wird hier auf einen Index  $_0$  verzichtet. Sollte dennoch einmal die Dichte in Abhängigkeit des Skalenfaktors oder der Zeit gemeint sein, so wird dies explizit angegeben, z.B.  $\Omega_m(t)$ .

Der Hubbleparameter wird in der Friedmanngleichung üblicherweise nicht als Funktion des Skalenfaktors, sondern in Abhängigkeit der Rotverschiebung  $z$  angegeben. Wird Licht zu einer Zeit  $t_1$  emittiert, so sehen wir es zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$  aufgrund der Expansion des Universums rotverschoben. Es gilt der Zusammenhang zwischen der Rotverschiebung und dem Skalenfaktor:  $1 + z = 1/a(t_1)$ .

Die Materiedichte ist indirekt proportional zum Volumen. Sie nimmt also mit  $1/a^3(t) = (1 + z)^3$  ab, die Strahlungsdichte jedoch mit  $(1 + z)^4$ , da hier noch die Rotverschiebung berücksichtigt werden muss. Die Friedmanngleichung (2.36) lautet somit:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_m(1 + z)^3 + \Omega_r(1 + z)^4 + \Omega_k(1 + z)^2 + \Omega_\Lambda . \quad (2.43)$$

Die Strahlungsdichte werden wir im Folgenden vernachlässigen, da sie nur im sehr frühen Universum eine Rolle spielt, aber in den hier betrachteten Zeiträumen im Vergleich zu den anderen Dichten verschwindend gering ist. Beobachtungen zeigen, dass  $\Omega_m$  nicht nur aus baryonischer Materie besteht, sondern zusätzlich aus kalter dunkler Materie (Cold Dark Matter), die nicht elektromagnetisch wechselwirkt. Ein flaches Universum ohne kosmologische Konstante, aber mit baryonischer und kalter dunkler Materie, wird als SCDM-Universum (Standard Cold Dark Matter) bezeichnet. Lässt man zusätzlich eine kosmologische Konstante zu, so erhält man ein  $\Lambda$ CDM-Universum.

Gleichung (2.43) ergibt zum heutigen Zeitpunkt, also für  $z = 0$ ,

$$1 = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda . \quad (2.44)$$

Dies impliziert, dass immer nur zwei Parameter frei gewählt werden können. Der dritte wird durch diese Constraintgleichung festgelegt.

Man kann Gleichung (2.43) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i (1 + z)^{3(1+w_i)} , \quad (2.45)$$

wobei über alle Dichteparameter summiert wird.  $w_i = p_i/\rho_i$  ist die Zustandsgleichung, die das Verhältnis des Druckes  $p_i$  zur Dichte  $\rho_i$  beschreibt. Nichtrelativistische Materie hat im Vergleich zur Dichte einen verschwindend geringen Druck, d.h.  $w_m = 0$ . Für Strahlung gilt hingegen  $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$ , also  $w_r = 1/3$ . Die kosmologische Konstante weist eine Besonderheit auf: sie besitzt einen negativen Druck, nämlich  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , also  $w_\Lambda = -1$ . Diese ungewöhnliche Eigenschaft sorgt dafür, dass bei ausreichend großer kosmologischer Konstante eine beschleunigte Expansion des Universums möglich wird.

Um dieses Expansionsverhalten zu studieren, ist es sinnvoll einen weiteren Parameter einzuführen, den Abbremsparameter  $q(z)$ . Seine Definition lautet:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2(a)} = \frac{H'(z)}{H(z)}(1 + z) - 1 , \quad (2.46)$$

wobei  $'$  die Ableitung nach  $z$  bezeichnet. Ein negatives  $q(z)$  ist gleichbedeutend mit einer beschleunigten Expansion, während bei einem positiven  $q(z)$  die Ausdehnung des Universums abgebremst wird. Im Fall eines  $\Lambda$ CDM-Universums gilt demnach für  $z = 0$ :

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda . \quad (2.47)$$

Dies heißt nun, dass  $\Omega_\Lambda > \frac{1}{2}\Omega_m$  sein muss, damit das Universum zum heutigen Zeitpunkt beschleunigt expandiert, worauf die Beobachtungen ja hindeuten. In einem SCDM-Universum ( $\Omega_m = 1$ ) wäre  $q_0 = 0,5$ .

## 2.2.2 Distanzen

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist der Begriff ‘‘Abstand’’ nicht mehr eindeutig definiert. Da die Raumzeit gekrümmt ist und das Universum expandiert, hängt der Abstand zweier Punkte in der Raumzeit von der verwendeten Messmethode ab. Außerdem ist es nicht möglich, für die Messung des Abstandes, die Verbindungslinie der beiden Punkte zu einem festen Zeitpunkt zu betrachten, da die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. Für die Messung benötigt man vielmehr Licht, das im Punkt 1 zur Zeit  $t_1$  emittiert wird. Zu diesem Zeitpunkt besaß das Universum einen Skalenfaktor  $a(t_1)$ , dem eine Rotverschiebung  $z_1$  entspricht. Es wird dann zu einem späteren Zeitpunkt  $t_2$  (mit entsprechendem  $a(t_2)$  und  $z_2$ ) am Punkt 2 absorbiert. Im Folgenden werden verschiedene Abstandsdefinitionen vorgestellt, die alle auf diesem Prinzip beruhen.

### Eigenabstand

Der Eigenabstand  $d_E$  wird durch die Zeit definiert, die das Licht benötigt, um von Punkt 1 zu Punkt 2 zu gelangen, also

$$d_E(z_1, z_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{a(t_1)}^{a(t_2)} \frac{da}{aH(a)} = R_H \int_{z_2}^{z_1} \frac{H_0}{H(z)} \frac{dz}{(1+z)}, \quad (2.48)$$

wobei  $R_H = 1/H_0$  den Hubble radius bezeichnet. Für ein FRW-Universum wird  $H(z)$  durch die Friedmann-Gleichung (2.43) gegeben. Auch für andere kosmologische Modelle existieren entsprechende Formeln. Der Eigenabstand hängt somit von der angenommenen Theorie ab. Dies gilt auch für die anderen Abstände, die weiter unten definiert werden. Sie eignen sich dadurch dazu, verschiedene kosmologische Modelle miteinander zu vergleichen.

### Leuchtkraftdistanz

Eine weitere Methode der Abstandsbestimmung besteht darin, den Strahlungsfluss  $F$  eines Objektes mit bekannter Leuchtkraft  $L$  zu messen. Im euklidischen Raum ist der Abstand  $d_L$ , den man durch die Gleichung

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (2.49)$$

erhält, identisch mit dem Abstand, den man beispielweise durch das Anlegen eines Maßbandes bestimmen würde. In der Kosmologie hängt die Leuchtkraftdistanz hingegen wiederum vom betrachteten kosmologischen Modell und somit vom Expansionsverhalten des Universums ab. Durch die Expansion wird die Photonendichte geringer. Zusätzlich nimmt ihre Energie im Laufe der Zeit durch die Rotverschiebung ab. Dies führt dazu, dass der gemessene Strahlungsfluss in einem expandierenden Universum geringer ist als der im euklidischen Raum.

Beobachten wir zum heutigen Zeitpunkt ( $z = 0$ ) ein Objekt bei Rotverschiebung  $z$ , so lautet die allgemeine Formel zur Berechnung der Leuchtkraftdistanz [9]:

$$d_L(z) = R_H \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S} \left( \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')} \right). \quad (2.50)$$

Dabei ist  $\mathcal{S}(x) = x$  für ein flaches,  $\sin(x)$  für ein geschlossenes und  $\sinh(x)$  für ein offenes Universum. Diese Gleichung kann nur in einigen Spezialfällen analytisch gelöst werden. So beträgt die Leuchtkraftdistanz in einem de-Sitter-Universum, d.h. einem flachen Universum ohne Materie mit  $\Omega_\Lambda = 1$ :

$$d_L = R_H z(1 + z) . \quad (2.51)$$

Auch für ein beliebig gekrümmtes Universum ohne kosmologische Konstante lässt sich die Leuchtkraftdistanz analytisch berechnen. Hierfür ergibt sich die so genannte Mattig-Formel:

$$d_L(z) = \frac{2R_H}{\Omega_m^2} \left[ z\Omega_m + (\Omega_m - 2) \left( \sqrt{z\Omega_m + 1} - 1 \right) \right] . \quad (2.52)$$

Im Spezialfall eines flachen Universums ( $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_k = 0$ ) erhält man aus dieser Formel:

$$d_L(z) = 2R_H \left[ 1 + z - \sqrt{1 + z} \right] . \quad (2.53)$$

Der relevante Fall eines Universums mit Materie und kosmologischer Konstante kann allerdings nur numerisch berechnet werden. Für alle kosmologischen Modelle gilt für  $z \ll 1$  das klassische Hubblegesetz  $d_L(z) = zR_H$ . Wie die Leuchtkraftdistanz verwendet werden kann, um verschiedene kosmologische Modelle zu testen, wird später in Kapitel 5.1.1 vorgestellt.

### Winkelabstand

Im Euklidischen erscheint ein Objekt umso kleiner, je weiter es entfernt ist. Es liegt also nahe, sich diese simple Tatsache auch in der Kosmologie zu Nutze zu machen, um Abstände zu messen. Betrachten wir eine Galaxie mit Durchmesser  $D$ , so ist der Winkel  $\theta$ , unter dem wir die Ränder der Galaxie sehen, von der Entfernung abhängig gemäß:

$$\theta(z) = \frac{D}{d_A(z)} , \quad (2.54)$$

wobei  $d_A(z)$  als Winkelabstand bezeichnet wird.

Der Winkelabstand kann leicht durch die Leuchtkraftdistanz ausgedrückt werden:

$$d_A(z) = \frac{d_L(z)}{(1+z)^2} = \frac{R_H}{(1+z)\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S} \left( \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')} \right) . \quad (2.55)$$

Diese Gleichung wird dann in (2.54) eingesetzt, um den Winkel in Abhängigkeit von  $z$  zu berechnen. Naiverweise würde man annehmen, dass  $\theta$  mit wachsendem  $z$  kontinuierlich abnimmt. Dies gilt allerdings nur für  $z \lesssim 1$ . Bei höheren Rotverschiebungen nimmt der Winkel wieder zu. Dieses Verhalten ist in Abb. 2.1 dargestellt. In einem flachen Universum ohne kosmologische Konstante ist der beobachtete Winkeldurchmesser größer als in einem mit kosmologischer Konstante.

Bisher haben wir Objekte mit festem Durchmesser  $D$ , z.B. Galaxien, angenommen. Betrachten wir stattdessen Objekte mit veränderlichem  $D(z)$ . Sei  $D(z)$  beispielsweise der Abstand zweier Galaxienhaufen voneinander. Durch die Expansion des Universums vergrößert sich dieser Abstand gemäß

$$D(z) = \frac{D_0}{1+z} , \quad (2.56)$$

mit  $D_0 = D(z=0)$ . In der oben genannten Formel für den Winkel tritt demnach ein zusätzlicher Faktor  $(1+z)$  auf:

$$\theta(z) = \frac{D(z)}{d_A(z)} = \frac{D_0}{(1+z)d_A(z)} = \frac{D_0(1+z)}{d_L(z)} . \quad (2.57)$$

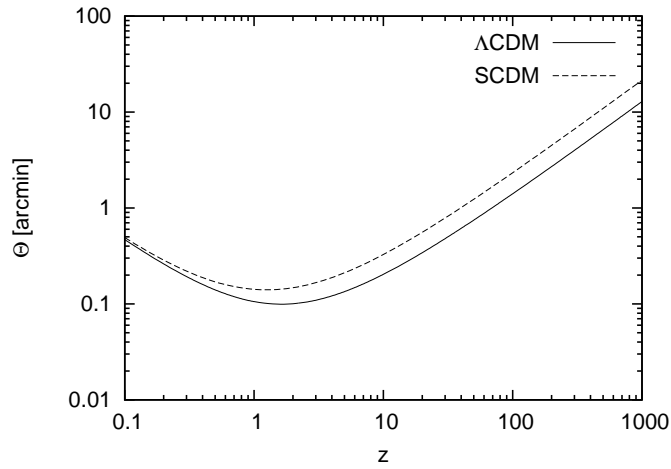


Abbildung 2.1: Winkeldurchmesser einer Galaxie mit Durchmesser  $D = 30\text{kpc}$  für ein  $\Lambda$ CDM-Universum ( $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ) und ein SCDM-Universum.

In diesem Fall weist der Winkel kein Minimum auf, sondern nähert sich mit wachsendem  $z$  einem konstanten Wert. In Kapitel 5.1.2 wird beschrieben, wie der Winkeldurchmesser für kosmologische Tests verwendet werden kann.



# Kapitel 3

## Modelle dunkler Energie

Beobachtungen zeigen, dass die Expansion des Universums beschleunigt stattfindet. Dies kann beispielsweise durch die im vorangegangenen Kapitel eingeführte kosmologische Konstante erreicht werden. In diesem Fall bleibt die Dichte der für die Beschleunigung verantwortlichen Energie, der dunklen Energie, konstant. In diesem Kapitel wird zunächst ein näherer Blick auf die kosmologische Konstante geworfen und gezeigt, dass bei dieser Form der dunklen Energie einige bisher ungelöste Probleme auftauchen. Diese legen nahe, auch alternative Modelle dunkler Energie zu betrachten. Einige dieser Modelle werden in diesem Kapitel vorgestellt.

### 3.1 Kosmologische Konstante

Die erste Formulierung der Einsteingleichung (2.32) enthielt keine kosmologische Konstante  $\Lambda$ , da Einstein zunächst die einfachste Form zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Energie-Impuls-Verteilung und Raumzeitkrümmung wählte. In dieser Form impliziert die Einsteingleichung aber, dass das Universum entweder expandiert oder kollabiert, was dem damaligen Verständnis des Kosmos widersprach. Um ein statisches Universum zu erreichen, führte Einstein 1917 die kosmologische Konstante ein [17]. Als Hubble später herausfand, dass das Universum expandiert [20], verwarf Einstein die Konstante wieder. Von da an ging man lange Zeit von einem Universum aus, das nur aus Materie und Strahlung besteht.

1998 gab es dann durch Beobachtungen von Typ Ia Supernovae starke Hinweise darauf, dass die Expansion des Universums beschleunigt stattfindet [32]. Dieses Ergebnis wurde fünf Jahre später durch die Analyse der kosmischen Hintergrundstrahlung mittels des WMAP-Satelliten bestätigt [47]. Auf Grund dieser Beobachtungen geht man heute von einer kosmologischen Konstante mit etwa  $\Omega_\Lambda = 0,7$  und einer Materiedichte von  $\Omega_m = 0,3$  aus. Das Universum scheint dabei annähernd flach zu sein. Diese Erkenntnisse sagen allerdings noch nichts über die Natur der kosmologischen Konstante aus. Sie ist zunächst nur eine mathematische Konstante, für die es keine physikalische Begründung gibt. Noch sind die Ursachen für diese unbekannte Form der Energie, der so genannten dunklen Energie, völlig unklar.

Teilchenphysiker schlugen vor, dass  $\Omega_\Lambda$  gerade der Dichte der Vakuumenergie entsprechen könnte. Betrachten wir dazu ein skalares Feld  $\phi$  mit potentieller Energie  $V(\phi)$ , das durch folgende Wirkung beschrieben wird [10]:

$$S = \int \left[ \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x . \quad (3.1)$$

Der entsprechende Energie-Impuls-Tensor lautet:

$$T_{ab} = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{1}{2} (g^{cd} \partial_c \phi \partial_d \phi) g_{ab} - V(\phi) g_{ab} . \quad (3.2)$$

Die Energie des skalaren Feldes sei für  $\phi_0$  minimal. An dieser Stelle gilt  $\partial_a\phi = 0$  und somit  $T_{ab} = -V(\phi_0)g_{ab}$ . Die potentielle Energie  $V(\phi_0)$  entspricht dann der Vakuumenergie  $\rho_{\text{vac}}$ . Sieht man dann noch das Vakuum als ideale Flüssigkeit an (2.35), so ergibt sich für den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{ab} = -\rho_{\text{vac}}g_{ab} = p_{\text{vac}}g_{ab} = -\frac{\Lambda}{8\pi}g_{ab} . \quad (3.3)$$

Neben der Energie eines skalaren Feldes treten in der Quantenfeldtheorie noch Vakuumfluktuationen auf. Der Erwartungswert dieser Energie divergiert allerdings sowohl für fermionische, als auch für bosonische Felder. Es ist nämlich [36]

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{VF}} \sim \int_0^\infty \sqrt{k^2 + m^2} k^2 dk , \quad (3.4)$$

d.h. die Energie divergiert mit  $k^4$ . Dieses Problem wird dadurch gelöst, dass man die Moden mit sehr hohen Wellenzahlen verwirft, das Integral also nur bis  $k_{\text{max}}$  auswertet statt bis  $\infty$ . Diesen Cutoff macht man üblicherweise bei der Planckskala. Der resultierende Wert ist dennoch extrem groß.

Die effektive kosmologische Konstante setzt sich aus den beiden genannten Energiedichten zusammen. Deren Werte lassen sich nun abschätzen und mit dem beobachteten Wert  $\rho_\Lambda$  vergleichen [10]. Für die Vakuumenergiedichte aus dem skalaren Feld ergibt sich

$$\rho_{\text{vac}} \sim (200 \text{ GeV})^4 \quad (3.5)$$

und für die Vakuumfluktuationen

$$\rho_{\text{VF}} \sim (10^{18} \text{ GeV})^4 . \quad (3.6)$$

Der beobachtete Wert liegt bei

$$\rho_\Lambda \sim (10^{-12} \text{ GeV})^4 \quad (3.7)$$

und ist somit 120 Größenordnungen kleiner als als der berechnete Wert der Vakuumenergie. Wir haben damit also ein schwerwiegendes Problem, die kosmologische Konstante durch Vakuumenergie zu erklären (“cosmological constant problem”). Die einzige Möglichkeit, dieses Problem zu vermeiden, liegt darin, einen Mechanismus zu finden, der die Vakuumenergie fast vollständig ausgleicht und nur eine vergleichsweise winzige Dichte  $\rho_\Lambda$  übrig lässt.

Damit sind wir schon beim nächsten Problem angelangt, dem Finetuningproblem. Die Dichte der kosmologischen Konstante darf nur in einem sehr engen Bereich liegen, da sonst die Entwicklung der Galaxien und somit auch kein Leben möglich wäre. Im Fall einer negativen kosmologischen Konstante mit  $\rho_\Lambda/8\pi < -10^{-43} \text{ GeV}^4$  wäre das Universum bereits nach weniger als einer Milliarde Jahre wieder kollabiert [36]. Diese Zeit ist viel zu kurz, als dass sich Galaxien, geschweige denn Leben, hätte entwickeln können. Wäre hingegen  $\rho_\Lambda/8\pi > 10^{-43} \text{ GeV}^4$ , so verlief die Expansion des Universums so schnell, dass keine Strukturbildung möglich wäre. Das Finetuningproblem erkennt man auch leicht durch die Überlegung, dass zum heutigen Zeitpunkt die Dichte der Materie und die der kosmologischen Konstante die gleiche Größenordnung besitzen, also  $\Omega_\Lambda/\Omega_m \simeq 1$ . Dieses Verhältnis skaliert aber mit der Rotverschiebung gemäß

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \sim \frac{1}{(1+z)^3} . \quad (3.8)$$

Im frühen Universum war die Dichte der kosmologischen Konstante im Vergleich zur Materiedichte also extrem klein. Sie muss zu diesem Zeitpunkt sehr genau auf

diesen kleinen Wert festgelegt worden sein, damit die beiden Dichten heute in etwa gleich sind.

Die beiden genannten Probleme führen nun dazu, dass die kosmologische Konstante als Erklärung der dunklen Energie nicht mehr ganz so attraktiv erscheint. Aus diesem Grund wurden und werden alternative kosmologische Modelle entwickelt, die möglicherweise eine bessere Erklärung liefern. Aber auch die kosmologische Konstante wird weiterhin untersucht, mit dem Ziel doch noch einen Mechanismus zu finden, der  $\rho_\Lambda$  auf einen derart kleinen Wert festlegt.

## 3.2 Dynamische Modelle dunkler Energie

### 3.2.1 Modelle mit konstanter Zustandsgleichung

Die im vorangegangenen Abschnitt betrachtete kosmologische Konstante hat eine Zustandsgleichung von  $w_\Lambda = -1$ .  $\Lambda$  ist dadurch zeitlich konstant, wie man leicht aus der Friedmangleichung (2.45) abliest. Man kann statt einem  $\Omega_\Lambda$  mit  $w_\Lambda = -1$  allerdings auch allgemeiner eine Dichte für die dunkle Energie  $\Omega_d$  mit beliebigem  $w_d$  in diese Gleichung einsetzen:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_d(1+z)^{3(1+w_d)}. \quad (3.9)$$

Die Dichte der dunklen Energie ändert sich also für  $w_d \neq -1$  mit der Zeit. Dabei nehmen wir zunächst an, dass  $w_d$  konstant ist. In der Einsteingleichung ist die dunkle Energie nun nicht mehr in der kosmologischen Konstante enthalten, sondern ist Teil des Energie-Impuls-Tensors  $T_{ab}$ . Damit das Universum beschleunigt expandieren kann, benötigt die dunkle Energie einen negativen Druck, d.h. die Zustandsgleichung muss negativ sein. Um genauere Einschränkungen vorzunehmen, werfen wir nun einen Blick auf den Abbremsparameter (2.46). Für die angenommene Friedmangleichung lautet er:

$$q(z) = \frac{\Omega_m(1+z)^3 + (1+3w_d)\Omega_d(1+z)^{3(1+w_d)}}{2[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_d(1+z)^{3(1+w_d)}]}. \quad (3.10)$$

Zum heutigen Zeitpunkt ( $z = 0$ ) ergibt sich unter Verwendung der Constraintgleichung  $\Omega_m + \Omega_k + \Omega_d = 1$ :

$$q_0 = \frac{1}{2} [\Omega_m + (1+3w_d)\Omega_d]. \quad (3.11)$$

Im Fall eines flachen Universums ( $\Omega_k = 0$ ,  $\Omega_m + \Omega_d = 1$ ) vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$q_0 = \frac{1}{2} [1 + 3w_d(1 - \Omega_m)]. \quad (3.12)$$

Der Abbremsparameter  $q_0$  muss negativ sein, damit die Expansion des Universums zum heutigen Zeitpunkt beschleunigt stattfindet. Für die Zustandsgleichung muss also in einem flachen Universum

$$w_d < -\frac{1}{3(1 - \Omega_m)} \quad (3.13)$$

gelten. In einem Universum, das nur aus dunkler Energie besteht, reduziert sich diese Gleichung zu  $w_d < -1/3$ . Für Modelle mit  $\Omega_m > 0$  muss die Zustandsgleichung einen noch negativeren Wert annehmen. Solange  $w_d > -1$  ist, nimmt die Dichte der dunklen Energie im Laufe der Zeit ab. Da die Materiedichte aber deutlich schneller abnimmt, gewinnt die dunkle Energie mit wachsendem Skalenfaktor  $a$  im Vergleich

zur Materie an Einfluß. Im frühen, materiedominierten Universum könnte die Expansion der Theorie nach abgebremst werden, um später wieder beschleunigt zu werden, wenn die dunkle Energie dominant wird. Dies ist auch mit den Beobachtungen kompatibel. Durch eine Kombination verschiedener Beobachtungsmethoden wurde die Zustandsgleichung mit einer Sicherheit von 95% auf  $w_d < -0,82$  eingeschränkt [36]. Das beschriebene Modell löst aber immer noch nicht das Finetuningproblem, das auch schon bei der kosmologischen Konstante aufgetaucht ist. Ebenso wenig wird die Ursache der dunklen Energie geklärt.

### 3.2.2 Phantomenergie

Üblicherweise wird angenommen, dass die Zustandsgleichung nach unten durch den Wert  $-1$  begrenzt ist. Gibt man diese Annahme auf, so treten einige Probleme auf, die eine solche Theorie sehr unattraktiv machen. Dennoch wurden diese Modelle mit supernegativer Zustandsgleichung, so genannte Phantomenergiemodelle, untersucht [8, 38]. Auffällig ist zunächst einmal, dass die Dichte der Phantomenergie  $\Omega_p(z)$  zunimmt je weiter sich das Universum ausdehnt. Ein Universum mit kosmologischer Konstante ( $\Omega_\Lambda = 1$ ) expandiert exponentiell. Diese beschleunigte Ausdehnung wird im Fall der Phantomenergie sogar noch übertroffen.

Definieren wir  $t_{\text{eq}}$  als die Zeit, zu der  $\Omega_m(t) = \Omega_p(t)$  gilt. Dann kann man den Skalenfaktor folgendermaßen ausdrücken [8, 38]:

$$a(t) = a(t_{\text{eq}}) \left[ (1 + w_p) \frac{t}{t_{\text{eq}}} - w_p \right]^{2/3(1+w_p)}. \quad (3.14)$$

Für  $t \rightarrow t_{\text{eq}} w_p / (1 + w_p)$  wird der Term in der eckigen Klammer gleich Null. Da  $w < -1$ , geht der Skalenfaktor also gegen unendlich. Innerhalb einer endlichen Zeit wird somit eine Singularität des Skalenfaktors erreicht. Gleichzeitig wird auch die Dichte der Phantomenergie singularär. Für diese gilt [38]:

$$\rho_p(t) \sim \left[ (1 + w_p) \frac{t}{t_{\text{eq}}} - w_p \right]^{-2}. \quad (3.15)$$

Diese Singularitäten werden auch als “Big Rip” bezeichnet, da das Universum in endlicher Zukunft unendlich beschleunigt expandiert und somit quasi “auseinandergerissen” wird.

Im Phantommodell ist der Betrag des Druckes der dunklen Energie  $|p_p|$  größer als die Dichte  $\rho_p$ . Dies hat zur Folge, dass die Schallgeschwindigkeit  $v_p = \sqrt{|dp_p/d\rho_p|}$  im Medium der dunklen Energie höher sein kann als die Lichtgeschwindigkeit [38].

Diese und weitere Probleme [8] sind der Grund dafür, dass viele Kosmologen das Phantommodell ablehnen, obwohl es etwas besser mit den Beobachtungsdaten übereinzustimmen scheint als das  $\Lambda$ CDM-Modell. Das Phantommodell ist allerdings nicht die einzige Möglichkeit, eine supernegative Zustandsgleichung zu erreichen. Wie wir später in Kapitel 4.3.2 sehen werden, verhalten sich bestimmte Branenmodelle innerhalb großer Rotverschiebungsbereiche ebenso wie Phantommodelle, wobei allerdings die genannten Probleme vermieden werden.

### 3.2.3 Modelle mit variabler Zustandsgleichung

Es besteht natürlich die Möglichkeit, dass sich nicht nur die Dichte der dunklen Energie mit der Zeit ändert, sondern auch ihre Zustandsgleichung. Als Ansatz wird dabei ein  $w(z)$  verwendet, das aus einem konstanten Term  $w_0$  und einem zusätzlichen variablen Term besteht.  $w_0$  ist der Wert der Zustandsgleichung zum heutigen

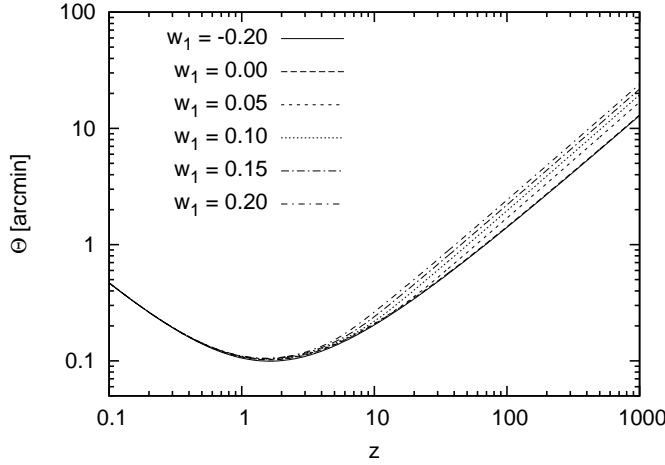


Abbildung 3.1: Winkeldurchmesser einer Galaxie für ein Modell mit dunkler Energie mit Zustandsgleichung  $w(z) = -1 + w_1 z$ .

Zeitpunkt und sollte ungefähr den Wert  $-1$  besitzen. Für den variablen Term gibt es verschiedene Ansätze. Im einfachsten Fall gilt:

$$w(z) = w_0 + w_1 z . \quad (3.16)$$

Der Winkeldurchmesser einer Galaxie mit Durchmesser  $D = 30\text{kpc}$  ist für dieses Modell in Abb. 3.1 dargestellt. Es wurde dabei  $w_0 = -1$  gewählt.  $w_1$  nimmt Werte zwischen  $-0,2$  und  $+0,2$  an.  $w_1 = 0$  entspricht dem  $\Lambda\text{CDM}$ -Modell. Von diesem sind Modelle mit negativem  $w_1$  kaum zu unterscheiden. Für positive  $w_1$  ist der Winkeldurchmesser bei hohen Rotverschiebungen aber deutlich größer als im  $\Lambda\text{CDM}$ -Modell.

Ein weiterer üblicher Ansatz lautet

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} . \quad (3.17)$$

Dieser ist in Abb. 3.2 abgebildet. Im Prinzip verhalten sich beide Ansätze sehr ähnlich. Beim zweiten Ansatz mussten allerdings wesentlich größere Werte für  $w_1$  gewählt werden, um ähnlich große Abweichungen vom  $\Lambda\text{CDM}$ -Modell zu erreichen wie beim ersten Ansatz.

### 3.3 Quintessenz

Die physikalische Ursache für eine variable Zustandsgleichung könnte in einem skalaren Feld  $\phi$  begründet sein, welches im Laufe der Zeit langsam ein Potential  $V(\phi)$  herunterrollt. Ein solches Feld wird als Quintessenz bezeichnet und besitzt die Lagrangedichte [7]

$$L = \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - V(\phi) . \quad (3.18)$$

Der Energie-Impuls-Tensor lautet:

$$T_{ab} = \partial_a \partial_b \phi - g_{ab} L . \quad (3.19)$$

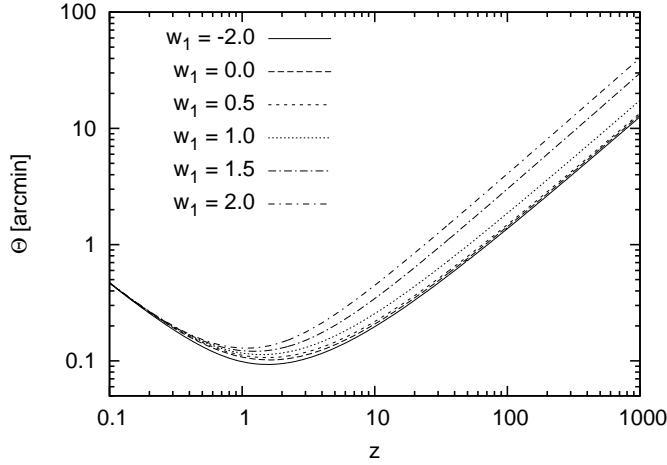


Abbildung 3.2: Winkeldurchmesser einer Galaxie für ein Modell mit dunkler Energie mit Zustandsgleichung  $w(z) = -1 + w_1 \frac{z}{1+z}$ .

Unter Annahme eines homogenen Universums erhält man daraus die Energiedichte und den Druck des Quintessenzfeldes:

$$\rho_Q = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.20)$$

$$p_Q = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.21)$$

Um eine beschleunigte Expansion zu erreichen muss die Ungleichung (3.13) erfüllt sein. Besteht das Universum nur aus Quintessenz, muss also  $p_Q < -\frac{1}{3}\rho_Q$  gelten. Setzt man die Gleichungen für  $\rho_Q$  und  $p_Q$  in diese Bedingung ein, so erhält man

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi) \quad (3.22)$$

als Bedingung an das skalare Feld. Die kinetische Energie des Feldes muss im Vergleich zum Potential also ausreichend klein sein. Es gibt zahlreiche Ansätze für Potentiale, für die diese Bedingung erfüllt wird. Dabei ist es durchaus möglich, dass (3.22) im frühen Universum verletzt wird, d.h. das Quintessenzfeld das Potential schnell herunterrollt. Zu diesem Zeitpunkt wird die Expansion des Universums nämlich abgebremst. Wichtig ist hingegen, dass die Bedingung (3.22) im späten Universum erfüllt wird, damit der Übergang von der abgebremsten zur beschleunigten Expansion vollzogen werden kann.

Eine bestimmte Gruppe der Quintessenzpotentiale ist dazu geeignet das Finetuningproblem zu lösen. Für solche Potentiale entwickelt sich aus einer großen Bandbreite von Anfangswerten derselbe Endzustand. Sie werden als Trackerpotentiale bezeichnet. In Abb. 3.3 ist das typische Verhalten eines Quintessenzfeldes in einem Trackerpotential dargestellt. Die Energiedichte des Feldes folgt immer der Dichte der dominanten Energie, liegt dabei allerdings immer unter deren Wert. Auch die Zustandsgleichung besitzt einen etwas geringeren Wert als die der dominanten Energieform, was schließlich dazu führt, dass die Quintessenz letztendlich selbst zur dominanten Energie wird [51].

Die in Abb. 3.3 durch die durchgezogene Linie dargestellte Dichte ist der Trackerwert  $\bar{\rho}_Q(z)$  des skalaren Feldes. Setzen wir die Anfangsbedingungen bei  $z = z_i$  fest, z.B. am Ende der Inflation. Liegt der Anfangswert der Dichte  $\rho_Q(z_i)$  unterhalb des Trackerwertes  $\bar{\rho}_Q(z_i)$ , so bleibt die Dichte solange konstant, bis der Trackerwert erreicht ist, und folgt diesem dann im weiteren Verlauf. Gilt für den Anfangswert der

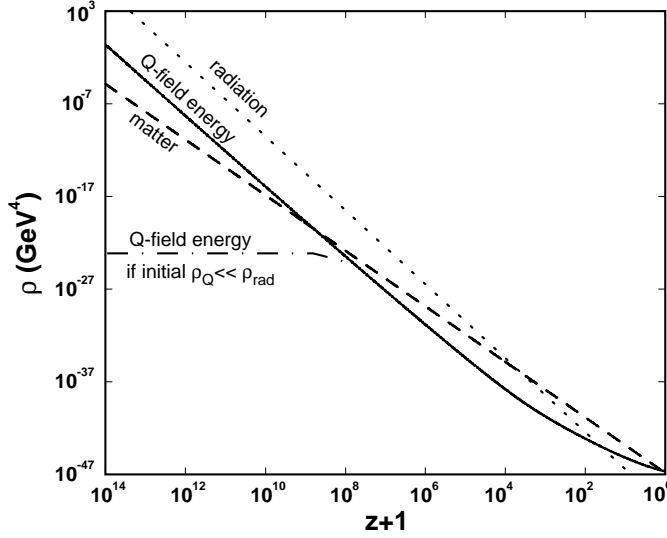


Abbildung 3.3: Entwicklung der Energiedichte eines Quintessenzfeldes mit Trackerpotential  $V(\phi) = V_0[\exp(M_p/\phi) - 1]$  (Abb. aus [51]).

Dichte  $\bar{\rho}_Q(z) < \rho_Q(z_i) < \rho_r(z_i)$ , so rollt das Feld sehr schnell das Potential herunter und erreicht schließlich einen Wert unterhalb des Trackerwertes. Dort bleibt  $\rho_Q(z)$  zunächst wiederum eingefroren, um daraufhin dem Trackerwert zu folgen. Auf diese Weise wird also wieder derselbe Endzustand erreicht. Der einzige Fall, in dem dieser Mechanismus nicht funktioniert, ist  $\rho_Q(z_i) \gg \rho_r(z_i)$ .

Auch die Zustandsgleichung der Quintessenz

$$w_Q = \frac{p_Q}{\rho_Q} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (3.23)$$

wird durch die Zustandsgleichung der dominanten Hintergrundenergie  $w_B$  bestimmt. Im strahlungsdominierten Universum ist  $w_B = 1/3$ , im materiedominierten gilt  $w_B = 0$ .

Betrachten wir als Beispiel das Potential  $V(\phi) = V_0/\phi^\alpha$ . Solange  $\rho_B \gg \rho_Q$ , kann man die Zustandsgleichung durch

$$w_Q \simeq \frac{\alpha w_B - 2}{\alpha + 2} \quad (3.24)$$

annähern [51].  $w_Q$  liegt somit immer unterhalb der Zustandsgleichung der dominanten Energie.  $w_Q$  ist dabei über längere Zeiträume hinweg konstant und ändert sich im Wesentlichen nur, wenn sich die dominante Energie ändert, also beim Übergang vom strahlungs- zum materiedominierten Universum. Spätestens bei diesem Übergang wird  $w_Q$  negativ, da es dann kleiner als  $w_m = 0$  sein muss. Davor ist im Prinzip auch eine positive Zustandsgleichung für die Quintessenz möglich. Die negative Zustandsgleichung sorgt dafür, dass die Dichte der Quintessenz langsamer abnimmt, als die der Materie, und somit die Quintessenz notwendigerweise selbst irgendwann zur dominanten Energie wird. Ab diesem Zeitpunkt nähert sich  $w_Q(z)$  schnell dem Wert  $-1$  an und verhält sich von da an wie eine kosmologische Konstante.

Kombiniert man alle Potentiale  $V(\phi) = V_0/\phi^\alpha$  mit beliebigen natürlichen Werten für  $\alpha$ , so erhält man das exponentielle Potential

$$V(\phi) = V_0[\exp(M_p/\phi) - 1] = V_0 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{M_p^\alpha}{\phi^\alpha}, \quad (3.25)$$

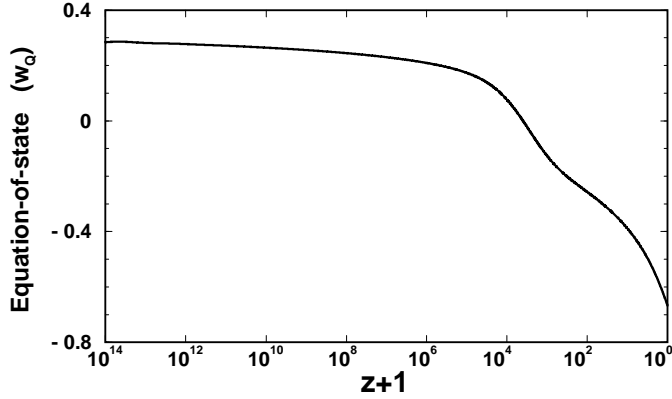


Abbildung 3.4: Entwicklung der Zustandsgleichung  $w_Q(z)$  eines Quintessenzfeldes mit Trackerpotential  $V(\phi) = V_0[\exp(M_p/\phi) - 1]$  (Abb. aus [51]).

das bereits in Abb. 3.3 dargestellt wurde. Für kleine Werte von  $\phi$ , d.h. im frühen Universum, dominieren die Terme mit großem  $\alpha$ . Mit wachsendem  $\phi$  werden die Terme mit kleinem  $\alpha$  immer wichtiger, was dazu führt, dass  $w_Q(z)$  noch schneller abnimmt, als im oben beschriebenen Fall. Dieses Verhalten ist in Abb. 3.4 dargestellt. Etwa bei  $z = 10^4$  erkennt man den Übergang vom strahlungs- zum materiedominierten Universum. An dieser Stelle wird die Zustandsgleichung negativ. Sobald die Quintessenz die dominante Rolle im Universum übernimmt, fällt  $w_Q(z)$  steil nach unten.

Quintessenzfelder können nur die Ursache für dunkle Energie mit  $w_Q > -1$  sein. Energie mit supernegativer Zustandsgleichung kann durch sie hingegen nicht verwirklicht werden. Wie wir gesehen haben, wird durch die Quintessenz ein wichtiges kosmologisches Problem gelöst, nämlich das Finetuningproblem. Allerdings wurden bisher noch keine derartigen skalaren Felder entdeckt. Sollten sie dennoch existieren, dürften sie also nur sehr schwach an die Felder des Standardmodells koppeln.



# Kapitel 4

## Branenkosmologie

Im vorangegangenen Kapitel haben wir gesehen, dass die Ursache der dunklen Energie durch die genannten Theorien noch nicht zufriedenstellend geklärt ist. In diesem Kapitel wird nun ein weiteres Modell vorgestellt, die Branenkosmologie. Obwohl der Grund für die Einführung einer zusätzlichen Dimension anfangs nicht der Erklärungsversuch der dunklen Energie war, stellte sich später heraus, dass sich bestimmte Branenmodelle ähnlich verhalten wie die in Kapitel 3 dargestellten Theorien und dabei gleichzeitig einige deren Probleme vermeiden. In diesem Kapitel wird zunächst kurz die geschichtliche Entwicklung der Branentheorie beschrieben. Danach wird ein recht allgemeines Branenmodell mit verschiedenen Spezialfällen durchdiskutiert.

### 4.1 Gravitation jenseits der vier Dimensionen

#### 4.1.1 Kompakte Extradimension

Die Idee, dass neben den uns bekannten drei Raumdimensionen und der Zeitdimension noch weitere, auf den ersten Blick “unsichtbare” Dimensionen existieren könnten, gibt es schon lange. Bereits 1914 schlug Nordstöm [27], und später in den 20er Jahren Kaluza [21] und Klein [22], eine weitere Raumdimension vor. Diese sollte dazu dienen, Gravitation und elektromagnetische Kraft zu vereinigen. Die Vorstellung von einer oder mehreren Extradimensionen wurde im Laufe der Zeit immer wieder aufgegriffen. Dabei wurde immer davon ausgegangen, dass diese Dimensionen auf einer sehr kleinen Skala kompaktifiziert sind, genauer gesagt sollte der Kompaktifizierungsradius  $R$  von der Größenordnung der Plancklänge  $\ell_P \simeq 10^{-33}$  cm sein.

Bei dem Versuch das Hierarchieproblem zu lösen kam 1998 die Idee auf, dass die Planckmasse vielleicht doch nicht wie bisher angenommen eine fundamentale Größe ist [4]. Das Hierarchieproblem tritt auf, da die Planckskala deutlich größer ist als alle übrigen Skalen. Es ist beispielsweise  $M_P/M_W \sim 10^{17}$ , wobei  $M_W$  die Masse des Vektorbosons der elektroschwachen Kraft ist. Die Gravitation ist also wesentlich schwächer als die übrigen Wechselwirkungen. Während allerdings die elektroschwache Wechselwirkung bereits auf Skalen von  $\sim 1/M_W$  getestet wurde, konnte die Gravitation bisher nur auf Distanzen von etwa einem cm überprüft werden, also 33 Größenordnungen über der Plancklänge. Es wäre somit möglich, dass statt der üblichen Planckmasse eine neue höherdimensionale Planckmasse die fundamentale Größe der Gravitation darstellt. Nimmt man z.B. an, dass der Kompaktifizierungsradius  $R$  zweier Extradimensionen  $\lesssim 1$  mm ist, könnte die neue Planckmasse deutlich kleiner werden als die normale vierdimensionale, nämlich  $\sim 1$  TeV.

Dies erkennt man folgendermaßen: Betrachten wir in einem Modell mit  $n$  Extradimensionen zwei Testteilchen mit Masse  $m_1$  und  $m_2$  in einem Abstand  $r \ll R$

voneinander, so beträgt ihre potentielle Energie [4]

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{P(4+n)}^{2+n}} \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (4.1)$$

wobei  $M_{P(4+n)}$  die  $(4+n)$ -dimensionale Planckmasse ist. Befinden sich die Testteilchen allerdings in einem Abstand  $r \gg R$ , so ist die potentielle Energie

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{P(4+n)}^{2+n}} \frac{1}{R^n r}. \quad (4.2)$$

Es ergibt sich also die bekannte Newtonsche Formel mit der  $1/r$ -Abhängigkeit, wobei die effektive vierdimensionale Planckmasse  $M_P$  durch

$$M_P^2 \sim M_{P(4+n)}^{2+n} R^n \quad (4.3)$$

gegeben ist.

### 4.1.2 Randall-Sundrum-Modell

Ein Jahr später veröffentlichten Randall und Sundrum ein völlig neues bahnbrechendes Modell [30, 31]. Sie gingen nicht mehr von einer kompakten Extradimension aus, sondern ließen eine unendlich große fünfte Dimension zu. Die vierdimensionale Welt, in der wir leben, die Bran, wäre demnach in eine fünfdimensionale Raum-Zeit, den Bulk, eingebettet. Es besteht dabei durchaus die Möglichkeit, dass mehrere solcher Branen existieren, die sich dann auch gegenseitig beeinflussen. Eine extrem starke Krümmung des Bulk verhindert dabei, dass gewöhnliche Materiefelder, also die Teilchen des Standardmodells, die Bran verlassen. Ein Randall-Sundrum-Modell mit zwei Branen, die den Bulk begrenzen, besitzt die Metrik

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{ab} dx^a dx^b + dy^2. \quad (4.4)$$

Dabei sind die  $x^a$  die normalen vierdimensionalen Koordinaten und  $\eta_{ab}$  die Minkowskimetrik.  $y$  bezeichnet die Koordinate der Extradimension und erfüllt  $0 \leq y \leq \pi R$ , wobei  $R$  eine Art "Kompaktifizierungsradius" darstellt. Gleichung (4.4) ist allerdings nur gültig, wenn bestimmte Randbedingungen erfüllt werden. Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit einer verschwindenden kosmologischen Konstante in unserer vierdimensionalen Welt.

Der große Unterschied zu den Modellen mit kompakter Extradimension besteht darin, dass die Metrik des Randall-Sundrum-Modell nicht faktorisierbar ist. Im Gegensatz zu den früheren Modellen, wird die vierdimensionale Planckmasse nun nicht mehr durch die Größe der Extradimension bestimmt, sondern durch die Krümmung des Bulks. Es gilt nämlich:

$$m^2 = \frac{M^3}{k} [1 - e^{-2kR\pi}], \quad (4.5)$$

wobei  $m$  die vierdimensionale und  $M$  die fünfdimensionale Planckmasse bezeichnet. Man sieht sofort, dass hier der Limes  $R \rightarrow \infty$  problemlos möglich ist. Für diesen Fall ergibt sich für die vierdimensionale Planckmasse mit  $m^2 = M^3/k$  ein endlicher Wert. Die Bildung dieses Limes bedeutet anschaulich, dass die zweite Bran von der ersten unendlich weit entfernt wird. Auf diese Art erhält man eine unendlich große, nicht kompakte Extradimension. In den früher behandelten Modellen mit kompakter fünfter Dimension würde die Bildung dieses Limes hingegen zu einem unendlich großen Wert für  $m$  führen, da für diese Modelle  $m^2 = M^3 R \pi$  gilt.

Gewöhnliche Materiefelder können aufgrund der starken Krümmung des Bulks die Bran des Randall-Sundrum-Modells nicht verlassen. Die Gravitation wirkt hingegen auch in die Extradimension. Dies wäre der Theorie nach der Grund dafür, dass sie im Vergleich zu den anderen Wechselwirkungskräften so schwach ist. Dadurch wird also das Hierarchieproblem gelöst. Das Modell liefert allerdings keine alternative Erklärung der dunklen Energie, da die Braneneffekte in dieser Theorie nur im frühen Universum eine Rolle spielen. Um die beschleunigte Expansion des Universums zum heutigen Zeitpunkt erklären zu können, benötigt man aber ein Modell, in dem die Braneneffekte im späten Universum auftreten. Wie wir im Folgenden sehen werden, kann dies durch weiter entwickelte Theorien verwirklicht werden.

## 4.2 Ein Branenmodell

### 4.2.1 Einsteingleichungen

Im Laufe der letzten Jahre wurden viele verschiedene Branenmodelle entwickelt. Es würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem übersteigen, jedes dieser Modelle zu diskutieren. Wir werden uns daher hier zunächst auf ein grundlegendes Modell mit einer einzigen raumartigen Extradimension beschränken und mehrere Spezialfälle dieser Theorie betrachten. Später wird dann eine Änderung vorgenommen (die fünfte Dimension ist dann nicht mehr raumartig, sondern zeitartig), welche große Auswirkungen auf die daraus resultierende Kosmologie hat.

Zu Beginn konzentrieren wir uns aber auf ein Modell, in dem der fünfdimensionale Bulk von einer zeitartigen Bran (d.h. die fünfte Dimension ist raumartig) begrenzt ist. Diese Theorie wird durch folgende Wirkung beschrieben [40, 12]:

$$\begin{aligned}
 S = & M^3 \left[ \int_{Bulk} (\mathcal{R} - 2\Lambda_5) - 2 \int_{Bran} K \right] + \int_{Bulk} L_5(g_{ab}, \Phi) \\
 & + \int_{Bran} (m^2 R - 2\sigma) + \int_{Bran} L_4(h_{ab}, \phi), \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

wobei mit  $M$  und  $m$  die fünf- bzw. vierdimensionale Planckmasse bezeichnet wird.  $\mathcal{R}$  ist der Krümmungsskalar der Bulkmetrik  $g_{ab}$  und  $R$  der Krümmungsskalar der auf der Bran induzierten Metrik  $h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b$ , wobei  $n^a$  das innere Normalenvektorfeld der Bran ist.  $K = K_{ab} h^{ab}$  ist die Spur der äußeren Krümmung  $K_{ab} = h^c{}_a \nabla_c n_b$  der Bran.  $\Lambda_5$  bezeichnet die fünfdimensionale kosmologische Konstante und  $\sigma$  die Branspannung. Da gewöhnliche Materiefelder  $\phi$  auf die Bran beschränkt sind, hängt die Lagrangedichte  $L_4$  nicht von der Bulkmetrik  $g_{ab}$ , sondern von der induzierten Branmetrik  $h_{ab}$  ab. Wir wollen allerdings auch die Möglichkeit zulassen, dass fünfdimensionale Materiefelder  $\Phi$  existieren, die sich im Bulk bewegen können. Diese werden durch die Lagrangedichte  $L_5$  beschrieben. Alle Integrale über den Bulk werden mit dem Volumenelement  $\sqrt{-g} d^5x$  vorgenommen, die über die Bran mit  $\sqrt{-h} d^4x$ , wobei  $g$  und  $h$  die Determinanten von  $g_{ab}$  bzw.  $h_{ab}$  sind.

Die zweite Zeile von (4.6) ist gerade die Wirkung, die die wohlbekannte vierdimensionale  $\Lambda$ CDM-Kosmologie beschreibt (2.33), wobei die Branspannung bis auf einen Faktor der vierdimensionalen kosmologischen Konstante entspricht, nämlich  $\sigma = m^2 \Lambda_4$ . Zusätzlich zu diesen klassischen Termen treten in (4.6) die analogen fünfdimensionalen Größen auf. Ein weiterer Term ist der Krümmung der Bran im Bulk geschuldet. Genaugenommen müssten in der Wirkung unendlich viele Terme höherer Ordnung in  $R$  auftauchen [12]. Hier wollen wir uns aber auf den linearen Fall beschränken, der wegen der Kleinheit des Krümmungsskalars eine ausreichend gute Näherung darstellt.

Der gegebene Ansatz für die Wirkung ist recht allgemein. Er vereinigt nämlich zwei wichtige Modelle. Lässt man in (4.6) den Term mit dem vierdimensionalen Krümmungsskalar weg, so erhält man das Randall-Sundrum-Modell [30, 31]. Dies können wir auch in den folgenden Formeln leicht erreichen, indem wir  $m = 0$  setzen. Das Modell, das von Deffayet, Dvali und Gabadadze (DDG) vorgeschlagen wurde [14, 15, 13, 16], ergibt sich, sobald man sowohl die Branspannung, als auch die fünfdimensionale kosmologische Konstante gleich Null setzt. Das interessante an diesem Modell ist, dass sich die dunkle Energie ohne Verwendung irgendeiner Art von kosmologischer Konstante erklären lässt.

Durch Berechnung der Variation von (4.6) lassen sich die vier- und die fünfdimensionalen Einsteingleichungen herleiten [40] (Rechnung siehe Anhang A). Im Bulk gilt:

$$\boxed{\mathcal{G}_{ab} + \Lambda_5 g_{ab} = \frac{1}{M^3} \mathcal{T}_{ab}} \quad (4.7)$$

Und auf der Bran:

$$\boxed{m^2 G_{ab} + \sigma h_{ab} = T_{ab} + M^3 (K_{ab} - K h_{ab})} \quad (4.8)$$

Hierbei sind  $\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{ab}$  und  $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R h_{ab}$  der fünf- bzw. vierdimensionale Einsteintensor.  $\mathcal{T}_{ab}$  bezeichnet den Energie-Impuls-Tensor im Bulk,  $T_{ab}$  den auf der Bran.

Die Einsteingleichungen auf der Bran (4.8) unterscheiden sich von den klassischen Einsteingleichungen (2.32) dadurch, dass ein zusätzlicher Term auftritt, der die äußere Krümmung enthält.

## 4.2.2 Friedmanngleichung

Uns interessiert in erster Linie das Expansionsverhalten des Universums in dem gegebenen Branenmodell. Wir wollen im Folgenden also die Friedmanngleichung eines fünfdimensionalen Universums aus den Einsteingleichungen (4.7) und (4.8) herleiten. Dazu werden die Gauss-Codacci-Relationen (2.30) und (2.31) benötigt:

$$R_{abc}{}^d = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^d{}_j \mathcal{R}_{fgk}{}^j + K_{ac} K_b{}^d - K_{bc} K_a{}^d \quad (4.9)$$

$$D_a K_b{}^a - D_b K_a{}^a = \mathcal{R}_{cd} n^d h^c{}_b. \quad (4.10)$$

Unter Verwendung von (4.7) und (4.8) folgt aus (4.10):

$$\begin{aligned} D_a (K_b{}^a - K h^a{}_b) &= \mathcal{R}_{cd} n^d h^c{}_b \\ \frac{1}{M^3} D_a (m^2 G_b{}^a + \sigma h_b{}^a - T_b{}^a) &= \left( \mathcal{G}_{cd} + \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{cd} \right) n^d h^c{}_b \\ &= \left( \frac{1}{M^3} \mathcal{T}_{cd} - \Lambda_5 g_{cd} + \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{cd} \right) n^d h^c{}_b \\ D_a T_b{}^a &= -\mathcal{T}_{cd} n^d h^c{}_b, \end{aligned} \quad (4.11)$$

da  $D_a G_b{}^a = 0$ ,  $D_a h_b{}^a = 0$  und  $g_{cd} n^d h^c{}_b = (h_{cd} + n_c n_d) n^d h^c{}_b = 0$ . Wir fordern, dass der vierdimensionale Energie-Impuls-Tensor  $T_b{}^a$  kovariant erhalten ist. Dies ist der Fall, wenn  $\mathcal{T}_{cd} n^d h^c{}_b$  identisch Null ist, also insbesondere für den Fall, dass  $\mathcal{T}_{ab}$  eine Linearkombination von  $g_{ab}$  und  $h_{ab}$  ist. Im Folgenden nehmen wir  $\mathcal{T}_{ab} = 0$  an.

Nun kontrahieren wir die erste Gauss-Codacci-Relation (4.9) auf der Bran durch

Multiplikation der Gleichung mit  $h^{ac}h_d^b$ , wobei wir folgende Gleichungen benötigen:

$$\begin{aligned}
h^{kf}h^g{}_j\mathcal{R}_{fgk}{}^j &= g^{kf}g^g{}_j\mathcal{R}_{fgk}{}^j - n^kn^fn^g{}_j\mathcal{R}_{fgk}{}^j - n^gn_jg^{kf}\mathcal{R}_{fgk}{}^j \\
&\quad + n^kn^fn^g{}_j\mathcal{R}_{fgk}{}^j \\
&= \mathcal{R} - n^kn^fn^g{}_j\mathcal{R}_{fgk}{}^j - n^gn_j\mathcal{R}_g{}^j \\
&= \mathcal{R} - 2n^kn^fn^g{}_j\left(\mathcal{G}_{kf} + \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{kf}\right) \\
&= 2\Lambda_5
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
K_{ab}K^{ab} - K^2 &= K_{ab}K^{ab} - 2K^2 + 4K^2 - \frac{1}{3}[K - 4K]^2 \\
&= (K_{ab} - Kh_{ab})(K^{ab} - Kh^{ab}) \\
&\quad - \frac{1}{3}[h^{ab}(K_{ab} - Kh_{ab})]^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen ergibt die Kontraktion von (4.9) somit:

$$\begin{aligned}
R - 2\Lambda_5 + K_{ab}K^{ab} - K^2 &= 0 \\
R - 2\Lambda_5 - \frac{1}{3}[h^{ab}(K_{ab} - Kh_{ab})]^2 \\
&\quad + (K_{ab} - Kh_{ab})(K^{ab} - Kh^{ab}) = 0 \\
M^6(R - 2\Lambda_5) - \frac{1}{3}(m^2R - 4\sigma + T)^2 \\
&\quad + (m^2G_{ab} + \sigma h_{ab} - T_{ab})(m^2G^{ab} + \sigma h^{ab} - T^{ab}) = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Bis zum jetzigen Zeitpunkt wurden noch keine weiteren Anforderungen an das kosmologische Modell gestellt. Alle Gleichungen ergaben sich unter Anwendung von allgemeinen differentialgeometrischen Formeln direkt aus der angenommenen Wirkung. Diese Allgemeinheit müssen wir allerdings für die weitere Rechnung aufgeben. Wie in der Kosmologie üblich wird nun ein homogenes und isotropes Universum angenommen. Integriert man dann Gleichung (4.14) unter Berücksichtigung der Energie-Impuls-Erhaltung nach der Zeit, so ergibt sich [13, 41]:

$$m^4\left(H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\rho + \sigma}{3m^2}\right)^2 = M^6\left(H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda_5}{6} - \frac{C}{a^4}\right), \tag{4.15}$$

wobei  $H = \dot{a}/a$  der Hubbleparameter ist und  $k = 0, \pm 1$  der räumlichen Krümmung entspricht.  $\rho$  bezeichnet die Materiedichte auf der Bran.  $C$  ist eine Integrationskonstante, die Bulk-Gravitonen-Einfluss auf die Bran überträgt. Sie wird als dunkle Strahlung bezeichnet, da sie ebenso wie gewöhnliche Strahlung mit  $a^{-4}$  skaliert. Führt man noch den Längenparameter  $\ell = 2m^2/M^3$  ein, so ergeben sich die beiden äquivalenten Formeln:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\rho + \sigma}{3m^2} + \frac{2}{\ell^2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \ell^2\left(\frac{\rho + \sigma}{3m^2} - \frac{\Lambda_5}{6} - \frac{C}{a^4}\right)}\right] \tag{4.16}$$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{C}{a^4} + \frac{1}{\ell^2}\left[\sqrt{1 + \ell^2\left(\frac{\rho + \sigma}{3m^2} - \frac{\Lambda_5}{6} - \frac{C}{a^4}\right)} \pm 1\right]^2 \tag{4.17}$$

Das  $\pm$ -Zeichen entspricht den zwei verschiedenen Arten, in denen die Bran in den Bulk eingebettet werden kann. Branenmodelle mit dem unteren Vorzeichen werden als BRAN1 bezeichnet, diejenigen mit dem oberen Vorzeichen als BRAN2.

Neben den üblichen kosmologischen Dichteparametern

$$\Omega_m = \frac{\rho_0}{3m^2H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{H_0^2}, \quad \Omega_\sigma = \frac{\sigma}{3m^2H_0^2} \tag{4.18}$$

sind noch folgende weitere Parameter sinnvoll:

$$\Omega_\ell = \frac{1}{\ell^2 H_0^2} = \frac{R_H^2}{\ell^2}, \quad \Omega_{\Lambda_5} = -\frac{\Lambda_5}{6H_0^2}, \quad \Omega_C = -\frac{C}{a_0^4 H_0^2}, \quad (4.19)$$

wobei  $R_H = 1/H_0$  den Hubbleradius bezeichnet. Damit ergibt sich aus (4.16) die Friedmanngleichung für ein Branenuniversum:

$$\boxed{\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\sigma + 2\Omega_\ell \pm 2\sqrt{\Omega_\ell} \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\sigma + \Omega_\ell + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C(1+z)^4}} \quad (4.20)$$

Die erste Zeile von (4.20) entspricht genau der Friedmanngleichung in einem vierdimensionalen Universum (2.43). Setzt man also  $\Omega_\ell$  gleich Null, d.h.  $\ell \gg R_H$ , so erhält man die Standardkosmologie. Dies leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass  $\Omega_\ell = 0$  gleichbedeutend ist mit einer verschwindenden fünfdimensionalen Planckmasse  $M$ . Auf kleinen Skalen  $r \ll \ell$  gilt somit die klassische ART, also insbesondere im frühen Universum. Für  $r \gg \ell$  spielen hingegen Braneneffekte eine Rolle. Dies führt dann zur beschleunigten Expansion des Universums.

Das Randall-Sundrum-Modell erhält man hingegen, wenn man die vierdimensionale Planckmasse gleich Null setzt, was ein unendlich großes  $\Omega_\ell$  bedeutet. Deshalb verwendet man hierfür sinnvoller Weise Gleichung (4.15), die für  $m = 0$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{(\rho + \sigma)^2}{9M^6} + \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{C}{a^4} \quad (4.21)$$

ergibt.

In der vierdimensionalen Kosmologie musste einfach die Summe der Dichteparameter gleich eins sein (2.44). Der fünfdimensionale Fall sieht etwas komplizierter aus. Man erhält die Bedingungen, die die Parameter erfüllen müssen, indem man in der aus (4.17) hergeleiteten Friedmanngleichung  $z = 0$  setzt, also:

$$1 - \Omega_k + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C = \left[ \sqrt{\Omega_\ell + \Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C} \pm \sqrt{\Omega_\ell} \right]^2 \quad (4.22)$$

Zunächst einmal muss immer  $\Omega_\ell + \Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C \geq 0$  gelten. Außerdem ist per Definition  $\Omega_\ell > 0$ . Es gibt nun zwei zu unterscheidende Fälle.

Fall 1:  $\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C \geq 0$

Für diesen Fall gilt

$$\sqrt{1 - \Omega_k + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C} \mp \sqrt{\Omega_\ell} = \sqrt{\Omega_\ell + \Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C} \quad (4.23)$$

Quadriert man diese Gleichung, folgt:

$$\boxed{\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_k \pm 2\sqrt{\Omega_\ell} \sqrt{1 - \Omega_k + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C} = 1} \quad (4.24)$$

Außerdem muss für das obere Vorzeichen (also BRAN2)  $1 - \Omega_k + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C \geq \Omega_\ell$  gelten, da sonst die linke Seite in Gleichung (4.23) negativ wird.

Fall 2:  $-\Omega_\ell \leq \Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C < 0$

$$\sqrt{1 - \Omega_k + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C} - \sqrt{\Omega_\ell} = \pm \sqrt{\Omega_\ell + \Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C} \quad (4.25)$$

Wiederum durch Quadrieren dieser Gleichung erhält man:

$$\boxed{\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_k + 2\sqrt{\Omega_\ell} \sqrt{1 - \Omega_k + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C} = 1} \quad (4.26)$$

In beiden Fällen muss  $1 + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C \geq \Omega_k$  gelten. In der Branenkosmologie genügt es also nicht, eine Gleichung zu haben, mit deren Hilfe man bei fünf gegebenen

Parametern den sechsten einfach ausrechnet. Vielmehr muss immer darauf geachtet werden, dass die Parameter auch die angegebenen Ungleichungen erfüllen.

Bei der Bestimmung der zu erfüllenden Bedingungen haben wir nur den heutigen Zeitpunkt, also  $z = 0$ , betrachtet. Was geschieht aber, wenn wir in der Zeit zurückgehen? Betrachtet man Gleichung (4.16), so erkennt man, dass für  $C > 0$  der Term unter Wurzel im frühen Universum negativ werden kann. Dies kann nur verhindert werden, wenn das Universum zu diesem Zeitpunkt bereits strahlungsdominiert ist, d.h. die Strahlungsdichte müsste größer sein als die Dichte der dunklen Strahlung. Welche Auswirkungen hat es aber, wenn der Term unter der Wurzel in (4.16) wirklich irgendwann in der Vergangenheit den Wert Null erreicht, also für den Fall  $\rho_r/3m^2 < C$ ? Betrachten wir dazu die aus (4.16) gewonnenen Ableitungen des Skalenfaktors  $a$ :

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{\rho + \sigma}{3m^2}a^2 + \frac{2a^2}{\ell^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \ell^2 \left( \frac{\rho + \sigma}{3m^2} - \frac{\Lambda_5}{6} - \frac{C}{a^4} \right)} \right] \quad (4.27)$$

$$2\ddot{a}\dot{a} = \frac{\rho + \sigma}{3m^2}2a\dot{a} + \frac{\dot{\rho}}{3m^2}a^2 + \frac{4a\dot{a}}{\ell^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \ell^2 \left( \frac{\rho + \sigma}{3m^2} - \frac{\Lambda_5}{6} - \frac{C}{a^4} \right)} \right] \\ \pm a^2 \underbrace{\left[ 1 + \ell^2 \left( \frac{\rho + \sigma}{3m^2} - \frac{\Lambda_5}{6} - \frac{C}{a^4} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}}_{*} \left( \frac{\dot{\rho}}{3m^2} + 4\frac{C}{a^5}\dot{a} \right) \quad (4.28)$$

$\rho$  enthält dabei sowohl die Materiedichte  $\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}$ , als auch die Strahlungsdichte  $\rho_r = \rho_{r0}a^{-4}$ . Geht man in der Zeit zurück, wird die Wurzel in (4.27) – unter der Bedingung  $\rho_r/3m^2 < C$  – bei einem bestimmten  $a$  gleich Null. Die gleiche Wurzel taucht in (4.28) im Nenner auf. (\*) wird also singular. Dies ist eine völlig neue Art von Singularität, die so nicht in der klassischen Kosmologie auftaucht [42]. Während der Hubbleparameter endlich bleibt, werden die zweite und alle höheren Ableitungen des Skalenfaktors  $a$  und somit auch die davon abhängigen Größen, wie der Abbremsparameter  $q$ , singular. In einem BRAN1-Universum wird die Expansion zu diesem Zeitpunkt also unendlich stark beschleunigt, während sie in einem BRAN2-Universum unendlich stark abgebremst wird. Das BRAN1-Modell beschreibt somit eine neue Art von Urknall.

Die eben beschriebene Singularität dürfte in der Realität allerdings nicht auftreten, da die klassische Big-Bang-Kosmologie mindestens bis zur Nukleosynthese wenigstens in groben Zügen richtig sein muss. D.h. das frühe Universum muss strahlungsdominiert sein. Die oben genannte Bedingung für eine Singularität kann somit nicht erfüllt werden.

### 4.3 Spezialfälle des Branenmodells

Die durch (4.20) beschriebene Branenkosmologie wird durch sechs Dichteparameter charakterisiert, wobei fünf relativ frei gewählt werden können und der sechste durch (4.24) bzw. (4.26) berechnet wird. Es ist üblich  $\Omega_\sigma$  aus den anderen Parametern herzuleiten. Je nach Wahl der Parameter kann das gegebene Modell recht unterschiedliches Verhalten aufweisen. Im Folgenden werden einige dieser Spezialfälle behandelt. Bei allen Fällen werden sowohl die dunkle Strahlung  $\Omega_C$ , als auch die räumliche Krümmung gleich Null gesetzt, womit nur die Parameter  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\sigma$ ,  $\Omega_{\Lambda_5}$  und  $\Omega_\ell$  übrig bleiben.

### 4.3.1 Kosmische Mimikry

Für eine große Bandbreite von Parameterwerten und über weite Rotverschiebungsbereiche hinweg imitiert das Branenmodell ein  $\Lambda$ CDM-Universum, allerdings mit verschiedener effektiver Materiedichte zu unterschiedlichen Epochen. Dieses Verhalten wird als kosmische Mimikry (“cosmic mimicry” [37]) bezeichnet. Das frühe Universum ist in beiden Modellen materiedominiert, d.h. ein Branenmodell mit Materiedichte  $\Omega_m$  verhält sich bei hohen Rotverschiebungen genauso wie ein  $\Lambda$ CDM-Universum mit gleichem  $\Omega_m$ . Um das Verhalten bei niedrigen Rotverschiebungen zu studieren, betrachten wir nun die Friedmanngleichung (4.20) mit  $\Omega_C = 0 = \Omega_k$ , wobei  $\Omega_\sigma$  durch (4.24) ersetzt wurde.

$$\begin{aligned} \frac{H^2(z)}{H_0^2} &= \Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m + 2\Omega_\ell \mp 2\sqrt{\Omega_\ell}\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} \\ &\quad \pm 2\sqrt{\Omega_\ell}\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 - \Omega_m + \left(\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} \mp \sqrt{\Omega_\ell}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Kosmische Mimikry findet statt bei Rotverschiebungen und Parameterwerten, die

$$\Omega_m(1+z)^3 \ll \left(\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} \mp \sqrt{\Omega_\ell}\right)^2 \quad (4.30)$$

erfüllen, also bei niedrigen Rotverschiebungen. Gleichung (4.29) beträgt dann in erster Näherung

$$\begin{aligned} \frac{H^2(z)}{H_0^2} &\simeq \Omega_m \frac{\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}}}{\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} \mp \sqrt{\Omega_\ell}} (1+z)^3 + 1 - \Omega_m \frac{\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}}}{\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} \mp \sqrt{\Omega_\ell}} \\ &= \Omega_m^{\Lambda\text{CDM}} (1+z)^3 + 1 - \Omega_m^{\Lambda\text{CDM}}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

wobei

$$\Omega_m^{\Lambda\text{CDM}} = \frac{\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}}}{\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} \mp \sqrt{\Omega_\ell}} \Omega_m. \quad (4.32)$$

Gleichung (4.31) ist gerade die Friedmanngleichung für ein  $\Lambda$ CDM-Universum mit Materiedichte  $\Omega_m^{\Lambda\text{CDM}}$ . Dieses wird also bei kleinen  $z$  von einem Branenmodell imitiert. Betrachtet man (4.32), so erkennt man sofort, dass für BRAN2, also das Minuszeichen im Nenner, Probleme auftreten können. Ist  $\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} = \sqrt{\Omega_\ell}$ , so wird der Nenner gleich Null. Es ergäbe sich somit eine unendlich große effektive Materiedichte  $\Omega_m$ . Allerdings ist in diesem Fall die Näherung (4.31) unzulässig, da (4.30) nicht erfüllt wird. Desweiteren wird für BRAN2 der Fall  $\sqrt{1+\Omega_{\Lambda_5}} < \sqrt{\Omega_\ell}$  ausgeschlossen, da sonst die effektive Materiedichte negativ wäre.

Bei niedrigen Rotverschiebungen, ahmt BRAN1 ein  $\Lambda$ CDM-Universum mit kleinerer Materiedichte ( $\Omega_m^{\Lambda\text{CDM}} < \Omega_m$ ) nach, BRAN2 jedoch eines mit höherer Materiedichte ( $\Omega_m^{\Lambda\text{CDM}} > \Omega_m$ ). So könnte beispielsweise ein BRAN2-Modell mit  $\Omega_m = 0,05$  (dies entspricht dem Anteil der baryonischen Materie im Universum) in der Standardkosmologie wie ein Universum mit  $\Omega_m = 0,3$  aussehen<sup>1</sup>. Wie bereits erwähnt, verhalten sich beide Branenmodelle im frühen Universum wie  $\Lambda$ CDM mit derselben Materiedichte.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 stellen dieses Mimikryverhalten eines BRAN1-Modells mit  $\Omega_m = 1$  bzw. eines BRAN2-Modells mit  $\Omega_m = 0,04$  dar. Das angegebene  $z_m$  ist dabei diejenige Rotverschiebung, die sich ergibt, wenn man in (4.30) statt  $\ll$  ein Gleichheitszeichen setzt. Mimikry findet dann also statt, wenn  $z \ll z_m$  erfüllt ist.

<sup>1</sup>Dies ist nur als ein interessantes Beispiel gedacht. Natürlich lässt sich die dunkle Materie nicht einfach so durch dieses Modell ersetzen.



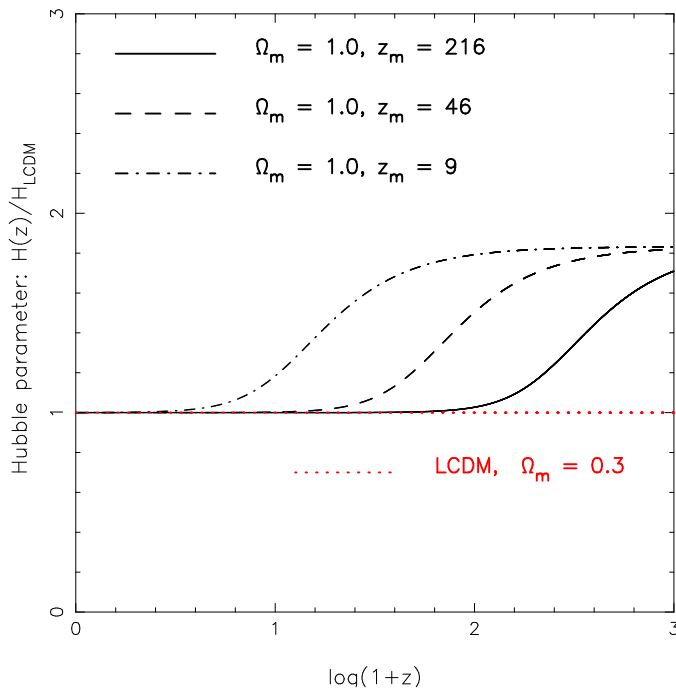


Abbildung 4.1: Mimikryverhalten eines BRAN1-Modells (Abb. aus [37]).

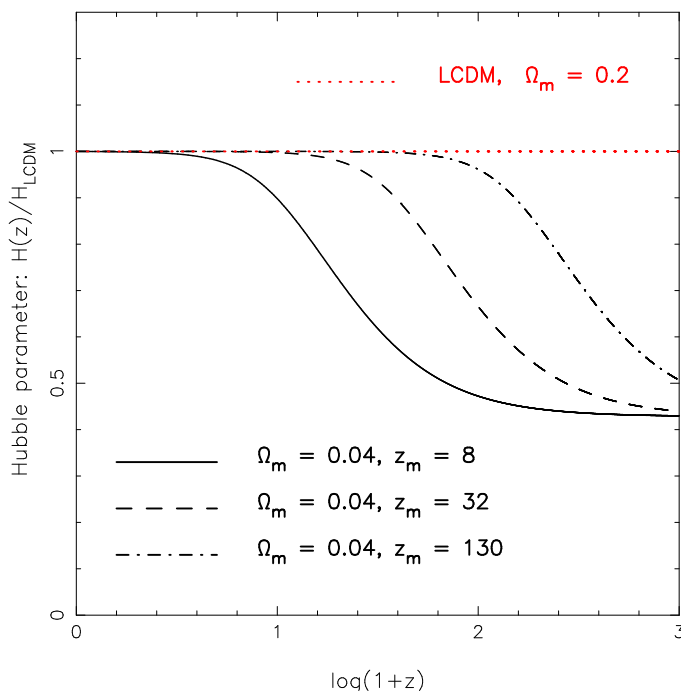


Abbildung 4.2: Mimikryverhalten eines BRAN2-Modells (Abb. aus [37]).

Im mittleren Rotverschiebungsbereich weicht die fünfdimensionale Theorie allerdings von der normalen Kosmologie ab. Dort findet quasi der Übergang zwischen  $\Omega_m$  und  $\Omega_m^{\Lambda\text{CDM}}$  statt. Dies hat weitreichende Konsequenzen für Beobachtungen. Im niedrigen Rotverschiebungsbereich hat die fünfte Dimension keinerlei Auswirkungen, also z.B. bei Beobachtungen von Typ Ia Supernovae ( $z < 2$ ). Anders jedoch bei der kosmischen Hintergrundstrahlung ( $z \simeq 1000$ ): das abweichende Verhalten der Branenkosmologie bei mittleren  $z$  hätte großen Einfluss auf das Messergebnis. Durch beide Beobachtungsmethoden lässt sich  $\Omega_m$  ermitteln. Bei der einen würde man das tatsächliche  $\Omega_m$  messen, bei der anderen aber  $\Omega_m^{\Lambda\text{CDM}}$ . Eine solche Diskrepanz zwischen den mit den beiden Methoden erzielten Ergebnissen wurde bisher nicht festgestellt. Die Festlegung von  $\Omega_m$  durch die Hintergrundstrahlung ist jedoch nicht sehr genau. Diese Methode dient besser dazu,  $\Omega_k$  zu bestimmen.

Durch das unterschiedliche Expansionsverhalten der verschiedenen Modelle werden natürlich auch noch andere Größen beeinflusst, z.B. das Alter des Universums. In einem BRAN2-Modell läge der Urknall deutlich länger zurück als bisher angenommen.

### 4.3.2 Phantom- und quintessenzartiges Branenuniversum

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir bereits in Gleichung (4.31) für kleine Rotverschiebungen eine Art effektive kosmologische Konstante, nämlich  $1 - \Omega_m^{\Lambda\text{CDM}}$ , erhalten. Uns interessiert nun, wie die dunkle Energie in einem Branenmodell allgemein parametrisiert werden kann. Dazu schreiben wir die Friedmanngleichung folgendermaßen um [35]:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_m(1+z)^3 + \Lambda_{\text{eff}} \quad (4.33)$$

mit

$$\Lambda_{\text{eff}} = \underbrace{\Omega_\sigma + 2\Omega_\ell}_{\Lambda_1} \pm 2\sqrt{\Omega_\ell \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\sigma + \Omega_\ell + \Omega_{\Lambda_5}}}_{\Lambda_2(z)}. \quad (4.34)$$

Die effektive kosmologische ‘‘Konstante’’  $\Lambda_{\text{eff}}$  in einem Branenuniversum ist im Allgemeinen also keineswegs konstant, sondern besteht vielmehr aus einem konstanten Term  $\Lambda_1$  und einem variablen Term  $\Lambda_2(z)$ . In einem BRAN1-Universum wird  $\Lambda_{\text{eff}}$  im Laufe der Zeit kleiner, da der Term  $\Lambda_2(z)$  anwächst. In einem BRAN2-Modell wird  $\Lambda_{\text{eff}}$  hingegen größer.

Zur weiteren Untersuchung dieses Verhaltens betrachten wir die effektive Zustandsgleichung der dunklen Energie. Sie beträgt zum heutigen Zeitpunkt:

$$w_0 = \frac{2q_0 - 1}{3(1 - \Omega_m)} = -1 \pm \frac{\Omega_m}{1 - \Omega_m} \sqrt{\frac{\Omega_\ell}{\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_\ell + \Omega_{\Lambda_5}}}. \quad (4.35)$$

Für ein BRAN1-Modell ist also  $w_0 < -1$ , vorausgesetzt  $\Omega_m < 1$ . Es sieht somit zum heutigen Zeitpunkt wie ein Phantommodell aus. Die dunkle Energie in einem BRAN2-Universum zeigt allerdings Quintessenzverhalten, da  $w_0 > -1$ .

Aus den Gleichungen

$$q(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}(1+z) - 1 \quad \text{und} \quad w(z) = \frac{2q(z) - 1}{3(1 - \Omega_m(z))} \quad (4.36)$$

in Verbindung mit (4.33) kann man das asymptotische Verhalten der Zustandsgleichung herleiten [38]. Sowohl für BRAN1, als auch für BRAN2 lag der Wert der Zustandsgleichung im frühen Universum (d.h.  $z \gg 1$ ) bei  $-0,5$ , während er in ferner Zukunft ( $z \rightarrow -1$ ) gegen  $-1$  strebt.

Obwohl BRAN1 und das Phantommodell zum heutigen Zeitpunkt ähnlich aussehen, gibt es doch einige wesentliche Unterschiede, die vor allem in der fernen Vergangenheit und Zukunft von Bedeutung sind. In einem Phantommodell gilt zu jedem Zeitpunkt  $w(z) < -1$ . Dies führt unter anderem zu dem Problem, dass sowohl der Skalenfaktor, als auch der Hubbleparameter in endlicher Zukunft divergieren, da die Dichte der dunklen Energie kontinuierlich anwächst. Im Branenmodell nähert sich  $w(z)$  jedoch dem Wert  $-1$  an, d.h. die dunkle Energie nimmt das Verhalten einer kosmologischen Konstante an, wodurch das Problem der Singularität vermieden wird. Im frühen Branenuniversum wird die effektive Zustandsgleichung sogar größer als  $-1$  und weicht dadurch stark von dem Phantommodell ab. Der Übergang zwischen  $w(z) > -1$  und  $w(z) < -1$  stellt allerdings ein Problem da. Er findet bei  $\Omega_m(z) = 1$  statt. Dort hat  $w(z)$  eine Singularität, wodurch die Frage aufgeworfen wird, wie sinnvoll die hier konstruierte effektive Zustandsgleichung überhaupt ist [38]. Man sollte also bei der Verwendung dieser, ebenso wie bei der Verwendung der effektiven kosmologischen Konstante, eine gewisse Vorsicht walten lassen.

### 4.3.3 Verschwindende dunkle Energie

Anstelle eines Branenuniversums, das sich mit der Zeit einem  $\Lambda$ CDM-Modell annähert, kann man auch erreichen, dass die dunkle Energie in ferner Zukunft vollständig verschwindet. Die beschleunigte Expansion des Universums wäre in diesem Fall ein vorübergehendes Phänomen. Ein solches Modell wird als ‘‘Verschwindende dunkle Energie’’ (‘‘Disappearing Dark Energy’’ (DDE) [35, 38]) bezeichnet. Betrachten wir zunächst das Randall-Sundrum-Modell, das durch die Friedmanngleichung

$$H^2 = \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{(\rho + \sigma)}{9M^6} \quad (4.37)$$

beschrieben wird. Bildet man den Limes  $a \rightarrow \infty$ , so ergibt sich

$$H^2(a \rightarrow \infty) = \frac{\Lambda_{\text{RS}}}{3}, \quad (4.38)$$

wobei

$$\Lambda_{\text{RS}} = \frac{\Lambda_5}{2} + \frac{\sigma^2}{3M^6} \quad (4.39)$$

die effektive kosmologische Konstante des Randall-Sundrum-Modells ist.

Nun wenden wir uns wieder dem bisher verwendeten, allgemeineren Branenmodell zu, verwenden dazu aber die Bedingung  $\Lambda_{\text{RS}} = 0$ , also<sup>2</sup>

$$\Omega_\sigma = \pm 2\sqrt{\Omega_\ell \Omega_{\Lambda_5}}. \quad (4.40)$$

Verschwindende dunkle Energie bedeutet, dass der Hubbleparameter für  $z = -1$  Null werden muss. Wir betrachten als erstes den Fall einer positiven Branspannung, wählen also in (4.40) das  $+$ -Zeichen. Mit dieser Bedingung erhält man aus der Friedmanngleichung

$$\begin{aligned} \frac{H^2(z = -1)}{H_0^2} &= \Omega_\sigma + 2\Omega_\ell \pm 2\sqrt{\Omega_\ell} \sqrt{\Omega_\sigma + \Omega_\ell + \Omega_{\Lambda_5}} \\ &= 2\sqrt{\Omega_\ell} \left( \sqrt{\Omega_{\Lambda_5}} + \sqrt{\Omega_\ell} \pm \left( \sqrt{\Omega_{\Lambda_5}} + \sqrt{\Omega_\ell} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Die Forderung  $H(z = -1) = 0$  wird offensichtlich für das untere Vorzeichen (BRAN1) erfüllt. In diesem Fall wird aber aus der Constraintgleichung (4.24):

$$\Omega_m = 1 + 2\sqrt{\Omega_\ell} \left( \sqrt{1 + \Omega_{\Lambda_5}} - \sqrt{\Omega_{\Lambda_5}} \right). \quad (4.42)$$

<sup>2</sup>In diesem Fall bedeutet das  $\pm$ -Zeichen *nicht* BRAN1 oder BRAN2, sondern ergibt sich einfach nur aus dem Ziehen der Wurzel.

Der Fall einer positiven Branspannung kann somit ausgeschlossen werden, da sonst  $\Omega_m > 1$  wäre, was nicht mit den Beobachtungen zu vereinbaren ist.

Wenden wir uns als nächstes der negativen Branspannung zu, also

$$\Omega_\sigma = -2\sqrt{\Omega_\ell\Omega_{\Lambda_5}}. \quad (4.43)$$

Hierfür ergibt sich aus der Friedmanngleichung

$$\frac{H^2(z = -1)}{H_0^2} = 2\sqrt{\Omega_\ell} \left( \sqrt{\Omega_\ell} - \sqrt{\Omega_{\Lambda_5}} \pm \left| \sqrt{\Omega_\ell} - \sqrt{\Omega_{\Lambda_5}} \right| \right). \quad (4.44)$$

Hier sind einige Fallunterscheidungen nötig. Zunächst nehmen wir  $\Omega_\ell > \Omega_{\Lambda_5}$  an. Dann würde wiederum im BRAN1-Modell die dunkle Energie in ferner Zukunft verschwinden. Im Fall  $\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} > 0$  muss die Constraintgleichung (4.24) erfüllt werden. Dies impliziert allerdings, wie im Fall der positiven Branspannung,  $\Omega_m > 1$ . Ist hingegen  $\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} < 0$ , so gilt die Constraintgleichung (4.26), woraus eine negative Materiedichte folgt.  $\Omega_\ell > \Omega_{\Lambda_5}$  kann somit ausgeschlossen werden, da die Lösungen unphysikalisch sind.

Als Letztes bleibt noch  $\Omega_\ell \leq \Omega_{\Lambda_5}$  zu überprüfen. Der Hubbleparameter bei  $z = -1$  verschwindet hierfür in einem BRAN2-Modell. Dies ist der einzige Fall, bei dem für  $\Omega_m$  keinerlei Probleme auftauchen. Unter der sehr speziellen Bedingung eines BRAN2-Universums mit negativer Branspannung  $\Omega_\sigma = -2\sqrt{\Omega_\ell\Omega_{\Lambda_5}}$  und  $\Omega_\ell \leq \Omega_{\Lambda_5}$  ist die beschleunigte Expansion des Universums ein vorübergehendes Phänomen. Sowohl im frühen, als auch im sehr späten Universum spielt die dunkle Energie keine Rolle, das Universum ist dann also materiedominiert.

## 4.4 Zeitartige Extradimension

### 4.4.1 Allgemeine Gleichungen

Bisher wurden nur Branenmodelle mit einer raumartigen fünften Dimension betrachtet. Diese Annahme über die Natur der Extradimension wird von den meisten Autoren gemacht, obwohl es zumindest a priori keinen physikalischen Grund gibt, warum die fünfte Dimension nicht zeitartig sein sollte. Beim Wechsel von einer raum- zu einer zeitartigen Extradimension wird im Wesentlichen nur ein Vorzeichen in der Wirkung (4.6) geändert, nämlich das vor dem Integral über die äußere Krümmung [41, 43]. Außerdem werden nun die Integrale über den Bulk mit dem Volumenelement  $\sqrt{g} d^5x$ , statt mit  $\sqrt{-g} d^5x$ , vorgenommen. Diejenigen über die Bran werden weiterhin mit  $\sqrt{-h} d^4x$  vorgenommen.

$$\begin{aligned} S = & M^3 \left[ \int_{Bulk} (\mathcal{R} - 2\Lambda_5) + 2 \int_{Bran} K \right] + \int_{Bulk} L_5(g_{ab}, \Phi) \\ & + \int_{Bran} (m^2 R - 2\sigma) + \int_{Bran} L_4(h_{ab}, \phi), \end{aligned} \quad (4.45)$$

Die Berechnung der Einstein- und Friedmanngleichungen erfolgt analog zu den Rechnungen in Kapitel 4.2. Unter der Annahme der Abwesenheit von fünfdimensionalen Materiefeldern  $\Phi$  erhält man für die Einsteingleichungen im Bulk [41]

$$\mathcal{G}_{ab} + \Lambda_5 g_{ab} = 0 \quad (4.46)$$

und auf der Bran

$$m^2 G_{ab} + \sigma h_{ab} = T_{ab} - M^3 (K_{ab} - K h_{ab}). \quad (4.47)$$

Daraus ergibt sich dann die Friedmanngleichung

$$\boxed{\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\sigma - 2\Omega_\ell \mp 2\sqrt{\Omega_\ell}\sqrt{\Omega_\ell - [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C(1+z)^4]}} \quad (4.48)$$

Die Constraintgleichung

$$1 = \Omega_k - \Omega_{\Lambda_5} - \Omega_C - \left[ \sqrt{\Omega_\ell} \pm \sqrt{\Omega_\ell - \Omega_m - \Omega_\sigma - \Omega_{\Lambda_5} - \Omega_C} \right]^2 \quad (4.49)$$

wird wieder für zwei Fälle betrachtet.

*Fall 1:*  $\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C \geq 0$

Hierfür ist

$$\sqrt{\Omega_k - \Omega_C - \Omega_{\Lambda_5} - 1} \mp \sqrt{\Omega_\ell} = \sqrt{\Omega_\ell - \Omega_m - \Omega_\sigma - \Omega_{\Lambda_5} - \Omega_C}. \quad (4.50)$$

Diese Gleichung kann für BRAN2 offensichtlich nur erfüllt werden, wenn  $\Omega_k - \Omega_C - \Omega_{\Lambda_5} - 1 \geq \Omega_\ell$ . Schreibt man die Gleichung etwas um, so ergibt sich:

$$\boxed{\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_k \mp 2\sqrt{\Omega_\ell}\sqrt{\Omega_k - \Omega_{\Lambda_5} - \Omega_C - 1} = 1} \quad (4.51)$$

*Fall 2:*  $0 \leq \Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_{\Lambda_5} + \Omega_C \leq \Omega_\ell$

Die Constraintgleichung lautet in diesem Fall:

$$\boxed{\Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_k - 2\sqrt{\Omega_\ell}\sqrt{\Omega_k - \Omega_C - \Omega_{\Lambda_5} - 1} = 1} \quad (4.52)$$

Sowohl für Fall 1, als auch für Fall 2 muss die Bedingung  $1 \leq \Omega_k - \Omega_C - \Omega_{\Lambda_5}$  erfüllt werden. Da das Universum annähernd flach ist, also  $|\Omega_k| \ll 1$  [47], und  $\Omega_C$  ebenfalls recht klein sein sollte, da die dunkle Strahlung mit  $(1+z)^4$  skaliert, kann man davon ausgehen, dass  $\Omega_{\Lambda_5}$  negativ ist. Die fünfdimensionale kosmologische Konstante  $\Lambda_5$  ist also positiv, im Gegensatz zu dem üblichen Branenmodell mit raumartiger Extradimension, wo die Konstante als negativ angenommen wird.

#### 4.4.2 Flaches Universum ohne dunkle Strahlung

Die Formeln des Branenmodells mit einer zeitartigen Extradimension sehen den in Kapitel 4.2 angegebenen sehr ähnlich. Im Wesentlichen wurden nur einige Vorzeichen geändert. Diese scheinbar kleinen Änderungen haben allerdings einen sehr großen Einfluss auf die zulässigen Parameterwerte. Wir fordern nämlich, dass die Friedmanngleichung (4.48) mindestens in einem Rotverschiebungsbereich von  $z = 0$  bis  $z = 1000$  eine physikalische Lösung besitzt, also vom heutigen Zeitpunkt bis zum Zeitpunkt der Rekombination. Diese Bedingung ist bei weitem nicht für alle Parameterwerte erfüllt. Dies erkennt man am leichtesten, wenn man ein flaches Universum ( $\Omega_k = 0$ ) ohne dunkle Strahlung ( $\Omega_C = 0$ ) betrachtet. Dann ist nämlich  $\Omega_m$  der einzige Parameter, der mit der Rotverschiebung skaliert. BRAN1 und BRAN2 zeigen deutlich unterschiedliches Verhalten. Deshalb werden im Folgenden die beiden Modelle separat diskutiert.

##### BRAN1

*Bedingung 1:* Um eine physikalische Lösung zu erhalten, darf  $H^2$  nicht negativ werden, also folgt aus (4.48):

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\Omega_\ell}\sqrt{\Omega_\ell - \Omega_m(1+z)^3 - \Omega_\sigma - \Omega_{\Lambda_5}} &\geq 2\Omega_\ell - \Omega_m(1+z)^3 - \Omega_\sigma \\ -4\Omega_\ell\Omega_{\Lambda_5} &\geq (\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\sigma)^2 \\ \Omega_m(1+z)^3 &\leq 2\sqrt{-\Omega_\ell\Omega_{\Lambda_5}} - \Omega_\sigma \end{aligned} \quad (4.53)$$

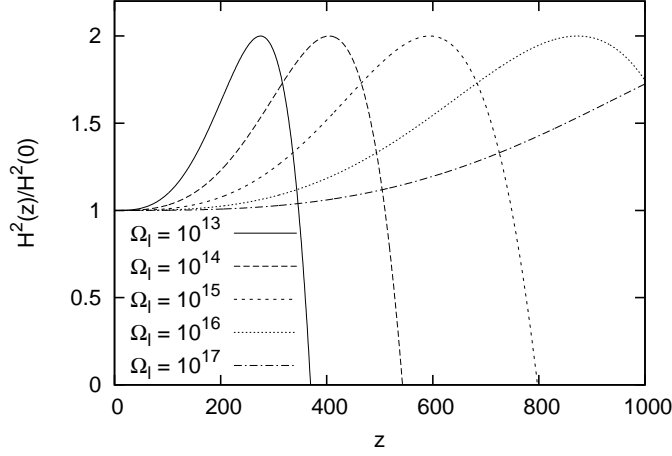


Abbildung 4.3: Hubbleparameter  $H^2(z)/H^2(0)$  eines BRAN1- Modells für verschiedene Werte von  $\Omega_\ell$  mit  $\Omega_m = 0,3$  und  $\Omega_{\Lambda_5} = -2$ .

Es existiert also ein maximales  $z$ . Mit Hilfe der Constraintgleichungen (4.51) und (4.52) lässt sich (4.53) folgendermaßen umschreiben:

$$\Omega_m(1+z)^3 \leq 2\sqrt{\Omega_\ell} \left( \sqrt{-\Omega_{\Lambda_5}} \pm \sqrt{-\Omega_{\Lambda_5} - 1} \right) + \Omega_m - 1 \quad (4.54)$$

Das “-”-Zeichen entspricht dabei einer positiven Branspannung, das “+”-Zeichen einer negativen Branspannung.

Bedingung 2: Der Term unter der Wurzel in (4.48) darf nicht negativ werden:

$$\Omega_m(1+z)^3 \leq \Omega_\ell - \Omega_\sigma - \Omega_{\Lambda_5} . \quad (4.55)$$

Bei wachsendem  $z$  wird das Gleichheitszeichen in (4.53) eher erreicht als in (4.55), d.h. das maximale  $z$  wird durch (4.53) bestimmt, da

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-\Omega_\ell\Omega_{\Lambda_5}} - \Omega_\sigma &\leq \Omega_\ell - \Omega_\sigma - \Omega_{\Lambda_5} \\ 0 &\leq \left( \sqrt{\Omega_\ell} - \sqrt{-\Omega_{\Lambda_5}} \right)^2 \end{aligned}$$

immer erfüllt ist. Das bedeutet, dass  $H^2(z) = 0$  erreicht wird, bevor überhaupt eine Singularität, ähnlich der auf Seite 29 beschriebenen, auftreten kann. Betrachtet man ein kollabierendes Universum, wird der Hubbleparameter bei einem bestimmten Wert der Rotverschiebung gleich Null. Dort findet ein Bounce statt [43, 35]. Anschließend expandiert das Universum wieder. Unter bestimmten Voraussetzungen findet ein weiterer Bounce, gefolgt von einem Kollaps, statt. Dies führt somit zu einem zyklischen Universum.

Wir fordern nun, dass das maximale  $z$  größer als 1000 ist. Aus Gleichung (4.54) erkennt man sofort, dass dies im Falle des “-”-Zeichens nur durch sehr große Werte von  $\Omega_\ell$  erreicht werden kann. Für den Fall des “+”-Zeichens gibt es die zusätzliche Möglichkeit, dass  $-\Omega_{\Lambda_5}$  sehr groß ist. Im Folgenden werden wir uns nur mit dem Modell mit negativer Branspannung (“+”-Zeichen) befassen, da dieses größere Freiheiten in der Parameterwahl erlaubt.

Abb. 4.3 zeigt, wie sich das Quadrat des Hubbleparameters mit wachsendem  $\Omega_\ell$  verändert. Für die gegebenen Werte von  $\Omega_m$  und  $\Omega_{\Lambda_5}$  muss demnach  $\Omega_\ell \gtrsim 10^{16}$  sein, damit  $H^2$  innerhalb des dargestellten Rotverschiebungsbereiches nicht negativ wird. Eine physikalische Lösung lässt sich allerdings auch dadurch erreichen,

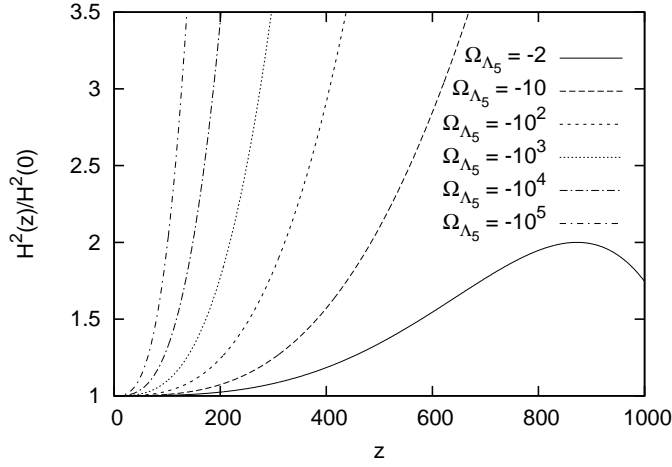


Abbildung 4.4: Hubbleparameter  $H^2(z)/H^2(0)$  eines BRAN1-Modells für verschiedene Werte von  $\Omega_{\Lambda_5}$  mit  $\Omega_m = 0,3$  und  $\Omega_\ell = 10^{16}$ .

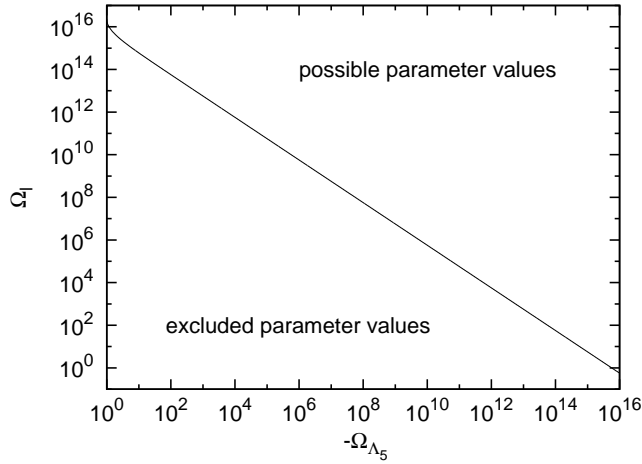


Abbildung 4.5: Einschränkungen der Dichteparameter  $\Omega_\ell$  und  $\Omega_{\Lambda_5}$  eines BRAN1-Modells für  $\Omega_m = 0,3$ .

dass  $|\Omega_{\Lambda_5}|$  sehr groß gewählt wird. Je größer  $-\Omega_{\Lambda_5}$  ist, desto mehr nähert sich das Branenmodell dem  $\Lambda$ CDM-Universum an. Abb. 4.4 zeigt die Abhängigkeit von  $H^2(z)$  von  $\Omega_{\Lambda_5}$  bei festem  $\Omega_m$  und  $\Omega_\ell$ . Das  $\Lambda$ CDM-Modell kann hier nicht dargestellt werden, da die entsprechende Kurve zu steil ist.

Aus Gleichung (4.54) lässt sich leicht berechnen, welchen Wert  $\Omega_\ell$  mindestens annehmen muss, damit sich eine physikalische Lösung ergibt:

$$\Omega_\ell \geq \left( \frac{\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m}{2(\sqrt{-\Omega_{\Lambda_5}} + \sqrt{-\Omega_{\Lambda_5} - 1})} \right)^2 \quad (4.56)$$

Diese Beziehung ist für festes  $\Omega_m$  und  $z = 1000$  in Abb. 4.5 dargestellt. Der Bereich oberhalb der gezeichneten Kurve entspricht dabei dem erlaubten Parameterbereich. Als grobe Abschätzung lässt sich also sagen, dass  $-\Omega_{\Lambda_5}\Omega_\ell \gtrsim 10^{16}$  gelten muss.

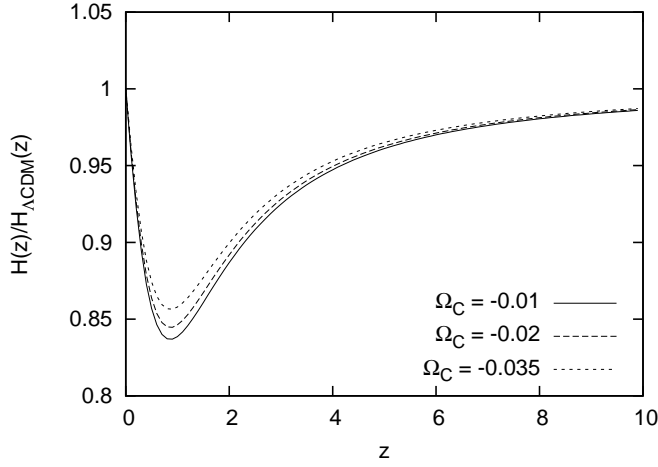


Abbildung 4.6:  $H(z)/H_{\Lambda\text{CDM}}(z)$  für ein geschlossenes BRAN1-Universum mit dunkler Strahlung ( $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_k = -0,02$ ,  $\Omega_{\Lambda_5} = -2$  und  $\Omega_\ell = 10^{16}$ ).

## BRAN2

Auch beim BRAN2-Modell dürfen  $H^2(z)$  und der Term unter der Wurzel in der Friedmanngleichung nicht negativ werden. Die entsprechenden Bedingungen dafür lauten:

$$\begin{aligned} \Omega_m(1+z)^3 &\geq 2\sqrt{-\Omega_\ell\Omega_{\Lambda_5}} - \Omega_\sigma \\ &= 2\sqrt{\Omega_\ell} \left( \sqrt{-\Omega_{\Lambda_5}} - \sqrt{-\Omega_{\Lambda_5} - 1} \right) + \Omega_m - 1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

und

$$\begin{aligned} \Omega_m(1+z)^3 &\leq \Omega_\ell - \Omega_{\Lambda_5} - \Omega_\sigma \\ &= \Omega_\ell - \Omega_{\Lambda_5} - 2\sqrt{\Omega_\ell}\sqrt{-\Omega_{\Lambda_5} - 1} + \Omega_m - 1. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Im Gegensatz zum BRAN1-Modell existiert hier also sowohl ein maximales, als auch ein minimales  $z$ . Wiederum wird gefordert, dass die Bedingungen im Bereich  $z = 0$  bis 1000 Geltung haben. Um (4.58) zu erfüllen, benötigt man entweder ein großes  $\Omega_\ell$  oder ein großes  $-\Omega_{\Lambda_5}$ . Ein großes  $\Omega_\ell$  kann ausgeschlossen werden, da sonst (4.57) für  $z = 0$  nicht erfüllt wird. Ein großer negativer Wert von  $\Omega_{\Lambda_5}$  ist hingegen von Vorteil für die Erfüllung von (4.57).

Im frühen BRAN2-Universum, beim maximalen  $z$ , gab es eine Singularität des Abbremsparameters, wobei aber der Hubbleparameter endlich blieb (siehe Seite 29). Beim minimalen  $z$ , also irgendwann in der Zukunft, findet ein Bounce statt, nach dem das Universum wieder kollabiert.

### 4.4.3 Geschlossenes Universum mit dunkler Strahlung

Es stellt sich nun die Frage, wie sich das Verhalten des beschriebenen Branenmodells ändert, wenn man die Annahme  $\Omega_C = 0 = \Omega_k$  aufgibt. In Abbildung 4.3 hatten wir gesehen, dass  $H^2(z)$  für verschwindende dunkle Strahlung bei einer bestimmten Rotverschiebung Null wird, vorausgesetzt dass  $|\Omega_{\Lambda_5}|$  recht klein ist. Zumindest wich der Hubbleparameter stark von dem des  $\Lambda\text{CDM}$ -Modells ab.

In Abbildung 4.6 ist nun der Hubbleparameter eines geschlossenen BRAN1-Modells mit dunkler Strahlung geteilt durch den Hubbleparameter eines  $\Lambda\text{CDM}$ -Universums dargestellt. Beide Modelle weichen im Wesentlichen nur bei relativ



niedrigen Rotverschiebungen voneinander ab. Der größte Unterschied ist bei etwa  $z \simeq 1$  erkennbar. Mit wachsender Rotverschiebung nähert sich das Branenmodell dem  $\Lambda$ CDM-Universum an. Dies bedeutet nun aber das für dieses Branenmodell, im Gegensatz zum vorher betrachteten ohne dunkle Strahlung, in der Vergangenheit kein Bounce stattfand.



# Kapitel 5

## Überprüfung der Modelle

Die schönsten Theorien bringen uns nicht weiter, wenn sie nicht mit den Beobachtungen übereinstimmen. Neben den hier genannten gibt es noch eine Vielzahl weiterer Theorien, die für sich in Anspruch nehmen, die dunkle Energie zu erklären. Sie alle müssen durch kosmologische Tests überprüft werden, damit man nach und nach die Anzahl der Modelle wieder reduzieren kann und am Ende hoffentlich eine konsistente, mit den Beobachtungen übereinstimmende Theorie übrig bleibt. Es existieren mehrere solcher Tests. Einige sind sehr präzise, andere jedoch recht grob. Die Kombination dieser Test erlaubt zumindest eine Einschränkung der Parameterwerte der Theorien. Um einige Modelle auszuschließen sind die Beobachtungsdaten allerdings noch zu ungenau. Außerdem war es in manchen Fällen bisher noch nicht möglich, Vorhersagen für Beobachtungen aus einer bestimmten Theorie herzuleiten. In dieser Arbeit werden wir nur die Branenkosmologie mit dem  $\Lambda$ CDM-Modell vergleichen und alle übrigen Theorien vernachlässigen. In Kapitel 5.1 werden die verschiedenen kosmologischen Tests vorgestellt, in Kapitel 5.2 wird dann die Verträglichkeit der beiden Theorien mit den Beobachtungsdaten diskutiert.

### 5.1 Methoden

#### 5.1.1 Leuchtkraftdistanz

Einer der präzisesten kosmologischen Tests bedient sich der Leuchtkraftdistanz bzw. des daraus hergeleiteten reduzierten Distanzmoduls. Die Leuchtkraftdistanz eines beliebigen kosmologischen Modells wird durch

$$d_L(z) = \frac{1+z}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S} \left( \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')} \right) \quad (5.1)$$

beschrieben. Dabei ist  $\mathcal{S}(x) = x$  für ein flaches,  $\sin(x)$  für ein geschlossenes und  $\sinh(x)$  für ein offenes Universum. Das reduzierte Distanzmodul wird folgendermaßen definiert:

$$DM(z) = m(z) - \mathcal{M} = 5 \log D_L(z) . \quad (5.2)$$

$D_L(z)$  ist dabei die hubbleparameterfreie Leuchtkraftdistanz, d.h.  $D_L = H_0 d_L$ . Diese Größe wird (meist numerisch) mit Hilfe der Friedmanngleichung eines gegebenen kosmologischen Modells berechnet, wird also theoretisch hergeleitet.  $m(z)$  und  $\mathcal{M} = M - \log(H_0 \text{Mpc}) + 25$  sind die zu beobachtenden Größen.  $m(z)$  und  $M$  sind dabei die scheinbare und die absolute Helligkeit. Der Vorteil des reduzierten Distanzmoduls gegenüber der Leuchtkraftdistanz besteht darin, dass es nicht von  $H_0$  abhängt. Man hat also eine unbekannte Größe weniger, wodurch die Bestimmung der übrigen Parameter genauer möglich ist.

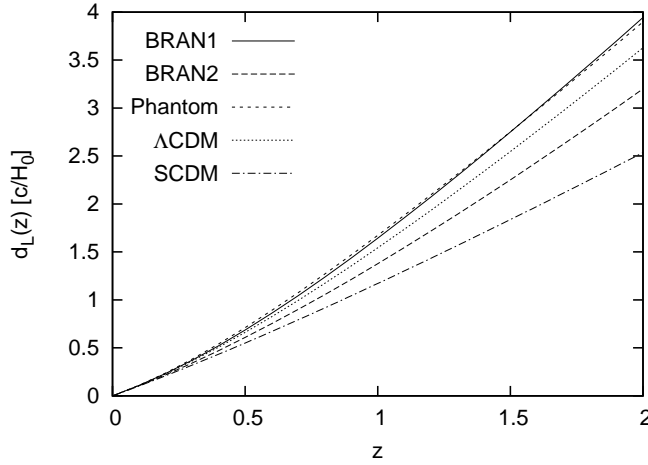


Abbildung 5.1: Leuchtkraftdistanz für verschiedene kosmologische Modelle

Abb. 5.1 stellt die Leuchtkraftdistanz für verschiedene kosmologische Modelle dar. In einem Universum, das nur aus baryonischer und aus kalter dunkler Materie besteht, also  $\Omega_m = 1$  (SCDM), ist die Leuchtkraftdistanz am geringsten. Bei Anwesenheit jedweder Art von dunkler Materie wird diese Distanz größer, d.h. die Objekte erscheinen schwächer. Für alle Modelle außer SCDM wurde  $\Omega_m = 0,3$  und  $\Omega_k = 0$  gewählt. In den beiden Branenmodellen mit raumartiger Extradimension ist  $\Omega_\ell = 0,3$  und  $\Omega_{\Lambda_5} = 0 = \Omega_C$ . Sowohl das Phantommodell, als auch  $\Lambda$ CDM haben  $\Omega_\Lambda = 0,7$ , wobei die Zustandsgleichung des Phantommodells  $w = -1,5$  beträgt. In der Abbildung erkennt man, dass sich, wie bereits in Kapitel 4.3.2 erwähnt, BRAN1 und das Phantommodell sehr ähnlich verhalten, zumindest bei geringen Rotverschiebungen. Bei größeren  $z$  weichen beide Modelle zunehmend voneinander ab. Diese beiden Modelle besitzen eine höhere Leuchtkraftdistanz als  $\Lambda$ CDM, wohingegen BRAN2 eine kleinere besitzt.

Um das reduzierte Distanzmodul aus Beobachtungsdaten zu ermitteln, benötigt man eine Klasse von Objekten, die nach Möglichkeit die gleiche absolute Helligkeit besitzen. Solche Objekte werden als Standardkerzen bezeichnet. Es hat sich herausgestellt, dass Supernovae (SNe) vom Typ Ia diese Bedingung am besten erfüllen. Bei der Messung der scheinbaren Helligkeit müssen allerdings einige Effekte und Fehler mit einbezogen werden [9]. Zunächst muss beachtet werden, dass das Spektrum der SNe rotverschoben ist. Die Aufnahme der Spektren wird in einem festen Wellenlängenbereich mit Hilfe von Bandpassfiltern durchgeführt. Je nach Rotverschiebung der SN nimmt man also einen anderen Teil des Spektrums auf. Bei der so genannten “K-Korrektur” wird dieser Rotverschiebungseffekt wieder herausgerechnet.

Die Lichtkurven der Supernovae weisen unterschiedliche Formen auf. In frühen Galaxien steigen die SN-Lichtkurven stärker an und fallen auch wieder schneller ab als solche in späten Galaxien. Auch dieser Effekt kann korrigiert werden. Allerdings ist nicht sicher, ob man dadurch alle Evolutionseffekte erfasst hat oder ob nicht vielmehr, insbesondere bei großen Rotverschiebungen, weitere Probleme auftreten. Ein zusätzlicher Fehler tritt dadurch auf, dass nicht alle Spektren von möglichen SNe aufgenommen werden, sondern eine Vorauswahl stattfindet. Üblicherweise werden eher die hellsten Objekte vermessen, da diese leichter zu beobachten sind.

Auf dem Weg zur Erde tritt durch Staub eine Extinktion des Lichts auf. Da die Extinktion von der Wellenlänge abhängig ist, kann dieser Effekt aber zumindest in erster Ordnung wieder herausgerechnet werden. Ein Problem, das nicht so

leicht gelöst werden kann, ist der Gravitationslinseneffekt, der in etwa zu  $z^2$  proportional ist. Die meisten Objekte erscheinen durch diesen Effekt schwächer, da ihr Licht Gebiete mit geringer Dichte durchquert. Das Licht einiger Objekte durchquert allerdings Gebiete mit hoher Dichte, wodurch diese Objekte heller wirken.

Trotz aller dieser Fehlerquellen kann die Helligkeit der Typ Ia Supernovae dennoch sehr genau bestimmt werden. Durch den Vergleich mit theoretischen Modellen können die entsprechenden Parameterwerte recht präzise bestimmt werden. Dies macht die Leuchtkraftdistanz (bzw. das reduzierte Distanzmodul) zu einem der wichtigsten kosmologischen Tests. Mit Hilfe dieses Tests fanden 1998 Riess et al. [32] den ersten Hinweis darauf, dass das Universum beschleunigt expandiert. Durch eine immer größer werdende Anzahl an SN Daten, die noch dazu eine höhere Qualität besitzen, wurde dieses Ergebnis bestätigt [48, 33, 5, 24]. Es gibt allerdings auch kritische Stimmen, die bezweifeln, dass Typ Ia Supernovae wirklich derart gute Standardkerzen sind, da sich die Ergebnisse von  $\chi^2$ -Fits immer weiter verschlechtern, je besser die Beobachtungsdaten werden [49]. Dennoch wollen wir in dieser Arbeit die SNe als Standardkerzen akzeptieren.

Es existiert eine Vielzahl von Datensätzen für Typ Ia Supernovae. Einer der aktuellsten ist das so genannte Gold Sample von Riess et al. [33]. In diesem Datensatz wurden viele früher veröffentlichte Daten zusammengefasst. Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Methoden entwickelt, um die Lichtkurven der SNe zu fitten. Je nach angewandter Methode erhält man allerdings leicht unterschiedliche Ergebnisse. Fasst man also die gefitteten Daten aus mehreren Veröffentlichungen zusammen, so ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen Fitmethoden vermeidbare Fehler. Deshalb führten Riess et al. erneute Fits für diese Daten durch, wobei sie eine einzige Methode verwendeten. Zusätzlich zu diesen alten Daten, wurde mit Hilfe des Hubble Space Telescopes (HST) nach weiteren SNe mit möglichst hoher Rotverschiebung ( $z > 1$ ) gesucht. Die gefundenen 16 SNe Ia wurden dem Datensatz hinzugefügt. Allerdings gab es große Unterschiede in der Qualität der zur Verfügung stehenden Daten. Nur diejenigen Objekte, bei denen es sich sicher um Typ Ia Supernovae handelt, wurden in das Gold Sample aufgenommen. Die Objekte, die wahrscheinlich, aber nicht sicher, SNe Ia sind, landeten im Silver Sample.

Im Moment laufen außerdem Projekte, die darauf abzielen, die Anzahl der genau vermessenen Supernovae deutlich zu erhöhen. Beim Supernova Legacy Survey (SNLS) sollen etwa 700 SNe Ia sowohl in niedrigen, als auch in hohen Rotverschiebungsbereichen beobachtet werden [5]. Die Suche erfolgt mit dem Canada-France-Hawaii Telescope. Die daraufhin folgende Spektroskopie wird mit den VLT, Gemini und Keck Teleskopen durchgeführt. Ein wichtiges Ziel dieses Projektes ist es, systematische Fehler zu messen und zu isolieren. Die SNLS-Beobachtungen begannen im August 2003 und sollen insgesamt fünf Jahre lang laufen. Für die Auswertung der Daten des ersten Jahres verwendeten Astier et al. allerdings eine fragwürdige Methode [5]. Zusätzlich zu den normalen Messfehlern führten sie einen weiteren Fehler  $\sigma_{int}$  ein, dessen Größe nicht durch physikalische Überlegungen bestimmt wird, sondern dadurch, dass das  $\chi^2$  pro Freiheitsgrad bei einem Fit an die Daten gerade eins ergibt. Die Fehler werden also so angepasst, dass man hinterher einen perfekten Fit erhält. Diese Methode wird auch von Vishwakarma [49] als unzulässig kritisiert.

Ein weiteres aktuelles Projekt, das ebenfalls über einen Zeitraum von fünf Jahren laufen soll, ist ESSENCE (Equation of State: SupErNovae trace Cosmic Expansion) [46, 24]. Das Ziel von ESSENCE ist es, den zeitlichen Durchschnittswert der Zustandsgleichung der dunklen Energie  $w$  auf 10% genau zu ermitteln. Dazu sollen SNe in einem Rotverschiebungsbereich von  $z = 0,2$  bis  $0,8$  mit dem 4m-Blanco-Teleskop am Cerro Tololo Inter-American Observatory beobachtet werden. Für die Spektroskopie werden dieselben Teleskope wie im SNLS-Projekt verwendet. Nur für einige Supernovae mit den höchsten Rotverschiebungen wurde dazu das HST verwendet. Die Anzahl der vermessenen SNe soll auf 200 beschränkt sein,

da man annimmt, dass für diese Anzahl die statistischen und die systematischen Fehler in etwa gleich groß sind, und sich daher weitere teure Beobachtungen nicht mehr lohnen. Um die Zustandsgleichung auf 10% genau bestimmen zu können, wird die Materiedichte nicht aus den gewonnenen Daten ermittelt, sondern als eine aus anderen Beobachtungen bekannte Konstante behandelt.

### 5.1.2 Hintergrundstrahlung

Die Beobachtungen von Supernovae sind auf relativ niedrige Rotverschiebungen beschränkt. Um kosmologische Modelle zu testen, ist es aber sinnvoll möglichst viele verschiedene Rotverschiebungsbereiche zu untersuchen. Wir benötigen also noch einen Test bei sehr hohen  $z$ . Dazu bietet sich die kosmische Hintergrundstrahlung (CMB) an. Diese wurde 1965 entdeckt und erwies sich als erstaunlich isotrop [20]. Ihr Spektrum ist das eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von  $T = 2,753\text{K}$ . Die Photonen der Hintergrundstrahlung wurden etwa bei  $z = 1000$  emittiert, also zur Zeit der Rekombination, als Photonen und Materie entkoppelten. Zu dieser Zeit muss es bereits Anisotropien in der Materiedichte gegeben haben, aus denen sich später die Galaxien und Galaxienhaufen entwickelten. Diese Dichtestörungen müssen auch einen Abdruck im CMB hinterlassen haben. Die Anisotropien in der Hintergrundstrahlung wurden 1992 mit Hilfe des COBE-Satelliten gemessen [44]. Die Abweichungen von der durchschnittlichen Temperatur sind sehr gering, sie betragen lediglich  $\delta T/T \simeq 10^{-5}$ . Inzwischen wurde der CMB durch den WMAP-Satelliten deutlich genauer vermessen [47].

Die Temperaturanisotropien in Abhängigkeit von der Beobachtungsrichtung können in Kugelflächenfunktionen entwickelt werden:

$$\frac{\delta T}{T} = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (5.3)$$

Das Powerspektrum der CMB-Anisotropien wird durch die Koeffizienten  $C_\ell = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$  definiert. Üblicherweise wird allerdings nicht  $C_\ell$ , sondern  $\ell(\ell+1)C_\ell$  angegeben. Das Powerspektrum kann sowohl als Funktion des Multipolmoments, als auch als Funktion des Winkels angegeben werden. Ein bestimmtes  $\ell$  überprüft nämlich eine bestimmte Winkelskala. Dabei gilt näherungsweise die Beziehung  $\ell \sim \pi/\theta$ . Abb. 5.2 zeigt das Powerspektrum eines  $\Lambda\text{CDM}$ -Universums, das von Spergel et al. an WMAP-Daten gefittet wurde [47].

Die genaue Berechnung des Powerspektrums aus einem bestimmten kosmologischen Modell mit gegebenen Parametern ist recht kompliziert und wird mit numerischen Codes durchgeführt, z.B. mit CMBFAST [11]. Man kann sich aber durch eine stark vereinfachte Betrachtung die Ursache der Peaks im Powerspektrum und ihre Abhängigkeit von den kosmologischen Parametern klar machen. Vor der Entkopplung fanden ständig Streuprozesse zwischen Photonen und Baryonen statt, nicht aber zwischen Photonen und dunkler Materie, da die dunkle Materie nicht elektromagnetisch wechselwirkt. Sowohl die Baryonen, als auch die dunkle Materie tragen zur Gravitation bei. Durch die Eigengravitation wird die Materie dazu veranlasst zu kollabieren. Dem wirkt allerdings der Strahlungsdruck entgegen. Durch die Zusammenwirkung dieser beiden Kräfte entstehen akustische Oszillationen. Diese Oszillationen für eine bestimmte Wellenzahl  $k$  werden durch folgende Gleichung beschrieben [6]:

$$\ddot{\delta} + H \frac{R}{1+R} \dot{\delta} + \frac{k^2}{a^2} c_s^2 \delta = \frac{F}{a^2}, \quad (5.4)$$

wobei  $\delta = \delta\rho/\rho$  die Dichtefluktuationen bezeichnet.  $c_s = c/\sqrt{3(1+R)}$  ist die Schallgeschwindigkeit, wobei  $R$  das Dichteverhältnis von Baryonen zu Photonen ist, also  $R = 3\rho_B/4\rho_\gamma$ .  $F$  beschreibt die auf die Materie wirkende Gravitation.

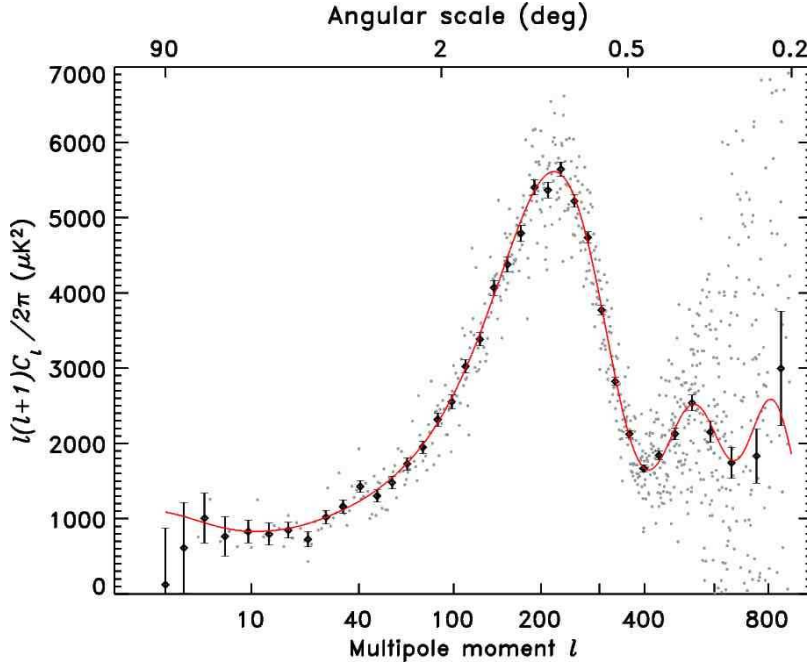


Abbildung 5.2: Fit des  $\Lambda$ CDM-Modells an das WMAP Powerspektrum (Abb. aus [47])

Zur Zeit der Entkopplung werden die akustischen Oszillationen eingefroren. Jede Mode befindet sich dabei in einer bestimmten Oszillationsphase. Diejenigen Moden, für die  $kr_s = m\pi$  gilt, tragen am meisten zum Powerspektrum bei.  $r_s$  ist dabei der Schallhorizont zur Zeit der Entkopplung. Die Lage der Peaks im Powerspektrum hängt somit vom Schallhorizont  $r_s$  ab, oder anders ausgedrückt vom Winkel  $\theta_s$  unter dem der Schallhorizont erscheint. Dieser Winkel hängt nun wiederum vom kosmologischen Modell ab und zwar gemäß

$$\theta_s = \frac{r_s(1+z)^2}{d_L(z)} = \frac{r_s}{R_H} \frac{(1+z)\sqrt{|\Omega_k|}}{\mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')}\right)}. \quad (5.5)$$

Es wird also schon in dieser vereinfachten Betrachtung klar, dass es einen Zusammenhang zwischen dem kosmologischen Modell und dem Powerspektrum gibt. Realistische Rechnungen sind allerdings deutlich komplizierter und konnten auch nur für vierdimensionale Modelle durchgeführt werden. Für die Branenmodelle konnte bisher noch kein Ergebnis gefunden werden, da hierfür fünfdimensionale gekoppelte Differentialgleichungen für die dreidimensionalen Fouriermoden mit komplizierten Randbedingungen gelöst werden müssen. Lediglich kleine Teilerfolge auf dem Weg zu einer solchen Lösung konnten bis jetzt erzielt werden [26, 23].

Neben diesem präzisen kosmologischen Test, kann man mit Hilfe der Hintergrundstrahlung auch noch einen ungenaueren, dafür aber wesentlich einfacheren Test durchführen. Aus den Gebieten mit höherer Materiedichte zur Zeit der Rekombination entstanden später Galaxienhaufen. Für den Test betrachtet man nun den typischen Abstand zweier massereicher Galaxienhaufen  $D_0$  zur heutigen Zeit. Der Abstand in Abhängigkeit von  $z$  beträgt:

$$D(z) = \frac{D_0}{1+z}. \quad (5.6)$$

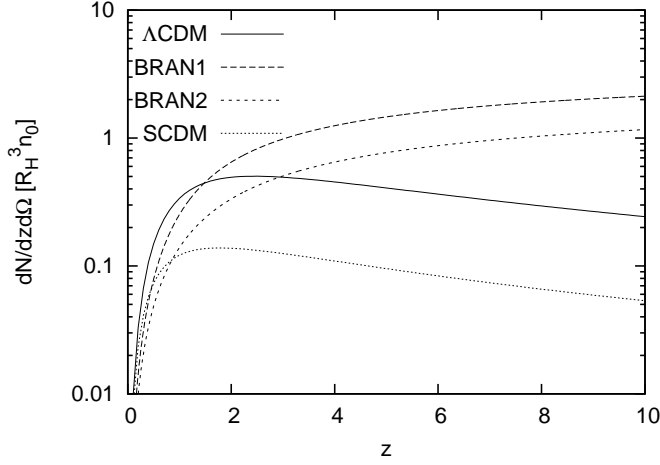


Abbildung 5.3: Number Counts für verschiedene kosmologische Modelle

Der Winkel, unter dem man die beiden Galaxienhaufen sieht, wird gegeben durch

$$\theta = \frac{D(z)(1+z)^2}{d_L(z)} = \frac{D_0}{R_H} \frac{\sqrt{|\Omega_k|}}{\mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')}\right)}. \quad (5.7)$$

Für  $z = 1000$  müsste man somit den typischen Winkel erhalten, unter dem man Strukturen im CMB sieht.

### 5.1.3 Number Counts

Ein weiterer kosmologischer Test besteht darin, die Anzahl  $dN$  einer Klasse von Objekten mit einer Leuchtkraft zwischen  $L$  und  $L + dL$  in einem Volumenelement zu bestimmen. Das Volumenelement wird dabei sinnvollerweise durch den Winkel  $d\Omega$  und das Rotverschiebungsintervall  $dz$  beschrieben. Die Dichte der Objekte in Abhängigkeit von  $z$  und  $L$  wird mit  $n(z, L)$  bezeichnet. Die Anzahl der Objekte wird dann durch folgende Gleichung bestimmt [9]:

$$dN = R_H \frac{d_L^2(z) H_0}{(1+z)^5 H(z)} n(z, L) dz dL d\Omega, \quad (5.8)$$

wobei  $R_H$  der Hubbleradius ist.

Unter der Annahme, dass die Leuchtkraft der betrachteten Objekte, ebenso wie die Anzahl pro Eigenvolumen, zeitunabhängig ist (also  $n(z, L) = n_0(1+z)^3$ ), lässt sich die Gleichung umschreiben zu

$$dN(z) = R_H \frac{d_L^2(z) H_0}{(1+z)^2 H(z)} n_0 dz d\Omega \quad (5.9)$$

$$= R_H^3 \frac{H_0}{H(z) |\Omega_k|} \left[ \mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z')}\right) \right]^2 n_0 dz d\Omega \quad (5.10)$$

Abb. 5.3 stellt Gleichung (5.10) für verschiedene kosmologische Modelle dar. In einem  $\Lambda$ CDM-Universum hat die Funktion ein Maximum bei etwa  $z = 2$ . Gleiches gilt für ein Modell ohne dunkle Energie (SCDM). Die beiden Branenmodelle ( $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_\ell = 0,3$ ,  $\Omega_{\Lambda_5} = 0$ ,  $\Omega_C = 0$  und  $\Omega_k = 0$ ) weisen hingegen kein Maximum auf. Es fällt auf, dass sich die Modelle stark voneinander unterscheiden. Man könnte also annehmen, dass dieser Test besonders gut geeignet ist, das eine oder



andere Modell auszuschließen. Das Problem besteht allerdings darin, eine Klasse von Objekten zu finden, die die oben gemachten Annahmen erfüllen, d.h. die eine konstante Leuchtkraft und eine konstante Anzahl pro Eigenvolumen besitzen.

### 5.1.4 Statefinder

Eine neue Diagnosemethode, die sehr sensibel auf die Wahl des kosmologischen Modells reagiert, allerdings Beobachtungsdaten von sehr hoher Qualität erfordert, wurde 2003 von Sahni et al. [34] vorgeschlagen. Neben den Parametern, die vom Skalenfaktor  $a$  und dessen erster und zweiter zeitlicher Ableitung abhängen, werden neue Parameter definiert, die auch die dritte Ableitung enthalten. Zusätzlich zum Hubbleparameter  $H = \dot{a}/a$  und dem Abbremsparameter  $q = -\ddot{a}/aH^2$ , führt man das so genannte Statefinderpaar  $r$  und  $s$  ein:

$$r = \frac{\ddot{a}}{aH^3} \quad (5.11)$$

$$s = \frac{r - 1}{3(q - 1/2)} \quad (5.12)$$

Unter Annahme eines flachen Universums können die Gleichungen (5.11) und (5.12) mit Hilfe von

$$q(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}(1+z) - 1 \quad \text{und} \quad w(z) = \frac{2q(z) - 1}{3(1 - \Omega_m(z))} \quad (5.13)$$

umgeschrieben werden zu:

$$r = 1 + \frac{9}{2}w(1+w)(1 - \Omega_m) - \frac{3}{2}\frac{\dot{w}}{H}(1 - \Omega_m) \quad (5.14)$$

$$s = 1 + w - \frac{1}{3}\frac{\dot{w}}{wH}, \quad (5.15)$$

wobei  $w$  die effektive Zustandsgleichung der dunklen Energie ist.

Verwendet man nur einen Parameter für den kosmologischen Test, so treten Entartungen auf. Dies bedeutet, dass z.B. der Statefinder  $r$  für zwei verschiedene kosmologische Modelle denselben Wert hat. Viele diese Entartungen können dadurch aufgehoben werden, dass man immer ein Paar von Parametern benutzt. Es gibt drei solcher Statefinderpaare, nämlich  $\{r, s\}$ ,  $\{r, q\}$  und  $\{s, q\}$ .

Betrachten wir nun, welche Werte die Parameter  $q$ ,  $r$  und  $s$  für einige Spezialfälle annehmen. In einem SCDM-Universum ( $\Omega_m = 1$ ) ist der Abbremsparameter  $q$  zu jedem Zeitpunkt gleich 0,5. Die anderen beiden Parameter sind ebenfalls konstant, nämlich  $\{r, s\} = \{1, 0\}$ . Im frühen Universum sind alle kosmologischen Modelle materiedominiert, d.h. die Parameter nehmen die gleichen Werte wie im SCDM-Universum an. Auch im  $\Lambda$ CDM-Modell sind  $r$  und  $s$  zeitunabhängig bei  $\{1, 0\}$ .  $q$  ändert sich von 0,5 im frühen zu  $-1$  im späten Universum. Dieses Verhalten von  $q$  zeigen die meisten Modelle (außer das der verschwindenden dunklen Energie (DDE)), da im späten Universum die dunkle Energie dominiert. Sie sehen zu dieser Zeit also wie ein Steady-State-Universum (SS), d.h.  $\Omega_\Lambda = 1$ , aus. Die Modelle unterscheiden sich allerdings durch den Weg, den sie vom Anfangs- $q$ -Wert zum Endwert zurücklegen. Theorien mit konstanter Zustandsgleichung  $w$  besitzen ein zeitunabhängiges  $s = 1 + w$ , wohingegen  $r$  und  $q$  zeitabhängig sind.

Die Zeitentwicklung verschiedener Modelle in der  $\{q, r\}$ -Ebene ist in Abb. 5.4 dargestellt. Wie eben erläutert, bewegt sich  $\Lambda$ CDM in einer geraden Linie von SCDM zu SS. BRAN1 und BRAN2 hingegen legen diesen Weg mittels einer Kurve zurück. DDE bildet eine Ausnahme: dieses Modell kehrt in der Ebene wieder an seinen Anfangspunkt zurück, d.h. das Universum ist am Anfang und am Ende

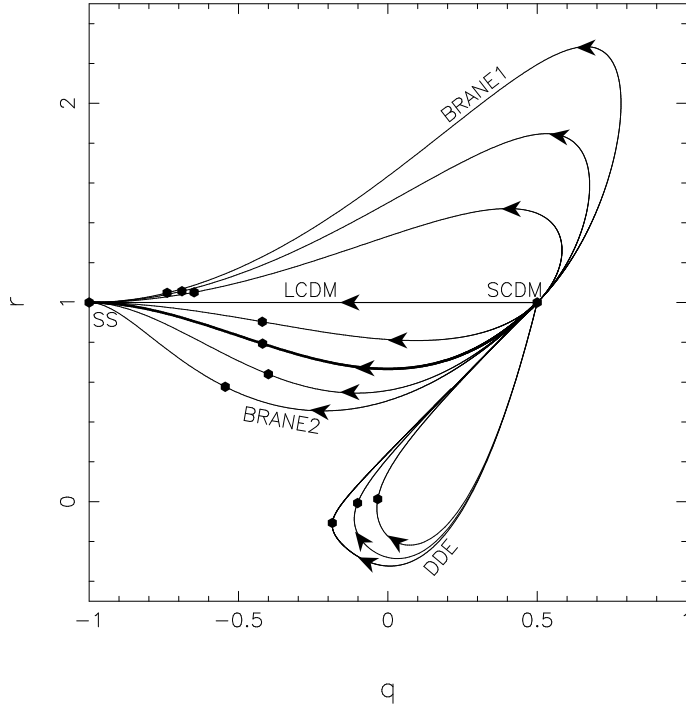


Abbildung 5.4: Zeitentwicklung verschiedener kosmologischer Modelle in der Statefinderebene  $\{q, r\}$  (Abb. aus [1])

materiedominiert. Die dicken Punkte in der Abbildung zeigen die heutigen Werte für  $\{q, r\}$  an, die Pfeile geben die Zeitrichtung an. Die Dichteparameterwerte für BRANE1 betragen von oben nach unten:  $\Omega_m = 0,6, \Omega_\ell = 6,0$ ;  $\Omega_m = 0,5, \Omega_\ell = 2,0$ ;  $\Omega_m = 0,4, \Omega_\ell = 0,5$  und für BRANE2:  $\Omega_m = 0,3, \Omega_\ell = 0,05$ ;  $\Omega_m = 0,2, \Omega_\ell = 0,25$ ;  $\Omega_m = 0,1, \Omega_\ell = 0,45$ . Die dicke BRANE2-Kurve entspricht einem DDG-Modell [14] mit  $\Omega_m = 0,24$ . Für BRANE1 und BRANE2 ist  $\Omega_{\Lambda_5} = 0$  gesetzt. Die Werte für DDE von innen nach außen betragen:  $\Omega_m = 0,05, \Omega_{\Lambda_5} = 4,9$ ;  $\Omega_m = 0,15, \Omega_{\Lambda_5} = 1,4$ ;  $\Omega_m = 0,20, \Omega_{\Lambda_5} = 1,1$ .

Aus dem Diagramm ist leicht ersichtlich, dass man die verschiedenen Modelle kaum mit nur einem Parameter unterscheiden kann. Wird hingegen durch Beobachtungen ein Punkt in der Ebene hinreichend genau bestimmt, so lassen sich schnell einige Theorien ausschließen. Diese Genauigkeit wurde bisher allerdings noch nicht erreicht. Sollte der SNAP-Satellit [45, 3] verwirklicht werden, wäre die benötigte Genauigkeit realisierbar. Es wird erwartet, dass mit diesem Projekt jährlich etwa 2000 Typ Ia Supernovae mit  $z \lesssim 1,7$  beobachtet werden. Mit diesen hochwertigen Ergebnissen wird die Statefinderdiagnose zu einem mächtigen Instrument in der Unterscheidung von kosmologischen Modellen. Alam et al. [1] haben bereits eine Abschätzung durchgeführt, mit welcher statistischen Sicherheit die Theorien voneinander unterschieden werden können.

## 5.2 $\Lambda$ CDM oder Branenkosmologie?

Die vorgestellten Tests sollen nun verwendet werden, um  $\Lambda$ CDM und die Branenmodelle mit Beobachtungsdaten zu vergleichen. Dabei sind allerdings einige der beschriebenen Tests für unsere Zwecke nutzlos. Die Analyse des Powerspektrums der Hintergrundstrahlung ist nicht zu gebrauchen, da für die Branenmodelle bisher

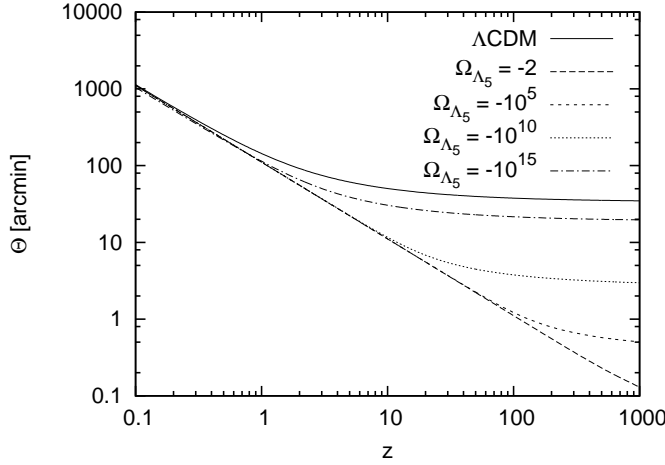


Abbildung 5.5: Winkeldurchmesser eines  $\Lambda$ CDM-Modells ( $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ) und eines BRAN1-Modells für verschiedene Werte von  $\Omega_{\Lambda_5}$  mit  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_\ell = 10^{16}$  und  $D_0 = 80\text{Mpc}$ .

keine theoretischen Vorhersagen getroffen werden konnten [26]. Die Statefinderdiagnose benötigt deutlich bessere Supernovae Daten als im Moment zur Verfügung stehen. Als wichtigstes Instrument bleibt uns somit das reduzierte Distanzmodul und als gröbere Tests der Winkeldurchmesser und die Number Counts.

Branenmodelle mit raumartiger Extradimension wurden bereits von Alam und Sahni [2] untersucht. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass das Branenmodell für einen recht großen Parameterbereich geringfügig besser mit SN Ia Daten übereinstimmt als  $\Lambda$ CDM. Im Folgenden werden wir uns auf ein BRAN1-Modell mit zeitartiger fünfter Dimension konzentrieren, da dieses von anderen Autoren bisher noch nicht analysiert wurde.

### 5.2.1 Grobe Abschätzung

Beginnen wir der Einfachheit halber wieder mit einem geschlossenen Universum ohne dunkle Energie. In diesem Fall gibt es bereits starke Einschränkungen für die Dichteparameter, damit man überhaupt innerhalb eines Rotverschiebungsbereichs von 0 bis 1000 eine physikalische Lösung erhält (siehe Kapitel 4.4.2). Beträgt die Materiedichte  $\Omega_m = 0,3$ , so muss  $\Omega_\ell \Omega_{\Lambda_5} \gtrsim 10^{16}$  erfüllt werden. Allein aus theoretischen Überlegungen heraus kann man allerdings nicht sagen, welcher der beiden Parameter besonders groß sein muss.

Unter Verwendung von Gleichung (5.7) und der Strukturen in der Hintergrundstrahlung lässt sich aber eine grobe Einschränkung der Parameter durchführen. Die Gleichung gibt den Winkel  $\theta$  an, unter dem man zwei Galaxienhaufen sieht, die sich zum heutigen Zeitpunkt im Abstand  $D_0$  voneinander befinden. Für  $D_0$  wählen wir  $80\text{Mpc}$ . Dies ist der Abstand zwischen dem Virgo- und dem Coma-Haufen. Bei  $z = 1000$  sollte man einen Winkel erhalten, der typisch ist für die Strukturen im CMB, also ungefähr einen Winkel zwischen 30 und 40 Bogenminuten. Dies ist der Fall im  $\Lambda$ CDM-Universum, bei dem der errechnete Wert etwa 35 Bogenminuten ist. Abb. 5.5 zeigt den Winkel  $\theta$  in Abhängigkeit von der Rotverschiebung für das  $\Lambda$ CDM-Modell und für ein BRAN1-Universum für verschiedene Werte von  $\Omega_{\Lambda_5}$  und festem  $\Omega_\ell$ .

Man erkennt sofort, dass ein kleines  $|\Omega_{\Lambda_5}|$  nicht mit den Beobachtungen kompatibel ist und somit ausgeschlossen werden muss. Bei  $z = 1000$  ist der Winkel

dann nämlich ungefähr 300 mal kleiner als im  $\Lambda$ CDM-Universum. Je größer aber  $|\Omega_{\Lambda_5}|$  wird, desto mehr nähert sich das Branenmodell dem  $\Lambda$ CDM-Modell an. In der Abbildung ist  $\Omega_\ell$  fest bei  $10^{16}$ . Lässt es man stattdessen mit wachsendem  $|\Omega_{\Lambda_5}|$  kleiner werden, so vollzieht sich die Annäherung der beiden Modelle noch schneller. So wäre z.B. ein BRAN1-Universum, in dem beide Parameter etwa  $10^8$  betragen, durchaus mit den Beobachtungen vereinbar.

In einem Branenmodell mit dunkler Strahlung und beliebiger räumlicher Krümmung können die Parameter nicht mehr so einfach mittels dieser Methode eingeschränkt werden, da ja in diesem Fall die Abweichung des Hubbleparameters von dem des  $\Lambda$ CDM-Modells nicht so groß ist wie im Fall verschwindender dunkler Strahlung. Deshalb wenden wir uns nun einer genaueren Analyseverfahren zu.

## 5.2.2 $\chi^2$ -Fit an Supernovadaten

Der exakteste kosmologische Test, der uns für unsere Zwecke zur Verfügung steht, ist das reduzierte Distanzmodul. Im Laufe der letzten Jahre wurden große Anstrengungen unternommen, um durch Beobachtungen das Distanzmodul möglichst vieler Typ Ia Supernovae mit hoher Qualität zu bestimmen. Dadurch existiert heute eine recht beachtliche Anzahl an Beobachtungsdaten, an die das theoretische Distanzmodul der unterschiedlichen kosmologischen Modelle gefittet werden kann. Man sucht also für ein gegebenes Modell diejenigen Parameter, für die  $\chi^2$  minimal wird. Dabei ist  $\chi^2$  gegeben durch

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{DM(z, \Omega_i) - DM_j}{\sigma_j} \right]^2, \quad (5.16)$$

wobei  $N$  die Anzahl der beobachteten SNe ist.  $DM(z, \Omega_i)$  ist das reduzierte Distanzmodul einer kosmologischen Theorie mit Dichteparametern  $\Omega_i$ .  $DM_j$  bezeichnet das beobachtete Distanzmodul der  $j$ -ten SN mit Fehler  $\sigma_j$ .

Das  $\chi^2$  pro Anzahl der Freiheitsgrade  $\chi_f^2$  ist im Idealfall, d.h. bei Verwendung des richtigen theoretischen Modells und korrekter Annahme der Fehler  $\sigma_j$ , gleich eins. Dabei ist die Anzahl der Freiheitsgrade gerade die Anzahl der SNe  $N$  minus die Anzahl der gefitteten Parameter. Ist  $\chi_f^2 < 1$ , so wurden die Fehler wohl zu groß angenommen, ist es deutlich größer als eins, so ist entweder die Theorie schlecht oder die Fehler wurden zu klein angenommen. Wir suchen nun also das kosmologische Modell mit dem kleinsten  $\chi_f^2$ .

Die Parameter eines Modells, die das minimale  $\chi^2$  für diese Theorie ergeben, werden numerisch gefunden. Als Grundlage für die in dieser Arbeit durchgeführten Fits diente das C-Programm `mrqmin` aus den "Numerical Recipes in C" [29], an das die zu fittenden Funktionen übergeben wurden. Für den Fit des Branenmodells musste das Programm allerdings etwas modifiziert werden. Zum einen gab es Probleme mit der Genauigkeit des Programms. Standardmäßig werden Funktionen auf 16 Stellen genau berechnet. Bei unserem Branenmodell tritt aber häufig der Fall auf, dass Parameterwerte der Größenordnung  $10^{16}$  oder darüber addiert und subtrahiert werden, um am Ende einen Wert der Größenordnung eins zu ergeben. In solchen Fällen reicht die Genauigkeit des vorgegebenen C-Programms nicht aus. Diese musste deshalb erhöht werden. Dazu war auch eine Reihenentwicklung mit geschickter Anordnung der einzelnen Terme nötig.

Ein weiteres Problem war, dass in dem betrachteten Branenmodell viele Parameterwerte keine physikalische Lösung liefern. Es treten also negative Werte unter der Wurzel auf. Die Funktionsweise des Fitprogramms beruht darauf, dass viele Parameterwerte ausprobiert werden, und auf diese Weise schließlich das Minimum von  $\chi^2$  gefunden wird. Es werden somit recht häufig auch Werte in die Funktion

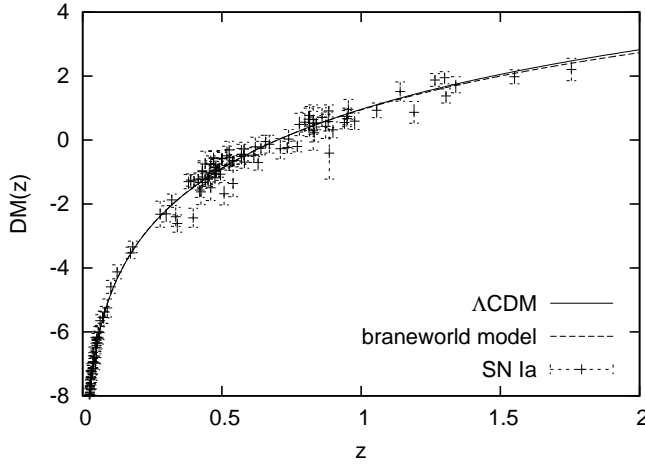


Abbildung 5.6: Reduziertes Distanzmodul für ein  $\Lambda$ CDM-Modell und ein geschlossenes BRAN1-Universum mit den Parameterwerten aus dem  $\chi^2$ -Fit.

eingesetzt, für die keine Lösung existiert. Dies musste dem Programm also verboten werden.

Es wurden im Laufe der letzten Jahre mehrere Tabellen mit Supernovadaten veröffentlicht [32, 48, 33, 5, 24]. Dabei wurden verschiedene Methoden verwendet, um das reduzierte Distanzmodul und dessen Fehler zu ermitteln, weshalb die in den Tabellen angegebenen Daten leicht voneinander abweichen. In dieser Arbeit wurde das Gold Sample von Riess et al. [33] verwendet. Der Fit des  $\Lambda$ CDM-Modells stellte kein Problem dar, da es sich hierbei um eine sehr einfache Funktion handelt. Es ergab sich ein  $\chi^2_f$  von 1,15. Die Parameterwerte ergaben sich zu  $\Omega_m = 0,29$  und  $\Omega_\Lambda = 0,71$ .

Der Fit des Branenmodells war erwartungsgemäß schwieriger. Im allgemeinsten Fall werden fünf Parameter gefittet, nämlich  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\ell$ ,  $\Omega_{\Lambda_5}$ ,  $\Omega_k$  und  $\Omega_C$ . Daraus folgt fast zwangsläufig, dass  $\chi^2$  mehrere lokale Minima besitzt. Es war somit nötig, den Fit für verschiedene Anfangswerte mehrmals zu wiederholen, um möglichst das globale Minimum zu erhalten. Alle aufgelisteten SNe haben Rotverschiebungen von  $z \leq 1,755$ . Es kann also passieren, dass bis zu diesem  $z$  physikalische Lösungen für bestimmte Parameterwerte existieren, bei größeren  $z$  jedoch nicht mehr. Fits, bei denen dieser Fall eintritt, die also Werte liefern, für die  $H^2(z)$  innerhalb eines Rotverschiebungsbereichs bis  $z = 1000$  kleiner Null wird, können sofort verworfen werden. Beim Fit aller fünf Parameter mit verschiedenen Anfangswerten lag die räumliche Krümmung  $\Omega_k$  stets zwischen  $-0,25$  und  $-0,60$ . Eine derart starke Krümmung ist nicht mit den WMAP-Beobachtungen vereinbar, die ein annähernd flaches Universum vorhersagen. Deshalb werden wir im Folgenden den Wert für die räumliche Krümmung annehmen, der von Spergel et al. ermittelt wurde [47], d.h. wir setzen  $\Omega_k = -0,02$  fest.

Abb. 5.6 zeigt ein typisches Ergebnis eines Vierparameterfits. Die Parameterwerte betragen:  $\Omega_m = 0,34$ ,  $\Omega_\ell = 1,26 \cdot 10^8$ ,  $\Omega_{\Lambda_5} = -7,39 \cdot 10^7$  und  $\Omega_C = -0,154$ . Sowohl für  $\Omega_\ell$ , als auch für  $|\Omega_{\Lambda_5}|$  ergaben sich große Werte.  $\Omega_m$  hat im Branenmodell in etwa die gleiche Größe wie in einem  $\Lambda$ CDM-Universum. Dies entspricht durchaus dem, was wir erwartet hatten. Etwas überraschend war hingegen das Ergebnis für  $\Omega_C$ . Da die dunkle Strahlung mit  $(1+z)^4$  skaliert, sollte der Betrag zum heutigen Zeitpunkt eigentlich sehr klein sein. Angenommen der Wert von  $-0,15$  entspräche der Realität, dann müsste  $\Omega_C$  im frühen Universum extrem groß gewesen sein. Für die angegebenen Werte ist  $\chi^2_f = 1,16$ . Der Fit des Branenmodells an die

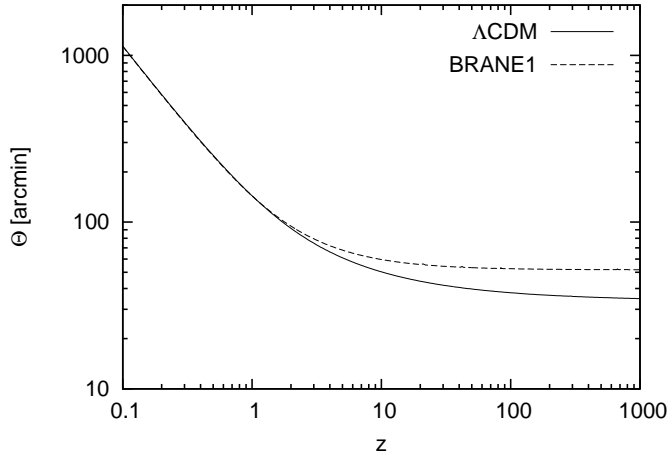


Abbildung 5.7: Winkeldurchmesser eines  $\Lambda$ CDM-Modells und eines BRANE1-Modells mit den Parameterwerten aus dem  $\chi^2$ -Fit.

Beobachtungsdaten ist also nur geringfügig schlechter als der des  $\Lambda$ CDM-Modells mit  $\chi_f^2 = 1,15$ .

Der Winkeldurchmesser dieses Modells ist in Abb. 5.7 dargestellt. Man erkennt eine deutliche Abweichung vom  $\Lambda$ CDM-Modell für große Rotverschiebungen. So ist bei  $z = 1000$  der Winkel im BRANE1-Universum etwa 50 Bogenminuten, während er für  $\Lambda$ CDM nur 35 Bogenminuten beträgt. Dies ist allerdings ein recht grober Test. Deshalb kann das Branenmodell nicht aufgrund dieser Abweichung ausgeschlossen werden.

Betrachten wir nun noch einmal den Fall ohne dunkle Strahlung. Wir setzen also  $\Omega_C = 0$  und  $\Omega_k = -0,02$  und führen einen weiteren Fit durch. Wiederum erhält man, wie im Modell mit dunkler Strahlung,  $\chi_f^2 = 1,16$ . Die drei gefitteten Dichteparameter ergeben sich zu  $\Omega_m = 0,45$ ,  $\Omega_\ell = 4,4 \cdot 10^7$  und  $\Omega_{\Lambda_s} = -1,5 \cdot 10^8$ . In diesem Fall erscheint die Materiedichte  $\Omega_m$  ziemlich groß, was die Theorie etwas unwahrscheinlicher werden lässt. Der Nachteil dieses Modells ist, dass es praktisch nicht von  $\Lambda$ CDM abweicht was das reduzierte Distanzmodul und den Winkeldurchmesser betrifft. D.h. die Kurven der beiden Modelle liegen so eng beieinander, dass sie nicht zu unterscheiden sind und somit auch nicht das eine oder andere Modell durch diese Methoden ausgeschlossen werden kann.

Bei den Number Counts ist die Abweichung von  $\Lambda$ CDM allerdings sehr deutlich, wie in Abb. 5.8 zu erkennen ist. Das gefittete Branenmodell ohne dunkle Strahlung weicht hier sogar wesentlich stärker von einem  $\Lambda$ CDM-Universum ab als das mit dunkler Strahlung. Vorausgesetzt man fände geeignete Objekte für diesen kosmologischen Test, wäre dies die passende Methode, um ein BRANE1-Universum ohne dunkle Strahlung entweder auszuschließen oder zu bestätigen.

### 5.3 Zusammenfassung

Im Laufe der Zeit wurde eine Vielzahl kosmologischer Modelle entwickelt. Insbesondere seit bekannt ist, dass das Universum beschleunigt expandiert, werden die verschiedenen Theorien intensiv analysiert und getestet, um die Ursache der dunklen Energie zu klären. Bisher ist es jedoch bei etlichen Modellen noch nicht gelungen diese auszuschließen. Lediglich Einschränkungen der Parameterwerte waren möglich. Einige der vierdimensionalen Theorien können zumindest für gewisse

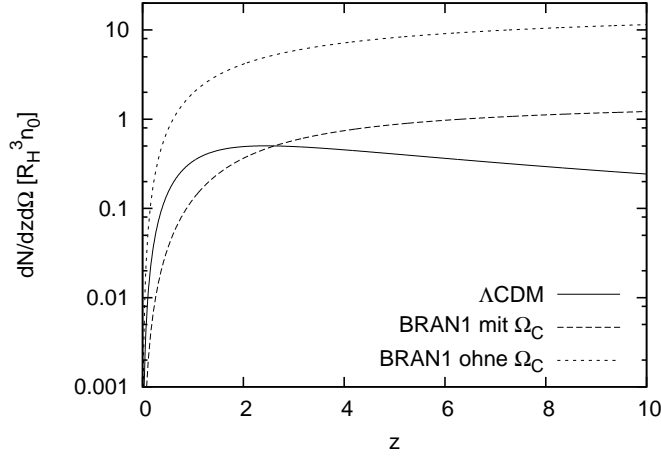


Abbildung 5.8: Number Counts für die beiden gefitteten Branenmodelle mit und ohne dunkle Strahlung verglichen mit dem  $\Lambda$ CDM-Modell.

Rotverschiebungsbereiche von Branenmodellen imitiert werden. Diese können somit nur voneinander unterschieden werden, wenn man Beobachtungen bei verschiedenen Rotverschiebungen durchführt.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf die Analyse eines Branenmodells mit zeitartiger Extradimension, da die übrigen Modelle bereits an anderer Stelle ausgiebig diskutiert wurden. Zunächst ließen sich allein durch theoretische Überlegungen bestimmte Parameterwerte einschränken. Am leichtesten ist dies im Fall eines flachen Universums ohne dunkle Strahlung zu erkennen. Dann skaliert nämlich nur noch die Materiedichte mit der Rotverschiebung. Fordert man, dass die Friedmann-Gleichung, und somit auch alle Größen die sich mit ihrer Hilfe herleiten lassen, mindestens innerhalb eines Rotverschiebungsbereiches von 0 bis 1000 eine physikalische Lösung besitzt, so ergibt sich bei einer Materiedichte von 0,3 die Einschränkung, dass das Produkt von  $\Omega_\ell$  und  $\Omega_{\Lambda_5}$  ungefähr größer als  $10^{16}$  sein muss. Lässt man jedoch eine beliebige Raumkrümmung und dunkle Strahlung zu, können nicht mehr so einfach bestimmte Parameterbereiche ausgeschlossen werden.

Genaueren Aufschluss erhält man durch den Vergleich der Modelle mit Beobachtungsdaten. Für unsere Zwecke erwies sich die Analyse des reduzierten Distanzmoduls als aussagekräftigster kosmologischer Test. An die Typ Ia Supernovadaten des Gold Samples von Riess et al. wurde sowohl ein geschlossenes BRAN1-Modell mit dunkler Strahlung, als auch eines ohne dunkle Strahlung gefittet. Im Fall mit  $\Omega_C \neq 0$  und festem  $\Omega_k = -0,02$  ergaben sich für  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\ell$  und  $\Omega_{\Lambda_5}$  vernünftige Werte. Nur  $\Omega_C$  war deutlich größer als erwartet. Als weiteres Problem trat auf, dass der Winkeldurchmesser mit 50 Bogenminuten bei  $z = 1000$  etwas über den 30 bis 40 Bogenminuten lag, die typisch sind für die beobachteten Strukturen im CMB. Setzte man  $\Omega_C = 0$ , ergab der Fit eine relativ große Materiedichte, was dieses Modell nicht sehr überzeugend macht. Allerdings ist der Winkeldurchmesser nahezu identisch mit dem des  $\Lambda$ CDM-Modells, und stimmt somit auch mit den Beobachtungen überein. Bei den Number Counts lag jedoch das Modell mit dunkler Strahlung wesentlich näher an  $\Lambda$ CDM als das mit  $\Omega_C = 0$ .

Vielleicht liegt die Wahrheit irgendwo zwischen diesen beiden Modellen, d.h. die Dichte der dunklen Strahlung könnte irgendwo zwischen 0 und  $-0,15$  liegen. Auf diese Weise könnten die Probleme, die in den einzelnen Modellen auftauchen, vermieden oder zumindest verringert werden.

Zukünftig werden wir auf jeden Fall noch bessere Beobachtungsdaten benöti-

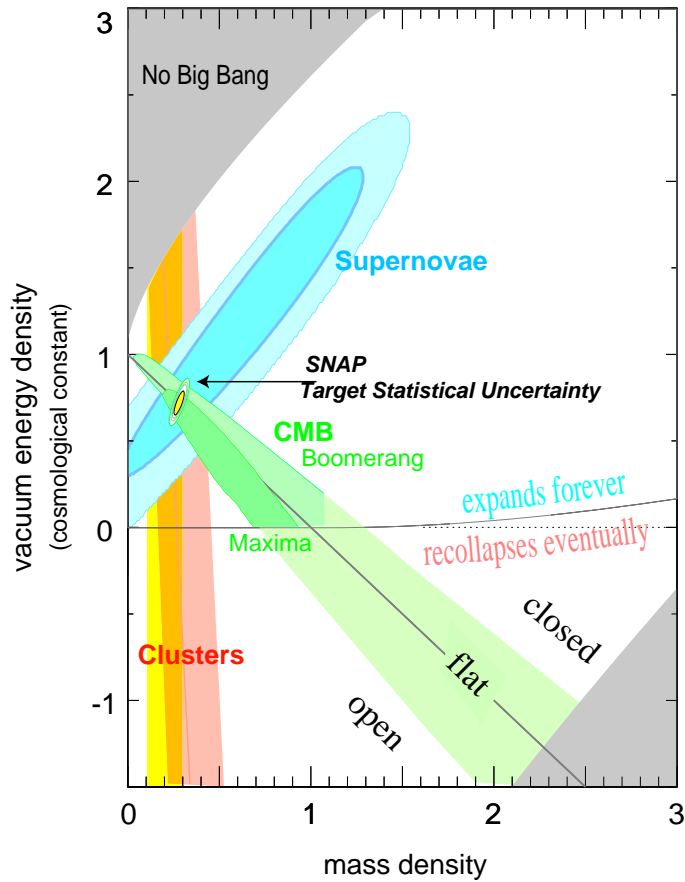


Abbildung 5.9: Erwartete Genauigkeit des SNAP-Satelliten in der  $\Omega_m$ - $\Omega_\Lambda$ -Ebene. Ebenfalls eingezeichnet sind die Ergebnisse aus anderen Beobachtungen. (Abb. aus [3])

gen, um endlich die eine oder andere Theorie ausschließen zu können. Was SNe betrifft, könnten diese Daten vom SNAP-Satelliten geliefert werden. In Abb. 5.9 ist die erwartete Genauigkeit dieses Projekts in der  $\Omega_m$ - $\Omega_\Lambda$ -Ebene eingezeichnet. Im Vergleich dazu sieht man die Ergebnisse, die bisher aus anderen Beobachtungen gewonnen wurden. Mit diesen hochqualitativen Daten könnte dann auch die Statefinderdiagnose angewandt werden, mit der man die verschiedenen kosmologischen Modelle mit hoher Sicherheit voneinander unterscheiden kann. Außerdem ist es notwendig, für die Branenmodelle das Powerspektrum der Hintergrundstrahlung theoretisch zu ermitteln.

Es wartet in Zukunft also noch viel Arbeit auf die Kosmologinnen und Kosmologen, bis endlich eine überzeugende Theorie, die die Entwicklung des Universums beschreibt, gefunden ist.



# Anhang A

## Variation der Wirkung

Wir betrachten den Fall eines fünfdimensionalen Bulks, der durch eine zeitartige Bran begrenzt ist, d.h. die fünfte Dimension ist raumartig. Diese Theorie wird durch folgende Wirkung beschrieben:

$$\begin{aligned}
 S &= M^3 \left[ \int_{Bulk} (\mathcal{R} - 2\Lambda_5) - 2 \int_{Bran} K \right] + \int_{Bulk} L_5(g_{ab}, \Phi) \\
 &+ \int_{Bran} (m^2 R - 2\sigma) + \int_{Bran} L_4(h_{ab}, \phi) \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Um die Einsteingleichungen herzuleiten, müssen wir die Variation der Wirkung berechnen. Zunächst betrachten wir nur den Teil der Wirkung, der den Ricci-Skalar der fünfdimensionalen Metrik  $g_{ab}$  und die Spur der äußeren Krümmung der Bran  $K = K_{ab}h^{ab}$  enthält:

$$S_g = \int_{Bulk} \mathcal{R} \sqrt{-g} d^5x - 2 \int_{Bran} K \sqrt{-h} d^4x \quad (A.2)$$

Die Variation des Ricci-Tensors lautet (siehe [50]):

$$\delta \mathcal{R}_{ac} = \nabla_b \delta C_{ac}^b - \nabla_a \delta C_{bc}^b, \quad (A.3)$$

wobei

$$\delta C_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\nabla_a \delta g_{bd} + \nabla_b \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ab}). \quad (A.4)$$

Also:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{R}_{ac} &= \nabla_b \left[ \frac{1}{2} g^{bd} (\nabla_a \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ac}) \right] \\
 &- \nabla_a \left[ \frac{1}{2} g^{bd} (\nabla_b \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_d \delta g_{bc}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} g^{bd} [\nabla_b \nabla_a \delta g_{cd} + \nabla_b \nabla_c \delta g_{ad} - \nabla_b \nabla_d \delta g_{ac} \\
 &- \nabla_a \nabla_b \delta g_{cd} - \nabla_a \nabla_c \delta g_{bd} + \nabla_a \nabla_d \delta g_{bc}] \\
 &= \frac{1}{2} g^{bd} [2 \nabla_b \nabla_{(c} \delta g_{a)d} - \nabla_a \nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_b \nabla_d \delta g_{ac}] \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 g^{ac} \delta \mathcal{R}_{ac} &= \frac{1}{2} [\nabla^d \nabla^c \delta g_{cd} + \nabla^d \nabla^a \delta g_{ad} - g^{bd} \nabla^a \nabla_a \delta g_{bd} - g^{ac} \nabla^b \nabla_b \delta g_{ac}] \\
 &= \nabla^a [\nabla^b \delta g_{ab} - g^{cd} \nabla_a \delta g_{cd}] \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

Weiterhin lässt sich unter Verwendung der allgemeinen Formel  $\frac{d}{d\tau}(\det A) = (\det A) \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{d\tau} A^{-1} \right)$  die Variation von  $\sqrt{-g}$  berechnen:

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Das Minuszeichen in der zweiten Zeile ergibt sich dadurch, dass immer  $g^{ac} g_{cb} = \delta^a_b$  gelten muss, also auch

$$\begin{aligned} \delta^a_b &= (g^{ac} + \delta g^{ac})(g_{cb} + \delta g_{cb}) \\ \delta^a_b &= g^{ac} g_{cb} + g^{ac} \delta g_{cb} + \delta g^{ac} g_{cb} + \delta g^{ac} \delta g_{cb} \\ 0 &= g^{ac} \delta g_{cb} + g_{db} \delta g^{ad} \\ \delta g_{cb} &= -g_{ac} g_{db} \delta g^{ad} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich für Variation des Integrals über den Ricci-Scalar:

$$\begin{aligned} \delta \left( \int_{Bulk} \mathcal{R} \sqrt{-g} d^5 x \right) &= \delta \left( \int_{Bulk} g^{ab} \mathcal{R}_{ab} \sqrt{-g} d^5 x \right) \\ &= \int_{Bulk} (\delta g^{ab} \mathcal{R}_{ab} \sqrt{-g} + g^{ab} \delta \mathcal{R}_{ab} \sqrt{-g} + \mathcal{R} \delta \sqrt{-g}) d^5 x \\ &= \int_{Bulk} \left[ \left( \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{ab} \right) \delta g^{ab} \right. \\ &\quad \left. + \nabla^a (\nabla^b \delta g_{ab} - g^{cd} \nabla_a \delta g_{cd}) \right] \sqrt{-g} d^5 x \\ &= \int_{Bulk} \mathcal{G}_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^5 x + \int_{Bulk} \nabla^a v_a \sqrt{-g} d^5 x \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

mit  $v_a = \nabla^b \delta g_{ab} - g^{cd} \nabla_a \delta g_{cd}$ .

Nach dem Integralsatz von Gauss gilt:

$$\int_{Bulk} \nabla^a v_a \sqrt{-g} d^5 x = - \int_{Bran} v_a n^a \sqrt{-h} d^4 x, \quad (\text{A.10})$$

wobei

$$\begin{aligned} v_a n^a &= n^a g^{bc} [\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}] \\ &= n^a h^{bc} [\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}] + n^a n^b n^c [\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}] \\ &= n^a h^{bc} [\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Durch Umbenennung der Indices erkennt man, dass der zweite Term in der zweiten Zeile gleich Null ist.

Betrachten wir nun die Variation der äußeren Krümmung  $\delta K$ :

$$\begin{aligned} \delta K &= \delta (h^a_b \nabla_a n^b) \\ &= \delta h^a_b \nabla_a n^b + h^a_b (\delta C)_{ac} n^c + h^a_b \nabla_a \delta n^b, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Um den ersten Term in der zweiten Zeile auszuwerten, benötigen wir noch folgende Formeln: Es gilt (analog zu  $\delta g_{ab}$ ):  $\delta n_a = -n_a n_b \delta n^b$ . Außerdem ist  $g^a_b = \delta^a_b$  und somit  $\delta g^a_b = 0$ . Unter Verwendung dieser Gleichungen und  $K_{ab} n^b = 0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta h^a_b \nabla_a n^b &= \delta g^a_b \nabla_a n^b - (\delta n^a n_b + n^a \delta n_b) \nabla_a n^b \\ &= -(\delta n^a - n^a n_c \delta n^c) n_b \nabla_a n^b \\ &= -(\delta n^a + h^a_c \delta n^c - \delta^a_c \delta n^c) n_b \nabla_a n^b \\ &= -\delta n^c h^a_c n_b \nabla_a n^b \\ &= -\delta n^c n_b K_c^b = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Der erste Term in (A.12) ist also identisch Null.

Für den zweiten Term von (A.12) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
n^c h^a{}_b (\delta C)_{ac} &= \frac{1}{2} n^c g^{ad} [\nabla_a \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ac}] \\
&= \frac{1}{2} n^c (h^{ad} + n^a n^d) \nabla_c \delta g_{ad} \\
&= \frac{1}{2} n^c h^{ad} \nabla_c \delta g_{ad}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Mit  $\delta\sqrt{-h} = -\frac{1}{2}\sqrt{-h}h_{ab}\delta h^{ab}$  erhält man somit insgesamt:

$$\delta \left( 2 \int_{Bran} K \sqrt{-h} d^4 x \right) = \int_{Bran} [n^c h^{ab} \nabla_c \delta g_{ab} + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b - K h_{ab} \delta h^{ab}] \sqrt{-h} d^4 x . \tag{A.15}$$

Die Variation von  $S_g$  (A.2) ist also

$$\begin{aligned}
\delta S_g &= \int_{Bulk} \mathcal{G}_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^5 x \\
&\quad - \int_{Bran} [n^a h^{bc} \nabla_c \delta g_{ab} + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b - K h_{ab} \delta h^{ab}] \sqrt{-h} d^4 x . \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Der erste Term im Integral über die Bran lässt sich wie folgt umformen:

$$n^a h^{bc} \nabla_c \delta g_{ab} = h^{bc} \nabla_c (n^a \delta g_{ab}) - h^{bc} \nabla_c n^a \delta g_{ab} = h^{bc} \nabla_c (n^a \delta g_{ab}) + K_{ab} \delta h^{ab} , \tag{A.17}$$

wobei beim letzten Schritt wieder die Beziehung  $K_{ab} n^b = 0$  verwendet wurde.

Damit ergibt sich für den Randterm von  $S_g$ :

$$\begin{aligned}
(\text{Randterm}) &= - \int_{Bran} [h^{bc} \nabla_c (n^a \delta g_{ab}) + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b] \\
&\quad - \int_{Bran} (K_{ab} - K h_{ab}) \delta h^{ab} . \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Formen wir nun den ersten Integranden dieser Gleichung mit Hilfe von  $\delta n_a = -n_a n_b \delta n^b$  und  $h_{ab} n^a = 0$  weiter um:

$$\begin{aligned}
h^{bc} \nabla_c (n^a \delta g_{ab}) + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b &= h^{bc} \nabla_c (n^a (\delta h_{ab} + n_a \delta n_b + n_b \delta n_a)) + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b \\
&= h^{bc} \nabla_c (n^a \delta h_{ab} + \delta n_b - n_a n_b \delta n^a) + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b \\
&= h^{bc} \nabla_c (n^a \delta h_{ab} + \delta n_b - g_{ab} \delta n^a + h_{ab} \delta n_a) \\
&\quad + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b \\
&= h^{bc} \nabla_c (\delta (n^a h_{ab}) + \delta n_b - g_{ab} \delta n^a) + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b \\
&= h^c{}_b \nabla_c (g^{ba} \delta n_a - \delta_a{}^b \delta n^a) + 2h^a{}_b \nabla_a \delta n^b \\
&= h^a{}_b \nabla_a (g^{bc} \delta n_c + \delta n^b) \\
&= h^a{}_b \nabla_a (g^{bc} \delta n_c - n^b n^c \delta n_c) \\
&= h^a{}_b \nabla_a (h^{bc} \delta n_c) \\
&= D_b (h^{bc} \delta n_c) , \tag{A.19}
\end{aligned}$$

wobei  $D_b = h^a{}_b \nabla_a$  die mit der induzierten Metrik  $h_{ab}$  assoziierte Ableitung ist. Das Integral über diese Divergenz verschwindet für Variationen von  $g_{ab}$  mit kompaktem Träger in der Bran.

Somit erhalten wir für (A.16):

$$\delta S_g = \int_{Bulk} \mathcal{G}_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^5 x - \int_{Bran} (K_{ab} - K h_{ab}) \delta h^{ab} \sqrt{-h} d^4 x . \quad (\text{A.20})$$

Für die fünfdimensionale kosmologische Konstante ergibt sich sofort:

$$\delta \left( \int_{Bulk} (-2\Lambda_5) \sqrt{-g} d^5 x \right) = \int_{Bulk} \Lambda_5 g_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^5 x . \quad (\text{A.21})$$

Analoges gilt für den vierdimensionalen Fall.

Als nächstes betrachten wir die Lagrangedichte des Materiefeldes:

$$\begin{aligned} \delta \left( \int_{Bulk} L_5(g_{ab}, \Phi) \sqrt{-g} d^5 x \right) &= \int_{Bulk} \left( \frac{\delta L_5}{\delta g^{ab}} - \frac{1}{2} L_5 g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^5 x \\ &= - \int_{Bulk} \mathcal{T}_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^5 x , \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

mit  $\mathcal{T}_{ab} = \frac{1}{2} L_5 g_{ab} - \frac{\delta L_5}{\delta g^{ab}}$ . Für die vierdimensionale Lagrangedichte erfolgt die Rechnung analog.

Die Variation der gesamten Wirkung (A.1) ergibt also:

$$\begin{aligned} \delta S &= M^3 \int_{Bulk} (\mathcal{G}_{ab} + \Lambda_5 g_{ab}) \delta g^{ab} - \int_{Bulk} \mathcal{T}_{ab} \delta g^{ab} \\ &\quad - M^3 \int_{Bran} (K_{ab} - K h_{ab}) \delta h^{ab} \\ &\quad + \int_{Bran} (m^2 G_{ab} + \sigma h_{ab}) \delta h^{ab} - \int_{Bran} T_{ab} \delta h^{ab} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Betrachten wir zunächst Variationen, die die induzierte Metrik auf der Bran nicht verändern, also  $\delta h_{ab} = 0$ . Dann verschwinden alle Oberflächenintegrale und man erhält:

$$\boxed{\mathcal{G}_{ab} + \Lambda_5 g_{ab} = \frac{1}{M^3} \mathcal{T}_{ab}} \quad (\text{A.24})$$

Unter Verwendung dieses Ergebnisses folgt für beliebige Variationen:

$$\boxed{m^2 G_{ab} + \sigma h_{ab} = T_{ab} + M^3 (K_{ab} - K h_{ab})} \quad (\text{A.25})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] U. Alam et al., *Exploring the Expanding Universe and Dark Energy using the Statefinder Diagnostic*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **344**, 1057 (2003) [astro-ph/0303009]
- [2] U. Alam und V. Sahni, *Supernova Constraints on Braneworld Dark Energy* (2002) [astro-ph/0209443]
- [3] G. Aldering et al., *Overview of the SuperNova/Acceleration Probe (SNAP)* (2002) [astro-ph/0209550]
- [4] N. Arkani-Hamed et al., *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315]
- [5] P. Astier, *The Supernova Legacy Survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the First Year Data Set* (2005) [astro-ph/0510447]
- [6] A. Balbi, *Cosmological Parameter Estimation from CMB Experiments*, Cosmology and Particle Physics, Edited by R. Durrer et al. (2000)
- [7] M. Bartelmann, *Cosmology*, Skript
- [8] R. Caldwell, *A Phantom Menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state*, Phys.Lett. B **545**, 23 (2002) [astro-ph/9908168]
- [9] M. Camenzind, *From Big Bang to Black Holes*, Skript (2003)
- [10] S. Carroll, *The Cosmological Constant*, Living Rev. Relativity **4**, 1 (2001), <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-1carroll>
- [11] <http://www.cmbfast.org/>
- [12] H. Collins und B. Holdom, *Brane Cosmologies without Orbifolds*, Phys. Rev. D **62**, 105009 (2000) [hep-ph/0003173]
- [13] C. Deffayet, *Cosmology on a Brane in Minkowski Bulk*, Phys. Lett. B **502**, 199 (2001) [hep-th/0010186]
- [14] C. Deffayet, G. Dvali und G. Gabadadze, *Accelerated Universe from Gravity Leaking to Extra Dimensions*, Phys.Rev. D **65**, 044023 (2002) [astro-ph/0105068]
- [15] G. Dvali, G. Gabadadze und M. Porrati, *4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space*, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000) [hep-th/0005016]
- [16] G.Dvali und G. Gabadadze, *Gravity on a Brane in Infinite-Volume Extra Space*, Phys.Rev. D **63**, 065007 (2001) [hep-th/0008054]

- [17] A. Einstein, *Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss., 142 (1917)
- [18] A. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981)
- [19] A. Guth, *Inflation*, MIT-CTP-3416 (2004) [astro-ph/0404546]
- [20] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **15**, 168 (1929)
- [21] T. Kaluza, *On the problem of unity in physics*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 966 (1921)
- [22] O. Klein, *Quantum theory and five dimensional theory of relativity*, Z. Phys. **37**, 895 (1926)
- [23] K. Koyama und R. Maartens, *Structure formation in the DGP cosmological model*, JCAP **0601**, 016 (2006) [astro-ph/0511634]
- [24] K. Krisciunas et al., *Hubble Space Telescope Observations of Nine High-Redshift ESSENCE Supernovae* [astro-ph/0508681]
- [25] R. Maartens, *Brane-World Gravity*, Living Rev. Relativity **7**, 7 (2004), <http://www.livingreviews.org/lrr-2004-7>
- [26] R. Maartens, *Brane-world Cosmological Perturbations*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148**, 213 (2003) [gr-qc/0304089]
- [27] G. Nordström, *Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen*, Physik. Zeitschr. **15**, 504 (1914)
- [28] A. Penzias und R. Wilson *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080-MC/S*, Astrophys. J., **142**, L419, (1965)
- [29] W. Press, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1988)
- [30] L. Randall und R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [hep-ph/9905221]
- [31] L. Randall und R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [hep-th/9906064]
- [32] A. Riess et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron.J. **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201]
- [33] A. Riess et al., *Type Ia Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope*, Astrophys. J. **607**, 665 (2004)
- [34] V. Sahni et al., *Statefinder – a new geometrical diagnostic of dark energy*, JETP Lett. **77**, 201 (2003) [astro-ph/0201498]
- [35] V. Sahni, *Cosmological Surprises from Braneworld models of Dark Energy*, JGRG14, Edited by W. Hikida, M. Sasaki, T. Tanaka and T. Nakamura (2004) [astro-ph/0502032]
- [36] V. Sahni, *Dark Matter and Dark Energy*, The Physics of the Early Universe, Editor E. Papantonopoulos, Springer (2005) [astro-ph/0403324]

- [37] V. Sahni et al., *Cosmic mimicry: Is LCDM a Braneworld in Disguise?*, [astro-ph/0505004]
- [38] V. Sahni und Y. Shtanov, *Braneworld models of dark energy*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0311**, 014 (2003) [astro-ph/0202346]
- [39] V. Sahni und Y. Shtanov, *New Vistas in Braneworld Cosmology*, Int.J.Mod.Phys. D **11**, 1515 (2000) [gr-qc/0205111]
- [40] Y. Shtanov, *On Brane-World Cosmology* (2000) [hep-th/0005193]
- [41] Y. Shtanov, *Closed System of Equations on a Brane*, Phys. Lett. B **541**, 177 (2002) [hep-ph/0108153]
- [42] Y. Shtanov und V. Sahni, *New Cosmological Singularities in Braneworld Models*, Class. Quant. Grav. **19**, L101 (2002) [gr-qc/0204040]
- [43] Y. Shtanov und V. Sahni, *Bouncing Braneworlds*, Phys. Lett. B **557**, 1 (2003) [gr-qc/0208047]
- [44] G. Smoot et al., *Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps*, Ap. J. Lett., **396**, L1 (1992)
- [45] <http://snap.lbl.gov/>
- [46] J. Sollerman et al., *Supernova Cosmology and the ESSENCE project*, [astro-ph/0510026]
- [47] D. Spergel, *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003) [astro-ph/0302209]
- [48] J. Tonry et al., *Cosmological Results from High-z Supernovae*, Astrophys. J. **594**, 1 (2003) [astro-ph/0305008]
- [49] R. Vishwakarma, *Recent Supernovae Ia observations tend to rule out all the Cosmologies!* (2005) [astro-ph/0511628]
- [50] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984)
- [51] I. Zlatev, L. Wang und P. Steinhardt, *Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant*, Phys.Rev.Lett. **82**, 896 (1999) [astro-ph/9807002]





## Danke an . . .

- ... **Max Camenzind**, der sich immer Zeit genommen hat, obwohl er eigentlich immer im Stress war
- ... **Immo Appenzeller** für die Zweitkorrektur, obwohl er eigentlich seinen Ruhestand genießen könnte
- ... **Jürgen Sauter** für die Computer-Voodoo puppen, den Aufbau-Smiley und die Versorgung mit Computerspielen eine Woche vor Abgabe
- ... den Computerguru **Volker Gaibler** für die Hilfe bei der Bändigung dieser Maschinen, die permanente Versorgung mit Keksen und das näher bringen von Kulturgut der 80er Jahre (Captain Future)
- ... **Thomas Mädler** für das (versuchte) Korrekturlesen und die musikalische Untermalung
- ... **Steffen Brinkmann** für die Vermittlung der Denkweise des gemeinen Volkes (Bild- "Zeitung")
- ... **alle übrigen Sternwartler**
- ... **Hendrik Heinel** für das Korrekturlesen, obwohl er mir den Literaturnobelpreis abspricht
- ... **meine Eltern** für das Sponsoring

## Keinen Dank an . . .

- ... **Jürgen Sauter** für die Sabotageversuche, den ständigen Beschuss mit Papierfliegern und den Mord an einem Eichhörnchen  
;-)



# Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 6. März 2006

---