INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der Ruprecht - Karls - Universität Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Mathematikerin Kathrin Maurischat

aus Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Mai 2008

Thema

Eine Verallgemeinerung der lokalen Gross-Zagier-Formeln von Zhang

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Weissauer

Prof. Dr. Winfried Kohnen

Zusammenfassung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist das Umfeld der lokalen Gross-Zagier-Formeln von Zhang [Zh1], die einen quantitativen Zusammenhang herstellen zwischen speziellen lokalen Koeffizienten (Local Linking Numbers) einer verallgemeinerten Höhenpaarung und Produkten lokaler Neuformen einer Rankin-Selberg-Faltung automorpher Darstellungen. Hier hingegen werden qualitativen Aussagen über die Verwandtschaft des Raums aller Local Linking Numbers mit dem Raum aller Produkte von Fourierkoeffizienten untersucht. Erste Anzeichen solcher Gemeinsamkeiten finden sich bereits bei Jacquet [Ja1]. Die Methoden, die hierzu verwendet werden, sind durchgehend explizit-konstruktiver Natur. Insbesondere wird ein Matching der genannten Räume bewiesen. Desweiteren wird das Verhalten der Local Linking Numbers unter einer Translation untersucht, mit deren Hilfe dann ein Operator etabliert wird, der als ein geometrisches Pendant zum analytischen Heckeoperator interpretiert wird. Die lokalen Gross-Zagier-Formeln werden schließlich mit Hilfe dieser Ergebnisse erneut formuliert, womit diese ihre Tauglichkeit unter Beweis stellen.

Abstract

The starting point of this thesis is the setting of Zhang's local Gross-Zagier formulas [Zh1]. These establish a quantitative connection between the products of local newforms related to a Rankin-Selberg convolution of automorphic representations and special local coefficients (so called local linking numbers) of a generalised height pairing. In contrast, the present work is concerned with qualitative assertions between the space of all local linking numbers and the space of all products of Fourier coefficients. First hints at such similarities are due to Jacquet [Ja1]. The methods used here are always of explicit-constructive nature. In particular, a matching of the two spaces mentioned above is proved. Further, the properties of local linking numbers under a suitable translation is studied in oder to establish an operator which will be interpreted as a geometric version of the analytic Hecke operator afterwards. Finally, the local Gross-Zagier formulas are reformulated using these results, showing their suitability.

Danksagung

Ich bedanke mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Rainer Weissauer für den interessanten Themenvorschlag, der dieser Arbeit zugrunde liegt, sowie für seine Betreuung und seine inspirierenden Gedanken, die er mit mir geteilt hat. Ich bedanke mich bei Andreas Röscheisen fürs intensive Korrekturlesen. Uwe Weselmann verdanke ich einige nützliche Tips und Korrekturen und nicht zuletzt die Vereinfachung der Rechnung in Kapitel 7.1.1.
Dem Evangelischen Studienwerk e.V. Villigst danke ich für das Promotionsstipendium. Danke, für die interessanten und motivierenden Begegnungen und die Arbeit in Villigst!
Julia, Andreas, Prof. Dr. B. H. Matzat, Dr. Katrin Maus, Birgit und Sabine herzlichen Dank für all die Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **iii**

I Local Linking Numbers **1**

1 Terminologie, Grundlegendes, Resultate **3**
1.1 Geometrie 3
1.2 Automorphe Formen 14
1.3 Hauptresultate 22
1.4 Lokale Gross-Zagier-Formel 27

2 Charakterisierung der Local Linking Numbers **33**
2.1 Die Eigenschaften der Local Linking Numbers 38
2.2 Die Charakterisierung 46
2.2.1 Vorgehensweise im Beweis 46
2.2.2 Ausführung im Fall einer Körpererweiterung 47
2.2.3 Ausführung im Fall einer zerfallenden Algebra 52
2.3 Umparametrisierung von x auf ξ 60

3 Matching **63**

II Verhalten der Local Linking Numbers unter Translation, Matchingoperatoren **65**

4 Der Fall eines kompakten Torus **69**
4.1 Explizite Beispiele 72
4.1.1 Eine spezielle translatierte Linking Number falls $-1 \in F^{\times 2}$ 75
4.1.2 Eine spezielle translatierte Linking Number falls $-1 \notin F^{\times 2}$ 83
4.1.3 Weitere Beispiele 88

5 Der Fall eines nichtkompakten Torus **99**
5.1 Ein Beispiel 103
5.2 Vermutung und Beweisansatz 118

6 Ein Matchingoperator **123**
6.1 Konstruktion für den nichtkompakten Fall 125
6.2 Konstruktion für den kompakten Fall 131
6.3 Zusammenfassung 133

7 Vergleich mit dem Zhangschen Operator **135**
7.1 Lokale Gross-Zagier-Formel 137
7.1.1 Zhangs Local Linking Numbers 137
7.1.2 Neuformen 140
7.2 Reformulierung der lokalen Gross-Zagier-Formel 143

8 Beweis von Vermutung 5.4 **147**
8.1 Transformation von Gleichung (III) und (IV) in Gleichung (II) und (I) 149
8.2 Reduktionen 151
8.3 Gleichung (I): $z_2 = 0$ und $z_3 = 0$ 153
8.4 Gleichung (I): $z_2 \neq 0$ und $z_3 = 0$ 162
8.5 Gleichung (I): $z_2 \neq 0$ und $z_3 \neq 0$ 171
8.6 Gleichung (I): $z_2 = 0$ und $z_3 \neq 0$ 178
8.7 Gleichung (II): $z_1 = 0$ und $z_4 = 0$ 185
8.8 Gleichung (II): $z_1 \neq 0$ und $z_4 = 0$ 191
8.9 Gleichung (II): $z_1 = 0$ und $z_4 \neq 0$ 198
8.10 Gleichung (II): $z_1 \neq 0$ und $z_4 \neq 0$ 206
8.11 Auftretende Local Linking Numbers 222
8.11.1 Integrale mit der Bedingung $v(y_2) < n_2$, $v(y_3) \geq n_3$ aus dem inneren Integral 222
8.11.2 Integrale mit den Bedingungen $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) > -v(y_3)$ aus dem inneren Integral 224
8.11.3 Integrale mit der Bedingung $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) < -v(y_3)$ aus dem inneren Integral 228
8.11.4 Integrale mit der Bedingung $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) = -v(y_3)$ aus dem inneren Integral 229
8.12 Ein Korollar 236

Literaturverzeichnis **237**

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit lokalen $\wp$-adischen Fragestellungen, deren Ursprung in der Arbeit von Gross und Zagier [GrZ] über die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer liegt. Diese Vermutung liefert einen Zusammenhang zwischen dem Wert der L-Funktion einer elliptischen Kurve E über $\mathbb{Q}$ im Zentrum des kritischen Streifens und der Struktur der Gruppe der $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte auf E (Mordell-Weil-Gruppe). Insbesondere besagt diese Vermutung, daß der Rang der Mordell-Weil-Gruppe gleich der Nullstellenordnung von $L(E, s)$ im zentralen Punkt $s = \frac{1}{2}$ sein sollte. Diese tiefliegende Vermutung ist bis heute unbewiesen.
Gross und Zagier haben aber in dem Fall, in dem der Rang eins ist, diese Vermutung recht allgemein bestätigen können. Die Beweisidee von Gross und Zagier besteht darin, den Wert der Ableitung $L'(E, \frac{1}{2})$ explizit durch eine Formel zu berechnen, deren entscheidender Anteil der Wert einer Höhenpaarung für E ist, woraus dann die Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung im Fall Rang eins abgelesen werden kann. Der Beweis dieser Gross-Zagier-Formel ist sehr kompliziert und beruht darauf, sowohl $L'(E, \frac{1}{2})$ als auch die Höhenpaarung auf geeignete Weise so in eine Reihe zu entwickeln, daß wie durch ein Wunder Term für Term übereinstimmen.
Dieses Wunder ist schwer zu verstehen und bedarf einer inhaltlichen Begründung. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung findet sich in den Arbeiten von Zhang [Zh1], [Zh2]. Zhangs Ansatz unterscheidet sich auf den ersten Blick nur geringfügig vom Ansatz von Gross und Zagier. Der Unterschied besteht im wesentlichen darin, daß er den Summandenvergleich der Reihenentwicklungen besser strukturiert, indem er sogenannte lokale Gross-Zagier-Formeln beweist, die ein $\wp$-adisches Analogon der globalen Gross-Zagier-Formel darstellen. Das sind Identitäten zwischen geeigneten lokalen Ableitungen von lokalen L-Faktoren auf der einen Seite und lokalen geometrischen Paarungen (als lokales Analogon zur Höhenpaarung) auf der anderen Seite.

Diese lokalen Identitäten werfen ein neues Licht auf die globale Gross-Zagier-

Formel. In der Tat schreibt sich die globale Höhenpaarung als eine Summe

$$\sum_{\gamma} m(\gamma) \log(S_\gamma),$$

wobei γ gewisse globale Nebenklassen durchläuft, und die S_γ gewisse Adelprodukte von rein lokalen $\wp$-adischen Termen sind. Die Ableitung der L-Reihe wird auf ähnlich Weise in eine Summe entwickelt, und eine Teil des Beweis beruht nun auf den lokalen Gross-Zagier-Identitäten, die $\log(S_\gamma)$ durch lokale beziehungsweise adelische Whittakerfunktionen ausdrücken. Dann müssen nur noch die globalen Multiplizitäten $m(\gamma)$ verglichen werden, wobei diese Werte zwar globaler Natur sind, aber gute funktorielle Eigenschaften besitzen.

Diese Neustrukturierung des Beweises der Gross-Zagier-Vermutung liefert eine verblüffende Analogie zu entsprechenden Vergleichen in der Theorie der Selbergschen Spurformel. Dort sind die entsprechenden Summen von der Gestalt

$$\sum_{\gamma} \tau(\gamma) O_\gamma,$$

wobei γ gewisse globale Konjugationsklassen durchläuft, und die O_γ gewisse (stabile) Orbitalintegrale sind (das heißt adelische Produkte von rein $\wp$-adischen Termen). In der Theorie der Spurformel ist es wohlbekannt, daß die globalen Zahlen $\tau(\gamma)$ sich als Tamagawazahlen wie Eulercharakteristiken verhalten. Weil sie ein gutes funktorielles Verhalten besitzen, kann man diese Terme meist mit Hilfe von Methoden der Galoiskohomologie berechnen. Bei Spurformelvergleichen ist erstaunlicher Weise der Vergleich der lokalen Terme (das lokale Matching) das diffizilere Problem, wo es erst in jüngster Zeit zu erheblichen Fortschritten durch die Arbeit von Ngô und Laumon [LauNg] gekommen ist.
Das lokale Matching-Problem in der Theorie der Spurformel besteht darin, die lokalen Terme O_γ für Spurformeln zu verschiedenen Gruppen zu vergleichen. Dies steht in auffallender Analogie zu dem Vergleich, der bei den lokalen Gross-Zagier-Identitäten von Zhang auftritt. Wichtig in der Theorie der Spurformel ist es, eine möglichst große Klasse von lokalen Identitäten zur Verfügung zu haben ([LaSh1], [LaSh2]). Durch iteratives Anwenden der globalen Spurformel kann man dann in der Regel aus lokalen Resultaten (insbesondere dem fundamentalen Lemma), die man an fast allen Stellen kennt, auch auf Eigenschaften an den übrigen Stellen schließen. Aufgrund der globalen Bedingungen der Summe und der funktoriellen Eigenschaften der Tamagawazahlen erhält man im nächsten Schritt Aussagen über die Tamagawazahlen beziehungsweise über die Multiplizitäten.

Es liegt nahe zu fragen, ob ein solcher Ansatz auch auf die Identitäten vom Gross-Zagier-Typ zutrifft. Ziel dieser Arbeit ist nun erst einmal ein Verständnis der lokalen Identitäten. Hierbei stellen im Sinne der obigen Analogie mit der Spurformel die lokalen Identitäten von Zhang ein Analogon des fundamentalen Lemmas [Lan] dar. Es fehlt allerdings das Matching auf einer großen Klasse von Funktionen, was ein entscheidendes Hilfsmittel in der Theorie der Spurformel ist. Dieses lokale Matching - das heißt die Bereitstellung einer großen Klasse von verallgemeinerten lokalen Gross-Zagier-(Zhang)-Identitäten - ist das Ziel dieser Arbeit.

Den Ausgangspunkt bilden dabei die Local Linking Numbers von [Zh1], vergleiche (0.0.1). Dies sind die lokalen Koeffizienten der (globalen) geometrischen Paarung. Der Begriff der Local Linking Number wurde dabei direkt von [Zh1] übernommen. Ganz speziellen Local Linking Numbers stellt Zhang in der lokalen Gross-Zagier-Formel die Produkte von Whittakerneuformen gegenüber (vergleiche Satz 7.10). Diese Produkte sind die Fourierkoeffizienten eines Integralkerns für die Rankin-Selberg-L-Funktion assoziierter automorpher Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe GL_2. Hier werden also spektrale Daten mit geometrischen verglichen. Nichts anderes macht die Spurformel, wenn auch in anderer Form und deutlich besser verstanden.
Noch offensichtlicher wird diese Parallele, wenn man sich von der Selbergschen Spurformel löst und die allgemeinere Klasse der relativen Spurformeln als Analogie betrachtet. Im vorliegenden Fall der Gross-Zagier-Identitäten findet sich der relevante Vergleichsfall in einer Arbeit von Jacquet [Ja1]. Die dort definierten „Orbitalintegrale“ (siehe hierzu Satz 2.1) sind schon beinahe die Local Linking Numbers von [Zh1]. Mit ihrer Hilfe wird in [Ja1] sogar eine globale Spurformel für GL_2 bewiesen. Dabei werden nicht nur ganz spezielle Orbitalintegrale benutzt, sondern tatsächlich alle. Es ist offensichtlich, daß zwischen den lokalen Untersuchungen der vorliegenden Arbeit und den lokalen Untersuchungen dort ein sehr enger Zusammenhang besteht.

Damit ergeben sich nun natürlich eine Reihe von Fragen. Wie lassen sich die Local Linking Numbers allgemein beschreiben? In welchem Verhältnis stehen sie zu den Produkten von Whittakerfunktionen, von denen man nun nicht mehr fordert, Neuformen zu sein? Oder naiv: Was passiert, wenn man auf beiden Seiten der lokalen Gross-Zagier-Formel beliebige Funktionen und nicht nur Neuformen beziehungsweise eine spezielle Linking Number zuläßt? Ist es möglich, Aussagen über die gesamten Funktionenräume zu machen? Gibt es Korrespondenzen, sogenannte Matchings? Natürlich wird man dabei nicht die gleichen Eigenschaften erhalten, wie sie in der lokalen Gross-Zagier-Formel

stecken. Man verläßt den Rahmen der L-Funktion und betrachtet Koeffizienten der allgemeinen Mellin-Transformierten, verliert die schöne Form des Integralkerns etc.
Weiter benutzt die Kernaussage in [Zh1], also die lokale Gross-Zagier-Formel, Heckeoperatoren $\mathbf{T}_b$ auf den Neuformen und einen in seiner Definition stark von der speziellen, dort verwendeten Funktion abhängigen Operator auf der Local Linking Number. Dadurch bekommen beide Seiten eine zusätzliche Abhängigkeit von einer neuen Variable b. Auch hier ist es erstrebenswert, für den geometrischen Operator eine Verallgemeinerung über das in [Zh1] bearbeitete Neuformenniveau hinaus zu erhalten.

Diesen Fragen wird im Rahmen dieser Dissertation nachgegangen. Es werden Matchings der Whittakerprodukte mit den Local Linking Numbers, sowie des Heckeoperators mit einem Operator auf den Local Linking Numbers, der der Translation eng verwandt ist, bewiesen.
Die Vorgehensweise ist dabei in Ermangelung einer tieferen Einsicht durchgehend explizit und konstruktiv. Das macht die Arbeit ziemlich unhandlich und unelegant. Das liegt wohl hauptsächlich daran, daß die tieferen Gründe für die hier aufgestellten Korrespondenzen überhaupt nicht verstanden sind. Die Werkzeuge, die es ermöglichen könnten, sich vom Ballast der Rechnungen zu befreien, gibt es deshalb noch nicht. Die vorliegende Arbeit will nur sagen „Es gibt“, nicht „deshalb“. Vielleicht helfen aber die lokalen Aussagen, etwas Licht auf die zugrunde liegenden Abläufe zu werfen.

Die Arbeit gliedert sich auf natürliche Weise in zwei Teile. Der erste befaßt sich mit den Local Linking Numbers, ihrer Charakterisierung und der Gegenüberstellung zu den Whittakerprodukten. Er kulminiert in einem Matching: Der Raum der Local Linking Numbers entspricht dem Raum der Whittakerprodukte.
Der zweite Teil widmet sich der Konstruktion eines Operators auf der geometrischen Seite, der eine Entsprechung des analytischen Heckeoperators $\mathbf{T}_b$ auf den Whittakerprodukten ist. Auch hier erhält man eine positive Matching-Aussage, denn der geometrische Operator verwirklicht die Asymptotik des Heckeoperators für $v(b) \to \infty$ vollkommen. Dieser Operator wird schließlich auch einem quantitativen Anwendungstest unterzogen, indem mit ihm die lokale Gross-Zagier-Formel formuliert wird.

Genauer werden im ersten Teil zunächst alle nötigen Definitionen und Grundlagen gesammelt (Kapitel 1). Die meisten davon finden sich schon bei [Zh1], denn diese Arbeit markiert den theoretischen Ausgangspunkt der vorliegenden Dissertation.

Zunächst wird die geometrische Herkunft (Abschnitt 1.1) der Local Linking Numbers aus verallgemeinerten Höhenpaarungen dargelegt. Vielleicht wäre eine deutsche Übersetzung des Begriffs der „Local Linking Numbers“ angebracht gewesen, etwa „lokale Verbindungszahlen“, um deutlich zu machen, daß sie natürlich rein gar nichts mit topologischen Verkettungszahlen zu tun haben, sondern vielmehr ein Bindeglied zwischen Geometrie und Analysis sind.
Es sei F ein $\wp$-adischer Zahlkörper, der die Lokalisierung eines total reellen Zahlkörpers an einer endlichen Stelle ist. Und es sei K eine quadratische Erweiterung von F, die von einer imaginär quadratischen Erweiterung des total reellen Zahlkörpers herrührt. K kann eine Körpererweiterung von F sein, oder eine zerfallende Algebra. Die Local Linking Numbers (vergleiche Definition 1.6) sind Funktionen der multiplikativen Gruppe $F^\times$ in einer Variablen x:

$$< \phi, \psi >_x = \int_{T\backslash G} \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy. \tag{0.0.1}$$

Hierbei bezeichnet G die F-wertigen Punkte der projektiven Gruppe, die sich aus der Einheitengruppe $D^\times$ einer Quaternionenalgebra D über F ergibt. T ist der maximale Torus von G, der durch die quadratische Erweiterung K von F definiert wird. ϕ und ψ sind Elemente des Schwartzraums auf G, die sich von links unter T wie ein Charakter χ transformieren: $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$. Das Element $\gamma(x)$ definiert eine x assoziierte Doppelnebenklasse $T\gamma(x)T$. Dieses Doppelintegral legt die Local Linking Numbers als lokale Koeffizienten einer Höhenpaarung fest.

Des weiteren werden die Grundlagen der analytischen Seite dargelegt (Abschnitt 1.2). Dies sind in erster Linie Resultate aus der Rankin-Selberg-Theorie automorpher Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_2(F)$. Man faltet eine cuspidale automorphe Form mit trivialem zentralem Charakter und die Thetareihe $\Pi(\chi)$, das heißt die irreduzible Komponente zum Charakter χ der Weildarstellung zur Normform von K/F. Dabei tritt eine Eisensteinreihe $\Pi(|\cdot|^{\frac{1}{2}-s}, \omega|\cdot|^{s-\frac{1}{2}})$ auf, wobei ω der durch die Erweiterung K/F bestimmte Charakter von $F^\times$ ist. Die Produkte aus Kirillovfunktionen der Thetareihe und der Eisensteinreihe an der zentralen Stelle $s = \frac{1}{2}$ bilden die sogenannten Whittakerprodukte. Auf der automorphen Seite findet die vorliegende Arbeit keine neuen Ergebnisse, sondern wendet klassische Resultate an.

Nachdem die theoretischen Grundlagen dargestellt sind, können in Abschnitt 1.3 die Hauptresultate dieser Arbeit, die über Kapitel 2 bis 7 verstreut sind, in exakter Terminologie zusammengestellt werden. Ebenso ist es an dieser Stelle möglich, die globale Herkunft der lokalen Gross-Zagier-Formel nachzuzeichnen (Abschnitt 1.4).

In Kapitel 2 werden vier Eigenschaften (vergleiche Satz 2.6 und 2.7) der Local Linking Numbers herausgearbeitet, die die Local Linking Numbers vollständig als Funktionen der multiplikativen Gruppe $F^\times$ charakterisieren. Während beim Auffinden dieser Eigenschaften [Ja1] gefolgt wird (Abschnitt 2.1), bedient sich die Konstruktion einer Local Linking Number zu einer gegebenen Funktion mit diesen Eigenschaften (Abschnitt 2.2) eher der allgemeinen Philosophie, Funktionen als Orbitalintegrale zu realisieren (vergleiche etwa [Vi82]). Die größte Schwierigkeit hierbei ist, daß Linking Numbers anders als Orbitalintegrale von zwei Funktionen, nämlich von ϕ und von ψ (0.0.1), abhängen, die man beide zugleich kontrollieren muß.
Schließlich werden in Kapitel 3 diese Eigenschaften, die die Local Linking Numbers charakterisieren, verglichen mit den Eigenschaften der Whittakerprodukte. Hieraus ergibt sich das Hauptresultat des ersten Teil: Bis auf einen obligaten Faktor entsprechen sich die Räume der Local Linking Numbers und der Whittakerprodukte exakt, was hier mit dem Begriff Matching bezeichnet wird (Satz 3.1).

Der zweite Teil beginnt mit einer umfassenden Untersuchung des Verhaltens der Local Linking Numbers bei Translation von rechts mit einem Element

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $b \in F^\times$. Es werden also die Eigenschaften der Funktion

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x$$

in b studiert. Die Translation ist die erste natürliche Kandidatin auf der Suche nach einem Hecke-Ersatzoperator auf der geometrischen Seite. Das Ziel ist, einen Operator $\mathbb{T}_b$ zu finden, unter dem die Local Linking Numbers für $v(b) \to \infty$ dieselbe Asymptotik besitzen wie die translatierten Whittakerprodukte.
Dabei unterscheiden sich die Betrachtungsweisen im Fall einer Körpererweiterung K/F und im Fall einer zerfallenden Algebra $K = F \oplus F$ extrem, was sich auch schon in Teil I bemerkbar machte. Im ersten Fall ist der Torus $T = F^\times \backslash K^\times$ kompakt, im zweiten Fall ist T nichtkompakt. Daher hat das innere Integral über T in (0.0.1) als Funktion von y einmal kompakten Träger, und einmal im allgemeinen nicht einmal mehr modulo T kompakten Träger. Im Fall eines kompakten Torus (Kapitel 4) lassen sich die Eigenschaften der Translation damit recht elegant beschreiben. Ist der Torus nichtkompakt, so ist das Schwerstarbeit und nimmt die Kapitel 5 und 8 ein. Die Ideen und die

grundlegende Vorgehensweise finden sich dabei in Kapitel 5. Dort wird Vermutung 5.4 aufgestellt, die in Kapitel 8 bewiesen wird. Zur besseren Lesbarkeit wurde dieser Beweis an das Ende dieser Arbeit gesetzt.

Aufgrund des riesigen Rechenaufwandes ist es nicht möglich gewesen, die translatierten Local Linking Numbers als Funktionen in den Variablen x und b zugleich vollständig zu studieren. Für allgemeine Aussagen wird im zweiten Teil dieser Arbeit daher immer x festgehalten. Einen guten Eindruck davon, was passieren kann, wenn sowohl x als auch b variieren, geben die Beispiele in den Abschnitten 4.1 und 5.1. Außerdem schließt Kapitel 8 mit einer Beobachtung darüber.

Die Translation realisiert die Asymptotik der Whittakerprodukte exakt, wenn der Charakter χ nicht über die Norm faktorisiert. Hingegen fehlt der führende Term, wenn χ über die Norm faktorisiert (vergleiche Satz 4.2 und Vermutung 5.4). Der Konstruktion eines Operators, der die guten Eigenschaften der Translation, die sie in vielen Fällen hat, erhält und die fehlenden Terme höchster Ordnung der Whittakerprodukte erzeugt, ist Kapitel 6 gewidmet. Dort werden zunächst in den Fällen eines nichtkompakten Torus (Abschnitt 6.1) und eines kompakten Torus (Abschnitt 6.2) separat Operatoren angegeben, die dann als Ausprägungen desselben Operators begriffen werden (Abschnitt 6.3). Es ist festzuhalten, daß es mehrere solche Operatoren gibt, und daß es der jeweiligen Anwendung überlassen bleibt, welcher in der konkreten Situation der geeignetste ist. Ihnen allen liegt das Prinzip zugrunde, über eine Reihe von gewichteten Translationen zu summieren.

In Kapitel 7 wird zunächst der Teil von [Zh1] referiert, der anschließend neu aufgegriffen werden soll. Das heißt, es wird die lokale Gross-Zagier-Formel an den Stellen, an denen der Heckeoperator nichttrivial ist, noch einmal bewiesen. Danach wird sie mit Hilfe des in Kapitel 6 konstruierten Operators neu formuliert. Dazu wird auf die Berechnungen der Beispiele 4.8 und 5.2 zurückgegriffen. Im Fall eines kompakten Torus erhält man exakt das Ergebnis von [Zh1], im nichtkompakten Fall werden die führenden Terme realisiert (vergleiche Bemerkung 7.13). Somit liefert der geometrische Operator nicht nur qualititative Korrespondenzen, sondern bewährt sich auch bei der quantitativen Identität der lokalen Gross-Zagier-Formel.

Teil I
Local Linking Numbers

Kapitel 1

Terminologie, Grundlegendes, Resultate

In der vorliegenden Arbeit werden (lokale) geometrische Daten in Beziehung gesetzt zu (lokalen) analytischen Daten. Demgemäß gliedert sich auch die Terminologie in einen geometrischen und einen analytischen Teil.
Anschließend werden mit Hilfe der nun eingeführten Terminologie die Hauptresultate dieser Arbeit zusammengetragen.

1.1 Geometrie

Ziel ist es, gewisse lokale Daten, die Local Linking Numbers, gewisser geometrischer Paarungen zu definieren. Der Begriff der Local Linking Number geht auf Zhang [Zh1] zurück. Das geometrische Setting ist somit weitgehend dasselbe wie dort (vergleiche Kapitel 4, ebd.).

Globaler Hintergrund

Beginnen wir global. Es sei $\mathbb{F}$ ein total reeller algebraischer Zahlkörper und es sei $\mathbb{K}$ eine imaginär quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{F}$. Weiter sei $\mathbb{D}$ eine Divisionsquaternionenalgebra über $\mathbb{F}$, die $\mathbb{K}$ enthält und an den archimedischen Stellen zerfällt. Dann bezeichne $\mathbf{G}$ die innere Form der projektiven allgemeinen linearen Gruppe PGL_2 über $\mathbb{F}$, die durch die multiplikative Gruppe $\mathbb{D}^\times$ gegeben wird:

$$\mathbf{G}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^\times \backslash \mathbb{D}^\times.$$

Es sei $\mathbf{T}$ der maximale Torus von $\mathbf{G}$, der durch $\mathbb{K}^\times$ gegeben ist, das heißt $\mathbf{T}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^\times \backslash \mathbb{K}^\times$. Es seien $\mathbb{A}_\mathbb{F}$ (beziehungsweise $\mathbb{A}_\mathbb{K}$) die Adele von $\mathbb{F}$ (bezie-

hungsweise von $\mathbb{K}$) und $\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}$ die Teilmenge der endlichen Adele:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{F},f} = \prod_{v|\infty} 1 \prod_{v\nmid\infty}' \mathbb{F}_v,$$

wobei $\prod'$ das eingeschränkte topologische Produkt bezeichnet. Auf der Menge

$$\mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$$

operiere $\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ von links und $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ von rechts durch Multiplikation. Der Faktorraum $\mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ kann als Menge der CM-Punkte der Shimuravarietät, die gegeben ist durch das inverse System der

$$\mathrm{Sh}_K := \mathbf{G}(\mathbb{F})^+\backslash\mathcal{H}_1^n \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})/K, \tag{1.1.1}$$

aufgefaßt werden. Dabei durchläuft K die genügend kleinen kompakt offenen Untergruppen von $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$, und $\mathcal{H}_1$ bezeichnet die obere Halbebene, und n ist die Zahl der unendlichen Stellen von $\mathbb{F}$, also die Anzahl der Einbettungen von $\mathbb{F}$ in die reellen Zahlen. Die Einbettung der CM-Punkte in Sh_K ist dann dadurch gegeben, daß die Nebenklasse eines Elements $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ geschickt wird auf die Nebenklasse von (z, g), wobei $z \in \mathcal{H}_1^n$ von $\mathbf{T}$ festgelassen wird. Es sei

$$\mathcal{S}(\mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}))$$

der Raum der Schwartzfunktionen auf $\mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$. Er besteht aus den lokal konstanten Funktionen mit kompaktem Träger und Werten in den komplexen Zahlen. Mit einem Charakter von $\mathbf{T}$ sei stets ein Charakter von $\mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ bezeichnet, also ein Charakter von $\mathbb{A}_{\mathbb{K},f}^\times/\mathbb{K}^\times$, der auf $\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}^\times/\mathbb{F}^\times$ trivial ist. Insbesondere ist $\chi = \prod_v \chi_v$ das Produkt seiner lokalen unitären Komponenten. Der obige Schwartzraum läßt sich dann zerlegen in die direkte Summe (vergleiche [Go], S.3.3)

$$\mathcal{S}(\mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})) = \oplus_\chi \mathcal{S}(\chi, \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})),$$

wobei χ die Charaktere von $\mathbf{T}$ durchläuft und $\mathcal{S}(\chi, \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}))$ den Raum der Schwartzfunktionen ϕ bezeichnet, die sich unter $\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ wie χ transformieren, also

$$\phi(tg) = \chi(t)\phi(g),$$

für $t \in \mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ und für $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$. Jeder Summand $\mathcal{S}(\chi, \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}))$ läßt sich wiederum in seine lokalen Komponenten zerlegen:

$$\mathcal{S}(\chi, \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})) = \otimes_v \mathcal{S}(\chi_v, \mathbf{G}(\mathbb{F}_v)).$$

Es sei nun χ ein beliebiger aber fester Charakter von $\mathbf{T}$. Im folgenden soll eine Paarung $< \cdot, \cdot >$ auf $\mathcal{S}(\chi, \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}))$ definiert werden. Dazu definiert man für $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}))$ und eine Doppelnebenklasse

$$[\gamma] \in \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{F})/\mathbf{T}(\mathbb{F})$$

die **Linking Number**

$$< \phi, \psi >_\gamma := \int_{\mathbf{T}_\gamma(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})} \phi(\gamma y)\bar{\psi}(y)\ dy,$$

wobei $\mathbf{T}_\gamma := \gamma^{-1}\mathbf{T}\gamma \cap \mathbf{T}$. Für γ aus dem Normalisator von $\mathbf{T}$ ist also $\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{T}$. Sonst ist $\mathbf{T}_\gamma = 1$. Das Maß dy ist das von nichttrivialen Haarmaßen von $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$ und $\mathbf{T}(\mathbb{F})$, die später geeignet gewählt werden, auf dem Faktorraum induzierte Quotientenmaß. Es sei weiter

$$m : \mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{F})/\mathbf{T}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Multiplizitätenfunktion. Dann wird durch

$$< \phi, \psi > := \sum_{[\gamma]\in\mathbf{T}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{F})/\mathbf{T}(\mathbb{F})} m([\gamma]) < \phi, \psi >_\gamma \tag{1.1.2}$$

eine sesquilineare Paarung $< \cdot, \cdot >$ definiert. Die Bestimmung der Multiplizitätenfunktion ist hierbei das wesentliche globale Problem. Die Koeffizienten $< \phi, \psi >_\gamma$, also die Linking Numbers, sind das Bindeglied zwischen der globalen Höhenpaarung auf der Kurve und lokalen Ansätzen. Sie werden in der Gross-Zagier-Formel mit den Fourierkoeffizienten der L-Reihe (oder deren Ableitung) verglichen. Hieraus resultiert die Hoffnung, durch lokale Untersuchung der Linking Numbers Rückschlüsse auf die Multiplizitäten zu ziehen.

Lokale Betrachtung

Während ihre Rechtfertigung also in globalen Zusammenhängen zu suchen ist, befaßt sich diese Arbeit mit rein lokalen Vorgängen. Nun sollen die lokalen Komponenten der Linking Numbers $< \cdot, \cdot >_\gamma$ betrachtet werden. Man bemerkt zunächst

$$< \phi, \psi >_\gamma = \int_{\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})} \int_{\mathbf{T}_\gamma(\mathbb{F})\backslash\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})} \phi(t^{-1}\gamma t y)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy.$$

Normalisiert γ den Torus $\mathbf{T}$, so gilt

$$\phi(t^{-1}\gamma t y) = \begin{cases} \chi^{-2}(t)\phi(\gamma y), & \text{falls } \gamma \notin \mathbf{T}(\mathbb{F}) \\ \phi(\gamma y), & \text{falls } \gamma \in \mathbf{T}(\mathbb{F}) \end{cases}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{T}_\gamma(\mathbb{F})\backslash\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})} \phi(t^{-1}\gamma t y)\ dt \\ &= \phi(\gamma y) \begin{cases} \mathrm{vol}(\mathbf{T}_\gamma(\mathbb{F})\backslash\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})), & \text{falls } \chi^2 = 1 \text{ oder } \gamma \in \mathbf{T}(\mathbb{F}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}< \phi, \psi >_\gamma = &\ \mathrm{vol}(\mathbf{T}_\gamma(\mathbb{F})\backslash\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})) \\ &\cdot\delta(\chi^2 = 1 \text{ oder } \gamma \in \mathbf{T}(\mathbb{F})) \cdot \int_{\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})} \phi(\gamma y)\bar{\psi}(y)\ dy,\end{aligned}$$

wobei δ das Kroneckerdelta bezeichne. Dieser entartete Fall soll nicht weiter untersucht werden.
Ist hingegen γ kein Element des Normalisators und ϕ das Produkt seiner lokalen Faktoren, $\phi = \prod_v \phi_v$, dann gilt

$$\int_{\mathbf{T}_\gamma(\mathbb{F})\backslash\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})} \phi(t^{-1}\gamma t y)\ dt = \prod_v \int_{\mathbf{T}(\mathbb{F}_v)} \phi_v(t_v^{-1}\gamma t_v y_v)\ dt_v.$$

Ist auch $\psi = \prod_v \psi_v$, so erhält man

$$< \phi, \psi >_\gamma = \prod_v < \phi, \psi >_{\gamma,v}$$

mit

$$< \phi, \psi >_{\gamma,v} := \int_{\mathbf{T}(\mathbb{F}_v)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{F}_v)} \int_{\mathbf{T}(\mathbb{F}_v)} \phi_v(t_v^{-1}\gamma t_v y_v)\ dt_v \bar{\psi}_v(y_v)\ dy_v,$$

wobei das Maß $dy = \prod_v dy_v$ das Produkt seiner lokalen Komponenten ist, ebenso $dt = \prod_v dt_v$.

Bei der Definition von $< \phi, \psi >_{\gamma,v}$ fällt auf, daß sie von der $\mathbf{T}(\mathbb{F}_v)$-Konjugationsklasse von γ abhängt, während das Produkt $< \phi, \psi >_\gamma$ davon nicht abhängt. Um eine saubere Sprache zu erhalten, muß man daher weitere Forderungen an γ stellen. Dies wird auf unten (Lemma 1.5 und Definition 1.6) verschoben, wenn die nötige Terminologie eingeführt ist. Trotzdem soll als Gedankenstütze vorerst festgehalten werden

Definition 1.1. *(Vorläufige Definition der Local Linking Numbers)*
Es seien $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi_v, \mathbf{G}(\mathbb{F}_v))$ gegeben. Dann heißt

$$< \phi, \psi >_{\gamma,v} := \int_{\mathbf{T}(\mathbb{F}_v)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{F}_v)} \int_{\mathbf{T}(\mathbb{F}_v)} \phi(t_v^{-1}\gamma t_v y_v)\ dt_v\ \bar{\psi}(y_v)\ dy_v$$

die **Local Linking Number** *zu ϕ, ψ und γ.*

Da ab jetzt rein lokal gearbeitet wird, werden die Notationen vereinfacht:
F bezeichne nun die Lokalisierung des total reellen Zahlkörpers $\mathbb{F}$ an einer endlichen Stelle, die 2 nicht teilt. K sei die quadratische Erweiterung von F, die von der imaginär quadratischen Erweiterung $\mathbb{K}$ von $\mathbb{F}$ herrührt. K kann entweder eine quadratische Körpererweiterung, $K = F(\sqrt{A})$, von F sein, oder eine zerfallende Algebra vom Rang zwei, $K = F \oplus F$. Die lokalen Ringe von F beziehungsweise K seien $\mathbf{o}_F$ beziehungsweise $\mathbf{o}_K$. Der Ring $\mathbf{o}_F$ besitzt das maximale Primideal $\wp_F$. Ist K ein Körper, so bezeichne $\wp_K$ analog das maximale Primideal von $\mathbf{o}_K$. Ist $K = F \oplus F$, so sei $\wp_K := \wp_F \oplus \wp_F$. Es ist $\kappa_F := \mathbf{o}_F/\wp_F$ der Restklassenkörper von F der Charakteristik p mit q Elementen. Es sei π_F ein Erzeuger von $\wp_F$. Wenn keine Verwechslung möglich ist, so werden die Indices an $\wp_F$ und π_F oft weggelassen. Weiter sei ω der quadratische Charakter von $F^\times$, der zur Erweiterung K/F gehört. Es ist also $\omega(x) = -1$ genau dann, wenn x nicht im Bild der Norm von K/F liegt. Zerfällt K, so ist $\omega = 1$, denn die Norm von $(x, y) \in K$ ist schlicht xy.
Es sei $D := \mathbb{D}(F)$, $T := \mathbf{T}(F)$ und $G := \mathbf{G}(F)$.
Der Satz von Wedderburn-Artin gibt genau zwei Möglichkeiten: Entweder kann die Quaternionenalgebra D zerfallen, dann ist D isomorph zum Ring der 2×2-Matrizen, $D \cong M_2(F)$ und $G \cong \mathrm{PGL}_2(F)$. Oder D zerfällt nicht, dann ist D ein Schiefkörper über F, und $G = F^\times \backslash D^\times$ ist die nicht zerfallende innere Form der $\mathrm{PGL}_2(F)$. Man definiert

$$\delta(D) := \begin{cases} 0, & \text{falls } D \text{ zerfällt} \\ 1, & \text{falls } D \text{ nicht zerfällt} \end{cases}.$$

Lemma 1.2. *([Zh1] Seite 55) Die Quaternionenalgebra D hat die Struktur*

$$D = K + \epsilon K,$$

wobei $\epsilon \in D^\times$ und $\epsilon \notin K$ so, daß für alle $t \in K$ gilt $\epsilon t = \bar{t}\epsilon$, und $\bar{t}$ das Galoiskonjugierte von t bezeichnet. Zerfällt K, so ist $\overline{(x, y)} = (y, x)$. Aus diesen Eigenschaften folgt $c := \epsilon^2 \in F^\times$.
Die reduzierte Norm von D werde mit N bezeichnet. Eingeschränkt auf $K^\times$ ist dies die Norm der Erweiterung K/F. Es gilt

$$\mathrm{N}(\gamma_1 + \epsilon\gamma_2) = \mathrm{N}(\gamma_1) + \mathrm{N}(\epsilon)\,\mathrm{N}(\gamma_2)$$

und

$$\mathrm{N}(\epsilon) = \epsilon\bar{\epsilon} = -\epsilon^2 = -c.$$

D zerfällt genau dann, wenn $c \in \mathrm{N}(K^\times)$. Denn genau dann ist $0 \in \mathrm{N}(D \backslash \{0\})$.

Beweis: Man unterscheidet nach der Gestalt von K beziehungsweise D:
1. Fall: Es sei $K = F \oplus F$ zerfallen. Dann gilt $D \cong M_2(F)$ mit diagonal eingebettetem $K \cong \mathrm{Diag}(F) \subset M_2(F)$. Man definiert ϵ nun unter diesem Isomorphismus in $M_2(F)$:

$$\epsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\epsilon^2 = 1 \in F$. Die Gleichung $-1 = \det \epsilon = \mathrm{N}(\epsilon) = \epsilon\bar{\epsilon}$ hat die Lösung $\bar{\epsilon} = -\epsilon$. Da $\epsilon \notin K$, gilt auch noch $D = K + \epsilon K$. Dann rechnet man noch

$$\epsilon \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Da die Konjugation auf K gegeben ist durch $\overline{(a,d)} = (d,a)$, gilt also für alle $k \in K$, daß $\epsilon k = \bar{k}\epsilon$.
2. Fall: Es sei $K = F(\sqrt{A})$, aber D sei kein Schiefkörper, also $D \cong M_2(F)$. Unter einem solchen Isomorphismus muß K auf einen nichtzerfallenden Torus abgebildet werden, ohne Einschränkung

$$K \ni a + b\sqrt{A} \mapsto \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Nun wählt man ϵ wieder ohne Einschränkung in $M_2(F)$ als

$$\epsilon := \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $M_2(F) = K + \epsilon K$ und $\epsilon^2 = -A \in F$. Weiter rechnet man: $A = \det \epsilon = \mathrm{N}(\epsilon) = \epsilon\bar{\epsilon}$ hat die eindeutige Lösung $\bar{\epsilon} = A\epsilon^{-1} = -\epsilon$. Zuletzt findet man

$$\epsilon \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix} \epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} a & -bA \\ -b & a \end{pmatrix},$$

also gilt für alle $k \in K$, daß $\epsilon k = \bar{k}\epsilon$, wobei $^-$ wieder die Konjugation in K bezeichnet.
3. Fall: Es sei $K = F(\sqrt{A})$, und es sei D ein Schiefkörper. Zunächst sei $\delta \in D \backslash K$ beliebig. Dann gilt $D = K + \delta K$ als Vektorraum. Man sucht nach einem $\epsilon \in D \backslash K$ so, daß $\epsilon k = \tilde{k}\epsilon$ einen Körperautomorphismus von K/F definiert. Da D nicht kommutativ ist, ist dieser Automorphismus dann automatisch nicht die Identität sondern die Konjugation. Es wird also ein ϵ mit der Eigenschaft gesucht, daß $\epsilon\sqrt{A} = -\sqrt{A}\epsilon$. Man betrachtet den K-Automorphismus φ von D, der durch $d \mapsto \sqrt{A}^{-1} d \sqrt{A}$ definiert ist. Nun ist das Minimalpolynom von φ gegeben durch $m(X) = (X-1)(X+1)$. Zum Eigenwert -1 muß es einen Eigenvektor $\epsilon \notin K$ geben. Dieses ϵ erfüllt $\epsilon\sqrt{A} = -\sqrt{A}\epsilon$. (Natürlich könnte

man auch den 2. Fall so beweisen wie den 3. Fall, aber der dort gebrauchte Isomorphismus wird im weiteren Verlauf der Arbeit häufiger benützt werden.) Die weiteren Aussagen des Lemmas sind unmittelbar klar.

Für später notiert man die Isomorphismen aus den ersten zwei Fällen des vorangehenden Beweises:

Definition 1.3. *(a) Es sei $K = F \oplus F$ zerfallen. Dann ist $G \cong \mathrm{PGL}_2(F)$ und $D^\times \cong \mathrm{GL}_2(F)$. Man fixiert dafür den folgenden Isomorphismus von $D = K + \epsilon K \to M_2(F)$ mit $\epsilon^2 = 1$:*

$$\begin{aligned} K \ni (a,d) &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \\ \epsilon &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Es sei $K = F(\sqrt{A})$ eine Körpererweiterung, und es sei D zerfallen. Dann ist $G \cong \mathrm{PGL}_2(F)$ und $D^\times \cong \mathrm{GL}_2(F)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $\epsilon^2 = -A$. Man fixiert den Isomorphismus von $D = K + \epsilon K \to M_2(F)$:

$$\begin{aligned} K^\times \ni t = a + b\sqrt{A} &\mapsto \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}, \\ \epsilon &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Local Linking Numbers

Nun zurück zu den Linking Numbers $< \cdot, \cdot >_\gamma$. Sie waren bisher Funktionen der Doppelnebenklasse $[\gamma] \in T\backslash G/T$. Diese Doppelnebenklassen $T\backslash G/T$ können durch Punkte der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(F) = F \cup \{\infty\}$ parametrisiert werden (vergleiche [Ja1]):

Definition 1.4. *Man definiert $P : T\backslash G/T \to \mathbb{P}^1(F)$ durch*

$$P(\gamma_1 + \epsilon\gamma_2) := \frac{c\,\mathrm{N}(\gamma_2)}{\mathrm{N}(\gamma_1)}$$

für $\gamma_1 + \epsilon\gamma_2 \in D^\times$.

Man bemerkt für alle $t_1, t_2 \in K^\times$:

$$P(t_1(\gamma_1 + \epsilon\gamma_2)t_2) = \frac{c\,\mathrm{N}(\bar{t_1}\gamma_2 t_2)}{\mathrm{N}(t_1\gamma_1 t_2)} = P(\gamma_1 + \epsilon\gamma_2).$$

Also ist $P : T\backslash G/T \to \mathbb{P}^1(F)$ wohldefiniert.
Leicht rechnet man die folgenden Eigenschaften nach:
Falls K/F eine Körpererweiterung ist, dann ist $P(\gamma) = 0$ genau dann, wenn $\gamma \in T$, und $P(\gamma) = \infty$ genau dann, wenn $\gamma \in T\epsilon T$ ist.
Zerfällt K/F, dann sind die Urbilder von 0 unter P genau die Doppelnebenklassen T, Tn_+T und Tn_-T, und die Urbilder von ∞ genau die $T\epsilon T$, $T\epsilon n_+T$ und $T\epsilon n_-T$. Dabei ist

$$n_+ := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n_- := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall liegt 1 nicht im Bild von P, da $P(\gamma) = 1$ implizieren würde, daß $\det \gamma = 0$.
Für $P(\gamma) \notin \{0, \infty\}$ ist $P(\gamma) = P(\gamma')$ nur, wenn $\gamma' = t_1\gamma t_2$ mit $t_1, t_2 \in T$.
Das Bild von P in $\mathbb{P}^1(F)$ ist enthalten in $c\,\mathrm{N}(K^\times) \cup \{0, \infty\}$. Ist K/F eine Körpererweiterung, so ist das Bild genau $c\,\mathrm{N}(K^\times) \cup \{0, \infty\}$. Zerfällt K über F, dann ist das Bild genau $(F^\times\backslash\{1\}) \cup \{0, \infty\}$, denn dann ist die Norm surjektiv auf $F^\times$.

Natürlich sind auch andere Parametrisierungen als P möglich. Zhang [Zh1] etwa verwendet $\xi := \frac{P}{P-1}$ (Gleichung (4.1.16)). Dann ist $\xi(\gamma) = 0$ gleichbedeutend zu $P(\gamma) = 0$ und $\xi(\gamma) = 1$ gleichbedeutend zu $P(\gamma) = \infty$.

Lemma 1.5. *Es sei $\gamma \in D^\times$ mit $P(\gamma) \in F^\times$. Dann gibt es in der Doppelnebenklasse $T\gamma T$ von G genau eine T-Konjugationsklasse der Spur null.*

Beweis: Man benutzt die Darstellung $D = K + \epsilon K$ aus Lemma 1.2. Sei $\gamma \in D$, $\gamma = \gamma_1 + \epsilon\gamma_2$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in K$. Dann gilt

$$\operatorname{tr}\gamma = \gamma_1 + \bar{\gamma}_1 + \epsilon\gamma_2 + \bar{\gamma}_2\bar{\epsilon} = \operatorname{tr}\gamma_1.$$

Existenz: Sei $\gamma = \gamma_1 + \epsilon\gamma_2 \in D^\times$ mit $P(\gamma) \in F^\times$, und sei $\operatorname{tr}\gamma \neq 0$, da sonst nichts zu zeigen ist. Man gibt nun $t \in K^\times$ so an, daß $\operatorname{tr}(t\gamma) = 0$. Dann ist $t\gamma \in D^\times$ ein spurfreier Vertreter der Doppelnebenklasse $T\gamma T$.
Falls $K = F(\sqrt{A})$ eine Körpererweiterung ist, so sei $\gamma_1 = a + b\sqrt{A} \neq 0$. Setze $t := -bA + a\sqrt{A} \in K^\times$. Dann ist $\operatorname{tr}(t\gamma_1) = \operatorname{tr}(\sqrt{A}(a^2 - b^2A)) = 0$.
Falls $K = F \oplus F$ zerfällt, sei $\gamma_1 = (a, b)$ mit $ab \neq 0$ (da sonst $P(\gamma) = \infty$). Setze $t := (b, -a) \in K^\times$. Dann ist $\operatorname{tr}(t\gamma_1) = \operatorname{tr}(ab, -ab) = 0$.
Eindeutigkeit: Sei $\gamma = \gamma_1 + \epsilon\gamma_2 \in D^\times$ mit $P(\gamma) \in F^\times$ und $\operatorname{tr}\gamma = \operatorname{tr}\gamma_1 = 0$. Seien $t, t' \in K^\times$ so gegeben, daß auch $\operatorname{tr}(t\gamma t') = 0$. Zu zeigen ist $[t'] = [t^{-1}]$ in T.

Falls $K = F(\sqrt{A})$ eine Körpererweiterung ist, so ist $\gamma_1 = b\sqrt{A}$ mit $b \in F^\times$. Sei $tt' = \alpha + \beta\sqrt{A} \in K^\times$. Dann ist

$$0 = \mathrm{tr}(t\gamma t') = \mathrm{tr}(b\sqrt{A}(\alpha + \beta\sqrt{A})) = 2\beta bA.$$

Also ist $\beta = 0$ und $t' = t^{-1} \bmod F^\times$.
Falls $K = F \oplus F$ zerfällt, so gilt $\gamma_1 = (b, -b)$ mit $b \in F^\times$. Sei $tt' = (\alpha, \beta) \in K^\times$. Dann gilt

$$0 = \mathrm{tr}(t\gamma t') = \mathrm{tr}(b\alpha, -b\beta) = b(\alpha - \beta).$$

Also ist $\alpha = \beta$ und $t' = t^{-1} \bmod F^\times$.

Es sei nun χ ein Charakter von T, also ein Charakter von $K^\times$, der auf $F^\times$ trivial ist. χ ist die lokale Komponente eines Charakters von $\mathbf{T}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f})$.
Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\chi, G)$ ist der Raum der lokal konstanten Funktionen auf G, die sich von links unter T wie χ transformieren und die modulo T kompakten Träger haben. Das heißt, $\mathcal{S}(\chi, G)$ ist der Raum der kompakt induzierten Dartsellung $\text{c-ind}_T^G \chi$.
Nun sind alle Vorarbeiten getan, um die Local Linking Numbers aus Definition 1.1 präzise und eindeutig definieren zu können, und zwar als Funktionen auf $F^\times$:

Definition 1.6. *Es seien $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$. Man definiert für $x \in F^\times$ die* **Local Linking Number**

$$< \phi, \psi >_x := < \phi, \psi >_{\gamma(x)},$$

wenn ein spurfreies $\gamma(x) \in D^\times$ existiert, für das $P(\gamma(x)) = x$. Existiert ein solches $\gamma(x)$ nicht, so setzt man $< \phi, \psi >_x := 0$. Es ist also für $x \in c\,\mathrm{N} := c\,\mathrm{N}(K^\times)$

$$< \phi, \psi >_x = \int_{T\backslash G} \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy.$$

Dabei wird

$$\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt$$

als **inneres Integral** *bezeichnet und ψ als* **äußere Funktion**.

Wir haben bereits gesehen, daß $< \phi, \psi >_x$ wohldefiniert ist. Denn wenn es ein $\gamma \in D^\times$ mit $P(\gamma) = x$ gibt, das heißt wenn $x \in c\,\mathrm{N}(K^\times)$, dann ist $[\gamma] \in T\backslash G/T$ eindeutig bestimmt und in $[\gamma]$ existieren spurfreie Elemente, die eine einzige T-Konjugationsklasse bilden (Lemma 1.5). Deren Local Linking Numbers stimmen dann überein (Unimodularität des Haarmaßes auf T).

Eigenschaften des Charakters χ und des Schwartzraums $\mathcal{S}(\chi, G)$

Die Funktionen des Schwartzraums $\mathcal{S}(\chi, G)$ können lokal näher beschrieben werden:

Definition 1.7. *Eine kompakte Teilmenge C von G (oder auch von $D^\times$) heißt* **fundamental** *für χ, wenn für $t \in T$ aus $C \cap tC \neq \emptyset$ folgt, daß $\chi(t) = 1$, und wenn TC offen in G ist. Man kann dann aus der charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_C$ von C zusammen mit dem Charakter χ eine Funktion ϕ in $\mathcal{S}(\chi, G)$ basteln. Durch $\phi(g) = \chi(t)$, falls $g = tc$ mit $t \in T$ und $c \in C$, und $\phi(g) = 0$ sonst, ist nämlich $\phi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ wohldefiniert. Man schreibt in diesem Sinne*

$$\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_C.$$

Um einen festen Punkt $z \in G$ hat jede Funktion $\psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ die Gestalt $\psi = \psi(z) \cdot \chi \cdot \mathbf{1}_C$, denn ψ ist lokal konstant.
[Zh1] (Gleichung (1.1.1)) folgend macht man für den Charakter χ ein für alle Mal die einschränkende generelle

Voraussetzung 1.8. *Der Charakter χ von $T = F^\times \backslash K^\times$ sei höchstens dann verzweigt, wenn ω, also K/F, unverzweigt ist.*

Im Fall einer zerfallenden Algebra $K = F \oplus F$ hat χ die Gestalt $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ mit Charakteren χ_1, χ_2 von $F^\times$. Weil χ auf $F^\times$ trivial sein muß und F in K diagonal eingebettet ist, gilt $\chi_2 = \chi_1^{-1}$, also

$$\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1}).$$

Immer kann man den Führer $f(\chi)$ von χ sogar ohne Informationsverlust als Ideal in $\mathbf{o}_F$ auffassen: Das ist für zerfallendes K offensichtlich, denn dann ist $f(\chi) = f(\chi_1)$. Zerfällt K nicht und ist K/F verzweigt, so ist nach Voraussetzung 1.8 χ unverzweigt, also $f(\chi) \cap \mathbf{o}_F = \mathbf{o}_F$. Ist K/F eine unverzweigte Körpererweiterung, so ist $f(\chi) = \pi^{c(\chi)}\mathbf{o}_K$, für eine ganze Zahl $c(\chi)$ und ein Uniformisierendes π sowohl von K als auch von F. Also ist $f(\chi) \cap \mathbf{o}_F = \pi^{c(\chi)}\mathbf{o}_F$ wohlbestimmt.
Allgemein sei $c(\chi)$ der Exponent des Führers von χ. Es ist also $f(\chi) = (\pi^{c(\chi)})$, somit ist $c(\chi) \geq 0$ minimal so, daß $\chi((1 + \pi^{c(\chi)})^\times) = 1$.
Man findet noch

Lemma 1.9. *Für den Charakter χ von $T = F^\times \backslash K^\times$ sind gleichbedeutend:*
(a) χ ist quadratisch.
(b) χ faktorisiert über die Norm.

Beweis: Im Fall einer zerfallenden Algebra K ist $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$. Wenn χ über die Norm faktorisiert, dann muß für alle $(x, y) \in K^\times$ gelten: $\chi_1(xy^{-1}) = \chi_1(yx^{-1})$. Das ist nur für $\chi_1^2 = 1$ erfüllbar. Ist es umgekehrt erfüllt, dann faktorisiert χ über die Norm: $\chi(x, y) = \chi_1(xy) = \chi_1(\mathrm{N}(x, y))$.
Ist K/F eine Körpererweiterung, so bemerkt man zunächst, daß χ genau dann über die Norm faktorisiert, wenn für alle $t \in K^\times$ gilt $\chi(\bar{t}) = \chi(t)$. Während die eine Implikation hiervon trivial ist, folgt die andere mit Hilbert 90: $\chi(\bar{t}) = \chi(t)$, also $\chi(\bar{t}t^{-1}) = 1$, für alle $t \in K$ impliziert, daß der Charakter χ über $K^\times/(\sigma - 1)K^\times \cong N(K^\times)$ faktorisiert. Dabei ist σ der Erzeuger der Galoisgruppe von K/F.
Nun ist das Lemma ganz einfach zu beweisen: Da $\chi|_{F^\times} = 1$, gilt $\chi(\bar{t}t) = 1$ für alle $t \in K^\times$, also $\chi(\bar{t}) = \chi^{-1}(t)$. Somit ist $\chi^2 = 1$ gleichbedeutend zu $\chi(\bar{t}) = \chi(t)$ für alle $t \in K^\times$.

Voraussetzung 1.8 liefert folgendes Korollar zu Lemma 1.9:

Korollar 1.10. *Für eine verzweigte Körpererweiterung ist χ immer quadratisch und faktorisiert immer über die Norm.*
Bei einer unverzweigten Körpererweiterung folgt aus einer Unverzweigtheit von χ schon $\chi = 1$.

Beweis: Ein unverzweigter Charakter χ faktorisiert immer über die Norm, da dann die Normeinsgruppe von $K^\times$ im Kern von χ liegt. Das zeigt $\chi^2 = 1$ im Fall K/F unverzweigt und Voraussetzung 1.8. Sind sowohl K/F als auch χ unverzweigt, so ist $\chi(\mathbf{o}_K^\times) = 1$ und $\chi(\pi) = 1$ für ein F und K gemeinsames Primelement π. Da $K^\times \cong \mathbf{o}_K^\times \times \pi^{\mathbb{Z}}$, ist somit $\chi = 1$.

Haarmaße

Zuletzt eine Bemerkung zur Wahl der Haarmaße. Mit da sei ein nichttriviales additives Haarmaß von F bezeichnet. Zugehörige Volumina werden dann mit vol abgekürzt. Das Maß $d^\times a$ der multiplikativen Gruppe $F^\times$ sei verträglich mit da und Volumina seien mit $\mathrm{vol}^\times$ bezeichnet. Es gelte also

$$\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) = (1 - q^{-1})\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F^\times).$$

Das Maß auf $T\backslash G$ soll das von Haarmaßen auf G und T induzierte Quotientenmaß sein. Welches Maß für G dabei gewählt wird, wird später in speziellen Situationen konkret.

1.2 Automorphe Formen

Auch auf der analytischen Seite bewegt sich diese Arbeit in den Begriffen von [Zh1] Kapitel 3, was damit auch als Hauptreferenz angegeben sei. Werden weitere oder ausführlichere Aussagen benutzt als dort, werden zusätzliche Quellen angegeben. Im Großen und Ganzen wird dabei auf die in Abschnitt 1.1 eingeführte Notation zurückgegriffen. Insbesondere sei zum Beispiel $\mathbb{F}$ ein total reeller Zahlkörper und, wenn dies ohne Probleme möglich ist, F die Lokalisierung an einer beliebigen endlichen Stelle, die zwei nicht teilt.

Zulässige Darstellungen

Alle auftretenden Darstellungen Π der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ sind unendlichdimensional, irreduzibel und zulässig. Das heißt:

Definition 1.11. *Eine Darstellung* Π *von* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ *auf einem komplexen Vektorraum* V *(oder analog von* $\mathrm{GL}_2(F)$*) heißt* **glatt***, wenn*

$$V = \bigcup_K V^K,$$

wobei K *die kompakt offenen Untergruppen von* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ *(oder von* $\mathrm{GL}_2(F)$*) durchläuft. Äquivalent ausgedrückt: Zu jedem* $v \in V$ *gibt es eine kompakt offene Untergruppe* K *so, daß* $\Pi(K)v = v$*.*
Eine glatte Darstellung heißt **zulässig***, wenn alle* V^K *endlich dimensional sind.*
Eine Darstellung heißt irreduzibel, wenn sie keine echten Unterdarstellungen außer der trivialen besitzt.
Eine irreduzible zulässige Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ *heißt* **automorph***, wenn sie in der durch Rechtstranslation auf dem Raum* $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F}))$ *gegebenen Darstellung vorkommt.*

Wird Π lokal an einer endlichen Stelle v betrachtet, dann wird Π_v der Einfachheit halber wieder mit Π bezeichnet.
Wenn im folgenden von Theta- oder Eisenstein-„Reihen“ gesprochen wird, so sind damit automorphe Darstellungen gemeint, auf die dieser Name ihrer klassischen Herkunft nach übertragen wurde, auch wenn diese Herkunft hier irrelevant ist und übergangen wird.

Die unendlichdimensionalen, irreduziblen und zulässigen Darstellungen der $\mathrm{GL}_2(F)$ sind klassifiziert:

Satz/Definition 1.12. *([Ge] §4.2) Es sei* Π *eine irreduzible zulässige Darstellung der* $\mathrm{GL}_2(F)$*. Dann ist* Π *isomorph zu einer der folgenden Darstellungen:*

1. *Es sei ρ ein Charakter von $F^\times$. Dann definiert $\rho \circ \det$ eine irreduzible zulässige Darstellung von $\mathrm{GL}_2(F)$.*

2. *Hauptreihendarstellungen und spezielle Darstellungen: Es seien μ_1, μ_2 zwei Quasicharaktere von $F^\times$, und es sei $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$ der Raum der lokal konstanten Funktionen h auf $\mathrm{GL}_2(F)$, für die gilt:*

$$h(\begin{pmatrix} t_1 & x \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} g) = \mu_1(t_1)\mu_2(t_2) \left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{\frac{1}{2}} h(g)$$

   für alle $t_1, t_2 \in F^\times$, alle $x \in F$ und alle $g \in \mathrm{GL}_2(F)$. Die Rechtstranslation definiert eine Darstellung $\rho(\mu_1, \mu_2)$ von $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ auf $\mathcal{H}(\mu_1, \mu_2)$.

   Die Darstellung $\rho(\mu_1, \mu_2)$ ist irreduzibel außer wenn $\mu_1(x)\mu_2^{-1}(x) = |x|^{\pm 1}$. Wenn $\rho(\mu_1, \mu_2)$ irreduzibel ist, so heißt sie **Hauptreihendarstellung** *und wird auch mit $\Pi(\mu_1, \mu_2)$ bezeichnet.*

   Ist $\mu_1(x)\mu_2^{-1}(x) = |x|$, dann enthält $\rho(\mu_1, \mu_2)$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum, und der Faktorraum nach diesem ist irreduzibel. Ist hingegen $\mu_1(x)\mu_2^{-1}(x) = |x|^{-1}$, dann enthält $\rho(\mu_1, \mu_2)$ einen irreduziblen invarianten Unterraum der Kodimension eins. In beiden Fällen spricht man bei der resultierenden irreduziblen Darstellung von einer **speziellen** *Darstellung.*

3. *Supercuspidale Darstellungen: Es sei (Π, V) eine zulässige Darstellung von $\mathrm{GL}_2(F)$. Man definiert $V(N)$ als den Unterraum der Vektoren $v \in V$, die*

$$\int_{\wp^n} \Pi \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \; dx = 0$$

   für ein positives $n = n(v)$ erfüllen. Eine irreduzible zulässige Darstellung heißt **supercuspidal**, *wenn $V(N) = V$ gilt.*

Unendlichdimensionale zulässige Darstellungen besitzen mehrere wohlbekannte Modelle, etwa das Whittakermodell und das Kirillovmodell. Während auf letzteres weiter unten eingegangen wird, soll hier noch das Whittakermodell dargestellt werden.

Satz/Definition 1.13. *([Ge], Theorem 6.8) Es sei Π eine unendlichdimensionale, irreduzible und zulässige Darstellung der $\mathrm{GL}_2(F)$. Sei weiter ψ ein nichttrivialer Charakter von F. Dann sei $\mathcal{W}$ der Raum der lokal konstanten Funktionen W auf $\mathrm{GL}_2(F)$, die dem Transformationsverhalten*

$$W(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) = \psi(n)W(g)$$

für alle $n \in F$ und alle $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ unterliegen. Dann besitzt $\mathcal{W}$ genau einen Unterraum $\mathcal{W}(\Pi, \psi)$, der invariant unter der Rechtstranslation mit $\mathrm{GL}_2(F)$ ist und der äquivalent zu Π ist. Dieser Raum $\mathcal{W}(\Pi, \psi)$ heißt der **Whittakerraum** *von Π zum Charakter ψ.*

Analoge Resultate gelten für zulässige Darstellungen der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})$.

Rankin-Selberg-Faltung

Das zentrale Objekt der automorphen Seite ist die Rankin-Selberg-Faltung zweier automorpher Darstellungen. Der Nullstellenordnung ihrer L-Reihe gilt das Interesse der Gross-Zagier-Formel.

- Es sei Π_1 eine cuspidale Darstellung der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ mit trivialem zentralen Charakter (das heißt ein irreduzibler Summand des diskreten Spektrums der Rechtstranslation auf $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F}), 1)$) und Führer N. An den archimedischen Stellen fordert [Zh1] (Seite 2) das Gewicht $(2, \ldots, 2, 0, \ldots, 0)$. Da weder die Gestalt der globalen Funktionalgleichung davon abhängt, noch hier mit den archimedischen Komponenten gearbeitet wird, wird diese Voraussetzung in dieser Arbeit nicht benützt.

- Weiter sei $\Pi(\chi)$ die zum Charakter χ aus Voraussetzung 1.8 gehörige irreduzible Komponente der Weildarstellung der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ zur Normform der Erweiterung $\mathbb{K}/\mathbb{F}$. Sie hat Führer $f(\chi)^2 f(\omega)$ und zentralen Charakter ω. Weiter unten wird auf die Eigenschaften von $\Pi(\chi)$ näher eingegangen.

Die Rankin-Selberg-Faltung von Π_1 und $\Pi(\chi)$ liefert, siehe [Ja2], die (lokale) Mellin-Transformierte

$$\Psi(s, W_1, W_2, \Phi) = \int_{Z(F)N(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} W_1(g) W_2(eg) f_\Phi(s, \omega, g)\ dg$$

zu Whittakerfunktionen W_1 von Π_1 und W_2 von $\Pi(\chi)$ zu einem beliebigen nichttrivialen Charakter von F. Hierbei ist $e := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Darin tritt die Eisensteinreihe

$$f_\Phi(s, \omega, g) = |\det g|^s \int_{F^\times} \Phi\big((0,t)g\big) |t|^{2s} \omega(t)\ d^\times t$$

für eine Funktion $\Phi \in \mathcal{S}(F^2)$ auf. f_Φ ist ein Element der Hauptreihendarstellung $\Pi(|\cdot|^{s-\frac{1}{2}}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$. Natürlich existiert von alldem auch das adelische Analogon. Die analytische Fortsetzung von Ψ führt zur L-Funktion, dem größten

gemeinsamen Teiler aller Ψ und fundamentalen Bestandteil der Funktionalgleichungen. Man erhält sie für Neuformen ϕ und θ_χ von Π_1 und $\Pi(\chi)$ sowie einer speziellen Form E von $\Pi(|\cdot|^{s-\frac{1}{2}}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$:

$$\begin{aligned} L(s, \Pi_1 \times \Pi(\chi)) &= \int_{Z(\mathbb{A}_\mathbb{F})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})} \phi(g)\theta_\chi(g)E(s,g)\ dg \qquad (1.2.1) \\ &= \int_{Z(\mathbb{A}_\mathbb{F})N(\mathbb{A}_\mathbb{F})\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})} W_\phi(g)W_{\theta_\chi}(g)f_E(s,\omega,g)\ dg \end{aligned}$$

erfüllt die Funktionalgleichung

$$L(s, \Pi_1 \times \Pi(\chi)) = \epsilon(s, \Pi_1 \times \Pi(\chi))L(1-s, \Pi_1 \times \Pi(\chi)), \qquad (1.2.2)$$

da sowohl Π_1 als auch $\Pi(\chi)$ selbstdual sind.

Zum Beispiel sei Π_{1v} an einer Stelle v gegeben durch die Hauptreihendarstellung $\Pi(\mu_1, \mu_2)$, wobei μ_1 und μ_2 unverzweigte Charaktere von $F^\times = \mathbb{F}_v^\times$ sind. (Insbesondere sei Π_{1v} also sphärisch.) Weiter sei $K = \mathbb{K}_v$ zerfallen und $\chi = \chi_v$ unverzweigt. Dann ist (siehe den Abschnitt über die Thetareihe unten) $\Pi(\chi) = \Pi(\chi_1, \chi_1^{-1})$. Die L-Funktion der lokalen Rankin-Selberg-Faltung $\Pi(\mu_1, \mu_2) \times \Pi(\chi_1, \chi_1^{-1})$ ist dann gegeben durch ([Ja2], Theorem 15.1)

$$\begin{aligned} &L(s, \Pi(\mu_1, \mu_2) \times \Pi(\chi_1, \chi_1^{-1})) \\ &\quad = L(s, \Pi(\mu_1, \mu_2) \otimes \chi_1)L(s, \Pi(\mu_1, \mu_2) \otimes \chi_1^{-1}) \\ &\quad = L(s, \mu_1\chi_1)L(s, \mu_2\chi_1)L(s, \mu_1\chi_1^{-1})L(s, \mu_2\chi_1^{-1}) \\ &\quad = \left(1 - \mu_1\chi_1(\pi)q^{-s}\right)^{-1}\left(1 - \mu_2\chi_1(\pi)q^{-s}\right)^{-1} \\ &\qquad \cdot \left(1 - \mu_1\chi_1^{-1}(\pi)q^{-s}\right)^{-1}\left(1 - \mu_2\chi_1^{-1}(\pi)q^{-s}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

An den Stellen, an denen $c(\chi)^2c(\omega) \leq v(N)$ ist, ist W_E die Neuform der Eisensteinreihe. [Zh1] (Seite 30ff.) konstruiert einen Integralkern $\Xi(s, g)$, für den eine der L-Funktion analoge Funktionalgleichung gilt und

$$L(s, \Pi_1 \times \Pi(\chi)) = \int_{Z(\mathbb{A}_\mathbb{F})N(\mathbb{A}_\mathbb{F})\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})} \phi(g)\ \Xi(s,g)\ dg.$$

Man beachte, daß ein solcher Kern nur von den Neuformen zu der Thetareihe $\Pi(\chi)$ und der Eisensteinreihe abhängen wird, nicht aber von einer genauen Wahl von Π_1 mit den gegebenen Eigenschaften. Interessant für [Zh1] wie auch für die vorliegende Arbeit sind die lokalen Fourierkoeffizienten des Kerns Ξ

([Zh1] Seite 41). Obwohl hier nicht näher auf die explizite Konstruktion dieses Kerns eingegangen werden soll (vergleiche dazu Abschnitt 1.4), können dessen lokale nichtkonstante Fourierkoeffizienten definiert werden:

$$W(s,\xi,\eta,g) := W_\theta(\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) W_E(s, \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g), \tag{1.2.3}$$

mit den lokalen Whittakerneuformen W_θ von $\Pi(\chi)$ und W_E der Eisensteinreihe und der Vorschrift

$$\eta = 1 - \xi.$$

Diese Fourierkoeffizienten sind die analytischen Funktionen, denen in der lokalen Gross-Zagier-Formel ([Zh1] Lemma 4.3.1) eine spezielle Local Linking Number entgegengesetzt wird. Darauf wird in Kapitel 7 zurückgekommen.
In dieser Arbeit soll die Beschränkung auf Neuformen in (1.2.3) fallen. Natürlich bedeutet dies den Verzicht auf einen Integralkern mit schöner Funktionalgleichung. Er wird auch gar nicht weiter benötigt. Es zeigt sich, daß diese Produkte von Whittakerfunktionen ihre eigene, von der L-Funktion losgelöste Berechtigung haben.
Dazu folgen nun Definitionen und Ergebnisse, die für das Weitere benötigt werden.

Whittakerprodukte

Die Produkte von Whittakerfunktionen werden hier nicht an einer allgemeinen Stelle g betrachtet, sondern an

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man betrachtet genau genommen also nicht Whittakerfunktionen, sondern Kirillovfunktionen, denn das Funktional von einem Whittakerraum zum additiven Charakter ψ auf den Kirillovraum der Darstellung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Pi,\psi) &\longrightarrow \mathcal{K}(\Pi), \\ W &\mapsto k : (a \mapsto W \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Definition 1.14. *Lokal seien die Thetareihe $\Pi(\chi)$ und die Eisensteinreihe $\Pi(1,\omega)$ an der zentralen Stelle $s = \frac{1}{2}$ gegeben. Die Produkte*

$$W(\xi,\eta) = W_\theta(\eta) W_E(\xi)$$

von Kirillovfunktionen $W_\theta \in \mathcal{K}(\Pi(\chi))$ und $W_E \in \mathcal{K}(\Pi(1,\omega))$ an der Stelle (ξ,η), $\eta = 1-\xi$, heißen **Whittakerprodukte**.

Die Kirillovräume automorpher Darstellungen lassen sich lokal einfach beschreiben:

Satz 1.15. *([Go], S. I.36) Es sei* Π *eine unendlichdimensionale irreduzible zulässige Darstellung der* $\mathrm{GL}_2(F)$*. Dann wird der Kirillovraum* $\mathcal{K}(\Pi)$ *erzeugt vom Schwartzraum* $\mathcal{S}(F^\times)$ *und den folgenden Halmen um Null:*
(a) Wenn Π *supercuspidal ist, dann ist dieser Halm gleich null.*
(b) Wenn $\Pi = \Pi(\mu_1, \mu_2)$ *eine Hauptreihendarstellung ist, so ist der Halm gegeben durch Vertreter der Form*

- $\big(|a|^{\frac{1}{2}} c_1 \mu_1(a) + |a|^{\frac{1}{2}} c_2 \mu_2(a)\big) \mathbf{1}_{\wp^n}(a)$*, falls* $\mu_1 \neq \mu_2$*,*
- $|a|^{\frac{1}{2}} \mu_1(a) \big(c_1 + c_2 v(x)\big) \mathbf{1}_{\wp^n}(a)$*, falls* $\mu_1 = \mu_2$*.*

(c) Wenn $\Pi = \Pi(\mu_1, \mu_2)$ *speziell ist, dann wird der Halm erzeugt von Funktionen mit Vertretern*

- $|a|^{\frac{1}{2}} \mu_1(a) c_1 \mathbf{1}_{\wp^n}(a)$*, falls* $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\cdot|$*,*
- $|a|^{\frac{1}{2}} \mu_2(a) c_2 \mathbf{1}_{\wp^n}(a)$*, falls* $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$*.*

Dabei sind c_1, c_2 *aus* $\mathbb{C}$*.*

Heckeoperator

Wegen seiner Bedeutung für diese Arbeit soll eine Eigenschaft des Heckeoperators ([Zh1] S.20f.) referiert werden. Da dort ein gewisses Indexchaos herrscht, wird der eigentlich einfache Beweis hier noch einmal aufgeschrieben.
Es sei ψ ein nichttrivialer Charakter mit Führer (1) von $\mathbb{F}$. Es sei $\mathbb{A} := \mathbb{A}_{\mathbb{F}}$. Für ein Adel y bezeichne y_f dessen Einschränkung auf die endlichen Komponenten. Für eine endliche Menge S von Stellen von $\mathbb{F}$ bezeichne $\mathbb{A}_S$ die Adele von $\mathbb{F}$, die an allen Stellen außerhalb von S ganz sind, und $\mathbb{A}^S$ die ganzen Adele von $\mathbb{F}$, die an Stellen aus S trivial sind:

$$\mathbb{A}^S := \prod_{v \notin S}' \mathbf{o}_{\mathbb{F}_v}.$$

Es gilt dann

$$\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{F}_v \cdot \mathbb{A}^S.$$

Analog bezeichne dann $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^S)$ die Gruppe $\prod_{v \notin S} \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_{\mathbb{F}_v})$.

Lemma 1.16. *Es sei μ ein Charakter von $\mathbb{A}^\times/\mathbb{F}^\times$, und es sei $\phi \in L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}), \mu)$ eine automorphe Form für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, die sich unter dem Zentrum $Z(\mathbb{A})$ wie μ transformiert. Es sei W_ϕ die Whittakerfunktion zu ϕ im Whittakermodell bezüglich ψ. Dann sei S die Menge der unendlichen Stellen und der endlichen Stellen v, an denen ϕ_v nicht invariant unter der maximal kompakten Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_{\mathbb{F}_v})$ ist. Für ein $b \in \mathbb{A}^S \cap \mathbb{A}^\times$ sei*

$$\begin{aligned} H(b) &:= \{g \in M_2(\mathbb{A}^S) | \det(g)\mathbb{A}^S = b\mathbb{A}^S\} \\ &= \dot{\bigcup_{\beta,\gamma}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^S), \end{aligned}$$

wobei α, γ ganze Idele modulo $(\mathbb{A}^S)^\times$ mit $\alpha\gamma = b$ sind und $\beta \in \mathbb{A}^S/\alpha\mathbb{A}^S$. Dann ist der Heckeoperator $\mathbf{T}_b$ wohldefiniert für $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_S)$:

$$\mathbf{T}_b W_\phi(g) := \int_{H(b)} W_\phi(gh)\ dh.$$

Ist der größte gemeinsame Teiler von $y \in \mathbb{A}^S$ und b gleich eins, also $(b, y_f) = 1$, dann gilt

$$\mathbf{T}_b W_\phi(g \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = |b|^{-1} W_\phi(g \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}). \tag{1.2.4}$$

Beweis: Die Wohldefiniertheit des Heckeoperators ist klassisch und trivial, die Aussage des Lemmas ist Gleichung (1.2.4). Man bemerke, daß an allen Stellen v außerhalb von S der Charakter μ unverzweigt ist, denn dort gilt $\phi_v(g) = \phi_v(gz) = \mu(z)\phi_v(g)$ für alle $z \in Z(\mathbb{F}_v) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_{\mathbb{F}_v})$. Setzt man noch $\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_{\mathbb{F}_v})) = 1$, so rechnet man

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_b W_\phi(g \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) &= \sum_{\beta,\gamma} W_\phi((g \begin{pmatrix} y\frac{\alpha}{\gamma} & y\frac{\beta}{\gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\mu(\gamma) \\ &= \sum_{\gamma} W_\phi(g \begin{pmatrix} y\frac{\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\mu(\gamma) \sum_{\beta} \psi(y\frac{\beta}{\gamma}) \\ &= \sum_{\gamma \in y_f \mathbf{o}_{\mathbb{F}}^S} W_\phi(g \begin{pmatrix} y\frac{\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\mu(\gamma)|\alpha|^{-1} \\ &= \sum_{\gamma \in (y_f, b)} W_\phi(g \begin{pmatrix} y\frac{\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\mu(\gamma)|\frac{\gamma}{b}|. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt nun falls $(y_f, b) = 1$, daß diese Summe aus genau einem Summanden zu $\gamma = 1$ besteht:

$$\mathbf{T}_b W_\phi(g \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = |b|^{-1} W_\phi(g \begin{pmatrix} yb & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Aus Lemma 1.16 folgt, daß das Anwenden des (lokalen) Heckeoperators $\mathbf{T}_b$ auf ein Whittakerprodukt im wesentlichen eine Translation um b bedeutet:

$$\mathbf{T}_b W(\xi, \eta) = |b|^{-2} W(b\xi, b\eta). \tag{1.2.5}$$

Der Heckeoperator wird auf Whittakerprodukte, die nicht den Voraussetzungen von Lemma 1.16 entsprechen, verallgemeinert, indem er wie in Gleichung (1.2.5) definiert wird.

Thetareihe und Eisensteinreihe

Die folgenden wohlbekannten Aussagen über die Thetareihe $\Pi(\chi)$ findet man in [JL] § 1, [Ge] § 7.

Definition 1.17. *Es sei χ der Charakter von $F^\times \backslash K^\times$ aus Voraussetzung 1.8. Dann sei $\Pi(\chi)$ die irreduzible Komponente zum Charakter χ der Weildarstellung der $\mathrm{GL}_2(F)$ bezüglich der Normform der quadratischen Erweiterung K/F.*

Adelisch gesehen ist $\Pi(\chi)$ eine Hilbertsche Modulform vom Gewicht $(1, \ldots, 1)$ an den unendlichen Stellen und Führer $f(\chi)^2 f(\omega)$.
Ist $K = F \oplus F$ eine zerfallene Algebra, so ist $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$ und $\Pi(\chi)$ ist die Hauptreihendarstellung $\Pi(\chi_1, \chi_1^{-1}\omega) = \Pi(\chi_1, \chi_1^{-1})$.
Ist K/F eine quadratische Körpererweiterung, so ist $\Pi(\chi)$ supercuspidal, falls χ nicht über die Norm faktorisiert. Im Fall $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$ ist $\Pi(\chi)$ jedoch isomorph zur Hauptreihendarstellung $\Pi(\chi_1, \chi_1^{-1}\omega) = \Pi(\chi_1, \chi_1\omega)$, denn wegen Lemma 1.9 ist hier $\chi_1^2 = 1$.
Somit erhält man aus Satz 1.15 zu späterem Gebrauch sofort

Satz 1.18. *Es sei $\Pi(\chi)$ wie in Definition 1.17. Dann gilt:*
(a) Ist K/F eine quadratische Körpererweiterung und faktorisiert χ nicht über die Norm, so ist $\Pi(\chi)$ supercuspidal, und der Kirillovraum besteht dementsprechend aus $\mathcal{S}(F^\times)$.
(b) Ist K/F eine quadratische Körpererweiterung und faktorisiert χ über die Norm, $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$, so ist $\Pi(\chi)$ die Hauptreihendarstellung $\Pi(\chi_1, \chi_1\omega)$, und der Kirillovraum als Funktionenraum in der Variablen η wird erzeugt von $\mathcal{S}(F^\times)$ und den Funktionen um Null der Form

$$|\eta|^{\frac{1}{2}} \chi_1(\eta) \big(a_1 + a_2 \omega(\eta)\big).$$

(c) Ist $K = F \oplus F$ zerfallen, so ist $\Pi(\chi)$ die Hauptreihendarstellung $\Pi(\chi_1, \chi_1^{-1})$, und der Kirillovraum wird erzeugt von $\mathcal{S}(F^\times)$ und den Funktionen um Null der Form

- $|\eta|^{\frac{1}{2}}\big(a_1\chi_1(\eta) + a_2\chi_1^{-1}(\eta)\big)$, *falls* $\chi_1^2 \neq 1$,
- $|\eta|^{\frac{1}{2}}\chi_1(\eta)\big(a_1 + a_2 v(\eta)\big)$, *falls* $\chi_1^2 = 1$.

Hierbei sind a_1, a_2 *in* $\mathbb{C}$.

Für später sollen noch einige Eigenschaften der Eisensteinreihe $\Pi(|\cdot|^{s-\frac{1}{2}}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$ festgehalten werden. Beispielsweise [Bu] 3.7 entnimmt man:
Eine automorphe Form $f \in \Pi(|\cdot|^{s-\frac{1}{2}}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$ hat eine Darstellung

$$f(s,g) = f_\phi(s,g) := |\det g|^s \int_{F^\times} \phi((0,t)g)\omega(t)|t|^{2s}\, d^\times t,$$

für eine Funktion $\phi \in \mathcal{S}(F^2)$. Umgekehrt definiert jedes $\phi \in \mathcal{S}(F^2)$ eine Form $f_\phi \in \Pi(|\cdot|^{s-\frac{1}{2}}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$. Die Neuform erhält man für

$$\phi(x,y) := \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y), & \text{falls } K/F \text{ unverzweigt} \\ \omega(y)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(y), & \text{falls } K/F \text{ verzweigt} \end{cases}.$$

Insbesondere für die zentrale Stelle findet man nach Satz 1.15

Satz 1.19. *An der zentralen Stelle* $s = \frac{1}{2}$ *ergibt die Eisensteinreihe die Hauptreihendarstellung* $\Pi(1,\omega)$. *Deren Kirillovraum als Funktionenraum in der Variablen* ξ *wird erzeugt von* $\mathcal{S}(F^\times)$ *und Funktionen um Null der Form*

- $|\xi|^{\frac{1}{2}}\big(a_1 + a_2\omega(\xi)\big)$, *falls* K/F *Körpererweiterung,*
- $|\xi|^{\frac{1}{2}}\big(a_1 + a_2 v(\xi)\big)$, *falls* $K = F \oplus F$ *zerfällt.*

Hierbei sind a_1, a_2 *in* $\mathbb{C}$.

1.3 Hauptresultate

Da die Hauptresultate dieser Dissertation über die gesamte Arbeit verteilt sind, sollen sie hier vorwegnehmend zusammengestellt werden. Die beiden vorangegangenen Abschnitte liefern das dazu notwendige Vokabular.
Die Doppelnebenklassen $T\backslash G/T$ werden hier nach

$$\xi = \frac{P}{P-1}$$

parametrisiert, nicht nach P (vergleiche Definition 1.4). Dies scheint an dieser Stelle sinnvoller, weil es einen direkten Vergleich zu den Zhangschen Resultaten (siehe unten) ermöglicht, obwohl die Rechnungen in den folgenden Kapiteln aus praktischen Gesichtspunkten in der P-Parametrisierung durchgeführt werden. Die Umparametrisierung wird in 2.3 ausführlich behandelt.

Charakterisierung der Local Linking Numbers

Kapitel 2 widmet sich der Charakterisierung der Local Linking Numbers als Funktionen in $\xi \in F^\times$. Die Resultate werden in den Sätzen 2.10 und 2.11 zusammengefaßt:

Satz 2.10. *Es sei $K = F \oplus F$ eine zerfallende Algebra. Eine Funktion H von ξ auf $F^\times$ ist genau dann eine Local Linking Number, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt.*
(1) Der Träger von H ist als Teilmenge von F kompakt.
(2) H ist lokal konstant.
(3) Es gibt eine Umgebung U von null und lokal konstante Funktionen A_1, A_2 auf U derart, daß für alle $0 \neq \xi \in U$ gilt

$$H(\xi) = A_1(\xi) + A_2(\xi)v(\xi).$$

(4) Es gibt eine Umgebung V von 1 und lokal konstante Funktionen B_1, B_2 auf V so, daß für alle $1 \neq \xi \in V$ gilt

$$H(\xi) = \chi_1(\eta)B_1(\xi) + \chi_1^{-1}(\eta)B_2(\xi), \qquad \textit{falls } \chi_1^2 \neq 1,$$

$$H(\xi) = \chi_1(\eta)\left(B_1(\xi) + B_2(\xi)v(\eta)\right), \qquad \textit{falls } \chi_1^2 = 1.$$

Satz 2.11. *Es sei K/F eine quadratische Körpererweiterung. Eine Funktion H von ξ auf $F^\times$ ist genau dann eine Local Linking Number, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt.*
(1) $H(\xi) = 0$, falls $\omega(-\xi\eta) \neq (-1)^{\delta(D)}$.
(2) H ist lokal konstant auf $F^\times$, und der Träger von H als Teilmenge von F ist kompakt.
(3) Es existiert eine lokal konstante Funktion A auf einer Umgebung U von 0 so, daß für alle $0 \neq \xi \in U$ gilt

$$H(\xi) = A(\xi)\left(1 + \omega(-\xi\eta)(-1)^{\delta(D)}\right).$$

(4) Es gibt eine Umgebung V von 1 und eine lokal konstante Funktion B auf V derart, daß für alle $1 \neq \xi \in V$ gilt

$$H(\xi) = \chi_1(\eta)\delta(\chi^2 = 1)B(\xi)\left(1 + \omega(-\xi\eta)(-1)^{\delta(D)}\right),$$

wobei im Fall $\chi^2 = 1$ der Charakter χ_1 von $F^\times$ definiert ist durch $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$ (vergleiche Lemma 1.9).

Es sei angemerkt, daß sich nicht nur die Ergebnisse im Fall eines kompakten Torus T (also der Fall einer Körpererweiterung) von denen im Fall eines nicht-kompakten Torus (der Fall K zerfallend) unterscheiden, sondern vor allem die Vorgehensweise in den Beweisen. Dieser grundlegende Unterschied wird besonders den zweiten Teil der vorliegenden Arbeit prägen.

Matching von Local Linking Numbers und Whittakerprodukten

Mit Hilfe dieser Charakterisierung kann nun das Hauptresultat des ersten Teils über die Korrespondenz zwischen dem Raum der Local Linking Numbers (kurz LLN) und dem Raum der Whittakerprodukte (vergleiche Definition 1.14) bewiesen werden:

Satz 3.1. *Die Local Linking Numbers und die gerade definierten Whittakerprodukte matchen, das heißt: Wenn $\eta = 1 - \xi$ und $\omega(-\xi\eta) = (-1)^{\delta(D)}$ erfüllt sind, dann gilt*

$$\left\{ |\xi\eta|^{\frac{1}{2}} LLN(\xi) \right\} = \{W(\xi, \eta)\}.$$

Heckeoperator

Dieses Matching ist der erste Schritt beim Verständnis der lokalen Abläufe. Um dieses zu vertiefen, muß nun ein Operator auf den Local Linking Numbers etabliert werden, der ein Gegenstück zum Heckeoperator auf den Whittakerprodukten darstellt. Der ist im wesentlichen gegeben durch die Translation um ein Element $b \in K^\times$ (vergleiche Lemma 1.16).
Der Heckeoperator wird nur an solchen Stellen angesetzt, die der folgenden Voraussetzung unterliegen.

Voraussetzung 6.2. *Es sei D eine zerfallende Algebra, also G isomorph zur $\mathrm{PGL}_2(F)$. Es sei K/F eine unverzweigte Erweiterung, zerfallen oder nicht, und der Charakter χ sei unverzweigt.*

Durch Aussagen über die Kirillovmodelle der involvierten Darstellungen kann man leicht das Verhalten der Whittakerprodukte unter dem Heckeoperator angeben:

Satz 6.1. *Die Whittakerprodukte $\mathcal{W}(b\xi, b\eta)$ aus Definition 1.14 haben für $b \to 0$ und beliebiges, aber festes ξ sowie $\eta = 1 - \xi$ das folgende Verhalten.*
(a) Im Fall eines nichtkompakten Torus $T = F^\times \backslash (F^\times \oplus F^\times)$:

$$W(b\eta, b\xi) = \begin{cases} |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}(c_1\chi_1(b\eta) + c_2\chi_1^{-1}(b\eta))(c_3 v(b\xi) + c_4), & \text{falls } \chi_1^2 \neq 1 \\ |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\chi_1(b\eta)(c_1 v(b\eta) + c_2)(c_3 v(b\xi) + c_4), & \text{falls } \chi_1^2 = 1 \end{cases}.$$

(b) Im Fall eines kompakten Torus $T = F^\times \backslash K^\times$, wobei K/F eine quadratische Körpererweiterung ist: Falls χ nicht über die Norm faktorisiert, so ist

$$W(b\eta, b\xi) = 0.$$

Existiert ein Charakter χ_1 von $F^\times$ so, daß $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$, so gilt

$$W(b\eta, b\xi) = |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\chi_1(b\eta)\big(c_1 + c_2\omega(b\xi)\big)\big(c_3 \mathbf{1}_{\wp^m \cap (1-x)\,\mathrm{N}}(b) + c_4 \mathbf{1}_{\wp^m \cap (1-x)z\,\mathrm{N}}(b)\big),$$

wobei $z \in F^\times$ keine Norm ist und c_i, $i = 1, \ldots, 4$, Konstanten.

Translation

Der naheliegendste natürliche Ansatz für einen „Hecke-Ersatzoperator“ auf der geometrischen Seite ist der der Translation der Local Linking Numbers um ein Element

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es werden also zunächst Aussagen über das Verhalten der Funktionen

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_\xi$$

in $b \in F^\times$ getroffen. Dem Umfang nach stellt diese Untersuchung den Hauptteil der Arbeit. Sie füllt die Kapitel 4, 5 und 8. Der Aufwand beschränkt die Untersuchung auf den Fall, in dem die eine Variable ξ der translatierten Local Linking Number festgehalten wird. Allerdings werden einige Eigenschaften des Verhaltens in beiden Variablen zugleich in Beispielen aufgezeigt (vergleiche Kapitel 4.1, 5.1 und 8.12).
Im Fall eines kompakten Torus T findet man:

Satz 4.2. *Die Local Linking Number*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_\xi$$

ist für festes ξ im Fall eines kompakten Torus T eine lokal konstante Funktion von b mit kompaktem Träger in $F^\times$.

Im Gegensatz dazu ist das Verhalten im Fall eines nichtkompakten Torus T komplizierter:

Satz (Vermutung 5.4). *Für festes ξ haben die Local Linking Numbers*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_\xi$$

als Funktionen von $b \in F^\times$ die Form

$$\chi_1^{-1}(b)\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|(a_{+,1}v(b) + a_{+,2}) + A(b) + \mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1})|b|^{-1}(a_{-,1}v(b) + a_{-,2})\Big)$$
$$+\chi_1(b)\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|(c_{+,1}v(b) + c_{+,2}) + C(b) + \mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1})|b|^{-1}(c_{-,1}v(b) + c_{-,2})\Big),$$

mit geeigneten Konstanten $a_{\pm,i}, c_{\pm,i}$ und lokal konstanten Funktionen A, C mit kompaktem Träger in $F^\times$.

Matchingoperator

Da die Translation das wesentliche Verhalten der Whittakerprodukte (Satz 6.1) im Fall, daß χ über die Norm faktorisiert, nicht widerspiegelt, ist sie noch nicht der gewünschte Operator. Mögliche Operatoren, die die Asymptotiken für $v(b) \to \infty$ völlig erfassen, werden in Kapitel 6 konstruiert. Es handelt sich dabei um gewichtete Summen von Translaten: Setzt man

$$\mathbb{T}_b^{\pm} < \phi, \psi >_\xi := \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1^{\mp 1}(\pi)^i \omega(b(1-x))^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \psi >_\xi^{\pm}$$

und

$$\mathbb{T}_b := \frac{1}{2}\Big(\mathbb{T}_b^+ + \mathbb{T}_b^-\Big),$$

oder

$$\mathbb{S}_b^{\pm} < \phi, \psi >_\xi \quad := \quad \sum_{s=0,1} \sum_{i=0}^{v(b)} \Bigg(\frac{\chi_1^{\mp 1}(\pi)^{(-1)^s i} \omega(b(1-x))^{i+s}}{|\pi^{v(b)-i}|} \cdot < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s (v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \psi >_\xi^{\pm} \Bigg)$$

und

$$\mathbb{S}_b := \frac{1}{4}\Big(\mathbb{S}_b^+ + \mathbb{S}_b^-\Big),$$

wobei $x = \frac{\xi}{\xi - 1}$, dann gilt

Satz 6.14. *Es sei die Voraussetzung 6.2 erfüllt. Dann haben für festes ξ die Local Linking Numbers $\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_\xi$ (beziehungsweise $\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_\xi$) bis auf den Faktor $|b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}$ dieselbe Asymptotik wie die Whittakerprodukte aus Satz 6.1.*

Es sollte nicht sonderlich überraschen, daß es mehr als einen möglichen Operator gibt. Zum einen wird eine zusätzliche Abhängigkeit von der Variablen ξ durch $\mathbb{T}_b$ wie auch durch $\mathbb{S}_b$ erst ansatzweise eingefangen. (Das entspricht der Tatsache, daß die translatierten Local Linking Numbers als Funktionen von b und ξ zugleich noch nicht vollständig beschrieben wurden.) Zum anderen können für unterschiedliche Anwendungen durchaus auch unterschiedliche „geometrische Heckeoperatoren“ erwünscht sein.

1.4 Lokale Gross-Zagier-Formel

Nun soll die lokale Gross-Zagier-Formel von Zhang formuliert werden, in Kapitel 7 wird sie dann sogar noch einmal bewiesen. Hier sollen zunächst die auftretenden lokalen Terme aus ihrem globalen Zusammenhang hergeleitet werden. Nachdem die lokale Gross-Zagier-Formel postuliert ist, wird dann auf den Unterschied zwischen dem Zhangschen Resultat und meinen Ergebnissen eingegangen.

Integralkern der L-Funktion

Auf der analytischen Seite beginnt man mit der L-Funktion der Rankin-Selberg-Faltung der Darstellungen Π_1 und $\Pi(\chi)$ (vergleiche (1.2.1)):

$$L(s, \Pi_1 \times \Pi(\chi)) = \int_{Z(\mathbb{A}_\mathbb{F})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})} \phi(g)\theta_\chi(g)E(s,g)\ dg,$$

wobei ϕ und θ_χ Neuformen von Π_1 und $\Pi(\chi)$ sind. W_E ist eine spezielle Form der Eisensteinreihe $\Pi(|\cdot|^{s-\frac{1}{2}}, \omega|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$.
Für sie findet Zhang ([Zh1], Kapitel 3.1) einen Integralkern $\Xi(s,g)$:

$$L(s, \Pi_1 \times \Pi(\chi)) = \int_{Z(\mathbb{A}_\mathbb{F})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{F})} \phi(g)\Xi(s,g)\ dg.$$

Um diesen Kern $\Xi(s,g)$ zu definieren, muß man etwas ausholen: Es sei Σ die endliche Stellenmenge bestehend aus

$$\begin{aligned}\Sigma \;=\; & \{v \text{ archimedisch } : \Pi_{1,v} \text{ hat Gewicht } 2\} \\ \cup\; & \{v \not| f(\omega)f(\chi)^2 : \omega_v(N) = -1\} \\ \cup\; & \{v | (N, f(\omega)) : \Pi_{1,v} = \sigma(\mu_v) \text{ speziell }, \chi_v = \chi_1 \circ \mathrm{N}, \mu_v\chi_1(\pi_v) = 1\}.\end{aligned}$$

Weiter sei S die Menge der Stellen, an denen die Erweiterung $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ verzweigt,

$$S = \{v : f(\omega_v) \neq \mathbf{o}_{\mathbb{F}_v}\}.$$

Für eine Stelle $v \in S$ definiert man

$$\gamma_v(s) := \chi_1(\pi_v)|\pi_v^{1-\mathrm{ord}_v(\Pi_1)}|^{\frac{1}{2}-s} \cdot (-1)^{\sharp\{v\}\cap\Sigma}$$

und

$$h_v := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine Teilmenge $T \subset S$ sei $\gamma_T(s) = \prod_{v\in T}\gamma_v(s)$ sowie $h_T = \prod_{v\in T} h_v$.

Dann ist der Kern $\Xi(s,g)$ definiert als

$$\Xi(s,g) := 2^{-\sharp S} \sum_{T \subset S} \gamma_T(s) \theta_\chi(g h_T^{-1}) E(s, g h_T^{-1}).$$

Den Kern kann man, analog zur Fourierentwicklung der Thetareihe und der Eisensteinreihe, fourierentwickeln. Es gilt ([Zh1], Kapitel 3.3)

$$\Xi(s,g) = C(s,g) + \sum_{\substack{\xi+\eta=0,\\ \xi,\eta\in\mathbb{F}^\times}} W(s,\xi,\eta,g) + \sum_{\substack{\xi+\eta=1,\\ \xi,\eta\in\mathbb{F}^\times}} W(s,\xi,\eta,g).$$

Hierbei ist $C(s,g)$ die Summe über die Terme, in denen ein konstanter Term der Fourierentwicklung der Theta- oder der Eisensteinreihe auftaucht. Die Terme $C(s,g)$ und $\sum_{\xi+\eta=0} W(s,\xi,\eta,g)$ ergeben zusammen den konstanten Term dieser Fourierentwicklung. Die Terme $W(s,\xi,\eta,g)$ sind gegeben durch

$$W(s,\xi,\eta,g) = 2^{-\sharp S} \sum_{T \subset S} \gamma_T(s) W_{\theta,\mathrm{neu}}(\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g h_T^{-1}) W_E(s, \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g h_T^{-1}).$$

Dabei bezeichnen $W_{\theta,\mathrm{neu}}$ und W_E jeweils die Elemente θ_χ und E im Whittakermodell.

Man beachte, daß sowohl der Integralkern $\Xi(s,g)$ als auch die Eisensteinreihe $E(s,g)$ und die Fourierkoeffizienten des Kerns einer analogen Funktionalgleichung genügen wie die L-Funktion (Gleichung (1.2.2)). In der Tat wurde der Kern genau so definiert, daß er dies erfüllt ([Zh1] Theorem 3.2.1).

Die lokalen Terme dieser Entwicklung sind nun der analytische Gegenstand der weiteren Untersuchung.

Insbesondere ergibt sich für eine Stelle $v \notin S$ für $\xi + \eta = 1$ und $g = 1$ an der zentralen Stelle $s = \frac{1}{2}$

$$W_v(\frac{1}{2}, \xi, \eta, 1) = W_{\theta,\mathrm{neu},v} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W_{E,v} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4.1}$$

Dies ist ein **Whittakerprodukt** wie in Definition 1.14 festgelegt. Es sei daran erinnert (Abschnitt 1.2), daß für solche unverzweigten Stellen v die spezielle Form der Eisensteinreihe, die in der L-Funktion auftaucht, gerade deren Neuform ist: $W_{E,v} = W_{E,\mathrm{neu},v}$.

Allerdings vergleicht die Gross-Zagier-Formel im Fall Rang eins nicht die Fourierkoeffizienten der L-Reihe selbst mit geometrischen Daten, sondern die Fourierkoeffizienten ihrer Ableitung. In diesem Fall ist die Kardinalität von Σ ungerade.

Die Funktionalgleichung für die lokalen Fourierkoeffizienten $W_v(s,\xi,\eta,g)$ lautet genau ([Zh1] Gleichung (3.4.1) und folgende)

$$W_v(s,\xi,\eta,g) = \omega_v(-\xi\eta)\epsilon(s,\Pi_{1,v}\times\Pi(\chi_v))W_v(1-s),\xi\eta,g),$$

wobei

$$\epsilon(\frac{1}{2},\Pi_{1,v}\times\Pi(\chi_v)) = (-1)^{\sharp\{v\}\cap\Sigma}.$$

Leitet man also den globalen Fourierkoeffizienten nach der komplexen Variablen s ab und setzt $s=\frac{1}{2}$, so erhält man die logarithmische Ableitung

$$W'(\frac{1}{2},\xi,\eta,g) = \sum_v W'_v(\frac{1}{2},\xi,\eta,g)\cdot\prod_{l\neq v} W_l(\frac{1}{2},\xi,\eta,g).$$

Dabei braucht man nur über solche Stellen v zu summieren, für die $\omega_v(-\xi\eta) = (-1)^{1+\sharp\{v\}\cap\Sigma}$ gilt sowie $\omega_l(-\xi\eta) = (-1)^{\sharp\{l\}\cap\Sigma}$ für alle $l\neq v$.
Insbesondere muß man nur über solche v summieren, für die $\mathbb{K}_v/\mathbb{F}_v$ eine Körpererweiterung ist.
Somit erhält man an einer zerfallenden Stelle l, $\mathbb{K}_l = \mathbb{F}_l\oplus\mathbb{F}_l$, den lokalen Term der Ableitung als

$$\left(W'(\frac{1}{2},\xi,\eta,g)\right)_l = W_l(\frac{1}{2},\xi,\eta,g).$$

Dasselbe Ergebnis erhält man im Fall einer unverzweigten Körpererweiterung $\mathbb{K}_l/\mathbb{F}_l$ mit unverzweigtem Charakter χ_l, wenn $\mathrm{ord}_l(N)$ gerade ist.
Hier geben also die Whittakerprodukte (1.4.1) auch die lokalen Komponenten der Ableitungen an.
Die übrigen Fälle geben teils abweichende Terme (vergleiche [Zh1] Kapitel 3.4 und Lemma 4.3.1). Allerdings werden diese Fälle im Rahmen dieser Arbeit nicht benötigt. Deshalb wird hier auf ihre Ausführung verzichtet.

Linking Numbers

Auf der geometrischen Seite steht am Ausgangspunkt die globale Neron-Tate-Höhe von CM-Zykeln ([Zh1] Theorem 1.2.1) auf der Shimurakurve (vergleiche (1.1.1)). Da diese Zykel als Elemente des Schwartzraums $\mathcal{S}(\chi,\mathbf{G}(\mathbb{F})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}))$

aufgefaßt werden können, kann man die globale Höhenpaarung (siehe (1.1.2) beziehungsweise [Zh1] Kapitel 4.1) schreiben als

$$< \phi, \psi >:= \sum_{[\gamma] \in \mathbf{T}(\mathbb{F}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{F}) / \mathbf{T}(\mathbb{F})} m([\gamma]) < \phi, \psi >_\gamma,$$

wobei $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, \mathbf{G}(\mathbb{F}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{F},f}))$, und γ die Nebenklassen $\mathbf{T}(\mathbb{F}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{F}) / \mathbf{T}(\mathbb{F})$ durchläuft. Der Wahl der Multiplizitätenfunktion $m(\gamma)$ kommt bei der globalen Gross-Zagier-Formel die entscheidende Bedeutung zu (vergleiche [Zh1] Kapitel 6). Für die Formulierung der lokalen Gross-Zagier-Formel braucht man sie allerdings nicht weiter zu spezifizieren.
Die „Fourierkoeffizienten“ $< \phi, \psi >_\gamma$ dieser globalen Paarung heißen Linking Numbers.
Die in Definition 1.6 mit Sorgfalt definierten lokalen Komponenten der Linking Numbers sind die **Local Linking Numbers**,

$$< \phi_v, \psi_v >_{\gamma,v} = \int_{\mathbf{T}(\mathbb{F}_v) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{F}_v)} \int_{\mathbf{T}(\mathbb{F}_v)} \phi(t_v^{-1} \gamma t_v y_v) \; dt_v \bar{\psi}(y_v) \; dy_v.$$

Dabei sind nun $\phi_v, \psi_v \in \mathcal{S}(\chi, \mathbf{G}(\mathbb{F}_v))$ lokale Faktoren der als reine Tensoren angenommenen globalen Funktionen $\phi = \prod_{v \text{ endlich}} \phi_v$ und $\psi = \prod_{v \text{ endlich}} \psi_v$.

Lokale Gross-Zagier-Formel

Es sei nun eine endliche Stelle v fixiert. Damit die Notation einfacher wird, setzt man (wie aus den vorherigen Abschnitten bereits gewohnt) $F = \mathbb{F}_v$, $K = \mathbb{K}_v$, $T = \mathbf{T}(\mathbb{F}_v)$, $G = \mathbf{G}(\mathbb{F}_v)$ etc.
Man setzt nun den analytischen und den geometrischen Teil zusammen, um die lokale Gross-Zagier-Formel zu erhalten.

Da in dieser Arbeit nur der „total unverzweigte Fall“ von Bedeutung ist, beschränkt man sich im folgenden auf ihn. Für die anderen Fälle gilt natürlich eine ähnliche Aussage (vergleiche [Zh1] Lemma 4.3.1).
Es sei also Voraussetzung 6.2 erfüllt, das heißt sowohl die Erweiterung K/F als auch der Charakter χ seien unverzweigt. Um den Produkten der lokalen Whittakerneuformen, die als lokale Fourierkoeffizienten des Integralkerns der L-Funktion auftreten, ein geometrisches Pendant gegenübersetzen zu können, muß man die Funktionen ϕ und ψ für die Local Linking Number speziell wählen.
Es ist

$$\phi := \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)} \tag{1.4.2}$$

eine wohldefinierte Schwartzfunktion, $\phi \in \mathcal{S}(\chi, G)$. Zhang ([Zh1] Gleichung (4.1.22)) setzt

$$\mathbf{T}_b\phi(g) := \int_{H(b)} \phi(hg)\ dh,$$

wobei $H(b) := \{g \in M_2(\mathbf{o}_F) \mid v(\det g) = v(b)\}$. Man bemerke, daß der Operator $\mathbf{T}_b$ stark von der hier festgewählten Funktion ϕ abhängt. Für beliebige Funktionen aus $\mathcal{S}(\chi, G)$ ist er nicht wohldefiniert. Es gilt

Satz 7.10. *(Lokale Gross-Zagier-Formel, [Zh1] Lemma 4.3.1) Unter der Voraussetzung 6.2 gilt für die Neuformen $W_{\theta,neu}$ und $W_{E,neu}$ der Theta- und Eisensteinreihe und die Local Linking Number zur Funktion $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$ bis auf Volumenfaktoren:*

$$W_{\theta,neu}(b\eta)W_{E,neu}(b\xi) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}|b| < \mathbf{T}_b\phi, \phi >_{x=\frac{\xi}{\xi-1}} .$$

Die lokale Gross-Zagier-Formel ist also eine quantitative Identität zwischen einer speziellen Local Linking Number und dem Produkt ganz spezieller Whittakerfunktionen, nämlich den Neuformen der Thetareihe und der Eisensteinreihe.

Hingegen handelt es sich bei meinen Ergebnissen um Korrespondenzen zwischen den gesamten Funktionenräumen: Nach Satz 3.1 entsprechen sich die Räume der Whittakerprodukte und der Local Linking Numbers exakt. Nach Satz 6.14 erzeugt der Operator $\mathbb{T}_b$ (oder auch $\mathbb{S}_b$) angewandt auf den Raum der Local Linking Numbers einen Teilraum im Raum der translatierten Whittakerprodukte, der die Asymptotik für $v(b) \to \infty$ voll verwirklicht. Ob es sich dabei um einen echten Teilraum handelt oder sogar um den gesamten, kann nicht entgültig geklärt werden, weil eine völlige Charakterisierung der Local Linking Numbers als Funktionen der beiden Variablen b und ξ zugleich derzeit außer Reichweite liegt.

Selbstverständlich kann man die qualitativen Ergebnisse dieser Arbeit durch konkrete Funktionenwahl auch quantifizieren. Wendet man zum Beispiel (wie in Kapitel 7.2) auf die Zhang-Funktion (1.4.2) den Operator $\mathbb{S}_b$ an, so erhält man wiederum die wesentlichen Terme der lokalen Gross-Zagier-Formel:

Bemerkung 7.13. *Man findet im Fall einer Körpererweiterung bis auf Volumenfaktoren*

$$W_{\theta,neu}(b\eta)W_{E,neu}(b\xi) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}|b|\ \mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x .$$

In diesem Fall ergibt die Anwendung des $\mathbb{S}_b$-Operators also exakt die lokale Gross-Zagier-Formel aus Satz 7.10!

Im Fall $K = F \oplus F$ zerfallend gilt bis auf einen Volumenfaktor und einen Faktor 2, den man durch Normierung der Maße vernichten kann,

$$W_{\theta,neu}(b\eta)W_{E,neu}(b\xi) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}|b|\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x + O(v(b)).$$

Also realisiert der $\mathbb{S}_b$-Operator wenigstens im führenden Term das Produkt der Whittakerneuformen, und mit Lemma 6.7 kann man auch in den niederen Termen Gleichheit erzielen. Die inneren Integrale mit kompaktem Träger, die man dazu zum eigentlichen inneren Integral addieren muß, ließen sich sogar direkt angeben, wenn man die Berechnung des Beispiels 5.2 nochmals verfolgte.

Der Operator $\mathbb{S}_b$ leistet somit auch qualitativ, was der Operator $\mathbf{T}_b$ von Zhang leistet.

Kapitel 2

Charakterisierung der Local Linking Numbers

In der Einleitung wurde beschrieben, daß sich schon bei Jacquet [Ja1] Hinweise darauf finden, daß die Local Linking Numbers besondere Informationen tragen. Dort wird allerdings mit leicht anderen Funktionen gearbeitet. Hier sollen die Eigenschaften dieser Funktionen in Kürze referiert werden, bevor die ähnlichen Eigenschaften der Local Linking Numbers untersucht werden.

Es sei f eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger auf $Z\backslash G$ und es sei $\gamma \in G$, $\gamma \notin \mathrm{N}(T)$. Dann definiert

$$H(\gamma, f) := \int_T \int_T f(a\gamma b)\ da\ db$$

ein „Orbitalintegral“. Benutzt man die Funktion P aus Definition1.4, so kann man H auch als eine Funktion auf $F^\times$ auffassen: Für $x \in F^\times$ sei

$$H(x, f) := H(\gamma, f),$$

falls es ein $\gamma \in G$ gibt mit $P(\gamma) = x$, das heißt wenn $x \in c\,\mathrm{N}$. Sonst setze man $H(x, f) = 0$. Diese Funktionen werden durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

Satz 2.1. *[Ja1] Eine Funktion H auf $F^\times$ ist genau dann ein Orbitalintegral $H(f)$ für eine lokal konstante Funktion f mit kompaktem Träger auf $Z\backslash G$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
Falls K eine quadratische Körpererweiterung von F ist:
(1) H ist null auf dem Komplement von $c\,\mathrm{N}$.
(2) H verschwindet auf einer Umgebung von $1 \in F^\times$.

(3) Es existiert eine lokal konstante Funktion A in einer Umgebung von 0 so, daß für alle $0 \neq x \in F^\times$ nahe 0 gilt

$$H(x) = A(x)(1 + \omega(cx)).$$

(4) Es existiert eine lokal konstante Funktion B in einer Umgebung V von 0 so, daß für alle $x^{-1} \in V$ gilt

$$H(x) = B(x^{-1})(1 + \omega(cx)).$$

Dabei bezeichnet ω den Charakter von $F^\times$, der zur quadratischen Erweiterung K/F gehört.

Falls $K = F \oplus F$ eine zerfallende Algebra vom Rang 2 über F ist:
(1) H verschwindet auf einer Umgebung der $1 \in F^\times$.
(2) H ist glatt auf $F^\times$.
(3) Es existiert eine Umgebung U von 0 und eine lokal konstante Funktion A auf U derart, daß für $x \in U \cap F^\times$ gilt

$$H(x) = A(x).$$

(4) Es existiert eine Umgebung V von 0 und eine lokal konstante Funktion B auf V derart, daß für $x \in F^\times$ mit $x^{-1} \in V$ gilt

$$H(x) = B(x^{-1}).$$

Im folgenden soll für die Local Linking Numbers aus Definition 1.6 eine ähnliche Charakterisierung gegeben werden. Dies geschieht in zwei Schritten. Zuerst werden bestimmte Eigenschaften der Local Linking Numbers gezeigt, die dann im nächsten Schritt als hinreichende Eigenschaften erkannt werden. Dabei sind die folgenden Lemmata nützlich.

Lemma 2.2. *Es sei $\phi \in \mathcal{S}(G, \chi)$.*
(a) Für jedes $y \in G$ existiert eine Umgebung V von y derart, daß für alle $g \in \operatorname{supp}(\phi)y^{-1}$ und alle $\tilde{y} \in V$ gilt

$$\phi(g\tilde{y}) = \phi(gy).$$

(b) Es sei C ein Kompaktum in G. Dann gibt es für jedes $g \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ von g so, daß für alle $\tilde{g} \in U$ und alle $y \in TC$ gilt

$$\int_T \phi(t^{-1}\tilde{g}ty)\ dt = \int_T \phi(t^{-1}gty)\ dt.$$

Beweis: (a) Da mit ϕ auch $\rho(y)\phi \in \mathcal{S}(G,\chi)$, reicht es, die Behauptung für $y = 1$ zu zeigen. Da ϕ lokal konstant ist, gibt es für jedes $g \in G$ eine offene Untergruppe U_g so, daß $\phi(gU_g) = \phi(g)$. Es sei C ein Kompaktum in G mit $\mathrm{supp}(\phi) = TC$. Dann ist

$$C \subset \bigcup_{g \in C} gU_g.$$

Da C kompakt ist, reichen endlich viele der gU_g aus, um C zu überdecken. Definiere U als den Durchschnitt dieser endlich vielen U_g. Für alle $g \in TC$ ist dann $\phi(gU) = \phi(g)$. Also ist U eine offene Umgebung von id wie gewünscht.
(b) Um eine für alle $y \in TC$ gültige Umgebung von g zu erhalten reicht es, $y \in C$ zu betrachten. Denn für $s \in T$ gilt

$$\int_T \phi(t^{-1}gtsy)\ dt = \chi(s) \int_T \phi(t^{-1}gty)\ dt.$$

Nach (a) gibt es eine Umgebung V_y von y so, daß

$$\phi(t^{-1}gt\tilde{y}) = \phi(t^{-1}gty)$$

für $\tilde{y} \in V_y$ und $t^{-1}gt \in \mathrm{supp}(\phi)y^{-1}$. Die Umgebungen V_y von $y \in C$ überdecken C. Da C kompakt ist, reichen endlich viele von ihnen. Es reicht also, für diese y eine Umgebung U_y von g mit der gewünschten Eigenschaft zu finden. Der Durchschnitt der U_y zu diesen endlich vielen y ist dann eine Umgebung von g, die die Intergalgleichung für alle $y \in TC$ erfüllt.
g hat die Form $g = g_1 + \epsilon g_2$. Eine Umgebung U von g kann definiert werden durch $k_1, k_2 > 0$ und die Forderungen $|\tilde{g}_1 - g_1| < k_1$ und $|\tilde{g}_2 - g_2| < k_2$ für $\tilde{g} \in U$. Man schreibt $t^{-1}\tilde{g}t = g_1 + \epsilon g_2 t\bar{t}^{-1} + (\tilde{g}_1 - g_1) + \epsilon(\tilde{g}_2 - g_2)t\bar{t}^{-1}$. Da ϕ lokal konstant ist, kann man für festes y die Konstanten k_1, k_2 so wählen, daß

$$\phi((g_1 + \epsilon g_2 t\bar{t}^{-1} + (\tilde{g}_1 - g_1) + \epsilon(\tilde{g}_2 - g_2)t\bar{t}^{-1})y) = \phi((g_1 + \epsilon g_2 t\bar{t}^{-1})y) = \phi(t^{-1}gty).$$

Diese Konstanten sind unabhängig von t, denn $|(\tilde{g}_2 - g_2)t\bar{t}^{-1}| = |\tilde{g}_2 - g_2|$. Die Integralgleichung gilt somit für festes y und für $\tilde{g}$ in einer Umgebung U_y von g.

Lemma 2.3. *Es sei $\phi \in \mathcal{S}(F \oplus F)$ eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger in zwei Variablen. Dann gibt es lokal konstante Funktionen $A_1, A_2 \in \mathcal{S}(F)$ so, daß*

$$\int_{F^\times} \phi(a^{-1}y, a)\ d^\times a = A_1(y)v(y) + A_2(y).$$

Im allgemeinen hat das Integral also einen Pol in null. Ist jedoch $0 \notin \operatorname{supp}\phi$, so ist das Integral eine Schwartzfunktion in y.

Beweis: Jede Funktion $\phi \in \mathcal{S}(F \oplus F)$ ist eine endliche Linearkombination der folgenden elementaren Funktionen $\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)$, $\mathbf{1}_{x+\wp^n}(a)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)$, $\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\mathbf{1}_{x+\wp^n}(b)$ und $\mathbf{1}_{x+\wp^n}(a)\mathbf{1}_{z+\wp^n}(b)$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ und $v(x), v(z) < n$. Es reicht, das Lemma für diese Funktionen nachzurechnen. Also:

$$\begin{aligned}\int_{F^\times} \mathbf{1}_{\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\ d^\times a &= \mathbf{1}_{\wp^{2n}} \int_{n \le v(a) \le v(y)-n} 1\ d^\times a \\ &= \operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\mathbf{1}_{\wp^{2n}}(y) v(y\pi^{-2n+1}).\end{aligned}$$

Eine Funktion $\phi \in \mathcal{S}(F \oplus F)$, deren Träger die Null enthält, hat in einer Umgebung von Null immer die Form $\phi(a,b) = \phi(0,0)\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)$. Das Integral hat dann einen Pol in $y = 0$. Enthält der Träger von ϕ die Null nicht, so hat das Integral keinen Pol:

$$\begin{aligned}\int_{F^\times} \mathbf{1}_{x+\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\ d^\times a &= \mathbf{1}_{\wp^{n+v(x)}}(y) \int_{yx^{-1}(1+\wp^{n-v(x)})} 1\ d^\times a \\ &= \mathbf{1}_{\wp^{v(x)+n}}(y) \operatorname{vol}^\times(1+\wp^{n-v(x)}),\end{aligned}$$

$$\int_{F^\times} \mathbf{1}_{\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{x+\wp^n}(a)\ d^\times a = \mathbf{1}_{\wp^{v(x)+n}}(y) \operatorname{vol}^\times(1+\wp^{n-v(x)})$$

und

$$\begin{aligned}&\int_{F^\times} \mathbf{1}_{x+\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{z+\wp^n}(a)\ d^\times a = \int_{yx^{-1}(1+\wp^{n-v(x)}) \cap z(1+\wp^{n-v(z)})} 1\ d^\times a \\ = \ &\mathbf{1}_{xz(1+\wp^{n-\min\{v(x),v(z)\}})}(y) \operatorname{vol}^\times(1+\wp^{n-\min\{v(x),v(z)\}}).\end{aligned}$$

Lemma 2.4. *Es sei η ein nichttrivialer (endlicher!) Charakter von $F^\times$ mit Führer $\wp^{c(\eta)}$. Sei $\phi \in \mathcal{S}(F \oplus F)$ eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger in zwei Variablen. Dann existieren in einer Umgebung $U = \wp^{2m}$ von 0 Funktionen $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{S}(F)$ bzw. $B_1, B_2 \in \mathcal{S}(F)$ in einer Variablen so, daß für $0 \neq y \in U$ gilt*

$$\begin{aligned}\int_{F^\times} \phi(a^{-1}y, a)\eta(a)\ d^\times a &= \delta(c(\eta)=0)A_1(y)\frac{\eta(y\pi^{-2m+1})-1}{\eta(\pi)-1} \\ &\quad + A_2(y) + A_3(y)\eta(y) \\ &= B_1(y) + B_2(y)\eta(y),\end{aligned}$$

mit der Kroneckerfunktion δ.

Beweis: Es reicht wieder, das Lemma für die elementaren Funktionen $\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)$, $\mathbf{1}_{x+\wp^n}(a)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)$, $\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\mathbf{1}_{x+\wp^n}(b)$ und $\mathbf{1}_{x+\wp^n}(a)\mathbf{1}_{z+\wp^n}(b)$ zu beweisen.

$$\begin{aligned}\int_{F^\times} \mathbf{1}_{\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\eta(a)\ d^\times a &= \sum_{k=n}^{v(y)-n} \eta(\pi)^k \int_{\mathbf{o}_F^\times} \eta(a)\ d^\times a \\ &= \mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\eta(\pi^n)\frac{\eta(\pi)^{v(y)-2n+1}-1}{\eta(\pi)-1},\end{aligned}$$

falls $c(\eta)=0$ und $v(y)\geq 2n$. Sonst ist das Integral gleich null. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}&\int_{F^\times} \mathbf{1}_{x+\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{\wp^n}(a)\eta(a)\ d^\times a \\ =\ & \mathbf{1}_{\wp^{n+v(x)}}(y)\int_{yx^{-1}(1+\wp^{n-v(x)})} \eta(a)\ d^\times a \\ =\ & \delta(c(\eta)\leq n-v(x))\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^{n-v(x)})\mathbf{1}_{\wp^{n+v(x)}}(y)\eta(yx^{-1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{F^\times} \mathbf{1}_{\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{x+\wp^n}(a)\eta(a)\ d^\times a \\ =\ & \mathbf{1}_{\wp^{n+v(x)}}(y)\int_{x+\wp^n} \eta(a)\ d^\times a \\ =\ & \delta(c(\eta)\leq n-v(x))\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^{n-v(x)})\eta(x)\mathbf{1}_{\wp^{n+v(x)}}(y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\int_{F^\times} \mathbf{1}_{x+\wp^n}(a^{-1}y)\mathbf{1}_{z+\wp^n}(a)\eta(a)\ d^\times a = \int_{yx^{-1}(1+\wp^{n-v(x)})\cap z(1+\wp^{n-v(z)})} \eta(a)\ d^\times a \\ =\ & \mathbf{1}_{xz(1+\wp^{n-\min\{v(x),v(z)\}})}(y)\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^{n-\min\{v(x),v(z)\}}) \\ & \cdot\delta(c(\eta)\leq n-\min\{v(x),v(z)\})\eta(yx^{-1}).\end{aligned}$$

Insbesondere verschwindet dieses Integral für $v(y)\neq v(x)-v(z)$.
Für kleine y leisten also nur Integrale der ersten drei Typen Beiträge. Diese haben die behauptete Form.

Bemerkung 2.5. *Der Beweis von Lemma 2.4 liefert natürlich auch das gesamte Verhalten des Integrals als Funktion von $y\in F^\times$.*

2.1 Die Eigenschaften der Local Linking Numbers

Man muß grundsätzlich unterscheiden, ob K/F zerfällt oder nicht. Das hat seinen tieferen Grund darin, daß im zerfallenden Fall der Torus $T = F^\times \backslash K^\times$ nicht kompakt ist im Gegensatz zum Fall einer Körpererweiterung K/F.

Satz 2.6. *Es sei K/F eine Körpererweiterung und ω der quadratische Charakter zu dieser Erweiterung. Weiter seien $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ und es sei $< \phi, \psi >_x$ die zugehörige Local Linking Number (vergleiche Definition 1.6). $< \phi, \psi >_x$ ist eine Funktion in $x \in F^\times$. Sie hat die folgenden Eigenschaften:*
(1) $< \phi, \psi >_x$ ist null auf dem Komplement von $c\,\mathrm{N}$.
(2) $< \phi, \psi >_x$ ist null auf einer Umgebung von $1 \in F^\times$.
(3) Es existiert eine lokal konstante Funktion A in einer Umgebung U von 0 so, daß für alle $0 \neq x \in U$ gilt

$$< \phi, \psi >_x = A(x)(1 + \omega(cx)).$$

Sie hat aber für $|x| >> 0$ das folgende Verhalten:
(4) Es existiert eine Umgebung V von 0 so, daß für alle $x^{-1} \in V \cap c\,\mathrm{N}$ gilt

$$< \phi, \psi >_x = \chi_1(\frac{A}{c})\chi_1(x)\delta(\chi^2 = 1) \int_{T\backslash G} \phi(\epsilon y)\bar{\psi}(y)\ dy.$$

Dabei sei im Fall $\chi^2 = 1$ der Charakter χ_1 von $F^\times$ gegeben durch $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$. Insbesondere verschwindet die Local Linking Number in einer Umgebung von null, wenn χ nicht quadratisch ist.

Die Local Linking Numbers haben also die Eigenschaften (1) bis (3) der Jacquet-Orbitalintegrale aus Satz 2.1.

Satz 2.7. *Es sei $K = F \oplus F$ eine zerfallende Algebra. Weiter seien $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ für $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$, und es sei $< \phi, \psi >_x$ die zugehörige Local Linking Number (vergleiche Definition 1.6). $< \phi, \psi >_x$ ist eine Funktion in $x \in F^\times$ mit den folgenden Eigenschaften:*
(1) $< \phi, \psi >_x$ verschwindet auf einer Umgebung der $1 \in F^\times$.
(2) $< \phi, \psi >_x$ ist glatt auf $F^\times$.
(3) Es existiert eine Umgebung U von 0 und lokal konstante Funktionen A_1 und A_2 auf U derart, daß für $0 \neq x \in U$ gilt

$$< \phi, \psi >_x = A_1(x) + A_2(x)v(x).$$

(4) Es existiert eine Umgebung V von 0 und lokal konstante Funktionen B_1 und B_2 auf V derart, daß für $x^{-1} \in V$ gilt:

Ist $\chi_1^2 = 1$*, so ist*

$$< \phi, \psi >_x = \chi_1(x) \left(B_1(x^{-1}) + B_2(x^{-1}) v(x) \right).$$

Dabei tritt der letzte Term nur auf, wenn $\mathrm{id} \in \operatorname{supp} \phi \cdot (\operatorname{supp} \psi)^{-1}$.
Ist $\chi_1^2 \neq 1$*, so ist*

$$< \phi, \psi >_x = \chi_1(x) B_1(x^{-1}) + \chi_1^{-1}(x) B_2(x^{-1}).$$

Beweis von Satz 2.6:
Zu (1): Klar nach Definition.
Zu (2): Falls $1 \notin c\,\mathrm{N}$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $1 \in c\,\mathrm{N}$. Dann muß man zeigen, daß für alle ϕ und ψ und alle γ mit $P(\gamma) \in U = U(\phi, \psi)$, einer Umgebung der 1, gilt

$$\int_{T \backslash G} \int_T \phi(t^{-1} \gamma t y) \; dt \; \bar{\psi}(y) \; dy = 0.$$

Dafür reicht es zu zeigen, daß für alle ϕ das Integral

$$\int_T \phi(t^{-1} \gamma t) \; dt$$

verschwindet. Da ϕ modulo T kompakten Träger hat, existiert ein Kompaktum $C \subset G$ so, daß ϕ außerhalb von TC verschwindet, erst recht außerhalb von TCT. Es reicht zu zeigen, daß es ein $k > 0$ gibt so, daß für alle $\gamma \in TCT$ gilt $|P(\gamma) - 1| > k$. Angenommen ein solches k existiert nicht. Dann sei $(\gamma_i)_i$ eine Folge in TCT mit $P(\gamma_i) \to 1$. Indem man mit Elementen aus T multipliziert und C eventuell vergrößert (das geht, da T kompakt ist!), kann man annehmen, daß

$$\gamma_i = 1 + \epsilon t_i = z_i c_i,$$

mit $t_i \in T$, $c_i \in C$, $z_i \in Z$. Dann ist $P(\gamma_i) = c t_i \bar{t}_i = 1 + a_i$, wobei $a_i \to 0$. Zum einen ist $\det \gamma_i = 1 - c t_i \bar{t}_i = -a_i$, zum anderen ist $\det \gamma_i = z_i^2 \det c_i$. Da C kompakt ist, muß nun $z_i \to 0$ gelten. Dies impliziert $\gamma_i \to 0$, im Widerspruch zu $\gamma_i = 1 + \epsilon t_i$.

Zu (3): Es sei $K = F(\sqrt{A})$. Ein spurfreies $\gamma \in F^\times \backslash D^\times$ hat dann einen Vertreter $\gamma = \sqrt{A} + \epsilon \gamma_2$. Die Linking Number schreibt sich damit

$$\int_{T \backslash G} \int_T \phi((\sqrt{A} + \epsilon \gamma_2 t \bar{t}^{-1}) y) \; dt \; \bar{\psi}(y) \; dy.$$

Da ϕ lokal konstant mit kompaktem Träger modulo T ist, existiert ein Ideal $V \leq K$ so, daß für alle $y \in G$ und alle $l \in V$ gilt

$$\phi((\sqrt{A} + \epsilon l) y) = \phi(\sqrt{A} y).$$

Für $x = P(\gamma)$ nahe 0, das heißt in einem Ideal $U \leq F$ derart, daß aus $\frac{cl\bar{l}}{-A} \in U$ stets $l \in V$ folgt, hat man dann

$$\begin{aligned} < \phi, \psi >_x &= \int_{T\backslash G} \int_T \phi(\sqrt{A}y)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \mathrm{vol}(T) \int_{T\backslash G} \phi(\sqrt{A}y)\bar{\psi}(y)\ dy = \mathrm{vol}(T)\chi(\sqrt{A}) < \phi, \psi > . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $< \phi, \psi >$ das L^2-Skalarprodukt von ϕ und ψ. Das heißt für x nahe 0 ist

$$< \phi, \psi >_x = \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}(T)\chi(\sqrt{A}) < \phi, \psi > (1 + \omega(cx)).$$

Zu (4): Es sei $\gamma = \sqrt{A} + \epsilon\gamma_2$ ein Urbild von x unter P. Wir wollen das Verhalten von $H(x)$ für $|x| >> 0$ studieren, das heißt das Verhalten für $|\gamma_2| >> 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_T \phi(t^{-1}\gamma t y)\ dt &= \int_T \phi(t^{-1}(\sqrt{A}\gamma_2^{-1} + \epsilon)\gamma_2 t y)\ dt \\ &= \chi(\gamma_2) \int_T \phi((\sqrt{A}\gamma_2^{-1} + t^{-1}\bar{t}\epsilon)y)\ dt. \end{aligned}$$

Da ϕ lokal konstant ist, gibt es nach Lemma 2.2(b) ein $k > 0$ so, daß für alle $|\gamma_2| > k$ und alle $y \in \operatorname{supp}\psi$ gilt

$$\phi((\sqrt{A}\gamma_2^{-1} + t^{-1}\bar{t}\epsilon)y) = \phi(t^{-1}\bar{t}\epsilon y).$$

Für $|x| > |cA^{-1}|k^2$ ist also

$$< \phi, \psi >_x = \chi(\gamma_2) \int_T \chi(t^{-1}\bar{t})\ dt \int_{T\backslash G} \phi(\epsilon y)\bar{\psi}(y)\ dy.$$

Da $\chi(t^{-1}\bar{t})$ genau dann einen nicht trivialen Charakter von T definiert, wenn $\chi^2 \neq 1$, folgt die Behauptung, wenn man noch bemerkt, daß $\chi(\gamma_2) = \chi_1(\frac{Ax}{c})$, wenn χ ein quadratischer Charakter ist. Denn χ faktorisiert automatisch über die Norm, wenn es quadratisch ist (siehe Lemma 1.9).

Vor dem Beweis von Satz 2.7 noch folgendes offensichtliches

Lemma 2.8. *Es sei $K = F \oplus F$. Dann ist ohne Einschränkung (siehe Definition 1.3) $D^\times = \mathrm{GL}_2(F)$, und $K^\times$ entspricht den Diagonalmatrizen in $D^\times$. Es bezeichne N die Gruppe der strikten oberen und N' die Gruppe der strikten unteren Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(F)$. Es sei $w := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann folgt aus der Bruhatzerlegung der $\mathrm{SL}_2(F)$ sofort die Vereinigung offener Mengen*

$$\mathrm{GL}_2(F) = K^\times NN' \cup K^\times NwN,$$

und für $G = F^\times \backslash D^\times = \mathrm{PGL}_2(F)$ gilt

$$G = TNN' \cup TNwN.$$

Beweis von Satz 2.7:
Man benutzt den Isomorphismus zwischen $D^\times$ und $\mathrm{GL}_2(F)$ aus Definition 1.3. Die Funktion P hat dann die Gestalt

$$P\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{bc}{ad}.$$

Sie nimmt nur den Wert 1 nicht an. Ein spurfreier Vertreter des Urbildes von $x \neq 1$ ist gegeben durch

$$\gamma(x) := \begin{pmatrix} -1 & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu (1): Man zeigt zunächst: Für $\phi \in \mathcal{S}(G, \chi)$ gibt es eine Konstante $k = k_\phi$ so, daß für alle $\gamma \in \operatorname{supp}\phi$ gilt $|P(\gamma) - 1| > k$. Da der Träger von ϕ modulo T kompakt ist, gibt es wegen Lemma 2.8 eine Konstante $c > 0$ so, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\phi \quad \subset \quad & T\left\{\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \mid |u| < c, |v| < c\right\} \\ & \bigcup T\left\{\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid |u| < c, |v| < c\right\}. \end{aligned}$$

Die Funktion P hat auf der ersten Menge die Gestalt $P = \frac{uv}{1+uv}$. Auf der zweiten Menge hat P die Gestalt $P = \frac{uv-1}{uv}$. Für alle $\gamma \in \operatorname{supp}\phi$ ergibt sich somit: $|P(\gamma) - 1| \geq \min\{1, c^{-2}\}$.
Nun zeigt man, daß es eine Konstante $k > 0$ gibt, für die $|P(\gamma) - 1| > k$ ist, wann immer $\gamma y \in \operatorname{supp}\phi$ für beliebiges y aus dem Träger von ψ. Daraus folgt dann, daß die Local Linking Number $< \phi, \psi >_x$ auf der Umgebung $|x - 1| < k$ der $1 \in F^\times$ verschwindet.

Wir wissen, daß es für alle $y \in \operatorname{supp}\psi$ eine solche Konstante k_y gibt. Mit hilfe von Lemma 2.2(a) ist dieses k_y auch eine Konstante für alle $\tilde{y}$ in einer Umgebung V_y von y. Der Träger von ψ ist modulo T gleich einem Kompaktum C. Man nimmt endlich viele y so, daß deren V_y das Kompaktum C überdecken. Das Minimum k der zugehörigen k_y gibt dann die gewünschte globale Konstante.

Zu (2): Da P offen ist, liefert Lemma 2.2(b) für jedes $x \in F^\times\backslash\{1\}$ eine Umgebung U_x von x so, daß für $\tilde{x} \in U_x$ und alle $y \in \operatorname{supp}\psi$ gilt

$$\int_T \phi(t^{-1}\gamma(\tilde{x})ty)\ dt = \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt.$$

Dann gilt aber erst recht

$$\int_{T\backslash G}\int_T \phi(t^{-1}\gamma(\tilde{x})ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy = \int_{T\backslash G}\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy.$$

Somit sind die Local Linking Numbers lokal konstant auf $F^\times\backslash\{1\}$. Die Eigenschaft, auch in $1 \in F^\times$ lokal konstant zu sein, war (1).

Zu (3) und (4): Zunächst soll das Verhalten des Integrals

$$\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt$$

als Funktion von x untersucht werden. Dazu schreibe man

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma(x) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} (x-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\frac{x}{x-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \in K^\times NN' \\
= & \begin{pmatrix} a^{-1}(1-x) & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a(x-1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^\times NwN.
\end{aligned}$$

Nun hat ϕ kompakten Träger modulo T, woraus folgt, daß die beiden Durchschnitte $\operatorname{supp}\phi \cap NN'$ und $\operatorname{supp}\phi \cap NwN$ kompakt sind. Dann kann man $\tilde{\phi} := \rho(y)\phi$ als Summe $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_2$ schreiben mit zwei Funktionen $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \in \mathcal{S}(G, \chi)$, für die gilt $\operatorname{supp}\tilde{\phi}_1 \subset TNN'$ bzw. $\operatorname{supp}\tilde{\phi}_2 \subset TNwN$. Indem man die Transformation unter T durch χ ausnutzt, kann man $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ auch als Funktionen auf $F \times F$ auffassen: $\tilde{\phi}_i(u, v) := \tilde{\phi}_i(c(u, v))$, wobei $c(u, v)$ das offensichtliche Element in NN' bzw. NwN bezeichne. Somit ist $\tilde{\phi}_i \in \mathcal{S}(F^2)$.

Mit diesen Vorbereitungen berechnet man

$$\begin{aligned}\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt &= \chi_1(x-1)\left(\int_{F^\times} \tilde{\phi}_1\left(\frac{x}{a(x-1)}, -a\right)\ d^\times a\right.\\ &+ \left.\chi_1(-1)\int_{F^\times} \chi_1(a^{-2})\tilde{\phi}_2\left(\frac{a}{x-1}, -a^{-1}\right)\ d^\times a\right).\end{aligned}$$

Nun wird das Verhalten für $|x| \to 0$ bzw. für $|x| \to \infty$ (für Bedingung (4)) separat untersucht:

Zu (3): Hier wird das Verhalten für $|x| \to 0$ untersucht.
Der Term $\chi_1(x-1)$ ist konstant gleich $\chi_1(-1)$, wenn $x-1$ im Führer $\wp^{c(\chi_1)}$ des Charakters χ_1 liegt. Das erste Integral ist nach Lemma 2.3 gleich

$$A_1(\frac{x}{x-1}) + A_2(\frac{x}{x-1})v(\frac{x}{x-1})$$

für lokal konstante Funktionen A_1, A_2 auf einer Umgebung von null. Diese $A_i(\frac{x}{x-1})$ definieren natürlich auch glatte Funktionen $\tilde{A}_i$ in x auf einer Umgebung U_1 von 0.
Das zweite Integral ist offensichtlich lokal konstant auf einer Umgebung U_2 von $x = 0$, denn $\tilde{\phi}_2$ ist lokal konstant für $(x-1)^{-1} \to -1$. Somit ist das gesamte Integral auf $U_y := \wp^{c(\chi_1)} \cap U_1 \cap U_2$ gleich

$$A_y(x) := \tilde{A}_1(x) + \tilde{A}_2(x)v(x) + B(x).$$

Mit hilfe von Lemma 2.2(a) findet man eine Umgebung V_y von y, auf der das Integral denselben Wert annimmt, das heißt

$$\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)t\tilde{y})\ dt = \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt = A_y(x)$$

für $\tilde{y} \in V_y$. Man wähle V_y so klein, daß auch noch ψ dort konstant ist. Dann hat man für die Linking Number

$$\begin{aligned}&\int_{T\backslash G}\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy\\ &= \sum_{y\in I}\int_{T\backslash TV_y} \bar{\psi}(z)\ dz \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\\ &= \sum_{y\in I} \mathrm{vol}_{T\backslash G}(TV_y)\bar{\psi}(y)A_y(x).\end{aligned}$$

Dabei läuft die Summe über eine endliche Menge I von y derart, daß

$$\operatorname{supp}(\psi) = T \cdot \bigcup_{y \in I} V_y,$$

und die Gleichheitszeichen sind gültig für x aus der Umgebung $U := \bigcap_{y \in I} U_y$ von null. Faßt man Terme mit $v(x)$ und solche ohne zusammen, so erhält man zwei lokal konstante Funktionen B_1 und B_2 auf U, mit denen die Local Linking Number die Gestalt

$$\int_{T \backslash G} \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\bar{\psi}(y)\ dy = B_1(x) + B_2(x)v(x)$$

annimmt.

Zu (4): Hier wird das Verhalten der Local Linking Numbers für $|x| \to \infty$ untersucht. Der Term $\chi_1(x-1)$ ist gleich $\chi_1(x)$, wenn x^{-1} im Führer $\wp^{c(\chi_1)}$ von χ_1 liegt. Da $\tilde{\phi}$ lokal konstant ist, ist das erste Integral offensichtlich gleich einer lokal konstanten Funktion A_0 für x^{-1} aus einer Umgebung U_1 von null.
Beim zweiten Integral ist eine Fallunterscheidung notwendig:
Fall A: $\chi_1^2 = 1$.
Dann ist das zweite Integral für x^{-1} aus einer Umgebung der Null nach Lemma 2.3 gleich

$$\chi_1(-1) \int_{F^\times} \tilde{\phi}_2 \left(\frac{a}{x-1}, -a^{-1} \right)\ d^\times a = A_1((x-1)^{-1}) + A_2((x-1)^{-1})v((x-1)^{-1}),$$

mit lokal konstanten A_1, A_2. Diese sind auch lokal konstante Funktionen $\tilde{A}_i$ von x^{-1} aus einer Umgebung U_2 von null. Also kann man in diesem Fall für $x^{-1} \in U_y := U_1 \cap U_2 \cap \wp^{c(\chi_1)}$ schreiben

$$B_y(x) := \int_T \tilde{\phi}(t^{-1}\gamma(x)t)\ dt = \chi_1(x) \left(A_0(x^{-1}) + \tilde{A}_1(x^{-1}) + \tilde{A}_2(x^{-1})v(x) \right).$$

Fall B: $\chi_1^2 \neq 1$.
Hier folgt aus Lemma 2.4 mit $\eta = \chi_1^2$, daß das zweite Integral für x^{-1} aus einer Umgebung U_2 von null gleich

$$\chi_1(-1) \int_{F^\times} \chi_1^2(a)\tilde{\phi}_2(\frac{a^{-1}}{x-1}, -a)\ d^\times a = A_1(x^{-1}) + \chi_1^2(x^{-1})A_2(x^{-1})$$

ist, mit lokal konstanten Funktionen A_1 und A_2. Das heißt das gesamte Integral ist hier gleich

$$B_y(x) := \chi_1(x) \left(A_0(x^{-1}) + A_1(x^{-1}) + A_3(x^{-1})\chi_1^{-2}(x) \right)$$

für x^{-1} aus $U_y := U_1 \cap U_2 \cap \wp^{c(\chi_1)}$.
Nun ist die Argumentation genau analog zu der in (3):
Mit hilfe von Lemma 2.2(a) findet man eine Umgebung V_y von y, auf der das Integral denselben Wert annimmt, das heißt

$$\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)t\tilde{y})\ dt = \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt = A_y(x)$$

für $\tilde{y} \in V_y$. Man wähle V_y so klein, daß auch noch ψ dort konstant ist. Dann hat man für die Local Linking Number

$$\begin{aligned}
&\int_{T\backslash G}\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\
&= \sum_{y\in I}\int_{T\backslash TV_y} \bar{\psi}(z)\ dz \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt \\
&= \sum_{y\in I} \mathrm{vol}_{T\backslash G}(TV_y)\bar{\psi}(y)B_y(x).
\end{aligned}$$

Dabei läuft die Summe über eine endliche Menge I von y derart, daß

$$\mathrm{supp}(\psi) = T \cdot \bigcup_{y\in I} V_y,$$

und die Gleichheitszeichen sind gültig für x^{-1} aus der Umgebung $U := \bigcap_{y\in I} U_y$ von null. Faßt man entsprechende Terme zusammen, so erhält man im Fall A, das heißt wenn $\chi_1^2 = 1$, lokal konstante Funktionen B_1 und B_2, mit denen die Local Linking Number die Gestalt

$$H(x) = \chi_1(x)\left(B_1(x^{-1}) + B_2(x^{-1})v(x)\right)$$

annimmt. Dabei hat man den letzten Term aus Lemma 2.3 erhalten durch den Beitrag der Funktion $\phi(a,b) = \mathbf{1}_{\wp^n}(a)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)$. Dies entspricht einer Schwartzfunktion ϕ auf G, die nur in einer Umgebung der Identität von null verschieden ist. Ist also die Identität nicht enthalten im Träger $\mathrm{supp}\,\phi \cdot (\mathrm{supp}\,\psi)^{-1}$, so tritt dieser Term nicht auf.
Im Fall B, das heißt wenn $\chi_1^2 \neq 1$, faßt man Potenzen von χ_1 zusammen und erhält lokal konstante Funktionen B_1 und B_2, mit denen die Local Linking Number gleich

$$H(x) = \chi_1(x)B_1(x^{-1}) + \chi_1^{-1}(x)B_2(x^{-1})$$

ist.

2.2 Die Charakterisierung

Dieser Abschnitt widmet sich der Umkehrung der Sätze 2.6 und 2.7:

Satz 2.9. *Die Eigenschaften (1)-(4) aus Satz 2.6 beziehungsweise 2.7 charakterisieren die Local Linking Numbers.*

2.2.1 Vorgehensweise im Beweis

1. Es gibt eine Darstellung auf $c\,\mathrm{N}$ der als Local Linking Number zu realisierenden Funktion H mit den Eigenschaften (1)-(4) als

$$H(x) = \mathbf{1}_{c\,\mathrm{N}}(x)\Big(A_0(x)\mathbf{1}_{V_0}(x) + A_1(x)\mathbf{1}_{V_1}(x) + \sum_{j=2}^{N} H(x_j)\mathbf{1}_{V_j}(x)\Big),$$

wobei

$$V_j = x_j(1 + \wp_F^{n_j})$$

für $j = 2, \ldots, N$ Umgebungen von $x_j \in c\,\mathrm{N}$ sind, auf denen H lokal konstant ist. Weiter sind

$$V_0 = \wp^{n_0} \qquad \text{und} \qquad V_1 = F \backslash \wp^{-n_1}$$

Umgebungen von 0 und ∞, auf denen H das charakteristische Verhalten A_0 bzw. A_1 hat.
Dabei kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $n_j > 0$ für $j = 0, \ldots, N$ und $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

2. Man konstruiert Funktionen ϕ_j, $j = 0, \ldots, N$, und für alle j eine gemeinsame Funktion ψ aus $\mathcal{S}(\chi, G)$ derart, daß

$$H(\phi_j, \psi)(x) = H(x_j)\mathbf{1}_{V_j}(x) \quad \text{bzw.} \quad H(\phi_j, \psi)(x) = A_j(x)\mathbf{1}_{V_j}(x).$$

Für $i \neq j$ soll dabei

$$\operatorname{supp} \phi_i \cap \operatorname{supp} \phi_j = \emptyset$$

erfüllt werden.
Man hat im wesentlichen eine Möglichkeit, Funktionen aus $\mathcal{S}(G, \chi)$ zu konstruieren: Man nimmt eine kompakte, offene Teilmenge C von G, die für χ **fundamental** ist, das heißt (vergleiche Definition 1.7): Sind $t \in T$ und $c \in C$ und ist auch $tc \in C$, so ist $\chi(t) = 1$. Dann ist die Funktion $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_C$, die durch $\phi(tc) = \chi(t)\mathbf{1}_C(c)$ gegeben ist, wohldefiniert in $\mathcal{S}(\chi, G)$ und hat Träger TC.

Die Funktion ψ wählt man nun folgendermaßen: Man setzt $\psi = \chi \cdot \mathbf{1}_U$ mit einer fundamentalen, kompakten, offenen Untergruppe U von G, die man so klein macht, daß für alle j (das sind endlich viele!) gilt

$$P(P^{-1}(V_j)U) = V_j.$$

Dann wählt man für $j \geq 2$ ein Kompaktum $C_j \subset P^{-1}(V_j)$ so, daß C_jU kompakt, offen und fundamental ist und $P(C_jU) = V_j$. Nun setzt man $\phi_j = H(x_j)\chi \cdot \mathbf{1}_{C_jU}$. Die letzte Bedingung impliziert, daß die Träger der ϕ_j disjunkt sind.
In den Halmen von null und unendlich geht man ähnlich vor. Im Fall einer zerfallenden Algebra K ist der Halm zweidimensional und man muß zwei linear unabhängige Funktionen ϕ_{j1} und ϕ_{j2} finden.
Die Wahl der Kompakta C_j und somit die Wahl der Funktionen ϕ_j stellt die Hauptarbeit im Beweis von Satz 2.9 dar.

3. Da die Linking Numbers linear in der ersten Komponente sind, kann man summieren

$$\sum_{j=0}^{N} H(\phi_j, \psi) = H(\sum_{j=0}^{N} \phi_j, \psi).$$

Das heißt, H ist eine Local Linking Number.

2.2.2 Ausführung im Fall einer Körpererweiterung

Es sei $K = F(\sqrt{A})$ eine quadratische Körpererweiterung.

Behauptung: Es sei H eine Funktion auf $F^\times$ mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Satz 2.6. H sei gegeben als

$$H(x) = \mathbf{1}_{\epsilon^2\,\mathrm{N}}(x)\Big(A_0(x)\mathbf{1}_{V_0}(x) + A_1(x)\mathbf{1}_{V_1}(x) + \sum_{j=2}^{N} H(x_j)\mathbf{1}_{V_j}(x)\Big),$$

wobei $\epsilon^2 = c$,

$$\begin{aligned}
&V_0 = \wp^{n_0} \text{ und } A_0(x) = a_0,\\
&V_1 = F\backslash\wp^{-n_1} \text{ und } A_1(x) = \begin{cases} \chi_1(x)a_1, & \text{falls } \chi^2 = 1 \\ 0, & \text{falls } \chi^2 \neq 1 \end{cases},\\
&V_j = x_j(1 + \wp^{n_j}), \text{ für } j = 2, \ldots, N,
\end{aligned}$$

mit $a_0, a_1, H(x_j) \in \mathbb{C}$. Ohne Einschränkung sei angenommen, daß für $j = 0, \ldots, N$

$$n_j > 0$$

und daß

$$n_0 - v\left(\frac{\epsilon^2}{A}\right) > 0, \quad n_1 + v\left(\frac{\epsilon^2}{A}\right) > 0 \text{ und beide gerade,}$$

sowie

$$V_i \cap V_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Man definiert

$$\tilde{n}_0 := \begin{cases} \frac{1}{2}(n_0 - v(\frac{\epsilon^2}{A})), & \text{falls } K/F \text{ unverzweigt} \\ n_0 - v(\frac{\epsilon^2}{A}), & \text{falls } K/F \text{ verzweigt} \end{cases},$$

$$\tilde{n}_1 := \begin{cases} \frac{1}{2}(n_1 + v\left(\frac{\epsilon^2}{A}\right)), & \text{falls } K/F \text{ unverzweigt} \\ n_1 + v\left(\frac{\epsilon^2}{A}\right), & \text{falls } K/F \text{ verzweigt} \end{cases}, \tag{2.2.1}$$

und für $j = 2, \ldots, N$

$$\tilde{n}_j := \begin{cases} n_j, & \text{falls } K/F \text{ unverzweigt} \\ 2n_j, & \text{falls } K/F \text{ verzweigt} \end{cases}. \tag{2.2.2}$$

Es sei

$$U := 1 + \wp_K^k + \epsilon\wp_K^m,$$

wobei $\wp_K$ das Primideal von $\mathbf{o}_K$ ist, und $k > 0$ und $m > 0$ so gewählt sind, daß

$$\begin{array}{ll} k \geq c(\chi), \quad m \geq c(\chi), & \\ k \geq \tilde{n}_j, \quad m - 1 \geq \tilde{n}_j & \text{für } j = 0, \ldots N, \\ m - 1 + \frac{1}{2}v(x_j) \geq c(\chi) & \text{für } j = 2, \ldots N, \\ m - 1 - \frac{1}{2}|v(x_j)| \geq \tilde{n}_j & \text{für } j = 2, \ldots N. \end{array}$$

Es sei nun

$$\psi := \chi \cdot \mathbf{1}_U.$$

Dann gibt es Funktionen $\phi_j \in \mathcal{S}(\chi, G)$, $j = 0, \ldots, N$, mit Trägern, die $P(\operatorname{supp} \phi_j) = V_j$ erfüllen, sodaß

$$H(x) = H(\sum_{j=0}^{N} \phi_j, \psi)$$

eine Local Linking Number ist.

Beweis:
Es sei wie gefordert

$$U := 1 + \wp_K^k + \epsilon\wp_K^m.$$

Es seien k und m größer als 0 und größer gleich $c(\chi)$. Dann ist U fundamental, kompakt und offen. Und es sei $\psi := \chi \cdot \mathbf{1}_U$. Die weiteren Bedingungen an k und m werden sich durch die folgenden Rechnungen ergeben.

Als erstes sollen die Halme von x_j für $j \geq 2$ als Local Linking Numbers realisiert werden.
Zunächst benötigen wir das Urbild unter P von $V_j = x_j(1 + \wp_F^{n_j})$ für $j = 2, \ldots, N$. Es sei $\sqrt{A} + \epsilon\gamma_j$ ein Urbild von x_j, also

$$P(\sqrt{A} + \epsilon\gamma_j) = \frac{c\,\mathrm{N}(\gamma_j)}{-A} = x.$$

Die Definition von $\tilde{n}_j$ hat den Vorteil, daß $\mathrm{N}(1 + \wp_K^{\tilde{n}_j}) = 1 + \wp_F^{n_j}$. Das Urbild von V_j hat dann die Form

$$\begin{aligned} P^{-1}(V_j) &= T\left(\sqrt{A} + \epsilon\gamma_j(1 + \wp_K^{\tilde{n}_j})\right)T \\ &= T\left(\sqrt{A} + \epsilon\gamma_j(1 + \wp_K^{\tilde{n}_j})\,\mathrm{N}_K^1\right). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$C_j := \sqrt{A} + \epsilon\gamma_j(1 + \wp_K^{\tilde{n}_j})\,\mathrm{N}_K^1$$

und betrachten die kompakte, offene Menge

$$C_jU = \sqrt{A}(1 + \wp_K^k) + \epsilon^2\bar{\gamma}_j\wp_K^m + \epsilon\left(\gamma_j(1 + \wp_K^k + \wp_K^{\tilde{n}_j})\,\mathrm{N}_K^1 + \sqrt{A}\wp_K^m\right).$$

Nun werden die Paramenter k und m so angepaßt, daß C_jU fundamental ist. Da U eine Gruppe ist, muß man dafür nur die Bedingungen prüfen, für die $\chi(t) = 1$ erfüllt ist, falls $tc \in C_jU$ mit $t \in T$ und $c \in C_j$. Es sei also

$$tc = t\sqrt{A} + \epsilon\bar{t}\gamma_j(1 + \pi_K^{\tilde{n}_j}c_1)l \in C_jU.$$

Dann ist (1.Komponente) $t \in 1 + \wp_K^k + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{A}}\bar{\gamma}_j\wp_K^m$. Es ist $\chi(t) = 1$, wenn $k \geq c(\chi)$ und $m + v_K(\epsilon^2) - v_K(\sqrt{A}) + v_K(\gamma_j) \geq c(\chi)$. Letzteres ist ganz bestimmt erfüllt, wenn $m \geq c(\chi) - \frac{1}{2}v(x_j) + 1$.
Nun betrachte das Bild

$$P(C_jU) = \frac{c\,\mathrm{N}(\gamma_j)\,\mathrm{N}(1 + \wp_K^k + \wp_K^{\tilde{n}_j} + \wp_K^m\frac{\sqrt{A}}{\gamma_j})}{-A\,\mathrm{N}(1 + \wp_K^k + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{A}}\bar{\gamma}_j\wp_K^m)}.$$

Setzt man $k \geq \tilde{n}_j$ und $m \geq \tilde{n}_j + \frac{1}{2}|v(x_j)| + 1$, so erhält man $P(C_jU) = V_j$. Die Menge C_jU läßt sich jetzt vereinfacht schreiben als

$$C_jU = \sqrt{A}(1 + \wp_K^k) + \epsilon^2\bar{\gamma}_j\wp_K^m + \epsilon\gamma_j(1 + \wp_K^{\tilde{n}_j})\,\mathrm{N}_K^1 \supset \sqrt{A}(1 + \wp_K^{\tilde{n}_j}) + \epsilon\gamma_j(1 + \wp_K^{\tilde{n}_j}).$$

Nun definiert man

$$\phi_j := \chi \cdot \mathbf{1}_{C_j U}$$

und berechnet die Linking Number

$$H(\phi_j, \psi)(x) = \int_{T\backslash G} \int_T \phi_j(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy.$$

Der Integrand ist von null verschieden nur dann, wenn es ein $s \in K^\times$ gibt so, daß

$$st^{-1}\gamma(x)t = s\sqrt{A} + \epsilon\bar{s}\gamma_2(x)t\bar{t}^{-1} \in C_j U.$$

Die erste Komponente impliziert, daß $s \in 1 + \wp_K^{\tilde{n}_j}$ und die zweite $\gamma_2(x) \in \gamma_j(1+\wp_K^{\tilde{n}_j})\,\mathrm{N}_K^1$. Dies ist gleichbedeutend zu $\gamma(x) \in C_j U$ beziehungsweise $x \in V_j$. In diesem Fall läßt sich dann aber $s = 1$ wählen. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} H(\phi_j, \psi)(x) &= \mathbf{1}_{V_j}(x) \int_{T\backslash G} \int_T 1\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \mathbf{1}_{V_j}(x)\,\mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}_G(U). \end{aligned}$$

Ist $H(x) = H(x_j)\mathbf{1}_{V_j}(x)$ auf V_j gegeben, so erhält man mit

$$\tilde{\phi}_j := \frac{H(x_j)}{\mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}_G(U)} \cdot \phi_j$$

die Linking Number $H(x) = H(\tilde{\phi}_j, \psi)(x)$.

Betrachte nun den Halm von Null.
Es ist praktisch und keine Einschränkung anzunehmen, daß $n_0 - v(\frac{\epsilon^2}{A})$ gerade und positiv ist. Sei $\tilde{n}_0$ wie in (2.2.1) definiert. Dann ist nämlich

$$P(\sqrt{A} + \epsilon\wp_K^{\tilde{n}_0}) = \wp_F^{n_0} \cap \epsilon^2\,\mathrm{N}\,.$$

Man setzt

$$C_0 := \sqrt{A} + \epsilon\wp_K^{\tilde{n}_0}.$$

Das Urbild $P^{-1}(V_0)$ ist nun gleich $TC_0T = TC_0$. Die Menge

$$C_0 U = \sqrt{A}(1 + \wp_K^k) + \epsilon^2\wp_K^{m+\tilde{n}_0} + \epsilon(\wp_K^{\tilde{n}_0} + \sqrt{A}\wp_K^m)$$

ist kompakt und offen. Fordert man zusätzlich $m \geq c(\chi) - \tilde{n}_0 + 1$, so ist sie auch fundamental, denn aus

$$tc = t(\sqrt{A} + \epsilon\pi_K^{\tilde{n}_0}c_1) \in C_0 U$$

folgt dann $t \in 1 + \wp_K^k + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{A}}\wp_K^{m+n_0} \subset 1 + \wp_K^{\tilde{n}_0}$, wenn $k, m \geq \tilde{n}_0$. Dann gilt

$$P(C_0U) = \wp_F^{n_0}.$$

Man setzt $\phi_0 := \chi \cdot \mathbf{1}_{C_0U}$ und berechnet die Local Linking Number $H(\phi_0, \psi)$. Wieder ist diese nur dann von null verschieden, wenn man $s \in K^\times$ finden kann so, daß

$$st^{-1}\gamma(x)t = s\sqrt{A} + \epsilon\bar{s}\gamma_2(x)t\bar{t}^{-1} \in C_0U.$$

Dazu muß offenbar $\gamma_2(x) \in \wp_K^{\tilde{n}_0}$ erfüllt sein. Ist dies umgekehrt der Fall, so löst $s = 1$ obige Bedingung. Man erhält

$$H(\phi_0, \psi)(x) = \mathbf{1}_{V_0}(x)\,\mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}_G(U).$$

Die Normierung

$$\tilde{\phi}_0 := \frac{a_0}{\mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}_G(U)} \cdot \phi_0$$

liefert nun $H(x) = a_0 = H(\tilde{\phi}_0, \psi)$ auf V_0.

Es bleibt, das Verhalten von H für große $x \in V_1 \cap \epsilon^2\,\mathrm{N}$ zu realisieren. Dabei kann man annehmen, daß $\chi^2 = 1$, denn sonst ist H auf V_1 identisch null. Solche χ faktorisieren immer über die Norm: $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$ (Lemma 1.9).

Nun zum Keim von H in unendlich:
Es sei ohne Einschränkung $n_1 + v(\epsilon^2) - v(A)$ gerade und $\tilde{n}_1$ wie in (2.2.2) definiert.
Damit läßt sich das Urbild von $V_1 = F\backslash\wp_F^{-n_1}$ unter P ausdrücken:

$$P^{-1}(V_1) = T\left(\sqrt{A} + \epsilon(\wp_K^{\tilde{n}_1})^{-1}\right)T = T\left(\sqrt{A}\wp_K^{\tilde{n}_1} + \epsilon\,\mathrm{N}_K^1\right).$$

Man setzt

$$C_1 := \sqrt{A}\wp_K^{\tilde{n}_1} + \epsilon\,\mathrm{N}_K^1$$

und erhält die kompakte, offene Menge

$$C_1U = \sqrt{A}\wp_K^{\tilde{n}_1} + \epsilon^2\wp_K^m + \epsilon\left(\mathrm{N}_K^1(1 + \wp_K^k) + \sqrt{A}\wp_K^{m+\tilde{n}_1}\right),$$

die auch fundamental ist, denn

$$tc = \sqrt{A}t\pi_K^{\tilde{n}_1}c_1 + \epsilon\bar{t}l \in C_1U$$

impliziert $t \in \mathrm{N}_K^1(1 + \wp_K^k + \sqrt{A}\wp_K^{m+\tilde{n}_1})$. Und da $k, m > 0$ und $\chi^2 = 1$, ist also $\chi(t) = 1$. Das Bild

$$P(C_1U) = \frac{c\,\mathrm{N}(1 + \wp_K^k + \sqrt{A}\wp_K^{m+\tilde{n}_1})}{-A\,\mathrm{N}(\wp_K^{\tilde{n}_1} + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{A}}\wp_K^m)}$$

ist gleich V_1, wenn man $k \geq \tilde{n}_1$ und $m-1 \geq \tilde{n}_1$ fordert.
Man setzt $\phi_1 := \chi \cdot \mathbf{1}_{C_1 U}$ und berechnet

$$\begin{aligned} H(\phi_j, \psi)(x) &= \int_{T\backslash G} \int_T \phi_1(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \int_{T\backslash G} \int_T \chi(\gamma_2(x))\phi_1((\sqrt{A}\gamma_2^{-1} + \epsilon t\bar{t}^{-1})y)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \chi(\gamma_2(x))\mathbf{1}_{V_1}(x)\,\mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}_G(U), \end{aligned}$$

denn der Integrand ist nur dann nicht null, wenn es ein $s \in K^\times$ gibt so, daß

$$s(\sqrt{A}\gamma_2^{-1} + \epsilon t\bar{t}^{-1}) \in C_1 U.$$

Diese Bedingung impliziert $\gamma_2(x)^{-1} \in \wp_K^{\tilde{n}_1}$, also $x \in V_1$. Ist andererseits dies erfüllt, so reicht $s = 1$ aus. Es bleibt, ϕ_1 zu normieren: Es sei

$$\tilde{\phi}_1 := \frac{a_1}{\mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}_G(U)} \cdot \phi_1.$$

Dann ist $H(x) = H(\tilde{\phi}_1, \psi)(x)$ auf V_1.

2.2.3 Ausführung im Fall einer zerfallenden Algebra

Es sei nun $K = F \oplus F$ eine zerfallene Algebra.

Behauptung:
Es sei H eine Funktion auf $F^\times$ mit den Eigenschaften (1)-(4). H sei gegeben als

$$H(x) = A_0(x)\mathbf{1}_{V_0}(x) + A_1(x)\mathbf{1}_{V_1}(x) + \sum_{j=2}^{N} H(x_j)\mathbf{1}_{V_j}(x),$$

wobei

$$\begin{aligned} &V_0 = \wp^{n_0} \text{ und } A_0(x) = a_1 + a_2 v(x), \\ &V_1 = F\backslash\wp^{-n_1} \text{ und } A_1(x) = \begin{cases} \chi_1(x)(b_1 + b_2 v(x)) & \text{falls } \chi^2 = 1 \\ \chi_1(x)b_1 + \chi_1^{-1}(x)b_2 & \text{falls } \chi^2 \neq 1 \end{cases}, \\ &V_j = x_j(1 + \wp^{n_j}),\ \text{für } j = 2, \ldots, N, \end{aligned}$$

mit $a_1, a_2, b_1, b_2, H(x_j) \in \mathbb{C}$. Ohne Einschränkung sei angenommen, daß für $j = 0, \ldots, N$

$$n_j > 0 \quad \text{und} \quad n_1 \geq c(\chi_1)$$

und daß

$$V_i \cap V_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Es sei

$$U := 1 + \wp_K^k + \epsilon \wp_K^m,$$

mit $\wp_K = \wp_F \oplus \wp_F$. Dabei seien $k > 0$ und $m > 0$ so gewählt, daß

$$\begin{array}{ll} k \geq c(\chi_1), \quad m \geq c(\chi_1), & \\ k \geq n_j, \quad m \geq n_j & \text{für } j = 0, \ldots N, \\ m + v(x_j) \geq c(\chi_1) & \text{für } j = 2, \ldots N, \\ m - v(x_j) \geq n_j & \text{für } j = 2, \ldots N. \end{array}$$

Es sei $\psi := \chi \cdot \mathbf{1}_U$. Dann gibt es Funktionen $\phi_j \in \mathcal{S}(G, \chi)$, $j = 0, \ldots, N$, mit Trägern, die $P(\operatorname{supp} \phi_j) = V_j$ erfüllen, sodaß

$$H(x) = H(\sum_{j=0}^{N} \phi_j, \psi)$$

eine Local Linking Number ist.

Beweis:
Im folgenden werden die Schreibweisen $D^\times = F^\times \backslash (K + \epsilon K)^\times$ und $G = \mathrm{GL}_2(F)$ vermischt, je nachdem was für die Situation passender erscheint.
Es sei wie gefordert

$$U := 1 + \wp_K^k + \epsilon \wp_K^m,$$

mit $\wp_K = \wp_F \oplus \wp_F$. Es seien k und m größer als 0 und größer gleich $c(\chi_1)$. Dann ist U fundamental, kompakt und offen. Es sei weiter $\psi := \chi \cdot \mathbf{1}_U$. Die weiteren Bedingungen an k und m werden sich durch die folgenden Rechnungen ergeben.

Zunächst werden die Keime von x_j, $j = 2, \ldots, N$ realisiert.
Ein spurfreies Urbild von x_j unter P war gegeben durch

$$\gamma(x_j) = (-1, 1) + \epsilon(-1, x_j) = \begin{pmatrix} -1 & x_j \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen $H(x) = \mathbf{1}_{V_j}(x)$ auf der Umgebung $V_j = x_j(1 + \wp^{n_j})$ als Linking Number schreiben.
Wie im Fall einer Körpererweiterung K/F findet man

$$P^{-1}(x_j(1 + \wp^{n_j}))U = T\left((-1, 1) + \epsilon(-1, x_j(1 + \wp^{n_j})\, \mathrm{N}_K^1\right) U.$$

Da die Normeinsgruppe $\mathrm{N}_K^1 = \{(t, t^{-1}) \mid t \in K^\times\}$ hier nicht kompakt ist, kann man nicht mehr das gesamte Urbild von V_j als Menge TC_j wählen, wohl aber

$$C_j := (-1, 1) + \epsilon(-1, V_j).$$

Wählt man nun $k \geq n_j$ und $m \geq n_j + v(x_j)$, so folgt

$$C_j U = \begin{pmatrix} -1 + \wp^k + x_j \wp^m & V_j \\ -1 + \wp^k + \wp^m & 1 + \wp^k + \wp^m \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $C_j U$ kompakt und offen. Man prüfe, daß $C_j U$ fundamental: Aus der Bedingung

$$tc = \begin{pmatrix} -t_1 & t_1 x_j (1 + \pi^{n_j} c_1) \\ -t_2 & t_2 \end{pmatrix} \in C_j U$$

folgt $t_1 \in 1 + \wp^k + \wp^{m+v(x_j)}$ und $t_2 \in 1 + \wp^k + \wp^m$. Sind also k, m und $m + v(x_j)$ größer als $c(\chi_1)$, so ist $\chi(t_1, t_2) = 1$. Das Bild unter P

$$P(C_j U) = \frac{(-1 + \wp^k + \wp^m) V_j}{-1 + \wp^k + \wp^m + \wp^{m+v(x_j)}}$$

ist gleich V_j, wenn auch noch $k, m, m + v(x_j) \geq n_j$ erfüllt ist. Mit diesen Bedingungen definiert man $\phi_j := \chi \cdot \mathbf{1}_{C_j U}$ und rechnet

$$\begin{aligned} H(\phi_j, \psi)(x) &= \int_{T \backslash G} \int_T \phi_j(t^{-1} \gamma(x) t y) \; dt \; \bar{\psi}(y) \; dy \\ &= \mathbf{1}_{V_j}(x) \operatorname{vol}_G(U) \operatorname{vol}^\times (1 + \wp^k + \wp^m), \end{aligned}$$

denn $t^{-1}\gamma(x)ty$ mit $y \in U$ ist genau dann im Träger von ϕ_j, wenn es ein $(u, w) \in K^\times$ gibt, so daß

$$(u, w) t^{-1} \gamma(x) t = \begin{pmatrix} -u & u a^{-1} x \\ -wa & w \end{pmatrix} \in C_j U.$$

Dies ist aber genau dann erfüllt, wenn $x \in V_j$ und $a \in 1 + \wp^k + \wp^m$. Dann kann man einfach $u = w = 1$ wählen.
Normiert man noch

$$\tilde{\phi}_j := \frac{H(x_j)}{\operatorname{vol}_G(U) \operatorname{vol}^\times (1 + \wp^k + \wp^m)} \phi_j,$$

so erhält man $H(\tilde{\phi}_j, \psi) = H(x_j) \mathbf{1}_{V_j}(x)$.

Nun sollen Erzeuger des Halms von Null gefunden werden.
Das charakteristische Verhalten auf V_0 ist gegeben durch

$$a_1 + a_2 v(x),$$

mit zwei beliebigen Konstanten a_1 und a_2. Wir brauchen somit zwei Funktionen ϕ_{01}, ϕ_{02} so, daß die Linking Numbers $H(\phi_{01}, \psi)$ und $H(\phi_{02}, \psi)$ linear unabhängig sind.
In Analogie zu den Fällen $j \geq 2$ wählt man zunächst

$$C_{01} := (-1, 1) + \epsilon(-1, \wp^{n_0}).$$

Dann ist

$$C_{01}U = \begin{pmatrix} -1 + \wp^k + \wp^{m+n_0} & \wp^{n_0} \\ -1 + \wp^k + \wp^m & 1 + \wp^k + \wp^m \end{pmatrix},$$

falls $m \geq n_0$. Man prüft wieder, daß $C_{01}U$ fundamental ist: Aus

$$tc = \begin{pmatrix} -t_1 & t_1 \pi^{n_0} c_1 \\ -t_2 & t_2 \end{pmatrix} \in C_{01}U$$

folgt $t_1 \in 1 + \wp^k + \wp^{m+n_0}$ und $t_2 \in 1 + \wp^k + \wp^m$. Ist also $k, m \geq c(\chi_1)$, so ist $\chi(t_1, t_2) = 1$ und $C_{01}U$ fundamental. Außerdem ist

$$P(C_{01}U) = \frac{\wp^{n_0}}{-1 + \wp^k + \wp^m} = V_0.$$

Somit hat die Funktion $\phi_{01} = \chi \cdot \mathbf{1}_{C_{01}U}$ die geforderten Eigenschaften und die zugehörige Linking Number hat die Form

$$\begin{aligned} H(\phi_{01}, \psi)(x) &= \int_{T \backslash G} \int_T \phi_{01}(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \mathbf{1}_{V_0}(x) \operatorname{vol}^\times(1 + \wp^k + \wp^m) \operatorname{vol}_G(U), \end{aligned}$$

wie man völlig analog zum Fall $j \geq 2$ sieht.

Sei nun

$$C_{02} := (-1, 1) + \epsilon(\mathbf{o}_F, \wp^{n_0}).$$

Dann ist

$$C_{02}U = \begin{pmatrix} -1 + \wp^k + \wp^{m+n_0} & \wp^{n_0} \\ \mathbf{o}_F & 1 + \wp^k + \wp^m \end{pmatrix}$$

fundamental, denn aus

$$tc = \begin{pmatrix} -t_1 & t_1 \pi^{n_0} c_1 \\ -t_2 c_2 & t_2 \end{pmatrix} \in C_{02}U$$

folgt erneut $t_1 \in 1 + \wp^k + \wp^{m+n_0}$ und $t_2 \in 1 + \wp^k + \wp^m$, also $\chi(t_1, t_2) = 1$. Wieder ist

$$P(C_{02}U) = \frac{\wp^{n_0}}{-1 + \wp^k + \wp^m} = V_0$$

und die Funktion $\phi_{02} = \chi \cdot \mathbf{1}_{C_{02}U}$ wohldefiniert. Die Linking Number

$$H(\phi_{02}, \psi)(x) = \int_{T\backslash G} \int_{F^\times} \phi_{02}(\begin{pmatrix} -1 & a^{-1}x \\ -a & 1 \end{pmatrix} y)\ d^\times a\ \bar{\psi}(y)\ dy$$

ist für x von null verschieden, falls es $(u, w) \in K^\times$ gibt mit

$$(u, w)t^{-1}\gamma(x)t = \begin{pmatrix} -u & ua^{-1}x \\ -wa & w \end{pmatrix} \in C_{02}U.$$

Die ist gleichbedeutend zu $w \in 1 + \wp^k + \wp^m$, $u \in 1 + \wp^k + \wp^{m+n_0}$, $v(a) \geq 0$ und $v(x) - v(a) \geq n_0$. Sind die letzten beiden Bedingungen erfüllt, so kann man $u = w = 1$ wählen. Dann erhält man

$$\begin{aligned} H(\phi_{02}, \psi)(x) &= \int_{T\backslash G} \int_{0 \leq v(a) \leq v(x) - n_0} 1\ d^\times a\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \mathbf{1}_{V_0}(x)(v(x) - n_0 + 1)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}_G(U). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\phi_0 = c_1\phi_{01} + c_2\phi_{02},$$

so erhält man $H(x) = H(\phi_0, \psi)$ auf V_0, wenn

$$c_2 := \frac{a_2}{\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}_G(U)}$$

und

$$c_1 := c_2(n_0 - 1) + \frac{a_1}{\mathrm{vol}^\times(1 + \wp^k + \wp^m)\,\mathrm{vol}_G(U)}.$$

Als letztes benötigt man Erzeuger des Halms von unendlich.
Auf einer Umgebung $V_1 = \{x \mid x^{-1} \in \wp^{n_1}\}$ von unendlich hat H das charakteristische Verhalten

$$\begin{aligned} \chi_1(x)(b_1 + b_2 v(x)), &\quad \text{falls} \quad \chi^2 = 1, \\ \chi_1(x)b_1 + \chi_1^{-1}(x)b_2, &\quad \text{falls} \quad \chi^2 \neq 1, \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten b_1 und b_2. Das Urbild von V_1 unter P ist

$$P^{-1}(V_1) = T((-1,1) + \epsilon(-1,V_1))T = T((-1,\wp^{n_1}) + \epsilon(-1,1)\,\mathrm{N}_K^1).$$

Man wählt zunächst

$$C_{11} = (-1,\wp^{n_1}) + \epsilon(-1,1)$$

und erhält

$$C_{11}U = \begin{pmatrix} -1+\wp^k+\wp^m & 1+\wp^k+\wp^m \\ -1+\wp^k+\wp^{m+n_1} & \wp^{n_1} \end{pmatrix},$$

wenn man $m \geq n_1$ wählt. Diese kompakte, offene Menge ist fundamental, denn aus

$$tc = \begin{pmatrix} -t_1 & t_1 \\ -t_2 & t_2\pi^{n_1}c_1 \end{pmatrix} \in C_{11}U$$

folgt $t_1 \in 1+\wp^k+\wp^m$ und $t_2 \in 1+\wp^k+\wp^{m+n_1}$. Weiter ist

$$P(C_{11}U) = \frac{-1+\wp^k+\wp^m}{\wp^{n_1}} = V_1.$$

Man setzt $\phi_{11} := \chi \cdot \mathbf{1}_{C_{11}U}$ und berechnet die Linking Number

$$\begin{aligned} H(\phi_{11},\psi)(x) &= \int_{T\backslash G}\int_T \phi_{11}(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \int_{T\backslash G}\chi(1,x)\int_T \phi_{11}(t^{-1}((-1,x^{-1})+\epsilon(-1,1))ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy \\ &= \chi_1^{-1}(x)\,\mathrm{vol}_G(U)\int_{F^\times}\chi_1^{-1}(a^{-1})\ d^\times a \\ &= \chi_1^{-1}(x)\,\mathrm{vol}_G(U)\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^k+\wp^m) \end{aligned}$$

denn der Integrand ist nur dann nicht null, wenn es $(u,w) \in K^\times$ gibt so, daß

$$(u,w)t^{-1}((-1,x^{-1})+\epsilon(-1,1))t = \begin{pmatrix} -u & ua^{-1} \\ -wa & wx^{-1} \end{pmatrix} \in C_{11}U.$$

Dies impliziert aber $x^{-1} \in \wp^{n_1}$ und $a \in 1+\wp^k+\wp^m$. Sind andererseits diese Bedingungen erfüllt, so kann man $(u,w) = (1,a^{-1})$ wählen.

Da das charakteristische Verhalten um unendlich davon abhängt, ob $\chi^2 = 1$, muß man jetzt dementsprechend unterscheiden:

1.Fall: $\chi^2 = 1$
Inspiriert vom ähnlichen Verhalten des Halms in Null, setzt man

$$C_{12} := (\mathbf{o}_F, \wp^{n_1}) + \epsilon(-1, 1).$$

Dann ist

$$C_{12}U = \begin{pmatrix} \mathbf{o}_F & 1 + \wp^k + \wp^m \\ -1 + \wp^k + \wp^{m+n_1} & \wp^{n_1} \end{pmatrix},$$

kompakt und offen und fundamental:

$$tc = \begin{pmatrix} -t_1 c_1 & t_1 \\ -t_2 & t_2 \wp^{n_1} c_2 \end{pmatrix} \in C_{12}U$$

impliziert wieder $t_1 \in 1 + \wp^k + \wp^m$ und $t_2 \in 1 + \wp^k + \wp^{m+n_1}$. Das Bild unter P ist wieder

$$P(C_{12}U) = \frac{-1 + \wp^k + \wp^m}{\wp^{n_1}} = V_1.$$

Man setzt $\phi_{12} := \chi \cdot \mathbf{1}_{C_{12}U}$ und berechnet

$$H(\phi_{12}, \psi)(x) = \int_{T \backslash G} \chi_1^{-1}(x) \int_T \phi_{12}(t^{-1}((-1, x^{-1}) + \epsilon(-1, 1))ty)\ dt\ \bar{\psi}(y)\ dy.$$

Die Bedingung

$$(u, w)t^{-1}((-1, x^{-1}) + \epsilon(-1, 1))t = \begin{pmatrix} -u & ua^{-1} \\ -wa & wx^{-1} \end{pmatrix} \in C_{12}U.$$

impliziert $v(u) = v(a) \geq 0$ und $v(w) - v(x) = -v(a) - v(x) \geq n_1$. Ist umgekehrt $0 \leq v(a) \leq -(v(x) + n_1)$, so wird obige Bedingung erfüllt von $(u, w) = (a, a^{-1})$, und die Linking Number ist

$$\begin{aligned} H(\phi_{12}, \psi)(x) &= \chi_1(x) \mathbf{1}_{V_1}(x) \operatorname{vol}_G(U) \int_{0 \leq v(a) \leq -(v(x)+n_1)} \chi_1(a) \chi_1^{-1}(a^{-1})\ d^\times a \\ &= \chi_1(x) \mathbf{1}_{V_1}(x)(-(v(x) + n_1) + 1) \operatorname{vol}_T(\mathbf{o}_F) \operatorname{vol}_G(U), \end{aligned}$$

denn $\chi^2 = 1$. Ist nun $H(x) = \chi_1(x)(b_1 + b_2 v(x))$ auf V_1 gegeben, so setzt man

$$\phi_1 := c_1 \phi_{11} + c_2 \phi_{12},$$

mit

$$c_2 := \frac{-b_2}{\operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \operatorname{vol}_G(U)}$$

und

$$c_1 := \frac{b_1}{\operatorname{vol}^\times(1 + \wp^k + \wp^m) \operatorname{vol}_G(U)} + c_2(n_1 - 1),$$

so daß $H(x) = H(\phi_1, \psi)$ erfüllt wird.

2.Fall: $\chi^2 \neq 1$
Indem man den Beweis von Lemma 2.4 studiert und die dort das charakteristische Verhalten erzeugende Funktionen als Funktionen auf G interpretiert, kommt man darauf,

$$C_{12} := (-1 + \wp^{n_1}, \wp^{n_1}) + \epsilon(-1, -1 + \wp^{n_1})$$

zu fordern. Damit erhält man das kompakte, offene Produkt

$$C_{12}U = \begin{pmatrix} -1 + \wp^{n_1} & -1 + \wp^{n_1} \\ -1 + \wp^k + \wp^{m+n_1} & \wp^{n_1} \end{pmatrix},$$

das zudem fundamental ist, wenn man $n_1 \geq c(\chi_1)$ fordert: Damit

$$tc = \begin{pmatrix} t_1(-1 + \pi^{n_1} c_1) & t_1 c_2 \\ -t_2 & t_2 \pi^{n_1} c_3 \end{pmatrix} \in C_{12}U$$

erfüllt ist, muß $t_1 \in 1 + \wp^{n_1}$ und $t_2 \in 1 + \wp^k + \wp^{m+n_1}$ gelten. Ist $n_1 \geq c(\chi_1)$, so folgt $\chi(t_1, t_2) = 1$. Man setzt $\phi_{12} = \chi \cdot \mathbf{1}_{C_{12}U}$. Die zugehörige Linking Number $H(\phi_{12}, \psi)(x)$ verschwindet nur dann nicht, wenn es $(u, w) \in K^\times$ gibt mit

$$(u, w)t^{-1}\gamma(x)t = \begin{pmatrix} -u & ua^{-1} \\ -wa & wx^{-1} \end{pmatrix} \in C_{12}U.$$

Aus dieser Bedingung folgt, daß $a \in -x(1 + \wp^{n_1})$ und $v(a) \leq -n_1$ gelten muß. Ist dies der Fall, so erfüllt $(u, w) = (1, a^{-1})$ die Bedingung. Somit erhält man

$$\begin{aligned} H(\phi_{12}, \psi)(x) &= \mathbf{1}_{V_1}(x) \operatorname{vol}_G(U) \int_{-x(1+\wp^{n_1})} \chi_1^{-1}(a^{-1})\, d^\times a \\ &= \mathbf{1}_{V_1}(x) \chi_1(-x) \operatorname{vol}_G(U) \operatorname{vol}^\times(1 + \wp^{n_1}). \end{aligned}$$

Wenn also $H(x) = \chi_1(x)b_1 + \chi_1^{-1}(x)b_2$ auf V_1 gegeben ist, wählt man

$$c_1 := \frac{b_2}{\operatorname{vol}^\times(1 + \wp^k + \wp^m) \operatorname{vol}_G(U)}$$

und

$$c_2 := \frac{b_1}{\chi_1(-1) \operatorname{vol}^\times(1 + \wp^{n_1}) \operatorname{vol}_G(U)},$$

setzt $\phi_1 := c_1\phi_{11} + c_2\phi_{12}$ und bekommt $H(x) = H(\phi_1, \psi)$ auf der Umgebung V_1 von unendlich.

2.3 Umparametrisierung von x auf ξ

Die Local Linking Numbers sind Funktionen der projektiven Ebene. Dabei kann man die Koordinaten grundsätzlich frei wählen. Es ist manchmal praktischer, die folgende Wahl zu treffen.

$$\xi := \frac{x}{x-1}$$

oder

$$\eta := 1 - \xi = (1-x)^{-1}.$$

Hier soll die Charakterisierung der Local Linking Numbers (Satz 2.6, 2.7, 2.9) noch einmal für diese Parameter dargestellt werden, weil sie für den Vergleich mit der automorphen Seite in dieser Darstellung benötigt werden und Zhang [Zh1] mit ihnen arbeitet. Für den Beweis der Charakterisierung der Local Linking Numbers war jedoch die Parameterisierung in P zweckmäßiger. Auch wird im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit meist mit der P-Parametrisierung gearbeitet.

Satz 2.10. *Es sei $K = F \oplus F$ eine zerfallende Algebra. Eine Funktion H von ξ auf $F^\times$ ist genau dann eine Local Linking Number, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt.*
(1) Der Träger von H ist als Teilmenge von F kompakt.
(2) H ist lokal konstant.
(3) Es gibt eine Umgebung U von null und lokal konstante Funktionen A_1, A_2 auf U derart, daß für alle $0 \neq \xi \in U$ gilt

$$H(\xi) = A_1(\xi) + A_2(\xi)v(\xi).$$

(4) Es gibt eine Umgebung V von 1 und lokal konstante Funktionen B_1, B_2 auf V so, daß für alle $1 \neq \xi \in V$ gilt

$$H(\xi) = \chi_1(\eta)B_1(\xi) + \chi_1^{-1}(\eta)B_2(\xi), \qquad \textit{falls } \chi_1^2 \neq 1,$$

$$H(\xi) = \chi_1(\eta)\left(B_1(\xi) + B_2(\xi)v(\eta)\right), \qquad \textit{falls } \chi_1^2 = 1.$$

Es sei daran erinnert, daß für eine Quaternionenalgebra D die Invariante $\delta(D)$ definiert ist als $\delta(D) = 0$, wenn D zerfällt und $\delta(D) = 1$ sonst. Damit formuliert man

Satz 2.11. *Es sei K/F eine quadratische Körpererweiterung. Eine Funktion H von ξ auf $F^\times$ ist genau dann eine Local Linking Number, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt.*
(1) $H(\xi) = 0$, falls $\omega(-\xi\eta) \neq (-1)^{\delta(D)}$.

(2) H ist lokal konstant auf $F^\times$, und der Träger von H als Teilmenge von F ist kompakt.
(3) Es existiert eine lokal konstante Funktion A auf einer Umgebung U von 0 so, daß für alle $0 \neq \xi \in U$ gilt

$$H(\xi) = A(\xi)\left(1 + \omega(-\xi\eta)(-1)^{\delta(D)}\right).$$

(4) Es gibt eine Umgebung V von 1 und eine lokal konstante Funktion B auf V derart, daß für alle $1 \neq \xi \in V$ gilt

$$H(\xi) = \chi_1(\eta)\delta(\chi^2 = 1)B(\xi)\left(1 + \omega(-\xi\eta)(-1)^{\delta(D)}\right),$$

wobei im Fall $\chi^2 = 1$ der Charakter χ_1 von $F^\times$ definiert ist durch $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$ (vergleiche Lemma 1.9).

Kapitel 3

Matching

Im folgenden sei mit $LLN(\xi)$ immer eine Local Linking Number in der Parametrisierung nach ξ gemeint. Es werden die „Whittakerprodukte“

$$W(\xi,\eta) = W_\theta(\eta)W_E(\xi)$$

(vergleiche Definition 1.14) von Kirillovfunktionen der Eisensteinreihe und der Thetareihe mit den Local Linking Numbers verglichen.

Satz 3.1. *Die Local Linking Numbers und die gerade definierten Whittakerprodukte matchen, das heißt: Wenn $\eta = 1-\xi$ und $\omega(-\xi\eta) = (-1)^{\delta(D)}$ erfüllt sind, dann gilt*

$$\left\{|\xi\eta|^{\frac{1}{2}} LLN(\xi)\right\} = \{W(\xi,\eta)\}\,.$$

Dabei ist für die Quaternionenalgebra D die Konstante $\delta(D)$ gleich 1, wenn D nicht zerfällt, beziehungsweise gleich 0, wenn D zerfällt.

Beweis: Es sei zunächst $K = F \oplus F$ eine zerfallende Algebra, also $\omega = 1$. Dann gilt $\Pi(\chi) = \Pi(\chi_1, \chi_1^{-1})$ und die Eisensteinreihe ist $\Pi(1,1)$. Man prüft nach, daß das Whittakerprodukt $W(\xi,\eta)$ die Eigenschaften aus Satz 2.10 bis auf den Faktor $|\xi\eta|^{\frac{1}{2}}$ erfüllt: Um $\xi = 0$ gilt

$$W(\xi,\eta) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}} A(\eta)(a_E v(\xi) + b_E),$$

wobei A eine lokal konstante Funktion in η und a_E, b_E Konstanten sind, denn nach Satz 1.18 ist $W_\theta(\eta)$ hier lokal konstant und W_E ist im Halm von Null wie in Satz 1.19. Das entspricht offenbar dem Verhalten der Local Linking Numbers um Null (Eigenschaft (3) aus Satz 2.10). Um $\xi = 1$ gilt wieder nach Satz 1.18 und Satz 1.19

$$W(\xi,\eta) = \begin{cases} |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}(a_\theta\chi_1(\eta) + b_\theta\chi_1^{-1}(\eta))B(\xi), & \text{falls } \chi_1^2 \neq 1 \\ |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\chi_1(\eta)(a_\theta v(\eta) + b_\theta)B(\xi), & \text{falls } \chi_1^2 = 1 \end{cases},$$

wobei nun B eine auf F lokal konstante Funktion in ξ ist und a_θ, b_θ Konstanten. Auch dies entspricht dem Verhalten der Local Linking Numbers um 1 (Eigenschaft (4) aus Satz 2.10). Da wiederum nach Satz 1.18 und Satz 1.19 die Whittakerprodukte lokal konstante Funktionen mit in F kompaktem Träger sind, sind auch die Eigenschaften (1) und (2) von Satz 2.10 erfüllt.
Es sei nun K/F eine Körpererweiterung. Dann ist nach Voraussetzung $\omega(-\xi\eta) = (-1)^{\delta(D)} = \text{const.}$, und somit Eigenschaft (1) aus Satz 2.11 erfüllt. Für die übrigen Eigenschaften aus Satz 2.11 beachte man: Hier ist $\Pi(\chi)$ supercuspidal, wenn χ nicht über die Norm faktorisiert, und $\Pi(\chi) = \Pi(\chi_1, \chi_1\omega)$, falls $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$. Die Eisensteinreihe ist $\Pi(1, \omega)$, und $\omega \neq 1$. Für ξ nahe Null setzt man aus Satz 1.18 und Satz 1.19 zusammen:

$$W(\xi, \eta) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}} \big(a_E + b_E\omega(\xi)\big) A_\theta(\eta),$$

für Konstanten a_E, b_E und eine lokal konstante Funktion A_θ. Für $\xi \to 0$ gilt $\omega(\eta) = 1$, also gilt $a_E + b_E\omega(\xi) = a_E + \tilde{b}_E\omega(-\xi\eta)(-1)^{\delta(D)} = \text{const.}$. Somit:

$$W(\xi, \eta) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}} \,\text{const.},$$

was genau Bedingung (3) von Satz 2.11 entspricht. Für ξ nahe 1, also für η nahe Null findet man mit Satz 1.18 und Satz 1.19

$$W(\xi, \eta) = A_E(\xi)|\xi\eta|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \chi_1(\eta)(a_\theta + b_\theta\omega(\eta)), & \text{falls } \chi = \chi_1 \circ \mathrm{N} \\ 0, & \text{falls } \chi \text{ nicht über die Norm faktorisiert} \end{cases}.$$

Hier gilt $\omega(\xi) = 1$, und wie eben sieht man $(a_\theta + b_\theta\omega(\eta)) = \text{const.}$, also

$$W(\xi, \eta) = A_E(\xi)|\xi\eta|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \chi_1(\eta)\,\text{const.}, & \text{falls } \chi = \chi_1 \circ \mathrm{N} \\ 0, & \text{falls } \chi \text{ nicht über die Norm faktorisiert} \end{cases},$$

was Eigenschaft (4) aus Satz 2.11 entspricht. Natürlich sind die Whittakerprodukte lokal konstante Funktionen mit kompaktem Träger in ξ, somit ist Eigenschaft (2) aus Satz 2.11 trivial.
Hat man andererseits eine Local Linking Number $LLN(\xi)$ gegeben, so läßt sich deren Verhalten um null und eins mit den obigen Formeln leicht durch ein Whittakerprodukt realisieren. Auf dem übrigen Träger setzt man $W_E(\xi) = |\xi|^{\frac{1}{2}} LLN(\xi)$ und $W_\theta(\eta) = |\eta|^{\frac{1}{2}}$. Dabei hat W_θ kompakten Träger auf $F^\times$, weil sich die Kompaktheit des Bereiches von ξ auf den von $\eta = 1-\xi$ vererbt, sobald ξ von Null weg beschränkt ist.

Teil II
Verhalten der Local Linking Numbers unter Translation, Matchingoperatoren

In diesem zweiten Teil der Arbeit sei D stets eine zerfallende Quaternionenalgebra und somit $G = F^\times \backslash D^\times$ isomorph zu $\mathrm{PGL}_2(F)$. Erstes Ziel ist es, Aussagen zu treffen über das Verhalten der Local Linking Numbers bei Translation um

$$B := \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $b \in F^\times$. Das heißt, die Eigenschaften der Funktionen

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_x = \int_{T\backslash G} \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\psi}(y \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\ dy$$

in x und b zu untersuchen. Dies nimmt die Kapitel 4, 5 und 8 in Anspruch.
Es sei daran erinnert, daß $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ sind, das heißt ϕ (und ebenso ψ) ist lokal konstant, $\phi(tg) = \chi(t)\phi(g)$ und modulo T hat ϕ kompakten Träger. χ ist dabei ein Charakter von $T = F^\times \backslash K^\times$.
Für festes b sind diese Eigenschaften natürlich durch die frühere Charakterisierung der Local Linking Numbers (Satz 2.9) gegeben. Nun soll die Variable x festgehalten werden. Die translatierten Local Linking Numbers werden also nur als Funktionen in $b \in F^\times$ betrachtet. Diese Einschränkung ist bedauerlich, aber der Rechenaufwand scheint im allgemeinen Fall nicht zu bewältigen. Um das Zusammenspiel beider Variablen wenigstens in Ansätzen beleuchten zu können, werden aber im folgenden auch einzelne, explizite Beispiele für translatierte Local Linking Numbers gegeben werden, die beide Variablen berücksichtigen (vergleiche Kapitel 4.1, 5.1 und 8.12).
Es muß grundsätzlich unterschieden werden, ob K/F eine Körpererweiterung ist oder eine zerfallende Algebra, weil im ersten Fall der Torus T kompakt ist, im zweiten Fall nicht. Für den Rechenaufwand hat das Fehlen dieser Eigenschaft verheerende Folgen: Um ein dem kompakten Fall (Satz 4.2) ebenbürdiges Resultat (Vermutung 5.4) zu erlangen, benötigt man den Aufwand von Kapitel 8. Zur Lesbarkeit dieses zweiten Teils wurde der Beweis von Vermutung 5.4 als Kapitel 8 an das Ende der Arbeit ausgelagert. Wer lediglich einen Eindruck von den Rechnungen dort bekommen möchte, sei auf Abschnitt 5.1 verwiesen. Die dortigen Methoden sind im wesentlichen die, welche man für den Beweis von Vermutung 5.4 benötigt.
Da die Translation als geometrisches Pendant zum analytischen Heckeoperator noch nicht ausreicht, werden in Kapitel 6 Operatoren konstruiert, die dem Heckeoperator ebenbürdig sind. Sie ermöglichen qualitative Matching-Aussagen zwischen dem Raum der Local Linking Numbers, auf den die Operatoren wirken, und dem Raum der Whittakerprodukte unter dem Heckeoperator (Satz 6.14).
In Kapitel 7 kommt man schließlich auf den Ausgangspunkt der Arbeit, auf die lokale Gross-Zagier-Formel, zurück. Neben einem vollständigen Beweis der

lokalen Gross-Zagier-Formel (Satz 7.10) in Abschnitt 7.1, der der besseren Übersicht dienen soll, wird sie hier mit Hilfe des in Kapitel 6 entwickelten geometrischen „Heckeoperators“ neu formuliert.

Kapitel 4

Der Fall eines kompakten Torus

Es sei $K = F(\sqrt{A})$ eine quadratische Körpererweiterung von F. Dann ist der Torus $T = F^\times \backslash K^\times$ kompakt. Daß die Funktionen $\phi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ kompakten Träger modulo T haben bedeutet hier, daß sie auch absolut kompakten Träger haben. Das innere Integral

$$I_\phi(y) = \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt$$

ist für festes x eine Funktion von y. Da ϕ lokal konstant ist, ist auch I_ϕ lokal konstant. Für festes t ist der Träger $(t^{-1}\gamma(x)t)^{-1}\operatorname{supp}\phi$ der Funktion $\phi(t^{-1}\gamma(x)ty)$ in y kompakt. Dann ist aber auch $T\gamma(x)T\operatorname{supp}\phi$ kompakt. Also hat I_ϕ kompakten Träger. Außerdem besitzt I_ϕ die schon früher bemerkte Transformationseigenschaft unter Linkstranslation mit Elementen t' aus T:

$$I_\phi(t'y) = \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)tt'y)\ dt = \chi(t')I_\phi(y).$$

Das innere Integral einer Local Linking Number ist somit wieder eine Funktion aus $\mathcal{S}(\chi, G)$, weil der Torus T kompakt ist.
Nun wähle man den Isomorphismus aus Definition 1.3 zwischen $D^\times$ und $GL_2(F)$, der durch folgende Zuordnungen bestimmt wird:

$$\begin{aligned} K^\times \ni t = a + b\sqrt{A} \quad &\mapsto \quad \begin{pmatrix} a & bA \\ b & a \end{pmatrix}, \\ \epsilon \quad &\mapsto \quad \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 4.1. *Es sei*

$$M = \{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y_1 \in F^\times, y_2 \in F\}$$

die mirabolische Untergruppe der Standardborelgruppe. Dann gilt mit obiger Einbettung von $K^\times$ in die $GL_2(F)$:

$$GL_2(F) = K^\times \cdot M.$$

Die dadurch definierte Abbildung $K^\times \times M \to GL_2(F)$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis: Es sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F)$$

gegeben. Zu zeigen ist, daß das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \beta A \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.0.1}$$

genau eine Lösung (δ, β, z, y) mit $(\delta, \beta) \neq (0,0)$ und $z \neq 0$ hat. Aus der ersten Spalte erhält man unmittelbar $\delta = az^{-1}$ und $\beta = cz^{-1}$. Das resultierende System lautet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= z^{-1} \begin{pmatrix} a & cA \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & z^{-1}cA + yz^{-1}a \\ c & z^{-1}a + yz^{-1}c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem in der zweiten Spalte ist linear in den Unbestimmten $w_1 = yz^{-1}$, $w_2 = z^{-1}$. Seine Determinante ist

$$\det = a^2 - c^2 A \neq 0,$$

denn die Normform auf $K^\times$ ist nicht ausgeartet und es ist $(a, c) \neq (0,0)$. Das System hat somit immer eine eindeutige Lösung (w_1, w_2). Wäre in dieser Lösung $w_2 = 0$, so lautete das Gleichungssystem

$$w_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F)$, ist das nicht möglich. Also ist immer $z^{-1} = w_2 \neq 0$; und z und y sind eindeutig und wohlbestimmt: Das Gesamtsystem 4.0.1 hat eine eindeutige Lösung (δ, β, z, y) mit $z \neq 0$. Die daraus resultierende stetige Abbildung $K^\times \times M \to GL_2(F)$ ist somit bijektiv. Weil ihre Umkehrung durch polynomiale Gleichungen bestimmt wird, ist auch diese stetig.

Die Gruppe M ist nicht mehr unimodular, vielmehr wird durch $d^\times y_1\ dy_2$ ein rechtsinvariantes Haarsches Maß gegeben. Dabei bezeichnet $d^\times y_1$ ein nichttriviales Haarmaß auf $F^\times$, das mit dem Haarmaß dy_2 auf F verträglich ist. Man normiere daher das Quotientenmaß dy auf $T\backslash G$ so, daß

$$dy = d^\times y_1\ dy_2.$$

Nach Lemma 4.1 entspricht offenbar jeder Funktion $\phi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ umkehrbar eindeutig eine Funktion

$$\phi\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(y_1, y_2) \in \mathcal{S}(M) = \mathcal{S}(F^\times \times F).$$

Zu jeder solchen Funktion ϕ, die nach Voraussetzung lokal konstant mit kompaktem Träger ist, gibt es eine natürliche Zahl m und endlich viele Stützstellen $(z_1, z_2) \in F^\times \times F$ so, daß

$$\phi(y_1, y_2) = \sum_{(z_1,z_2)} \phi(z_1, z_2)\mathbf{1}_{z_1(1+\wp^m)}(y_1)\mathbf{1}_{z_2+\wp^m}(y_2)$$

gilt. Dank dieser einfachen Schreibweise kann man nun die Gestalt der translatierten Local Linking Numbers leicht beschreiben: Es sei

$$I_\phi(y_1, y_2) = \sum_{(z_1,z_2)} I_\phi(z_1, z_2)\mathbf{1}_{z_1(1+\wp^m)}(y_1)\mathbf{1}_{z_2+\wp^m}(y_2)$$

und

$$\psi(y_1, y_2) = \sum_{(w_1,w_2)} \psi(w_1, w_2)\mathbf{1}_{w_1(1+\wp^m)}(y_1)\mathbf{1}_{w_2+\wp^m}(y_2)$$

mit einem für beide Funktionen passenden m. Dann ist

$$\begin{aligned}
&< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi >_x = \int_{T\backslash G} I_\phi(y)\bar{\psi}(y\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\ dy \\
&= \int_{F^\times}\int_F \sum_{(z_1,z_2),(w_1,w_2)} I_\phi(z_1, z_2)\bar{\psi}(w_1, w_2) \\
&\quad \cdot \mathbf{1}_{z_1(1+\wp^m)}(y_1)\mathbf{1}_{w_1(1+\wp^m)}(y_1 b)\mathbf{1}_{z_2+\wp^m}(y_2)\mathbf{1}_{w_2+\wp^m}(y_2)\ d^\times y_1\ dy_2 \\
&= \sum_{(z_1,z_2),(w_1,w_2)} I_\phi(z_1, z_2)\bar{\psi}(w_1, w_2)\mathbf{1}_{\frac{w_1}{z_1}(1+\wp^m)}(b)\mathbf{1}_{z_2+\wp^m}(w_2) \\
&\qquad \cdot \mathrm{vol}^\times(1+\wp^m)\,\mathrm{vol}(\wp^m).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man:

Satz 4.2. *Die Local Linking Number*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \psi >_x$$

ist für festes x im Fall eines kompakten Torus T eine lokal konstante Funktion von b mit kompaktem Träger in $F^\times$.

4.1 Explizite Beispiele

Hier soll im wesentlichen ein Beispiel für eine translatierte Local Linking Number angegeben werden, und zwar unter Berücksichtigung beider Variablen x und b. Weitere Beispiele werden sich daraus dann direkt ableiten lassen (vergleiche Bemerkungen 4.5). Zunächst soll der Ansatz, allgemeine Translate zu berechnen, kurz skizziert werden. Das darauffolgende Beispiel folgt diesem Ansatz. Er stellt das Verhalten der Funktionen durch explizite Rechnungen direkt dar, ähnlich wie es im Fall eines nichtkompakten Torus beim Beweis von Vermutung 5.4 zum Erfolg führen wird. Die Zahl der hierbei nötigen Rechnungen ist zwar kleiner als im nichtkompakten Fall, aber die Ungleichungen, die dazu gelöst werden müssen, quadratischer Natur. Darin, also im Rechenaufwand, liegt der Grund in der Beschränkung auf Beispiele. Trotzdem wird hier anders als im Fall eines nichtkompakten Torus eine ganze Klasse von Local Linking Numbers (siehe Bemerkung 4.6) abgedeckt.
In Satz 4.1 wurde eine Zerlegung der $GL_2(F)$ gegeben, die es ermöglicht, eine Funktion $\phi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ im wesentlichen als Funktion auf $F^\times \times F$ aufzufassen. Da der Träger von ϕ kompakt ist und ϕ lokal konstant ist, gibt es eine natürliche Zahl m und endlich viele Stützstellen (z_1, z_2) so, daß

$$\phi(y_1, y_2) = \sum_{z_1, z_2} \phi(z_1, z_2) \mathbf{1}_{z_1(1+\wp^m)}(y_1) \mathbf{1}_{z_2+\wp^m}(y_2).$$

Dabei kann man durch Wahl von $m >> 0$ annehmen, daß entweder $v(z_2) < m$ oder $z_2 = 0$. Um das Verhalten der Local Linking Numbers zu studieren, reicht es somit, sich bei den Funktionen ϕ und ψ auf solche der Form $\chi \cdot \mathbf{1}_{(z_1(1+\wp^m), z_2+\wp^m)}$ zu beschränken. Die äußere Integrationsvariable y der Local Linking Numbers sei daher immer als

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

angenommen. Möchte man das innere Integral

$$\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty) \; dt$$

berechnen, so zerlegt man zunächst das Argument $t^{-1}\gamma(x)ty$ gemäß Satz 4.1. Ein spurfreies $\gamma(x) = \sqrt{A} + \epsilon(\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{A})$ hat in der $GL_2(F)$ die Form

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 A \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_2 A & (1-\gamma_1)A \\ 1+\gamma_1 & \gamma_2 A \end{pmatrix},$$

wobei $\mathrm{N}(\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{A}) = x$. Setzt man $t = \alpha + \beta\sqrt{A}$, so erhält man

$$t^{-1}\gamma(x)t = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 A} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

mit

$$a := -A\big((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_2 + 2\alpha\beta\gamma_1\big),$$
$$b := -A\big((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_1 + 2\alpha\beta A\gamma_2 - (\alpha^2 - \beta^2 A)\big)$$

und

$$c := (\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_1 + 2\alpha\beta A\gamma_2 + (\alpha^2 - \beta^2 A).$$

Daraus berechnet man die Zerlegung

$$t^{-1}\gamma(x)t = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 A} \begin{pmatrix} ag_1^{-1} & cg_1^{-1}A \\ cg_1^{-1} & ag_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$g_1 := \frac{1+x}{1-x} + \frac{2((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_1 + 2\alpha\beta A\gamma_2)}{(1-x)(\alpha^2 - \beta^2 A)}$$

und

$$g_2 := \frac{2A((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_2 + 2\alpha\beta\gamma_1)}{(1-x)(\alpha^2 - \beta^2 A)}.$$

Der Integrand $\phi(t^{-1}\gamma(x)ty)$ für $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{(z_1(1+\wp^m), z_2+\wp^m)}$ ist somit genau dann von null verschieden, wenn sowohl

$$g_1 y_1 \in z_1(1 + \wp^m)$$

als auch

$$g_1 y_2 + g_2 \in z_2 + \wp^m$$

erfüllt ist. Dann ist sein Wert

$$\phi(t^{-1}\gamma(x)ty) = \chi(a + c\sqrt{A}).$$

Ausgeschrieben lauten diese beiden Bedingungen

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_1 + 2\alpha\beta A\gamma_2)}{(1-x)(\alpha^2 - \beta^2 A)} \in \frac{z_1}{y_1}(1 + \wp^m) \tag{4.1.1}$$

und

$$\Big(\frac{1+x}{1-x}+\frac{2((\alpha^2+\beta^2A)\gamma_1+2\alpha\beta A\gamma_2)}{(1-x)(\alpha^2-\beta^2A)}\Big)y_2+\frac{2A((\alpha^2+\beta^2A)\gamma_2+2\alpha\beta\gamma_1)}{(1-x)(\alpha^2-\beta^2A)}\in z_2+\wp^m. \tag{4.1.2}$$

Setzt man (4.1.1) in (4.1.2) ein, so erhält man

$$\frac{2A((\alpha^2+\beta^2A)\gamma_2+2\alpha\beta\gamma_1)}{(1-x)(\alpha^2-\beta^2A)}\in z_2-\frac{z_1y_2}{y_1}+\wp^m+\wp^{m+v(z_1)+v(y_2)-v(y_1)}. \tag{4.1.3}$$

Im allgemeinen ist es recht kompliziert beziehungsweise rechenaufwendig, diese quadratischen Ungleichungen zu lösen und dann die Integrale zu berechnen.

Deshalb beschränke man sich hier auf den folgenden, speziellen Fall: Es sei K/F eine unverzweigte Körpererweiterung mit Restklassencharakteristik ungleich 2, etwa $K=F(\sqrt{A})$, mit $A\in\mathbf{o}_F^\times\backslash\mathbf{o}_F^{\times 2}$. Weiter sei der Charakter χ unverzweigt. Da χ auf $F^\times$ trivial ist, impliziert das sogar

$$\chi=1.$$

Weiter wähle man

$$\phi=\psi=\chi\cdot\mathbf{1}_{U_m},$$

wobei

$$U_m:=\begin{pmatrix}1+\wp^m & \wp^m\\ \wp^m & 1+\wp^m\end{pmatrix}$$

für $m>0$ eine kompakt offene Untergruppe der $GL_2(F)$ ist. Da U_m, wie man leicht nachrechnet, fundamental ist, ist ϕ wohldefiniert.
Schreibt man ϕ als Funktion der mirabolischen Gruppe M, so lautet sie

$$\phi(y_1,y_2):=\phi(\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ 0 & 1\end{pmatrix})=\mathbf{1}_{1+\wp^m}(y_1)\mathbf{1}_{\wp^m}(y_2).$$

Im folgenden soll die translatierte Local Linking Number

$$<\phi,\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\phi>_x=\int_{F^\times}\int_F\int_T\phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\phi}(by_1,y_2)\ dy_2\ d^\times y_1$$

berechnet werden. Den inneren Integrationsbereich T kann man in zwei disjunkte Teilmengen unterteilen,

$$T=\{[1+\beta\sqrt{A}]|v(\beta)\geq 0\}\quad\dot\cup\quad\{[\alpha+\sqrt{A}]|v(\alpha)>0\},$$

und indem man in (4.1.1) und (4.1.2) entsprechend kürzt, kann man dann dort entweder $\alpha=1$ und $v(\beta)\geq 0$ oder $\beta=1$ und $v(\alpha)>0$ annehmen. Diese zwei Teilmengen von T werden im folgenden gesondert behandelt.

Um die Integrale zu lösen, muß zunächst untersucht werden, wann der innere Integrand nicht verschwindet, also wann zugleich (4.1.1) und (4.1.2) erfüllt sind. Ist das der Fall, so ist der Integrand gleich 1, da χ trivial ist. Man erhält also Bedingungen an α beziehungsweise β, y_1, y_2, b und x dafür, wann der innere Integrand nicht verschwindet. Integration über den zulässigen Bereich für α beziehungsweise β bestimmt das innere Integral. Nachfolgende Integration über die zulässigen Bereiche für y_1 und y_2 ergibt dann das äußere Integral, sprich die translatierte Local Linking Number als Funktion von x und b.
Dabei muß man weiter unterscheiden, ob -1 Quadrat in F ist oder nicht.

4.1.1 Eine spezielle translatierte Linking Number falls $-1 \in F^{\times 2}$

Es sei also K/F eine unverzweigte Körpererweiterung, wobei -1 Quadrat in $F^\times$ ist, und es sei $\chi = 1$. Dann ist $A \neq -1$, und somit gilt $v(\alpha^2 + \beta^2 A) = 2\min\{v(\alpha), v(\beta)\}$. Abhängig von x kann $g(x) = \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{A}$ mit $\mathrm{N}(g(x)) = x$ noch einfach gewählt werden, weil $g(x)$ nur bis auf Elemente der Norm eins bestimmt ist:

- Ist $x \in F^{\times 2}$, so sei $g(x) := \gamma_1$ mit $\mathrm{N}(g(x)) = \gamma_1^2 = x$.
- Ist $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$, so sei $g(x) := \gamma_2\sqrt{A}$ mit $\mathrm{N}(g(x)) = -\gamma_2^2 A = x$.

Für diese beiden Fälle werden die Beiträge nun einzeln berechnet.

Beiträge für quadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[1 + \beta\sqrt{A}]$ mit $v(\beta) \geq 0$ von T

Die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2) können hier vereinfacht geschrieben werden als

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in b(1+\wp^m) \tag{4.1.4}$$

und

$$\Big(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\Big)y_2 + \frac{4\beta A\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \wp^m, \tag{4.1.5}$$

wenn man zudem beachtet, daß die äußere Funktion ϕ die Bedingungen $y_1 \in b^{-1}(1+\wp^m)$ und $y_2 \in \wp^m$ fordert. Hierbei wurde $x = \gamma_1^2$ gesetzt.
1. Fall: Es sei $v(x) > 0$. Dann gilt

$$\frac{1+x}{1-x} \in 1 + \wp^{v(x)}$$

sowie

$$v\left(\frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) = \frac{1}{2}v(x).$$

Also impliziert (4.1.4), daß $b \in 1 + \wp^{\frac{1}{2}v(x)} + \wp^m$. Insbesondere ist $v(b) = 0$. Nimmt man an, daß (4.1.4) erfüllt ist und setzt dies in (4.1.5) ein, so erhält man

$$\frac{4\beta A\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \wp^m,$$

also

$$v(\beta) \geq m - \frac{1}{2}v(x).$$

Es sei nun zunächst sogar angenommen, daß $v(x) \geq 2m$. Dann ist (4.1.4) genau dann erfüllt, wenn $b \in 1+\wp^m$, und (4.1.5) ist dann für alle zulässigen β erfüllt, also für alle $\beta \in \mathbf{o}_F$.
Ist hingegen $0 < v(x) < 2m$, so ist (4.1.4) lediglich gleichbedeutend zu

$$\beta^2 A\big(b(1-x) - (1+x) + 2\gamma_1\big) \in b(1-x) - (1+x) - 2\gamma_1 + \wp^m.$$

Wäre $b(1-x)-(1+x)+2\gamma_1 = 0$, so folgte hieraus $\gamma_1 \in \wp^m$, was ein Widerspruch zu $v(x) < 2m$ ist. Also ist $b(1-x) - (1+x) + 2\gamma_1 \neq 0$, und die Bedingung lautet

$$\begin{aligned}\beta^2 A \quad &\in \quad \frac{b(1-x) - (1+x) - 2\gamma_1}{b(1-x) - (1+x) + 2\gamma_1} + \wp^{m - v(b(1-x)-(1+x)+2\gamma_1)} \\ &= 1 - \frac{4\gamma_1}{b(1-x) - (1+x) + 2\gamma_1} + \wp^{m - v(b(1-x)-(1+x)+2\gamma_1)}.\end{aligned}$$

Falls $\frac{1}{2}v(x) - v(b(1-x)-(1+x)+2\gamma_1) > 0$, so ist diese Bedingung nicht erfüllbar, weil $\beta^2 A$ kein Quadrat ist, die rechte Seite aber nur Quadrate enthält. Falls $\frac{1}{2}v(x) - v(b(1-x) - (1+x) + 2\gamma_1) < 0$, so ist die Bedingung nicht erfüllbar, weil $v(\beta^2 A) \geq 0$. Also muß $\frac{1}{2}v(x) - v(b(1-x) - (1+x) + 2\gamma_1) = 0$ gelten, oder anders ausgedrückt

$$v\left(1 - b\frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}\right) = \frac{1}{2}v(x).$$

Wegen (4.1.5) muß auch noch $\beta^2 A \in \wp^{2m - v(x)}$ gelten. Das heißt, (4.1.4) und (4.1.5) können gemeinsam genau dann erfüllt werden, wenn $v(b(1-x) - (1+x) - 2\gamma_1) \geq m$, also wenn

$$b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m).$$

Zusammenfassend erhält man im 1. Fall also die Beiträge

- $0 < v(x) < 2m$: $b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\beta \in \wp^{m-\frac{1}{2}v(x)}$,
- $v(x) \geq 2m$: $b \in 1+\wp^m$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$,

wobei γ_1 die anfangs gewählte Quadratwurzel von x bezeichnet.

2. Fall: Es sei $v(x) < 0$. Hier erweitere man zunächst die linken Seiten von (4.1.4) und (4.1.5) jeweils mit $\frac{1}{x}$. Das ergibt

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} + \frac{2(1+\beta^2 A)\frac{1}{\gamma_1}}{(1-\frac{1}{x})(1-\beta^2 A)} \in -b(1+\wp^m)$$

und

$$\Big(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} + \frac{2(1+\beta^2 A)\frac{1}{\gamma_1}}{(1-\frac{1}{x})(1-\beta^2 A)}\Big)y_2 + \frac{4\beta A\frac{1}{\gamma_1}}{(1-\frac{1}{x})(1-\beta^2 A)} \in \wp^m.$$

Das sind dieselben Bedingungen an $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\gamma_1}$ und $-b$, wie (4.1.4) und (4.1.5) sie an x, γ_1 und b stellen. Die Beiträge für den Fall $v(x) < 0$ kann man also durch entsprechende Substitution direkt aus denen im Fall $v(x) > 0$ ablesen:

- $-2m < v(x) < 0$: $b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\beta \in \wp^{m+\frac{1}{2}v(x)}$,
- $v(x) \leq -2m$: $b \in -1+\wp^m$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

3. Fall: Hier sei $v(x) = 0$. Es gilt

$$v\left(\frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) = -v(1-x),$$

sodaß (4.1.4) in jedem Fall $v(b) \geq -v(1-x)$ impliziert.
(i) Es sei $x \in -1+\wp$. (Dieser Fall tritt auf, da $-1 \in F^{\times 2}$.) Dann ist $v(\frac{1+x}{1-x}) = v(1+x) > 0$, und (4.1.4) impliziert sogar $v(b) = 0$. Daher folgt nun, daß (4.1.5) unter dieser Bedingung gleichbedeutend ist zu

$$\beta \in \wp^m. \tag{4.1.6}$$

Da $b(1-x)-(1+x)+2\gamma_1 \neq 0$, denn sonst würde (4.1.4) $v(\gamma_1) \geq m$ verlangen, ist (4.1.4) äquivalent zu

$$\beta^2 A \in \frac{b(1-x)-(1+x)-2\gamma_1}{b(1-x)-(1+x)+2\gamma_1} + \wp^{m-v(b(1-x)-(1+x)+2\gamma_1)}.$$

Da $\beta^2 A \in \wp^{2m}$ wegen (4.1.6), kann dies nur erfüllt sein, wenn

$$b(1-x)-(1+x)-2\gamma_1 \in \wp^m,$$

also wenn

$$b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m).$$

(ii) Es sei $x \in 1+\wp$. Dann ist $v(1-x) > 0$ und $v(b) \geq -v(1-x)$ kann apriori auch negative Werte annehmen. Gleichung (4.1.5) lautet

$$\left((1+x) + \frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{1-\beta^2 A}\right) y_2 + \frac{4\beta A \gamma_1}{1-\beta^2 A} \in \wp^{m+v(1-x)}, \tag{4.1.7}$$

woraus folgt, daß

$$\beta \in \wp^{m+v(1-x)} + \wp^{m+v(1-x)+v(b)} \subset \wp^m.$$

(4.1.4) läßt sich damit umformen zu

$$(1+\gamma_1)^2 \in b(1-x) + (1-\gamma_1)^2 \beta^2 A + \wp^{m+v(b)+v(1-x)}. \tag{4.1.8}$$

Man muß nun unterscheiden, ob die Quadratwurzel γ_1 von x modulo $\wp$ gleich 1 oder -1 ist. Ist $\gamma_1 \in 1+\wp$, so ist $v(1-\gamma_1) = v(1-x)$. Dann impliziert (4.1.8) $0 = 2v(1+\gamma_1) = v(b) + v(1-x)$ und ist demnach gleichbedeutend zu

$$1+\gamma_1 \in b(1-\gamma_1) + \wp^m,$$

beziehungsweise zu

$$b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m).$$

Setzt man (4.1.4) für solche b erneut in (4.1.7) ein, so erhält man noch die Bedingung

$$\beta \in \frac{-(1+\gamma_1)^2 y_2}{4A\gamma_1} + \wp^{m+v(1-x)}.$$

Ist hingegen $\gamma_1 \in -1+\wp$, dann muß man für (4.1.8) zwei Fälle unterscheiden: Entweder ist $v(1+\gamma_1) = v(1-x) \geq m + v(b)$. Dann ist wegen (4.1.5)

$$(1-\gamma_1)\beta^2 A \in \wp^{m+v(b)+v(x)},$$

und (4.1.8) ist gleichbedeutend zu

$$b(1+\gamma_1) \in \wp^{m+v(b)+v(1+\gamma_1)},$$

einem offensichtlichen Widerspruch.
Oder aber es ist $0 < 2v(1+\gamma_1) = v(b) + v(1+\gamma_1)$, also $v(b) = v(1-x) > 0$. Dann ist (4.1.8) gleichbedeutend zu

$$(1+\gamma_1)^2 \in b(1-x) + \wp^{m+2v(1-x)},$$

was aufgelöst nach b gerade

$$b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m)$$

bedeutet. Dann findet man hier noch, daß (4.1.7) gleichbedeutend zu $\beta \in \wp^{m+v(1-x)}$ ist.
(iii) Hier sei $x \notin \pm 1 + \wp$. Dann ist $v(1+x) = v(1-x) = 0$ und (4.1.4) fordert, daß $v(b) \geq 0$. Unter dieser Voraussetzung lautet (4.1.5) schlicht

$$\beta \in \wp^m.$$

Die Gleichung (4.1.4) ist hier gleichbedeutend zu

$$1 + x + 2\gamma_1 \in b(1-x) + (1 + x - 2\gamma_1)\beta^2 A + \wp^{m+v(b)}. \tag{4.1.9}$$

Weil $v(1 + x + 2\gamma_1) = v(1-x) = 0$ und $v((1 + x - 2\gamma_1)\beta^2 A) \geq 2m$ gilt, muß nun sogar $v(b) = 0$ erfüllt sein. Dann lautet (4.1.9)

$$(1+\gamma_1)^2 \in b(1-\gamma_1)(1+\gamma_1) + \wp^m,$$

wobei man $\gamma_1^2 = x$ benutzt hat. Nach b aufgelöst bedeutet das

$$b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m).$$

Die Beiträge (i) bis (iii) des 3. Falls sind also:

- $x \in \mathbf{o}_F^{\times 2} \backslash (1+\wp)$: $b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\beta \in \wp^m$,
- $x \in 1+\wp$ und $\gamma_1 \in 1+\wp$: $b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\beta \in \frac{-(1+\gamma_1)^2 y_2}{4A\gamma_1} + \wp^{m+v(1-x)}$,
- $x \in 1+\wp$ und $\gamma_1 \in -1+\wp$: $b \in \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\beta \in \wp^{m+v(1-x)}$.

Beiträge für quadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[\alpha + \sqrt{A}]$ mit $v(\alpha) > 0$ von T

Die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2) lauten hier vereinfacht

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(\alpha^2+A)\gamma_1}{(1-x)(\alpha^2-A)}\right) \in b(1+\wp^m) \tag{4.1.10}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(\alpha^2+A)\gamma_1}{(1-x)(\alpha^2-A)}\right) y_2 + \frac{4\alpha A\gamma_1}{(1-x)(\alpha^2-A)} \in \wp^m, \tag{4.1.11}$$

wenn auch die Bedingungen $y_1 \in b^{-1}(1+\wp^m)$ und $y_2 \in \wp^m$ der äußeren Funktion ϕ beachtet werden. Wieder ist $x = \gamma_1^2$. Durch die Substitution

$$\alpha \mapsto \beta A$$

kann man (4.1.10) und (4.1.11) umformulieren zu

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in b(1+\wp^m)$$

und

$$\Big(\frac{1+x}{1-x} - \frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\Big)y_2 - \frac{4\beta A\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \wp^m.$$

Und das sind genau die Gleichungen (4.1.4) und (4.1.5), in denen man γ_1 durch $-\gamma_1$ ersetzt hat. Also muß man für die Beiträge dieses Falls in denen des vorhergehenden Falls nur überall γ_1 durch $-\gamma_1$ ersetzen und $\beta \in \wp$ durch αA^{-1}. Das ergibt:

- $v(x) \geq 2m$: $b \in 1+\wp^m$ und $\alpha \in \wp$,
- $0 < v(x) < 2m$: $b \in \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\alpha \in \wp^{m-\frac{1}{2}v(x)}$,
- $v(x) \leq -2m$: $b \in -1+\wp^m$ und $\alpha \in \wp$,
- $-2m < v(x) < 0$: $b \in \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\alpha \in \wp^{m+\frac{1}{2}v(x)}$,
- $x \in \mathbf{o}_F^{\times 2} \backslash (1+\wp)$: $b \in \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\alpha \in \wp^m$,
- $x \in 1+\wp$ und $\gamma_1 \in -1+\wp$: $b \in \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\alpha \in \frac{(1-\gamma_1)^2 y_2}{4\gamma_1} + \wp^{m+v(1-x)}$,
- $x \in 1+\wp$ und $\gamma_1 \in 1+\wp$: $b \in \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}(1+\wp^m)$ und $\alpha \in \wp^{m+v(1-x)}$.

Beiträge für nichtquadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[1+\beta\sqrt{A}]$ mit $v(\beta) \geq 0$ von T

Hier lassen sich die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2) vereinfachen zu

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in b(1+\wp^m) \tag{4.1.12}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) y_2 + \frac{2A(1+\beta^2 A)\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \wp^m, \tag{4.1.13}$$

wenn man zudem beachtet, daß die äußere Funktion ϕ die Bedingungen $y_1 \in b^{-1}(1+\wp^m)$ und $y_2 \in \wp^m$ fordert. Dabei wurde $x = -\gamma_2^2 A \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$ gesetzt.
1.Fall: Es sei $v(x) > 0$. Dann gilt

$$\frac{1+x}{1-x} \in 1 + \wp^{v(x)}$$

und

$$\frac{2\beta A \gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \wp^{\frac{1}{2}v(x)}.$$

Daher impliziert (4.1.12)

$$b \in 1 + \wp^{\frac{1}{2}v(x)} + \wp^m.$$

Unter diesen Bedingungen und $y_2 \in \wp^m$ ist dann (4.1.13) gleichbedeutend zu

$$\gamma_2 \in \wp^m.$$

Das heißt $v(x) \geq 2m$. Dann ist (4.1.12) genau dann erfüllt, wenn $b \in 1 + \wp^m$. Der Beitrag des 1. Falls lautet somit:

- $v(x) \geq 2m$: $b \in 1 + \wp^m$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

2. Fall: Es sei $v(x) < 0$. Dann gilt

$$\frac{1+x}{1-x} \in -1 + \wp^{-v(x)}$$

und

$$\frac{2\beta A \gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \wp^{-\frac{1}{2}v(x)}.$$

Also folgt aus (4.1.12), daß

$$b \in -1 + \wp^{-\frac{1}{2}v(x)} + \wp^m$$

erfüllt sein muß. Betrachtet man Gleichung (4.1.13) unter dieser Bedingung, so lautet sie

$$\gamma_2^{-1} \in \wp^m,$$

also $v(x) \leq -2m$. Dann ist (4.1.12) genau dann erfüllt, wenn $b \in -1 + \wp^m$. Der Beitrag des 2. Falls ist demnach:

- $v(x) \leq -2m$: $b \in -1 + \wp^m$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$

3. Fall: Nun sei $v(x) = 0$. Da x kein Quadrat ist, ist $x \notin \pm 1 + \wp$. Dann gilt

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F,$$

und (4.1.12) kann nur erfüllt werden, wenn zumindest $v(b) \geq 0$. Betrachet man (4.1.13) unter dieser Voraussetzung und beachtet $y_2 \in \wp^m$, so erhält man

$$\gamma_2 \in \wp^m.$$

Da hier aber $v(x) = 2v(\gamma_2) = 0$ gelten muß, ist dies ein offensichtlicher Widerspruch. Der 3. Fall liefert keinen Beitrag.

Beiträge für nichtquadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[\alpha + \sqrt{A}]$ mit $v(\alpha) > 0$ von T

Die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2) lassen sich hier vereinfachen zu

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\alpha A\gamma_2}{(1-x)(\alpha^2 - A)} \in b(1+\wp^m) \tag{4.1.14}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\alpha A\gamma_2}{(1-x)(\alpha^2 - A)}\right) y_2 + \frac{2A(\alpha^2 + A)\gamma_2}{(1-x)(\alpha^2 - A)} \in \wp^m, \tag{4.1.15}$$

wobei $x = -\gamma_2^2 A \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$. Dabei wurde ausgenützt, daß die äußere Funktion ϕ die Bedingungen $y_1 \in b^{-1}(1+\wp^m)$ und $y_2 \in \wp^m$ erfordert. Substituiert man wieder

$$\alpha \mapsto \beta A,$$

so erhält man aus (4.1.14) und (4.1.15)

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{2\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in b(1+\wp^m)$$

beziehungweise

$$\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{2\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) y_2 - \frac{2A(1+\beta^2 A)\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \wp^m.$$

Dies entspricht genau den Bedingungen (4.1.12) und (4.1.13), wenn man dort γ_2 durch $-\gamma_2$ ersetzt. Die Bedingungen dieses Abschnitts ergeben sich also aus denen des vorigen Abschnitts, wenn man in ihnen γ_2 durch $-\gamma_2$ und $\beta \in \wp$ durch αA ersetzt:

- $v(x) \geq 2m$: $b \in 1 + \wp^m$ und $\alpha \in \wp$,
- $v(x) \leq -2m$: $b \in -1 + \wp^m$ und $\alpha \in \wp$.

Berechnung der translatierten Local Linking Number

Aus den Beiträgen der letzten vier Abschnitte berechnet man nun die translatierte Local Linking Number

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x$$

Der Bereich für β beziehungsweise α beschreibt jeweils den Integrationsbereich des inneren Integrals. Der Integrationsbereich des äußeren Integrals ist jeweils unabhängig vom inneren Integral und umfaßt immer den gesamten Träger $b^{-1}(1+\wp^m) \times \wp^m$ der äußeren Funktion $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi$. Zur Abkürzung setzt man noch

$$\mathrm{vol} := \mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}(\wp^m)\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^m)$$

und

$$\mathrm{vol}' := \frac{\mathrm{vol}_T(\{[\alpha+\beta\sqrt{A}] | v(\alpha) \geq v(\beta)\})}{\mathrm{vol}_T(T)} = \frac{\mathrm{vol}_T(\{[\alpha+\beta\sqrt{A}] | v(\beta) \geq v(\alpha)\})}{\mathrm{vol}_T(T)}.$$

Weiter ersetzt man nun die Quadratwurzel γ_1 von x durch $\sqrt{x}$, wenn x Quadrat ist. Dann erhält man durch Zusammensammeln aller Beiträge, die durch $\bullet$ gekennzeichnet wurden,

Satz 4.3. *Es sei K/F eine unverzweigte quadratische Körpererweiterung, und es sei $-1 \in F^{\times 2}$. Weiter sei χ unverzweigt und $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{U_m}$, $m > 0$ beliebig. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x = \\
&\Big(\mathbf{1}_{\wp^m \cap \mathrm{N}}(x)\mathbf{1}_{1+\wp^m}(b) + \mathbf{1}_{\wp^m \cap \mathrm{N}}(x^{-1})\mathbf{1}_{-1+\wp^m}(b)\Big)\,\mathrm{vol} \\
&+\mathbf{1}_{F^{\times 2}}(x)\big(\mathbf{1}_{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}(1+\wp^m)}(b) + \mathbf{1}_{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(1+\wp^m)}(b)\big)\,\mathrm{vol}\,\mathrm{vol}'\,q^{-m} \\
&\cdot\Big(\mathbf{1}_{\wp\setminus\wp^{2m}}(x)|x|^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{1}_{\wp\setminus\wp^{2m}}(x^{-1})|x|^{\frac{1}{2}} + \mathbf{1}_{1+\wp}(x)q^{-m-v(1-x)} + \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^{\times 2}\setminus(1+\wp)}(x)\Big).
\end{aligned}$$

4.1.2 Eine spezielle translatierte Linking Number falls $-1 \notin F^{\times 2}$

Es sei nun K/F eine unverzweigte Körpererweiterung, wobei $-1 \notin F^{\times 2}$, und es sei $\chi = 1$. Da es nur eine einzige unverzweigte quadratische Erweiterung von F gibt, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $A = -1$. Da die Norm auf $\mathbf{o}_F^\times$ surjektiv ist, gibt es ein $\gamma_3 \in \mathbf{o}_F^\times$ so, daß $1+\gamma_3^2$ kein Quadrat ist. Abhängig von der Quadratklasse von x kann $g(x)$ mit $\mathrm{N}(g(x)) = x$ noch etwas einfacher gewählt werden:

- Ist $x \in F^{\times 2}$, so sei $g(x) := \gamma_1$ mit $\mathrm{N}(g(x)) = \gamma_1^2 = x$.
- Ist $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$, so sei $g(x) := \gamma_1(1+\gamma_3\sqrt{-1})$ mit $\mathrm{N}(g(x)) = \gamma_1^2(1+\gamma_3^2) = x$.

Für diese beiden Fälle werden die Bedingungen dafür, daß der innere Integrand $\phi(g_1y_1, g_1y_2+g_2)$ nicht verschwindet, nun einzeln berechnet. Es sei daran erinnert, daß weiterhin die translatierte Local Linking Number zu den Funktionen $\phi = \psi = \chi \cdot \mathbf{1}_{U_m}$ berechnet werden soll. Das heißt, es wird nun einzeln geprüft, wann (4.1.1) und (4.1.2) zugleich erfüllt sind für $z_1 = 1$ und $z_2 = 0$.

Beiträge für quadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[1+\beta\sqrt{-1}]$ mit $v(\beta) \geq 0$ von T

Die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2) lauten hier unter Berücksichtigung der äußeren Funktion, die $y_1 \in b^{-1}(1+\wp^m)$ und $y_2 \in \wp^m$ fordert,

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(1-\beta^2)\gamma_1}{(1-x)(1+\beta^2)} \in b(1+\wp^m) \tag{4.1.16}$$

und

$$\Big(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(1-\beta^2)\gamma_1}{(1-x)(1+\beta^2)}\Big)y_2 - \frac{4\beta\gamma_1}{(1-x)(1+\beta^2)} \in \wp^m. \tag{4.1.17}$$

Es gilt $v(1-\beta^2) \geq 0$, und der Fall $>$ tritt genau dann ein, wenn $\beta \in \pm 1 + \wp$. Ist also $\beta \in \mathbf{o}_F \setminus (\pm 1 + \wp)$, so berechnen sich die Beiträge genau wie die entsprechenden Beiträge in 4.1.1, so daß hier nur noch untersucht werden muß, welche zusätzlichen Beiträge im Fall $\beta \in \pm 1 + \wp$ auftreten. Es sei also $\beta = \pm 1 + \beta'$ mit $\beta' \in \wp$.
1. Fall: Es sei $v(x) > 0$. Dann gilt

$$\frac{1+x}{1-x} \in 1 + \wp^{v(x)}$$

und

$$\frac{2(1-\beta^2)\gamma_1}{(1-x)(1+\beta^2)} \in \wp^{\frac{1}{2}v(x)+v(\beta')}.$$

Also impliziert (4.1.16), daß $b \in 1 + \wp^{v(x)} + \wp^{\frac{1}{2}v(x)+v(\beta')} + \wp^m$ gelten muß. Insbesondere ist $v(b) = 0$. Unter dieser Bedingung ist (4.1.17) genau dann erfüllt, wenn

$$\beta\gamma_1 \in \wp^m.$$

Da $v(\beta) = 0$, ist dies gleichbedeutend zu $v(x) \geq 2m$. Dann ist (4.1.16) sogar gleichbedeutend zu $b \in 1 + \wp^m$ und der zusätzliche Beitrag lautet

- $v(x) \geq 2m$: $b \in 1 + \wp^m$ und $\beta \in \pm 1 + \wp$.

Zusammen mit den Beiträgen für $\beta \notin \pm 1 + \wp$ ergibt das insgesamt genau dasselbe Ergebnis wie im entsprechenden Fall aus 4.1.1.
2. Fall: Es sei nun $v(x) < 0$. Hier erweitere man die linken Seiten von (4.1.16) und (4.1.17) mit $\frac{1}{x}$ und erhalte

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{2(1 - \beta^2)\frac{1}{\gamma_1}}{(1 - \frac{1}{x})(1 + \beta^2)} \in -b(1 + \wp^m)$$

und

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{2(1 - \beta^2)\frac{1}{\gamma_1}}{(1 - \frac{1}{x})(1 + \beta^2)}\right) y_2 - \frac{4\beta\frac{1}{\gamma_1}}{(1 - \frac{1}{x})(1 + \beta^2)} \in \wp^m.$$

Dies sind dieselben Bedingungen an $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\gamma_1}$ und $-b$ wie (4.1.16) und (4.1.17) an x, γ_1 und b. Den Beitrag für den Fall $v(x) < 0$ kann man also durch entsprechende Substitution aus dem Fall $v(x) > 0$ direkt ablesen:

- $v(x) \leq -2m$: $b \in -1 + \wp^m$ und $\beta \in \pm 1 + \wp$

Zusammen mit den Beiträgen für $\beta \notin \pm 1 + \wp$ ergibt das wieder genau das Ergebnis wie im entsprechenden Fall aus 4.1.1.
3. Fall: Nun sei $v(x) = 0$. Dann ist

$$v\left(\frac{2(1 - \beta^2)\gamma_1}{(1 - x)(1 + \beta^2)}\right) = v(\beta') - v(1 - x) > -v(1 - x).$$

Da $x \notin -1 + \wp$, denn $-1 \notin F^{\times 2}$, ist $v(1 + x) = 0$. somit folgt aus (4.1.16)

$$v(b) = \min\{v(1 + x) - v(1 - x), v(\beta') - v(1 - x)\} = -v(1 - x).$$

Setzt man dies in (4.1.17) ein, so erhält man

$$\frac{-4\beta\gamma_1}{(1 - x)(1 + \beta^2)} \in \wp^m + \wp^{m - v(1 - x)} = \wp^{m - v(1 - x)}.$$

Dies ist gleichbedeutend zu $v(\beta) \geq m$, einem Widerspruch zu $\beta \in \pm 1 + \wp$. Also gibt es im 3. Fall keine zusätzlichen Beiträge.
Die Beiträge für $x \in F^{\times 2}$ und die Nebenklassen $[1 + \beta\sqrt{A}]$ mit $v(\beta) \geq 0$ von T sind im Fall $-1 \notin F^{\times 2}$ genau dieselben wie die im Fall $-1 \in F^{\times 2}$.

Beiträge für quadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[\alpha + \sqrt{-1}]$ mit $v(\alpha) > 0$ von T

Da hier $\alpha \in \wp$, ist $v(\alpha^2 + A) = v(\alpha^2 - 1) = 0$. Die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2) sind also genauso auszuwerten wie im entsprechenden Abschnitt in 4.1.1, wo -1 ein Quadrat war. Dementsprechend sind auch die Beiträge hier genau dieselben wie dort.

Beiträge für nichtquadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[1+\beta\sqrt{-1}]$ mit $v(\beta) \geq 0$ von T

Es sei $g(x) = \gamma_1(1+\gamma_3\sqrt{A})$, also $x = \gamma_1^2(1+\gamma_3^2)$. Die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2) lauten dann

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\gamma_1(1-\beta^2-2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)} \in b(1+\wp^m) \tag{4.1.18}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\gamma_1(1-\beta^2-2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)}\right) y_2 - \frac{2\gamma_1((1-\beta^2)\gamma_3+2\beta)}{(1-x)(1+\beta^2)} \in \wp^m. \tag{4.1.19}$$

Man bemerkt, daß

$$1-\beta^2-2\beta\gamma_3 = 1+\gamma_3^2-(\beta+\gamma_3)^2 \in \mathbf{o}_F^\times \tag{4.1.20}$$

sowie

$$(1-\beta^2)\gamma_3+2\beta = \gamma_3\big(1+\gamma_3^2-(\beta-\frac{1}{\gamma_3})^2\big) \in \mathbf{o}_F^\times, \tag{4.1.21}$$

denn es ist $1+\gamma_3^2 \notin \mathbf{o}_F^{\times 2}$.
1. Fall: Es sei zunächst $v(x) > 0$. Dann gilt wegen (4.1.20)

$$v\left(\frac{2\gamma_1(1-\beta^2-2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)}\right) = \frac{1}{2}v(x).$$

Also folgt aus (4.1.18)

$$b \in 1+\wp^{\frac{1}{2}v(x)}+\wp^m,$$

insbesondere ist $v(b) = 0$. Betrachtet man (4.1.19) unter dieser Bedingung, so erhält man

$$v\left(-\frac{2\gamma_1((1-\beta^2)\gamma_3+2\beta)}{(1-x)(1+\beta^2)}\right) \geq m.$$

Dies ist wegen (4.1.21) gleichbedeutend zu $v(x) \geq 2m$. Ist $v(x) \geq 2m$, dann ist (4.1.18) sogar äquivalent zu $b \in 1+\wp^m$ und der Beitrag des 1. Falls lautet

- $v(x) \geq 2m$: $b \in 1+\wp^m$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

2. Fall: Es sei $v(x) < 0$. Dann folgt wie eben aus (4.1.18), daß

$$b \in -1+\wp^{-\frac{1}{2}v(x)}+\wp^m$$

gelten muß. Unter dieser Bedingung findet man wiederum analog zum 1. Fall, daß (4.1.19) genau dann erfüllt werden kann, wenn $-v(\gamma_1) \geq m$, also wenn $v(x) \leq -2m$. Ist dies gegeben, so ist (4.1.18) sogar äquivalent zu $b \in -1+\wp^m$. Der Beitrag des 2. Falls lautet somit

- $v(x) \leq -2m$: $b \in -1 + \wp^m$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

3. Fall: Es sei schließlich $v(x) = 0$. Da x kein Quadrat ist, gilt insbesondere $x \notin 1 + \wp$. Also ist sowohl $v(1-x) = 0$ als auch $v(\gamma_1(1-\beta^2-2\beta\gamma_3)) = 0$, letzteres wegen (4.1.20). Unter diesen Bedingungen impliziert (4.1.18) somit $v(b) \geq 0$. Unter der Bedingung $v(b) \geq 0$ lautet (4.1.19) nun

$$v\left(\frac{2\gamma_1((1-\beta^2)\gamma_3+2\beta)}{(1-x)(1+\beta^2)}\right) \geq m.$$

Das ist nicht erfüllbar, weil $v(\gamma_1) = v((1-\beta^2)\gamma_3+2\beta) = v(1-x) = v(1+\beta^2) = 0$. Somit liefert der 3. Fall hier keinen Beitrag.

Die Beiträge für $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$ zu den Nebenklassen $[1+\beta\sqrt{A}]$ mit $v(\beta) \geq 0$ von T sind im Fall $-1 \notin F^{\times 2}$ somit dieselben wie im Fall $-1 \in F^{\times 2}$, wie man aus dem entsprechenden Abschnitt in 4.1.1 abliest.

Beiträge für nichtquadratische $x \in \mathrm{N}$ zu den Nebenklassen $[\alpha + \sqrt{-1}]$ mit $v(\alpha) > 0$ von T

Wieder sei $x = -\gamma_1^2$ mit $g(x) = \gamma_1(1+\gamma_3\sqrt{-1})$. Hier lauten die Gleichungen (4.1.1) und (4.1.2)

$$\frac{1+}{1-x} + \frac{2\gamma_1(\alpha^2-1-2\alpha\gamma_3)}{(1-x)(\alpha^2+1)} \in b(1+\wp^m)$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\gamma_1(\alpha^2-1-2\alpha\gamma_3)}{(1-x)(\alpha^2+1)}\right) y_2 - \frac{2\gamma_1((\alpha^2-1)\gamma_3+2\alpha)}{(1-x)(\alpha^2+1)} \in \wp^m.$$

Substituiert man

$$\alpha \mapsto -\beta,$$

so erhält man daraus

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{2\gamma_1(1-\beta^2-2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)} \in b(1+\wp^m) \tag{4.1.22}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{2\gamma_1(1-\beta^2-2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)}\right) y_2 + \frac{2\gamma_1((1-\beta^2)\gamma_3+2\beta)}{(1-x)(1+\beta^2)} \in \wp^m. \tag{4.1.23}$$

Die beiden Gleichungen (4.1.22) und (4.1.23) entsprechen genau den Gleichungen (4.1.18) und (4.1.19) des vorigen Abschnitts mit $\alpha = -\beta \in \wp$, wenn man dort γ_1 durch $-\gamma_1$. Also entstehen hier genau die entsprechenden Beiträge

- $v(x) \geq 2m$: $b \in 1 + \wp^m$ und $\alpha \in \wp$,
- $v(x) \leq -2m$: $b \in -1 + \wp^m$ und $\alpha \in \wp$.

Dies sind genau dieselben Beiträge wie im entsprechenden Fall für $-1 \in F^{\times 2}$ (vergleiche Abschnitt 4.1.1).

Berechnung der translatierten Local Linking Number

Wie gesehen sind die Beiträge zum inneren Integral für den Fall $-1 \notin F^{\times 2}$ in allen Fällen genau dieselben wie die Beiträge zum inneren Integral für den Fall $-1 \in F^{\times 2}$. Also stimmt auch die daraus resultierende translatierte Local Linking Number mit der des Abschnitts 4.1.1 über ein, die in Satz 4.3 angegeben wurde. Zusammenfassend erhält man hieraus

Satz 4.4. *Es sei K/F eine unverzweigte Körpererweiterung und es sei χ unverzweigt. Dann ist $\chi = 1$ und die translatierte Local Linking Number zu $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{U_m}$, $m > 0$, lautet*

$$
\begin{aligned}
&< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \phi >_x = \\
&\Big(\mathbf{1}_{\wp^m \cap \mathrm{N}}(x) \mathbf{1}_{1+\wp^m}(b) + \mathbf{1}_{\wp^m \cap \mathrm{N}}(x^{-1}) \mathbf{1}_{-1+\wp^m}(b) \Big) \operatorname{vol} \\
&+ \mathbf{1}_{F^{\times 2}}(x) \big(\mathbf{1}_{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}(1+\wp^m)}(b) + \mathbf{1}_{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(1+\wp^m)}(b) \big) \operatorname{vol} \operatorname{vol}' q^{-m} \\
&\cdot \Big(\mathbf{1}_{\wp \setminus \wp^{2m}}(x) |x|^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{1}_{\wp \setminus \wp^{2m}}(x^{-1}) |x|^{\frac{1}{2}} + \mathbf{1}_{1+\wp}(x) q^{-m-v(1-x)} + \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^{\times 2} \setminus (1+\wp)}(x) \Big).
\end{aligned}
$$

Dabei wurde wieder wie in Abschnitt 4.3

$$\operatorname{vol} := \operatorname{vol}_T(T) \operatorname{vol}(\wp^m) \operatorname{vol}^\times (1 + \wp^m)$$

und

$$\operatorname{vol}' := \frac{\operatorname{vol}_T(\{[\alpha + \beta\sqrt{A}] | v(\alpha) \geq v(\beta)\})}{\operatorname{vol}_T(T)} = \frac{\operatorname{vol}_T(\{[\alpha + \beta\sqrt{A}] | v(\beta) \geq v(\alpha)\})}{\operatorname{vol}_T(T)}$$

gesetzt.

4.1.3 Weitere Beispiele

Das Kapitel über die Translation der Local Linking Numbers im Fall eines kompakten Torus soll mit einigen Bemerkungen abgeschlossen werden. Sie betreffen weitere explizite Beispiele, den wechselseitigen Einfluß der Variablen x und b aufeinander, sowie Eigenschaften des Trägers bezüglich b, die später nützlich sein werden.

Bemerkung 4.5. *Aus der translatierten Local Linking Number für* $\phi(y_1, y_2) = \psi(y_1, y_2) = \mathbf{1}_{1+\wp^m}(y_1)\mathbf{1}_{\wp^m}(y_2)$ *kann man ganz einfach die translatierten Local Linking Numbers zu den Funktionen der Form* $\tilde{\phi}(y_1, y_2) = \mathbf{1}_{w_1(1+\wp^m)}(y_1)\mathbf{1}_{\wp^m}(y_2)$ *und* $\tilde{\psi}(y_1, y_2) = \mathbf{1}_{w_2(1+\wp^m)}(y_1)\mathbf{1}_{\wp^m}(y_2)$ *mit* $w_1, w_2 \in F^\times$ *berechnen. Die Bedingungen (4.1.1) und (4.1.2), die man dazu untersuchen muß, lauten*

$$g_1 y_1 \in w_1(1 + \wp^m) \tag{4.1.24}$$

und

$$g_1 y_2 + g_2 \in \wp^m. \tag{4.1.25}$$

Während (4.1.25) dieselbe Bedingung wie im vorhergehenden Beispiel ist, ergibt sich aus (4.1.24) unter der Bedingung $y_1 \in b^{-1}w_2(1+\wp^m)$ *der äußeren Funktion* $\tilde{\psi}$ *die Bedingung*

$$g_1 \in b w_1 w_2^{-1}(1 + \wp^m).$$

Also gilt

$$< \tilde{\phi}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tilde{\psi} >_x = < \phi, \begin{pmatrix} b w_1 w_2^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \phi >_x .$$

Der Träger von

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \phi >_x$$

als Funktion von b enthält nur die Normnebenklassen $\frac{1\pm\sqrt{x}}{1\mp\sqrt{x}}\,\mathrm{N}$ *(vergleiche Satz 4.4). Also enthält der Träger von*

$$< \tilde{\phi}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tilde{\psi} >_x$$

nun Elemente der Normnebenklasse $\frac{w_2}{w_1}\frac{1\pm\sqrt{x}}{1\mp\sqrt{x}}\,\mathrm{N}$. *Somit kann für jedes feste x, für das diese translatierte Local Linking Number nicht verschwindet, jede Normnebenklasse im Träger bezüglich b verwirklicht werden.*

Bemerkung 4.6. *Da im untersuchten Fall* $\chi = 1$ *ist, ist* U_m *für* $m = 1$ *eine fundamentale Menge für* χ. *Der Träger in x der translatierte Local Linking Number*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \phi >_x$$

für $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{U_1}$ *beinhaltet somit ganz* $F^{\times 2}\backslash\{1\}$ *und alle* $x \in \mathrm{N}$ *mit* $v(x) \neq 0$. *Wählt man die äußere Funktion* ψ *nicht gleich* ϕ, *sondern etwa* $\psi(y_1, y_2) = \mathbf{1}_{1+\wp^m}(y_1)\mathbf{1}_{w_2+\wp^m}(y_2)$, *so wird man auch für* $x \in \mathbf{o}_F^\times \backslash \mathbf{o}_F^{\times 2}$ *einen Beitrag erhalten. Denn zu jedem* $y \in \mathrm{N}\backslash\{1\}$ *existiert eine Local Linking Number* $< \phi, \psi >_x$

mit $y \in \operatorname{supp}(< \phi, \psi >_x)$ *(siehe Satz 2.6). Für alle* b *in einer Umgebung* $U = U(y)$ *der* $1 \in F^\times$ *gilt dann*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_y = < \phi, \psi >_y \neq 0,$$

denn die Translation ist lokal konstant in b*. Es ist somit für jedes* $x \in \mathrm{N} \setminus \{1\}$ *möglich, eine nicht verschwindende translatierte Local Linking Number anzugeben.*

Bemerkung 4.7. *Auch wenn das Verhalten der translatierten Local Linking Numbers als Funktionen in* x *und* b *zugleich nicht mit Sicherheit anhand einer Klasse von Beispielen vollständig beschrieben werden kann, wird in Satz 4.4 zumindest ein charakteristisches Verhalten erkennbar: Je weiter* $v(b)$ *von Null entfernt ist, desto näher kommt der Träger bezüglich* x *der translatierten Local Linking Number der* 1*. Dies gilt auch umgekehrt: Je näher* x *der* 1 *kommt, um so größer wird der Träger bezüglich* b *der translatierten Local Linking Number. Das heißt, die Beschränkungen der Träger bezüglich* b *(vergleiche Satz 4.2) und bezüglich* x *(vergleiche Satz 2.6) bedingen sich gegenseitig.*

Analog zu den bisher betrachteten Beispielen berechnet man auch das folgende, das in Kapitel 7 benötigt wird.

Beispiel 4.8. *Es sei wiederum* K/F *eine unverzweigte Körpererweiterung und* $\chi = 1$*. Dann ist* $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{GL_2(\mathbf{o}_F)}$ *eine Funktion aus* $\mathcal{S}(\chi, G)$ *und es gilt*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x =$$
$$\mathbf{1}_{\mathrm{N} \setminus (1+\wp)}(x) \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(b) \operatorname{vol} + \mathbf{1}_{1+\wp}(x) \Big(\mathbf{1}_{(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(b) + \mathbf{1}_{(1-x)^{-1}\mathbf{o}_F^\times}(b) \Big) \operatorname{vol} q^{-v(1-x)}.$$

Beweis: Es ist klar, daß $GL_2(\mathbf{o}_F)$ eine fundamentale kompakte offene Menge ist, wenn $\chi = 1$. Also ist $\phi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ wohldefiniert. Die translatierte Local Linking Number berechnet man wie zu Beginn von Kapitel 4.1 skizziert. Der innere Integrand ist also genau dann nicht null, wenn sowohl

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_1 + 2\alpha\beta A \gamma_2)}{(1-x)(\alpha^2 - \beta^2 A)} \in b\mathbf{o}_F^\times \tag{4.1.26}$$

als auch

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_1 + 2\alpha\beta A \gamma_2)}{(1-x)(\alpha^2 - \beta^2 A)} \right) y_2 + \frac{2A((\alpha^2 + \beta^2 A)\gamma_2 + 2\alpha\beta\gamma_1)}{(1-x)(\alpha^2 - \beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F \tag{4.1.27}$$

erfüllt ist für $y_2 \in \mathbf{o}_F$. Ist dies erfüllt, so ist der Integrand gleich eins, und Integration über die dafür zulässigen Bereiche liefert die translatierte Linking Number.
Wie gehabt unterscheidet man, ob $v(\beta)-v(\alpha) \geq 0$ oder nicht und ob $x \in \mathrm{N}$ ein Quadrat ist oder nicht. Wie in den früheren Beispielen werden die dabei entstehenden Beiträge zu den Integrationsbereichen durch ein „$\bullet$“ gekennzeichnet, so daß man sie zur Integration später leicht wiederfinden kann.
Es sei $x \in F^{\times 2}$ und $v(\frac{\beta}{\alpha}) \geq 0$:
Dann kann man die Brüche in (4.1.26) und (4.1.27) um α^2 kürzen und annehmen, daß $\beta \in \mathbf{o}_F$ sowie daß $x = \gamma_1^2$ gilt, wobei γ_1 eine der beiden Quadratwurzeln aus x ist. Dann lauten (4.1.26) und (4.1.27)

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in b\mathbf{o}_F^\times \tag{4.1.28}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) y_2 + \frac{4\beta A\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F, \tag{4.1.29}$$

wobei jetzt β und y_2 ganz sind.
Nimmt man zunächst an, daß $v(x) \neq 0$, dann ist

$$v\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0$$

und

$$v\left(\frac{2(1+\beta^2 A)\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) \geq \frac{1}{2}|v(x)| > 0,$$

so daß Bedingung (4.1.28) genau dann gilt, wenn $b \in \mathbf{o}_F^\times$. Unter dieser Bedingung ist wiederum (4.1.29) genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{4\beta\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F,$$

also immer. Der Beitrag für $v(x) \neq 0$ lautet also

- $v(x) \neq 0$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

Es sei nun $v(x) = 0$. Dann ist (4.1.29) gleichbedeutend zu

$$v\left((1+x)(1-\beta^2 A) + 2(1+\beta^2 A)\gamma_1\right) = v(b) + v(1-x).$$

Das ist gleichbedeutend zu

$$v(b) + v(1-x) = v\left((1+\gamma_1)^2 - \beta^2(1-\gamma_1)^2 A\right) = 2\min\{v(1+\gamma_1), v(\beta)\}. \tag{4.1.30}$$

Dabei ist $v(b) + v(1-x) > 0$ genau möglich, wenn

$$2\min\{v(1+\gamma_1), v(\beta)\} > 0,$$

also wenn $\gamma_1 \in -1 + \wp$ und $\beta \in \wp$ gilt. Man nehme nun zunächst an, dies sei erfüllt. Gilt außerdem noch $v(b) < 0$, so ist (4.1.29) gleichbedeutend zu

$$\Big(\beta^2 A(1-\gamma_1)^2 - (1+\gamma_1)^2\Big) y_2 \in 4\beta A\gamma_1 + \wp^{v(1-x)}.$$

Da hier $(1+\gamma_1)^2 \in \wp^{2v(1-x)}$ ist, lautet dies vereinfacht

$$\beta^2(1-\gamma_1)^2 y_2 \in 4\beta\gamma_1 + \wp^{v(1-x)},$$

woraus $v(\beta) \geq v(1-x)$ folgt. Aber wegen (4.1.30) muß dann $v(b) = v(1-x)$ gelten, ein Widerspruch zu $v(b) < 0$.
Es sei also $v(b) \geq 0$. Dann ist (4.1.29) gleichbedeutend zu

$$\frac{4\beta A\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F.$$

Dies bedeutet $v(\beta) \geq v(1-x)$, und (4.1.30) impliziert $v(b) = v(1-x)$. Der Beitrag zum Fall $v(b) + v(1-x) > 0$ lautet somit, wenn man noch γ_1 durch $\sqrt{x}$ ersetzt,

- $x \in 1 + \wp$, $\sqrt{x} \in -1 + \wp$: $b \in (1-x)\mathbf{o}_F^\times$ und $\beta \in \wp^{v(1-x)}$.

Falls $v(b) + v(1-x) = 0$, so ist $\gamma_1 \notin -1 + \wp$ oder $\beta \in \mathbf{o}_F^\times$. Nimmt man zuerst an, daß $v(b) \geq 0$, so muß sogar $0 = v(b) = v(1-x)$ erfüllt sein. Unter dieser Bedingung lautet (4.1.29)

$$\frac{4\beta A\gamma_1}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F,$$

was hier gleichbedeutend zu $\beta \in \mathbf{o}_F$ ist. Das gibt den Beitrag

- $x \in \mathbf{o}_F^{\times 2} \backslash (1+\wp)$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

Ist hingegen $v(b) < 0$, so gilt $-v(b) = v(1-x) > 0$. Für die Quadratwurzel γ_1 aus x gibt es nun zwei Möglichkeiten. Entweder ist $\gamma_1 \in 1 + \wp$. Dann ist (4.1.29) gleichbedeutend zu

$$\Big(\beta^2 A(1-\gamma_1)^2 - (1+\gamma_1)^2\Big) y_2 \in 4\beta A\gamma_1 + \wp^{v(1-x)}.$$

Da hier $(1-\gamma_1)^2 \in \wp^{2v(1-x)}$ ist, lautet (4.1.29) also

$$\beta \in \frac{-(1+\gamma_1)^2 y_2}{4A\gamma_1} + \wp^{v(1-x)}.$$

Oder es ist $\gamma_1 \in -1+\wp$. Dann muß $\beta \in \mathbf{o}_F^\times$ gelten. Bedingung (4.1.29) ist dann wieder gleichbedeutend zu

$$\Big(\beta^2 A(1-\gamma_1)^2 - (1+\gamma_1)^2\Big) y_2 \in 4\beta A\gamma_1 + \wp^{v(1-x)},$$

was hier aber bedeutet, daß

$$\beta y_2 \in \frac{4\gamma_1}{(1-\gamma_1)^2} + \wp^{v(1-x)}$$

erfüllt sein muß. Das geht nur, wenn $y_2 \in \mathbf{o}_F^\times$. Man erhält also zuletzt die Beiträge zu $x \in 1+\wp$

- $\sqrt{x} \in 1+\wp$: $v(b) = -v(1-x)$ und $\beta \in \frac{-(1+\sqrt{x})^2 y_2}{4A\sqrt{x}} + \wp^{v(1-x)}$
- $\sqrt{x} \in -1+\wp$: $v(b) = -v(1-x)$, $y_2 \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\beta \in \frac{4\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2 y_2} + \wp^{v(1-x)}$.

Es sei $x \in F^{\times 2}$ und $v(\frac{\beta}{\alpha}) < 0$:
Durch Kürzen kann man annehmen, daß $\beta = 1$ und $\alpha \in \wp$. Dann lauten (4.1.26) und (4.1.27)

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(\alpha^2+A)\gamma_1}{(1-x)(\alpha^2-A)} \in b\mathbf{o}_F^\times$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2(\alpha^2+A)\gamma_1}{(1-x)(\alpha^2-A)}\right) y_2 + \frac{4\alpha\gamma_1}{(1-x)(\alpha^2-A)} \in \mathbf{o}_F.$$

Wie in den anderen expliziten Beispielen erhält man diesen Fall aus dem mit $v(\frac{\beta}{\alpha}) \geq 0$, indem man dort (das heißt in (4.1.28) und (4.1.29)) $\beta \mapsto \alpha A^{-1} \in \wp$ und $\gamma_1 = \sqrt{x} \mapsto -\gamma_1 = -\sqrt{x}$ substituiert. Das ergibt die Beiträge

- $v(x) \neq 0$ oder $x \in \mathbf{o}_F^\times \backslash (1+\wp)$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\alpha \in \wp$,
- $\sqrt{x} \in 1+\wp$: $v(b) = -v(1-x)$ und $\alpha \in \wp^{v(1-x)}$,
- $\sqrt{x} \in -1+\wp$: $v(b) = -v(1-x)$, $\alpha \in \frac{(1-\sqrt{x})^2 y_2}{4\sqrt{x}} + \wp^{v(1-x)}$ und $y_2 \in \wp$.

Man beachte, daß der Beitrag $\sqrt{x} \in 1+\wp$: $v(b) = -v(1-x)$, $y_2 \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\alpha \in \frac{-4\sqrt{x}A}{(1+\sqrt{x})^2 y_2} + \wp^{v(1-x)}$ leer ist, denn $\alpha \in \wp$ erzwingt $v(y_2) < 0$, was ausgeschlossen ist.

Es sei $x \in \mathrm{N} \backslash F^{\times 2}$, $-1 \in F^{\times 2}$ und $v(\frac{\beta}{\alpha}) \geq 0$:

Dann kann man x schreiben als $x = -\gamma_2^2 A$ und durch Kürzen annehmen, daß $\alpha = 1$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$. Die beiden zu erfüllenden Bedingungen (4.1.26) und (4.1.27) lauten nun

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{4\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in b\mathbf{o}_F^\times \tag{4.1.31}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{4\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) y_2 + \frac{2A(1+\beta^2 A)\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F. \tag{4.1.32}$$

Ist $v(x) \neq 0$, so gilt

$$v\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0$$

und

$$v\left(\frac{4\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) \geq \frac{1}{2}|v(x)| > 0,$$

sodaß (4.1.31) gleichbedeutend zu $v(b) = 0$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist (4.1.32) äquivalent zu

$$\frac{2A(1+\beta^2 A)\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F.$$

Dies ist immer erfüllt, und man findet den Beitrag

- $v(x) \neq 0$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

Ist $v(x) = 0$, so ist auch $v(1-x) = 0$, da x kein Quadrat ist, und

$$v\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{4\beta A\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)}\right) = v\Big((1+x)(1-\beta^2 A) + 4\beta A\gamma_2\Big) \geq 0.$$

Bedingung (4.1.31) impliziert somit $v(b) \geq 0$. Somit ist (4.1.32) wieder gleichbedeutend zu

$$\frac{2A(1+\beta^2 A)\gamma_2}{(1-x)(1-\beta^2 A)} \in \mathbf{o}_F,$$

was immer erfüllt ist. Nun muß man (4.1.31) noch genauer untersuchen, um $v(b)$ exakt angeben zukönnen. Da

$$(1+x)(1-\beta^2 A) + 4\beta A\gamma_2 = (1+\gamma_2\beta A)^2 - (\beta-\gamma_2)^2 A,$$

lautet (4.1.31) nun

$$v(b) = 2\min\{v(1+\gamma_2\beta A), v(\beta+\gamma_2)\}. \tag{4.1.33}$$

Damit $v(b) > 0$ sein könnte, müßte sowohl $v(1+\gamma_2\beta A) > 0$ als auch $v(\beta-\gamma_2) > 0$ gelten. Dazu müßte

$$\beta \in (\gamma_2 + \wp) \cap (-\frac{1}{\gamma_2 A} + \wp) = \emptyset$$

erfüllt sein. Also ist $v(b) = 0$. Das gibt den Beitrag

- $v(x) = 0$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

Es sei $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$, $-1 \in F^{\times 2}$ und $v(\frac{\beta}{\alpha}) < 0$:
Hier kann man durch Kürzen annehmen, daß $\beta = 1$ und $\alpha \in \wp$ gilt. Dann berechnet sich dieser Fall genau wie der letzte, wenn man dort $\beta \mapsto \alpha A^{-1} \in \wp$ und $\gamma_2 \mapsto -\gamma_2$ substituiert. Die Beiträge lassen sich also zusammenfassen zu

- $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\alpha \in \wp$.

Es sei $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$, $-1 \notin F^{\times 2}$ und $v(\frac{\beta}{\alpha}) \geq 0$:
Hier nimmt man wieder an, daß $\alpha = 1$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$. Da -1 kein Quadrat in F ist, sei ohne Einschränkung $A = -1$. Die Norm ist surjektiv auf $\mathbf{o}_F^\times$, also gibt es ein $\gamma_3 \in \mathbf{o}_F^\times$ derart, daß $1 + \gamma_3^2$ kein Quadrat ist. Man wähle $g(x) = \gamma_1(1 + \gamma_3\sqrt{-1})$ und erhalte $x = \gamma_1^2(1 + \gamma_3^2)$. Die Bedingungen (4.1.26) und (4.1.27) lassen sich dann vereinfachen zu

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\gamma_1(1-\beta^2+2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)} \in b\mathbf{o}_F^\times \tag{4.1.34}$$

und

$$\left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{2\gamma_1(1-\beta^2+2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)}\right) y_2 - \frac{2\gamma_1((1-\beta^2)\gamma_3+2\beta)}{(1-x)(1+\beta^2)} \in \mathbf{o}_F. \tag{4.1.35}$$

Wie schon früher gesehen gilt

$$1 - \beta^2 + 2\beta\gamma_3 = 1 + \gamma_3^2 - (\beta - \gamma_3)^2 \in \mathbf{o}_F^\times$$

und

$$(1-\beta^2)\gamma_3 + 2\beta = \gamma_3(1 + \gamma_3 - (\beta - \gamma_3^{-1})^2) \in \mathbf{o}_F^\times.$$

Da -1 und x keine Quadrate in F sind, gilt für alle x

$$v\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \geq 0$$

sowie

$$v\left(\frac{2\gamma_1(1-\beta^2+2\beta\gamma_3)}{(1-x)(1+\beta^2)}\right) \geq 0, \tag{4.1.36}$$

denn $v(\gamma_1)-v(1-x) \geq 0$. Also folgt aus (4.1.34) stets $b \in \mathbf{o}_F$. Dann ist (4.1.35) aber gleichbedeutend zu

$$\frac{2\gamma_1((1-\beta^2)\gamma_3+2\beta)}{(1-x)(1+\beta^2)} \in \mathbf{o}_F.$$

Und das ist immer erfüllt. Nun muß man nur noch spezifizieren, welchen Wert $v(b)$ genau hat. Ist $v(x) \neq 0$, so gilt in (4.1.36) sogar $>$. Also ist (4.1.34) gleichbedeutend zu $v(b) = 0$. Ist $v(x) = 0$, so ist (4.1.34) äquivalent zu

$$v\Big((1+x)(1+\beta^2)+2\gamma_1(1-\beta^2+2\beta\gamma_3)\Big) = v(b). \tag{4.1.37}$$

Die Annahme, daß $v(b) > 0$ gilt, ist somit gleichbedeutend zu

$$\beta^2(1+x-2\gamma_1)+4\gamma_1\gamma_3\beta+(1+x+2\gamma_1) \in \wp.$$

Das ist eine quadratische Gleichung modulo $\wp$, die genau dann Lösungen modulo $\wp$ hat, wenn ihre Diskriminante ein Quadrat ist, denn da $1+x+2\gamma_1 \in \mathbf{o}_F^\times$ (man bemerke $v(x) = 0$), muß $\beta \in \mathbf{o}_F^\times$ gelten. Die Diskriminante hier berechnet sich zu

$$4\Big(4\gamma_1^2\gamma_3^2-(1+x-2\gamma_1)(1+x+2\gamma_1)\Big) = -4(1-x)^2.$$

Dies ist offensichtlich kein Quadrat. Somit gilt wegen (4.1.37) stets $v(b) = 0$. Der Beitrag in diesem Fall ist also

- $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\beta \in \mathbf{o}_F$.

Es sei $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$, $-1 \notin F^{\times 2}$ und $v(\frac{\beta}{\alpha}) < 0$:
Man kann wieder annehmen, daß $\beta = 1$ und $\alpha \in \wp$. Wie nun schon oft gesehen, erhält man diesen Fall aus dem vorhergehenden, wenn man dort β durch αA^{-1} ersetzt und γ_1 durch $-\gamma_1$. Das gibt den Beitrag

- $x \in \mathrm{N} \setminus F^{\times 2}$: $b \in \mathbf{o}_F^\times$ und $\alpha \in \wp$.

Berechnung der translatierten Local Linking Number:
Nun muß man die durch „•“ gekennzeichneten Beiträge der verschiedenen Fälle zusammen sammeln und über diese Bereiche integrieren. Ist für y_1 oder y_2 kein Bereich angegeben, so sind sie beliebig im Träger von $\phi(by_1, y_2)$, das heißt $y_1 \in b^{-1}\mathbf{o}_F^\times$ und $y_2 \in \mathbf{o}_F$. Man bemerkt zunächst, daß die Beiträge für $-1 \in F^{\times 2}$

dieselben sind wie die für $-1 \notin F^{\times 2}$. Man erhält

$$
\begin{aligned}
& < \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \phi >_x \\
= \; & \mathbf{1}_{\mathrm{N}\setminus(1+\wp)}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(b) \int_{\mathbf{o}_F^\times}\int_{\mathbf{o}_F}\int_T dt\; dy_2\; dy_1 \\
& + \Big(\mathbf{1}_{1+\wp}(\sqrt{x}) + \mathbf{1}_{-1+\wp}(\sqrt{x})\Big)\mathbf{1}_{(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(b)\,\mathrm{vol}_T(T_1)q^{-v(1-x)}\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F) \\
& + \mathbf{1}_{1+\wp}(\sqrt{x})\mathbf{1}_{(1-x)^{-1}\mathbf{o}_F^\times}(b)\,\mathrm{vol}_T(T_1)q^{-v(1-x)}2\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \\
& + \mathbf{1}_{-1+\wp}(\sqrt{x})\mathbf{1}_{(1-x)^{-1}\mathbf{o}_F^\times}(b)\,\mathrm{vol}_T(T_1)q^{-v(1-x)}2\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \\
= \; & \mathbf{1}_{\mathrm{N}\setminus(1+\wp)}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(b)\,\mathrm{vol} \\
& \quad + \quad \mathbf{1}_{1+\wp}(x)q^{-v(1-x)}\Big(\mathbf{1}_{(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(b) + \mathbf{1}_{(1-x)^{-1}\mathbf{o}_F^\times}(b)\Big)\,\mathrm{vol},
\end{aligned}
$$

wobei

$$\mathrm{vol} := \mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)$$

und $T_1 = \{\alpha + \beta\sqrt{A} \in T | v(\beta) \geq v(\alpha)\}$. Somit ist Beispiel 4.8 bewiesen.

Kapitel 5

Der Fall eines nichtkompakten Torus

In diesem Kapitel sei $K = F \oplus F$ eine zerfallende Algebra. Der Charakter χ hat dann die Form $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$ mit einem Charakter χ_1 von $F^\times$. Man benutzt den offensichtlichen Isomorphismus $D^\times \to \mathrm{GL}_2(F)$ aus Definition 1.3.
Wie im Beweis von Satz 2.7 kann man eine Funktion $\psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ zerlegen in die Summe von Funktionen ψ_1 beziehungsweise ψ_2 mit Trägern in TNN' beziehungsweise $TNwN$, wobei

$$TNN' = T \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$TNwN = T \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine offene Überdeckung von G bilden. Diese beiden Mengen sind invariant unter der Translation mit $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. In $T \backslash TNN'$ hat jedes Element einen Vertreter der Form

$$y = \begin{pmatrix} 1 + y_2 y_3 & y_2 \\ y_3 & 1 \end{pmatrix},$$

in $T \backslash TNwN$ einen der Form

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & -1 + y_1 y_4 \\ 1 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Somit kann man ψ_1 auffassen als Funktion $\psi_1(y_2, y_3)$ in der Variablen (y_2, y_3), so daß nun $\psi_1 \in \mathcal{S}(F^2)$ gilt. Analoges gilt für ψ_2. Da sowohl N als auch N' isomorph zur additiven Gruppe F ist, soll daher das folgende Quotientenmaß dy

auf den offenen Teilen $T\backslash TNN'$ beziehungsweise $T\backslash TNwN$ von $T\backslash G$ gewählt werden:

$$dy = dy_2\ dy_3 \text{ beziehungsweise } dy = dy_1\ dy_4,$$

wobei dy_i jeweils das festgewählte Haarmaß auf F bezeichnet.
Für festes x ist das innere Integral

$$I_\phi(y) = \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt$$

eine lokal konstante Funktion in y, bei der Beschränkung des Trägers der Funktion ψ_i im äußeren Integral dann eine lokal konstante Funktion in (y_2, y_3) beziehungsweise (y_1, y_4).
Allerdings ist deren Träger im allgemeinen nicht mehr kompakt. **Hierin liegt der entscheidende Unterschied zum Fall eines kompakten Torus und der Grund für die Verkomplizierung der Analyse.**
Es handelt sich also nicht mehr um eine Schwartzfunktion, viel mehr um den immerhin lokal konstanten Limes von solchen. Auch die Local Linking Number ist in b als Funktion auf $F^\times$ offensichtlich lokal konstant, denn schließlich gilt dies für die äußere Funktion ψ, und ist Limes von Schwartzfunktionen. Rein aus dieser Perspektive können also alle glatten Funktionen auftreten, etwa beliebige Polynome im Betrag, der Bewertung etc.
Ein erster, sinnvoller Schritt bei der Untersuchung der translatierten Local Linking Numbers ist es, trotzdem die einschränkende Annahme zu machen, der Träger des inneren Integrals sei modulo T kompakt.

Satz 5.1. *Für* $\operatorname{supp}\psi \subset TNN'$ *hat die Local Linking Number für festes* x *unter Annahme, daß das innere Integral kompakten Träger modulo* T *hat, die Form*

$$\chi_1^{-1}(b)\left(A_0(b)\mathbf{1}_{\mathbf{o_F^\times}}(b) + A_+(b)|b|\mathbf{1}_{\wp_F}(b) + A_-(b^{-1})|b^{-1}|\mathbf{1}_{\wp_F}(b^{-1})\right),$$

wobei A_0, A_+, A_- *lokal konstante Funktionen auf* F *mit kompaktem Träger sind.*
Für $\operatorname{supp}\psi \subset TNwN$ *erhält man dasselbe Ergebnis abgesehen davon, daß der Faktor* $\chi_1^{-1}(b)$ *durch* $\chi_1(b)$ *zu ersetzen ist.*

Beweis:
Ist $y \in TNN'$, so gilt modulo T

$$yB = \begin{pmatrix} 1+y_2y_3 & y_2 \\ y_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+y_2y_3 & b^{-1}y_2 \\ by_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\operatorname{supp}\psi_1 \subset TNN'$ ist somit

$$\bar{\psi}_1(yB) = \bar{\chi}_1(b)\bar{\psi}_1(b^{-1}y_2, by_3).$$

Für $\operatorname{supp}\psi_2 \subset TNwN$ findet man analog

$$yB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 b & -1 + y_1 y_4 \\ 1 & b^{-1} y_4 \end{pmatrix}.$$

und

$$\bar{\psi}_2(yB) = \bar{\chi}_1^{-1}(b)\bar{\psi}_2(by_1, b^{-1}y_4).$$

Man erhält also einen Faktor $\chi_1^{-1}(b)$ oder $\chi_1(b)$, je nachdem, ob $\operatorname{supp}\psi_1 \subset TNN'$ oder $\operatorname{supp}\psi_2 \subset TNwN$. Nimmt man an, daß das innere Integral kompakten Träger hat, so stellt sich die Local Linking Number dar als

$$\begin{aligned} < \phi, B\psi >_x \;=\; & \chi_1^{-1}(b) \int_{F\times F} f_1(y_2, y_3)\bar{\psi}_1(b^{-1}y_2, by_3)\; dy_2\; dy_3 \\ & + \chi_1(b) \int_{F\times F} f_2(y_1, y_4)\bar{\psi}_2(by_1, b^{-1}y_4)\; dy_1\; dy_4, \end{aligned}$$

worin f_1, f_2 und ψ_1, ψ_2 nun Schwartzfunktionen auf $F \times F$ sind. Die Funktionen f_1, f_2 stellen dabei das innere Integral für festgehaltenes x dar. Wenn man das Verhalten dieser Integrale untersuchen will, reicht es, darin $f_i(s,t)$ und $\psi_i(s,t)$ als elementare Schwartzfunktionen $\mathbf{1}_{\wp^n}(s)\mathbf{1}_{\wp^n}(t)$, $\mathbf{1}_{a_1+\wp^n}(s)\mathbf{1}_{\wp^n}(t)$, $\mathbf{1}_{\wp^n}(s)\mathbf{1}_{a_2+\wp^n}(t)$, $\mathbf{1}_{a_1+\wp^n}(s)\mathbf{1}_{a_2+\wp^n}(t)$, von denen jede andere eine Linearkombination ist, anzunehmen. Ohne Einschränkung kann man für alle Funktionen dasselbe $n > 0$ wählen und annehmen, daß $v(a_i) < n$ gilt.
Es folgt eine Liste der Integrale als Funktion von b dieser elementaren Schwartzfunktionen. Aus ihr kann dann der Satz einfach abgelesen werden.
Es sei der Einfachheit halber (hier geht es um qualitatives Verhalten, nicht um quantitatives) $\operatorname{vol}(\mathbf{o_F}) := 1$. Das allgemein zu berechnende Integral hat die Gestalt

$$\int_F \int_F f(s,t)g(bs, b^{-1}t)\; ds\; dt = \int_F f_s(s)g_s(bs)\; ds \int_F f_t(t)g_t(b^{-1}t)\; dt.$$

Aufgelistet werden nun die einzelnen möglichen Faktoren:

$$\int_F \mathbf{1}_{\wp^n}(s)\mathbf{1}_{\wp^n}(bs)\; ds = q^{-n}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{o_F}}(b) + |b|^{-1}\mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})\right),$$

$$\int_F \mathbf{1}_{\wp^n}(t)\mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1}t)\; ds = q^{-n}\left(|b|\mathbf{1}_{\mathbf{o_F}}(b) + \mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})\right),$$

$$\int_F \mathbf{1}_{\wp^n}(s)\mathbf{1}_{a_2+\wp^n}(bs)\; ds = q^{-n}|b|^{-1}\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_2)}}(b^{-1}),$$

$$\int_F \mathbf{1}_{\wp^n}(t)\mathbf{1}_{a_2+\wp^n}(b^{-1}t)\; ds = q^{-n}|b|\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_2)}}(b),$$

$$\int_F \mathbf{1}_{a_1+\wp^n}(s)\mathbf{1}_{\wp^n}(bs)\ ds = q^{-n}\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_1)}}(b),$$

$$\int_F \mathbf{1}_{a_1+\wp^n}(t)\mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1}t)\ ds = q^{-n}\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_1)}}(b^{-1}),$$

$$\begin{aligned}&\int_F \mathbf{1}_{a_1+\wp^n}(s)\mathbf{1}_{a_2+\wp^n}(bs)\ ds\\ &= q^{-n}\mathbf{1}_{a_1^{-1}a_2(1+\wp^{\min\{n-v(a_1),n-v(a_2)\}})}(b)\left(\mathbf{1}_{\mathbf{o_F}}(b)+|b|^{-1}\mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_F \mathbf{1}_{a_1+\wp^n}(t)\mathbf{1}_{a_2+\wp^n}(b^{-1}t)\ ds\\ &= q^{-n}\mathbf{1}_{a_2^{-1}a_1(1+\wp^{\min\{n-v(a_1),n-v(a_2)\}})}(b)\left(|b|\mathbf{1}_{\mathbf{o_F}}(b)+\mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})\right).\end{aligned}$$

Hieraus kann man nun das allgemeine Integral ablesen: Sei $v(b) \geq 0$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}&\left(c_0+\sum_i c_i\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_{1i})}}(b)+\sum_{i,j} c_{ij}\mathbf{1}_{a_{1i}^{-1}a_{2j}(1+\wp^{n-v(a_{2j})})}(b)\right)\\ &\quad\cdot\left(d_0|b|+|b|\sum_j d_j\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_{2j})}}(b)+|b|\sum_{i,j} d_{ij}\mathbf{1}_{a_{2j}^{-1}a_{1i}(1+\wp^{n-v(a_{1i})})}(b)\right)\\ &= \mathbf{1}_{\mathbf{o_F}}(b)|b|A_+(b),\end{aligned}$$

wobei A_+ eine auf F lokal konstante Funktion ist und alle Summen endlich sind und symbolisch zu lesen sind, das heißt, daß sie sich nicht notwendig über denselben Bereich erstrecken.
Sei nun $v(b) < 0$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}&\left(c_0|b|^{-1}+|b|^{-1}\sum_j c_j\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_{2j})}}(b^{-1})+|b|^{-1}\sum_{i,j} c_{ij}\mathbf{1}_{a_{2j}^{-1}a_{1i}(1+\wp^{n-v(a_{1i})})}(b^{-1})\right)\\ &\quad\cdot\left(d_0+\sum_i d_i\mathbf{1}_{\wp^{n-v(a_{1i})}}(b^{-1})+\sum_{i,j} d_{ij}\mathbf{1}_{a_{1i}^{-1}a_{2j}(1+\wp^{n-v(a_{2j})})}(b^{-1})\right)\\ &= \mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})|b|^{-1}A_-(b^{-1}),\end{aligned}$$

wobei A_- eine auf F lokal konstante Funktion ist.
Die allgemeinen Integrale spiegeln also genau das behauptete Verhalten wider.

Natürlich ist die Aussage von Satz 5.1 wertlos, wenn man davon ausgeht, daß im Limes beliebig böse Funktionen auftreten. Aber die Faktoren $\chi_1^{\pm 1}(b)|b|$ für kleine b beziehungsweise $\chi_1^{\pm 1}(b)|b^{-1}|$ für große b scheinen doch ein charakteristisches Merkmal zu sein, das übrigens auch das Beispiel im nächsten Absatz besitzt.
Außerdem ergibt sich hieraus eine der wichtigsten Reduktionen in Kapitel 8.2, dem Beweis von Vermutung 5.4, die das allgemeine Verhalten der Local Linking Numbers vorhersagt.

5.1 Ein Beispiel

Beispiel 5.2. *Der Charakter χ faktorisiere über die Norm, es sei also $\chi = (\chi_1, \chi_1)$ mit $\chi_1^2 = 1$. Dann ist die Funktion $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$ ein wohldefiniertes Element aus $\mathcal{S}(\chi, G)$. Die translatierte Local Linking Number*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x$$

hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} < \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x = \chi_1(1-x)\chi_1(b)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2 \cdot \\ \Bigg[\mathbf{1}_{F^\times \setminus (1+\wp)}(x) \Bigg(\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(b)\big(|v(x)|+1\big)(1+q^{-1}) + \mathbf{1}_{\wp}(b)|b|\big(4v(b)+2|v(x)|\big) \\ + \mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-4v(b)+2|v(x)|\big) \Bigg) \\ + \quad \mathbf{1}_{1+\wp}(x) \Bigg(\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b)|b|\big(4v(b)-4v(1-x)\big) \\ + \mathbf{1}_{v(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(b)|b| + \mathbf{1}_{v(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(b^{-1})|b^{-1}| \\ + \mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-4v(b)-4v(1-x)\big) \Bigg) \Bigg]. \end{aligned}$$

Um die Berechnung dieses Beispiels zu skizzieren, benutzt man folgende Verallgemeinerung von Lemma 2.8:

Lemma 5.3. *Es sei K/F zerfallen. Dann gilt*

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F) = \mathbf{o}_K^\times N_{\mathbf{o}_F} N'_{\mathbf{o}_F} \quad \dot{\bigcup} \quad \mathbf{o}_K^\times N_{\mathbf{o}_F} w N_\wp.$$

Dabei bezeichne $N_{\mathbf{o}_F}$ beziehungsweise $N'_{\mathbf{o}_F}$ die strikten oberen beziehungsweise unteren $\mathbf{o}_F$-wertigen Dreiecksmatrizen und $N_\wp$ die strikten oberen $\wp$-wertigen Dreiecksmatizen.

Beweis: Die Relation „$\supset$“ ist klar. Sei also

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F).$$

Es gilt $d \in \mathbf{o}_F^\times$ oder $c \in \mathbf{o}_F^\times$. Falls $d \in \mathbf{o}_F^\times$, dann gilt mit $b' = \frac{bd}{ad-bc} \in \mathbf{o}_F$:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{o}_K^\times N_{\mathbf{o}_F} N'_{\mathbf{o}_F}.$$

Falls $d \in \wp$, dann ist $c \in \mathbf{o}_F^\times$, und mit $a' = \frac{ac}{ad-bc} \in \mathbf{o}_F$ gilt

$$g = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{o}_K^\times N_{\mathbf{o}_F} w N_\wp.$$

Außerdem zeigen diese Zerlegungen auch, daß g nur für $d \in \mathbf{o}_F^\times$ in $\mathbf{o}_K^\times N_{\mathbf{o}_F} N'_{\mathbf{o}_F}$ und nur für $d \in \wp$ in $\mathbf{o}_K^\times N_{\mathbf{o}_F} w N_\wp$ liegt, weshalb diese zwei Teilmengen disjunkt sind.

Berechnung des Beispiels

Mit Lemma 5.3 kann man nun zerlegen

$$\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)} = \chi \cdot \mathbf{1}_{N_{\mathbf{o}_F} N'_{\mathbf{o}_F}} + \chi \cdot \mathbf{1}_{N_{\mathbf{o}_F} w N_\wp}.$$

Für $y \in TNN'$ kann man weiter einen Vertreter der Form

$$y = \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

annehmen. Für ein solches y gilt also

$$\phi(y) = \phi_1(y_2, y_3) := \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y_2) \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y_3).$$

Analog erhält man für $y \in \operatorname{supp} \phi \cap TNwN$, ohne Einschränkung

$$y = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & y_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\phi(y) = \phi_2(y_1, y_4) := \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y_1) \mathbf{1}_\wp(y_4).$$

Diese Zerlegung der Funktion ϕ wird im folgenden für die äußere Funktion $\psi = \phi$ verwendet:

$$\begin{aligned} < \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \phi >_x &= \int_F \int_F \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \bar{\chi}_1(b)\bar{\phi}_1(b^{-1}y_2, by_3)\ dy_2 dy_3 \\ &+ \int_F \int_F \int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\ \chi_1(b)\bar{\phi}_2(by_1, b^{-1}y_4)\ dy_1 dy_4. \end{aligned}$$

Die Wahl der Haarmaße $dy_i dy_j$ auf den offenen Teilen TNN' und $TNwN$ ergibt für die maximal kompakte Gruppe das Volumen

$$\mathrm{vol}_{T\backslash G}(T \cdot \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)) = \mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2(1 + q^{-1}).$$

Der innere Integrand $\phi(t^{-1}\gamma(x)ty)$ ist genau dann von null verschieden, wenn es ein $(r\mathbf{o}_F^\times, s\mathbf{o}_F^\times) \subset T$ gibt so, daß

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} t^{-1}\gamma(x)ty \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F).$$

Da $\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)$ fundamental ist für unverzweigtes χ, gibt es höchstens eine solche Klasse $(r\mathbf{o}_F^\times, s\mathbf{o}_F^\times)$, die das erfüllt. Wenn das der Fall ist, ist der Wert des inneren Integranden $\phi(t^{-1}\gamma(x)ty) = \chi_1(r^{-1}s)$. Mit $t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\gamma(x) = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ lautet diese Bedingung für $y \in NN'$:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} t^{-1}\gamma(x)ty = \begin{pmatrix} -r(1 + y_2y_3 - a^{-1}xy_3) & r(-y_2 + a^{-1}x) \\ -s(a(1 + y_2y_3) - y_3) & s(1 - ay_2) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F). \tag{5.1.1}$$

Die ist genau dann erfüllt, wenn alle Komponenten ganz sind und die Determinante eine Einheit,

$$rs \det(t^{-1}\gamma(x)ty) = rs(x - 1) \in \mathbf{o}_F^\times.$$

Somit kann man ohne Einschränkung

$$r = s^{-1}(1 - x)^{-1}$$

setzen. Dann hat der innere Integrand den Wert $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1(1 - x)$, denn χ_1 ist quadratisch. Ist hingegen $y \in NwN$, dann lautet die Bedingung für das Nichtverschwinden des inneren Integranden

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} t^{-1}\gamma(x)ty = \begin{pmatrix} r(-y_1 + a^{-1}x) & -r(1 - y_1y_4 + a^{-1}xy_4) \\ s(1 - ay_1) & -s(a(1 - y_1y_4) + y_4) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F).$$

Ersetzt man in der Bedingung für $y \in NN'$ die Variablen (y_2, y_3) durch $(y_1, -y_4)$, so ergibt sich genau die Bedingung für $y \in NwN$. Das innere Integral für $y \in NwN$ kann man also aus dem für $y \in NN'$ ablesen. Es reicht, das innere Integral für $y \in NN'$ zu berechnen. Für die äußere Funktion macht man dann folgende Beobachtung: Ist

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & -1 + y_1 y_4 \\ 1 & y_4 \end{pmatrix} \in NwN,$$

dann gilt

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \bar{\phi}_2(y) = \bar{\psi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \bar{\phi}_2 \begin{pmatrix} by_1 & -1 + y_1 y_4 \\ 1 & b^{-1} y_4 \end{pmatrix} = \chi_1(b) \phi_2(by_1, b^{-1} y_4),$$

während für

$$y = \begin{pmatrix} 1 + y_2 y_3 & y_2 \\ y_3 & 1 \end{pmatrix} \in NN'$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \bar{\phi}_1(y) = \bar{\psi} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\phi}_1 \begin{pmatrix} 1 + y_2 y_3 & b^{-1} y_2 \\ by_3 & 1 \end{pmatrix} = \chi_1^{-1}(b) \phi_2(b^{-1} y_2, by_3)$$

gilt. Um vom Fall $y \in NN'$ auf den Fall $y \in NwN$ zu schließen, muß man also zusätzlich zur Substitution $(y_1, y_4) \mapsto (y_2, -y_3)$ auch noch die äußere Funktion $\bar{\phi}_2(by_1, b^{-1} y_4) = \mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F}(y_1) \mathbf{1}_{b\wp}(y_4)$ durch $\bar{\phi}_2(by_2, b^{-1} y_3) = \mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F}(y_2) \mathbf{1}_{b\wp}(y_3)$ ersetzen, beziehungsweise b durch b^{-1}.
Dabei gibt die äußere Funktion ϕ_1 noch eine Apriori-Bedingung für (y_2, y_3): Angenommen, es sei $v(y_2) < -v(y_3)$ und $\phi_1(b^{-1} y_2, by_3) \neq 0$. Dann folgte der Widerspruch $v(b) \leq v(y_2) < -v(y_3) \leq v(b)$. Also muß schon $v(y_2) \geq -v(y_3)$ gelten.

Bedingungen an den inneren Integranden

Von nun an sei also immer die Grundvoraussetzung

$$v(y_2) \geq -v(y_3)$$

erfüllt. Für das Nichtverschwinden des inneren Integranden im Fall $y \in NN'$ ergeben sich die folgenden möglichen Bereiche:
Für $x \in F^\times \backslash (1 + \wp)$:

- $-v(y_3) \leq v(y_2) < 0$:
  - $a \in \frac{1}{y_2}(1 + \wp^{-v(y_2)})$ (für $v(s) = v(y_2)$)
  - $a \in \frac{x}{y_2}(1 + \wp^{-v(y_2)})$ (für $v(s) = -v(1 - x)$)

- $v(1+y_2y_3) < -v(y_3) \leq v(y_2)$:
  - $a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$ (für $v(s) = v(1+y_2y_3)$)
  - $a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$ (für $v(s) = -v(y_3) - v(1-x)$)
- $v(y_2) \geq 0$ und $v(y_3) \geq 0$: Für $v(x) \geq 0$: $0 \leq v(a) \leq v(x)$ (für $v(s) = 0$); für $v(x) < 0$: $0 \leq v(s) \leq -v(x)$ (für $v(s) = -v(a)$).
- $v(y_3) < 0$ und $v(y_2) = -v(y_3) \leq v(1+y_2y_3)$: Für $v(x) \geq 0$: $2v(y_3) \leq v(a) \leq v(x) + 2v(y_3)$ (für $v(s) = 0$); für $v(x) < 0$: $-v(y_3) \leq v(s) \leq -v(y_3) - v(x)$ (für $v(s) = -v(a) + v(y_3)$).

Für $x \in 1+\wp$:

- $-v(y_3) \leq v(y_2) < -v(1-x)$: $a \in \frac{x}{y_2}(1+\wp^{-v(y_2)})$ (für $v(s) = -v(1-x)$)
- $-v(y_3) \leq v(y_2) \leq -v(1-x)$: $a \in \frac{1}{y_2}(1+\wp^{-v(y_2)})$ (für $v(s) = v(y_2)$)
- $0 \leq v(1+y_2y_3) < -v(y_3) - v(1-x)$: $a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$ (für $v(s) = -v(y_3) - v(1-x)$)
- $0 \leq v(1+y_2y_3) \leq -v(y_3) - v(1-x)$: $a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$ (für $v(s) = v(1+y_2y_3)$)

Es ist leicht nachzuprüfen, daß für alle diese Bereiche die Bedingungen erfüllt sind. Daß umgekehrt dies alle möglichen Bereiche sind, ergibt sich aus im Prinzip einfachen, aber verschachtelten Fallunterscheidungen. Diese sind wenig erhellend. In Kapitel 8 werden solche Rechnungen en masse durchgeführt. Um deren Vorgehensweise an einem expliziten Beispiel zu beleuchten und so einen ersten Eindruck über das Vorgehen im Beweis von Vermutung 5.4 zu geben, sollen sie hier durchgeführt werden.
Die Ganzheitsbedingungen an die Komponenten von $(s^{-1}(1-x)^{-1}, s)t^{-1}\gamma(x)ty$, die alle gleichzeitig erfüllt sein müssen, lauten (vergleiche (5.1.1),

$$a^{-1} \in \frac{1+y_2y_3}{xy_3}(1+\frac{s(1-x)}{1+y_2y_3}\mathbf{o}_F), \tag{5.1.2}$$

$$a^{-1} \in \frac{y_2}{x}(1+\frac{s(1-x)}{y_2}\mathbf{o}_F), \tag{5.1.3}$$

$$a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\frac{1}{sy_3}\mathbf{o}_F), \tag{5.1.4}$$

$$a \in \frac{1}{y_2}(1+s^{-1}\mathbf{o}_F). \tag{5.1.5}$$

Diese muß man nun untersuchen.

Es sei zunächst $v(s) < 0$ angenommen.
Dann ist $s^{-1}\mathbf{o}_F \subset \wp$ und (5.1.5) liefert $a = \frac{1}{y_2}(1 + a')$, mit $a' \in s^{-1}\mathbf{o}_F$. Dies eingesetzt in (5.1.4) ergibt

$$\frac{1}{y_2}(1 + a') + y_3 a' \in s^{-1}\mathbf{o}_F,$$

Was unter der Voraussetzung $v(y_2) \geq -v(y_3)$ gleichbedeutend zu

$$v(y_2) \leq v(s) < 0 \tag{5.1.6}$$

ist. Insbesondere gilt also $v(y_3) > 0$. Unter dieser Bedingung sind (5.1.2) und (5.1.3) gleichbedeutend zu

$$1 \in s(1 - x)\mathbf{o}_F \tag{5.1.7}$$

und

$$a^{-1} \in \frac{y_2}{x}(1 + \frac{s(1 - x)}{y_2}\mathbf{o}_F). \tag{5.1.8}$$

Falls $v(\frac{s(1-x)}{y_2}) > 0$, dann lauten (5.1.8) und (5.1.5) kombiniert

$$a \in \frac{x}{y_2}(1 + \frac{s(1 - x)}{y_2}\mathbf{o}_F) \cap \frac{1}{y_2}(1 + s^{-1}\mathbf{o}_F). \tag{5.1.9}$$

Damit dieser Durchschnitt überhaupt nichtleer ist, muß $x \in 1 + \wp$ gelten. Die aus (5.1.6) und (5.1.7) und $v(\frac{s(1-x)}{y_2}) > 0$ zusammengesammelten Bedingungen an $v(s)$ lauten

$$v(y_2) \leq v(s) \leq -v(1 - x). \tag{5.1.10}$$

Ist $v(s) = v(y_2) + j$, so erhält man (5.1.9) als

$$a \in \frac{x}{y_2}(1 + \wp^{v(1-x)+j}) \cap \frac{1}{y_2}(1 + \wp^{-v(y_2)-j}).$$

Für $j = 0$ ergibt das

$$a \in \frac{1}{y_2}(1 + \wp^{-v(y_2)}),$$

denn dann ist $x \in 1 + \wp^{v(1-x)}$. Für $j > 0$ ist $x \notin 1 + \wp^{v(1-x)+j}$. Dann erhält man nur dann keinen leeren Bereich für a, wenn stattdessen $x \in 1 + \wp^{-v(y_2)-j}$ erfüllt ist, also $v(1 - x) \geq -v(y_2) - j$. Zusammen mit (5.1.10) ergibt das $v(y_2) + j = v(s) = -v(1 - x)$. Dazu muß $v(y_2) < -v(1 - x)$ gelten. Zusammenfassend hat man im Fall $v(\frac{s(1-x)}{y_2}) > 0$ also die Bereiche für $x \in 1 + \wp$:

- $v(s) = v(y_2) \leq -v(1-x)$: $a \in \frac{1}{y_2}(1 + \wp^{-v(y_2)})$,
- $v(y_2) < v(s) = -v(1-x)$: $a \in \frac{x}{y_2}(1 + \wp^{-v(y_2)})$.

Falls hingegen $v(\frac{s(1-x)}{y_2}) \leq 0$, dann findet man aus (5.1.6), (5.1.7) und (5.1.8):

$$v(s) \geq v(y_2) \begin{cases} = -v(a) \geq v(s) + v(1-x) - v(x) \\ \geq v(s) + v(1-x) \end{cases}$$

Da stets $\max\{v(1-x) - v(x), v(1-x)\} \geq 0$ gilt, ergibt das $v(s) = v(y_2)$ und $\max\{v(1-x) - v(x), v(1-x)\} = 0$. Der Beitrag in diesem Fall ist also nur dann nicht null, wenn $x \in F^\times \backslash (1 + \wp)$ gilt. Dann ist er

- $v(s) = v(y_2) < 0$: $a \in \frac{1}{y_2}(1 + \wp^{-v(y_2)})$.

Hiermit ist der Fall $v(s) < 0$ erschöpft.

Es sei nun $v(s) \geq 0$ angenommen.
Dieser Fall ist um einiges verschlungener und vielfältiger als der vorhergehende. Die Bedingung (5.1.5) wird hier zu

$$v(a) \geq -v(y_2) - v(s). \tag{5.1.11}$$

In Bedingung (5.1.4) unterscheidet man weiter:
Falls $-v(s) - v(y_3) > 0$: Dann ist $\frac{1}{sy_3}\mathbf{o}_F \subset \wp$ und $a = \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1 + a')^{-1}$ mit $a' \in \frac{1}{sy_3}\mathbf{o}_F$. Setzt man a^{-1} in (5.1.2), so erhält man die Bedingung

$$(1 + y_2y_3)(1 - x - xa') \in s(1-x)\mathbf{o}_F. \tag{5.1.12}$$

Falls nun $x \in F^\times \backslash (1 + \wp)$, so sammelt man die bisherigen Bedingungen an $v(s)$:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq \\ v(1 + y_2y_3) - v(y_2y_3) \leq \end{array}\right\} v(s) \begin{cases} < -v(y_3) \text{ (aus der Fallunterscheidung)} \\ \leq v(1 + y_2y_3) \text{ (aus (5.1.12) und (5.1.11))} \end{cases}. \tag{5.1.13}$$

Man sieht leicht, daß (5.1.13) nur für $v(s) = v(1 + y_2y_3)$ erfüllt werden kann. Damit schreibt sich (5.1.3) als

$$a^{-1} \in \frac{(1 + y_2y_3)(1-x)}{x}\mathbf{o}_F,$$

denn $v(y_2) \geq -v(y_3) > v(s) \geq v(s(1-x))$.Diese Bedingung ist wegen $v(a) = v(\frac{y_3}{1+y_2y_3})$ gleichbedeutend zu $-v(y_3) \geq v(1-x) - v(x)$. Da wir im Fall $x \notin 1 + \wp$ sind, ist das immer erfüllt. Der Beitrag zu $x \in F^\times \backslash (1 + \wp)$ ist hier also

- $v(s) = v(1+y_2y_3)$, $0 \leq v(1+y_2y_3) < -v(y_3)$:
  $a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$.

Falls nun $x \in 1+\wp$**,** dann führt man zunächst die Annahme $v(a^{-1}x) < v(s)+v(1-x)$ zu einem Widerspruch: Dann würden (5.1.3) und (5.1.4) implizieren:

$$a \in \frac{x}{y_2}(1+\wp) \cap \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp),$$

was nur dann erfüllbar ist, wenn $\frac{x}{y_2} \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp)$ oder äquivalent $1+y_2y_3 \in y_2y_3(1+\wp)$. Das ist ein Widerspruch, denn dazu müßte $1 \in \wp$ gelten.
Also gilt $v(a^{-1}x) \geq v(s)+v(1-x)$, und (5.1.3) lautet mit hilfe von (5.1.4): $v(1+y_2y_3)-v(y_3) = -v(a) \geq v(s)+v(1-x)$. Sammeln wir alle bisherigen Bedingungen an $v(s)$:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq \\ v(\frac{1+y_2y_3}{y_2y_3}) \leq \end{array}\right\} v(s) \left\{\begin{array}{l} < -v(y_3) \text{ aus der Fallunterscheidung} \\ \leq v(y_2)-v(1-x) \text{ aus (5.1.5) und (5.1.3)} \\ \leq -v(y_3)-v(1-x)+v(1+y_2y_3) \text{ aus (5.1.3)} \end{array}\right. . \tag{5.1.14}$$

Man sieht leicht, daß die $v(s)$-Bedingungen nun schrumpfen zu

$$v(1+y_2y_3) \leq v(s) \leq -v(y_3)-v(1-x)$$

unter der Nebenbedingung $v(1+y_2y_3) < v(y_2)$. Also gilt $v(s)+v(1-x)-v(1+y_2y_3) > 0$. Dann lauten (5.1.2) und (5.1.4) kombiniert

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\frac{s(1-x)}{1+y_2y_3}\mathbf{o}_F) \cap \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\frac{1}{sy_3}\mathbf{o}_F). \tag{5.1.15}$$

Für $v(s) = v(1+y_2y_3)$ gibt (5.1.15)

$$a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}),$$

denn dann ist $x \in 1+\frac{s(1-x)}{1+y_2y_3}\mathbf{o}_F$. Sei nun $v(s) = v(1+y_2y_3)+j$ mit $j > 0$. Damit (5.1.15) nicht leer ist, muß $v(1-x) \geq -v(1+y_2y_3)-v(y_3)-j$ gelten. Zusammen mit den übrigen Bedingungen an $v(s)$ heißt das $v(s) = -v(y_3)-v(1-x)$. Dann ist insbesondere $v(1+y_2y_3) < -v(y_3)-v(1-x)$.
Die Bedingungen in diesem Fall für $x \in 1+\wp$ lauten also

- $v(y_2) > -v(y_3)$ und $v(y_3) \leq -v(1-x)$: $v(s) = 0$ und $a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)})$,
- $v(y_2) > -v(y_3)$ und $v(y_3) < -v(1-x)$: $v(s) = -v(y_3)-v(1-x)$ und $a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)})$,

- $v(y_2) = -v(y_3)$ und $v(1+y_2y_3) \leq -v(y_3) - v(1-x)$: $v(s) = v(1+y_2y_3)$ und $a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$,
- $v(y_2) = -v(y_3)$ und $0 \leq v(1+y_2y_3) < -v(y_3) - v(1-x)$: $v(s) = -v(y_3) - v(1-x)$ und $a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$.

Damit ist der Fall $-v(s) - v(y_3) > 0$ abgeschlossen.

Falls $-v(s) - v(y_3) \leq 0$, muß man weiter unterscheiden.
Falls zusätzlich $v(s) + v(1-x) > v(y_2)$, dann ist $\frac{s(1-x)}{y_2}\mathbf{o}_F \subset \wp$. Somit folgt aus (5.1.3), daß $v(a) = v(x) - v(y_2)$. Alle Bedingungen an $v(s)$, die man aus der Fallunterscheidung und (5.1.4) und (5.1.5) erhält, lauten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Fallunterscheidung:} & 0 \leq \\ \text{Fallunterscheidung:} & -v(y_3) \leq \\ \text{aus (5.1.5):} & -v(x) \leq \\ \text{aus (5.1.4):} & -v(1+y_2y_3) + v(y_2) - v(x) \leq \\ \text{Fallunterscheidung:} & v(y_2) - v(1-x) < \end{array}\right\} v(s). \tag{5.1.16}$$

Nun führt man die Annahme, daß $v(s) + v(1-x) - v(1+y_2y_3) > 0$ ist, zum Widerspruch: Dann wäre nach (5.1.2) und (5.1.3)

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp) \cap \frac{x}{y_2}(1+\wp).$$

Damit dieser Durchschnitt nicht leer ist, müßte $\frac{y_2y_3}{1+y_2y_3} \in 1+\wp$ gelten, was gleichbedeutend zu $1 \in \wp$ ist, einem offensichtlichen Widerspruch.
Also gilt $v(s) + v(1-x) - v(1+y_2y_3) \leq 0$. Dann hat man mit (5.1.2)

$$v(s) \leq \left\{\begin{array}{l} v(1+y_2y_3) - v(1-x) \\ v(y_2) + v(y_3) - v(1-x) \end{array}\right. ,$$

was gleichbedeutend zu $v(s) \leq -v(1-x)$ ist. Aus den Bedingungen (5.1.16) sieht man nun insbesondere $0 \leq -v(1-x)$, also $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$. Außerdem folgt auch $v(y_2) < 0$. Dann vereinfachen sich die Bedingungen an $v(s)$ zu

$$\left.\begin{array}{r} 0 \\ -v(x) \end{array}\right\} \leq v(s) \leq -v(1-x).$$

Dies ist nun wegen $x \notin 1+\wp$ gleichbedeutend zu $v(s) = -v(1-x)$. Der Bereich in diesem Fall ist also gegeben durch

- $v(y_2) < 0$: $v(s) = -v(1-x)$ und $a \in \frac{x}{y_2}(1+\wp^{-v(y_2)})$.

Der Fall $v(s)+v(1-x) > v(y_2)$ ist somit abgeschlossen. Nun braucht man noch:

Falls zusätzlich $v(s)+v(1-x) \leq v(y_2)$ ist, dann ist (5.1.3) gleichbedeutend zu

$$-v(a) \geq v(s)+v(1-x)-v(x). \tag{5.1.17}$$

Man unterscheidet weiter:
Falls auch noch $v(s)+v(1-x)-v(1+y_2y_3) > 0$, dann gilt nach (5.1.2)

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\frac{s(1-x)}{1+y_2y_3}\mathbf{o}_F) \subset \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp).$$

Insbesondere ist $v(a) = v(xy_3) - v(1+y_2y_3)$. Nun sammelt man die Bedingungen an $v(s)$ zusammen:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq \\ -v(y_3) \leq \\ -v(x)-v(y_3) \leq \\ -v(x)+v(\frac{1+y_2y_3}{y_2y_3}) \leq \\ v(\frac{1+y_2y_3}{1-x}) < \end{array}\right\} v(s) \leq \left\{\begin{array}{ll} v(y_2)-v(1-x) & \text{aus Fallunterscheidung} \\ & \text{aus Fallunterscheidung} \\ v(\frac{1+y_2y_3}{y_3(1-x)}) & \text{aus (5.1.4) und (5.1.3)} \\ & \text{aus (5.1.5)} \\ & \text{aus Fallunterscheidung} \end{array}\right. . \tag{5.1.18}$$

Die beiden rechten Bedingungen zusammen sind äquivalent zu

$$v(s) \leq -v(y_3) - v(1-x),$$

denn nach Generalvoraussetzung ist $v(y_2) \geq -v(y_3)$. Hieraus folgt zum einen $v(1+y_2y_3) < -v(y_3)$. Und zum anderen folgt $0 \leq -v(1-x)$, also $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$. Hiermit liefert (5.1.18) nun endlich $v(s) = -v(y_3) - v(1-x)$. Der Beitrag dieses Falls ist also gegeben nur für $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$ als

- $0 \leq v(1+y_2y_3) < -v(y_3)$: $v(s) = -v(y_3) - v(1-x)$ und $a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$.

Falls auch noch $v(s)+v(1-x)-v(1+y_2y_3) \leq 0$, dann ist (5.1.2) gleichbedeutend zu

$$-v(a) \geq v(s)+v(1-x)-v(x)-v(y_3).$$

Aus den Voraussetzungen der Fallunterscheidung erhält man insgesamt die $v(s)$-Bedingungen

$$\left.\begin{array}{r} 0 \\ -v(y_3) \end{array}\right\} \leq v(s) \leq \left\{\begin{array}{l} v(y_2)-v(1-x) \\ v(1+y_2y_3)-v(1-x) \end{array}\right. . \tag{5.1.19}$$

Aus den Bedingungen (5.1.2) bis (5.1.5) erhält man Bedingungen an $v(a)$:

$$\left.\begin{array}{r} -v(1+y_2y_3)-v(s) \\ -v(y_2)-v(s) \end{array}\right\} \leq v(a) \leq \left\{\begin{array}{l} -v(s)+vx)-v(1-x) \\ -v(s)+v(x)-v(1-x)+v(y_3) \end{array}\right. . \tag{5.1.20}$$

Nun unterscheidet man weiter nach der Größe von $v(y_3)$:
Falls $v(y_3) \geq 0$: Man führt zunächst die Annahme $v(y_2) < 0$ zum Widerspruch. Dann folgte aus (5.1.19) $v(1-x) \leq v(y_2) < 0$. Aus (5.1.20) folgte aber $v(1-x) - v(x) \leq v(y_2) < 0$, was für $v(x) < 0$ einen Widerspruch ergibt.
Also ist $v(y_2) \geq 0$. Damit schrumpft (5.1.19) zusammen auf $0 \leq v(s) \leq -v(1-x)$, was $x \notin 1+\wp$ impliziert. Die Bedingung (5.1.20) schrumpft auf $-v(s) \leq v(a) \leq -v(s)+v(x)-v(1-x)$. Damit kann man die Bedingungen dieses Falls formulieren: Einen nichtleeren Bereich gibt es nur für $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$. Der ist dann gegeben durch

- $v(y_2) \geq 0$ und $v(y_3) \geq 0$:
  - Für $v(x) \geq 0$: $v(s) = 0$ und $0 \leq v(a) \leq v(x)$,
  - Für $v(x) < 0$: $v(a) = -v(s)$ und $0 \leq v(s) \leq -v(x)$.

Falls $v(y_3) < 0$, führt man die Annahme $v(y_2) > -v(y_3)$ zum Widerspruch: Aus (5.1.19) folgte nun $v(1-x) \leq v(y_3) < 0$, also $v(x) < 0$. Aus (5.1.20) folgte $0 \leq v(x) - v(1-x) + v(y_3)$, was man nur für $v(x) \geq 0$ erfüllen könnte.
Also ist $v(y_2) = -v(y_3)$. Man zeigt, daß dann $v(1+y_2y_3) < -v(y_3)$ nicht möglich ist, denn aus (5.1.19) folgte wieder $v(1-x) < 0$. Setzt man dies in (5.1.20), so ergibt sich $-v(y_3) \leq v(1+y_2y_3)$, Widerspruch.
Also ist sogar $v(1+y_2y_3) \geq -v(y_3)$. Dann lautet (5.1.19) $-v(y_3) \leq v(s) \leq -v(y_3) - v(1-x)$, was nur für $x \notin 1+\wp$ erfüllt werden kann. Bedingung (5.1.20) ergibt $v(y_3) - v(s) \leq v(a) \leq -v(s) + v(x) - v(1-x) + v(y_3)$. Nun kann man die Bedingungen dieses Falls angeben: Er liefert nur dann einen Beitrag, wenn $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$, und dann muß gelten

- $0 < -v(y_3) \leq v(1+y_2y_3)$:
  - Für $v(x) \geq 0$: $v(s) = -v(y_3)$ und $2v(y_3) \leq v(a) \leq v(x) + 2v(y_3)$,
  - Für $v(x) < 0$: $v(a) = v(y_3) - v(s)$ und $-v(y_3) \leq v(s) \leq -v(y_3) - v(x)$.

Nun sind alle Möglichkeiten, die unter den Bedingungen (5.1.2) bis (5.1.5) auftreten können, behandelt worden. Die möglichen Bereiche wurden jeweils mit einem „•“ gekennzeichnet und wurden zu Beginn dieses Abschnitts zusammen gefaßt.

Berechnung des inneren Integrals

Aus den zu Beginn des vorigen Abschnitts aufgelisteten Bereichen berechnet man das innere Integral für $y \in NN'$, indem man über $a \in F^\times$ integriert: Für $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(1-q^{-1})^{-1} \\
&\Bigg((|v(x)|+1)(1-q^{-1})\Big(\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y_2)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y_3)+\mathbf{1}_{F\backslash\mathbf{o}_F}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{-v(y_3)})}(y_2)\Big) \\
&\qquad +2q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_2)}}(y_3)\mathbf{1}_{F\backslash\mathbf{o}_F}(y_2)+2q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{F\backslash\mathbf{o}_F}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2) \\
&\qquad +2q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\backslash\mathbf{o}_F}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\backslash(1+\wp^{-v(y_3)}))}(y_2)\Bigg).
\end{aligned}$$

Für $x \in 1+\wp$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(1-q^{-1})^{-1} \\
&\Bigg(\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{-v(1-x)+1}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_2)}}(y_3)+\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{-v(1-x)}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_2)}}(y_3) \\
&\quad +\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{-v(1-x)+1}}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)+\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{-v(1-x)}}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2) \\
&\quad +q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{-v(1-x)+1}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\backslash(1+\wp^{-v(y_3)-v(1-x)+1}))}(y_2) \\
&\quad +q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{-v(1-x)}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\backslash(1+\wp^{-v(y_3)-v(1-x)}))}(y_2)\Bigg).
\end{aligned}$$

Im inneren Integral für $y \in NwN$ braucht man wegen der äußeren Funktion ϕ_2 sogar nur solche (y_2, y_3) zu betrachten, die $-v(y_3) < v(y_2)$ erfüllen. Das ergibt folgende innere Integrale:
Für $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$:

$$\begin{aligned}
&\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(1-q^{-1})^{-1} \\
&\Bigg((|v(x)|+1)(1-q^{-1})\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F\cap\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y_3) \\
&\qquad +2q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_2)+1}}(y_3)\mathbf{1}_{F\backslash\mathbf{o}_F}(y_2)+2q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{F\backslash\mathbf{o}_F}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)\Bigg).
\end{aligned}$$

Und für $x \in 1+\wp$:

$$\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(1-q^{-1})^{-1}$$
$$\Big(\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(1-x)+1}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_2)+1}}(y_3)+\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(1-x)}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_2)+1}}(y_3)$$
$$+\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(1-x)+1}}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)+\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(1-x)}}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)\Big).$$

Berechnung des äußeren Integrals

Diese inneren Integrale müssen nun gegen die äußere Funktion ϕ_i aufintegriert werden. Dabei treten für $x \in 1+\wp$ folgende Summanden auf: Die äußeren Integrale im Fall $x \in 1+\wp$ in der Reihenfolge ihres Erscheinens im inneren Integral für $y \in NN'$, also für die äußere Funktion ϕ_1, bis auf den Faktor $\chi_1(b(1-x))\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)$:

$$(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)+1}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\cap\wp^{-v(y_2)}}(y_3)\;dy_2\;dy_3$$
$$=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-v(b)-v(1-x)+1\big)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2;$$

$$(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\cap\wp^{-v(y_2)}}(y_3)\;dy_2\;dy_3$$
$$=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-v(b)-v(1-x)\big)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2;$$

$$(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b\mathbf{o}_F\cap\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)+1}}(y_3)\;dy_2\;dy_3$$
$$=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)|b|\big(q^{-1}+v(b)-v(1-x)\big)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2;$$

$$(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b\mathbf{o}_F\cap\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)}}(y_3)\;dy_2\;dy_3$$
$$=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b)|b|\big(q^{-1}+v(b)-v(1-x)-1\big)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2;$$

$$(1-q^{-1})^{-1}\int\int\Big(\mathbf{1}_{b\mathbf{o}_F\cap -y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp^{-v(y_3)-v(1-x)+1}))}(y_2)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\cdot$$
$$\mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)+1}}(y_3)\;dy_2\;dy_3\Big)$$
$$=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)|b|\big(1-2q^{-1}+(1-q^{-1})(v(b)-v(1-x))\big)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2;$$

$$
\begin{aligned}
&(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b\mathbf{o}_F\cap -y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp^{-v(y_3)-v(1-x)}))}(y_2)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\\
&\qquad\qquad\cdot\mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)}}(y_3)\ dy_2\ dy_3\\
&=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b)|b|\big(1-2q^{-1}+(1-q^{-1})(v(b)-v(1-x)-1)\big)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2;
\end{aligned}
$$

Die äußeren Integrale im Fall $x\in 1+\wp$ in der Reihenfolge ihres Erscheinens im inneren Integral für $y\in NwN$, also für die äußere Funktion ϕ_2, bis auf den Faktor $\chi_1(b(1-x))\operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F)$:

$$
\begin{aligned}
&(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)+1}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{b\wp\cap\wp^{-v(y_2)}}(y_3)\ dy_2\,dy_3\\
&\quad=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)|b|\big(v(b)-v(1-x)+1\big)q^{-1}\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\setminus\wp^{-v(1-x)}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{b\wp\cap\wp^{-v(y_2)+1}}(y_3)\ dy_2\ dy_3\\
&\quad=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b)|b|\big(v(b)-v(1-x)\big)q^{-1}\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\cap\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{b\wp\setminus\wp^{-v(1-x)+1}}(y_3)\ dy_2\ dy_3\\
&\quad=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-v(b)-v(1-x)\big)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-q^{-1})^{-1}\int\int \mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F\cap\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{b\wp\setminus\wp^{-v(1-x)}}(y_3)\ dy_2\ dy_3\\
&\quad=\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-v(b)-v(1-x)-1\big)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2;
\end{aligned}
$$

Summiert man alle diese Beiträge unter Berücksichtigung des Vorfaktors $\chi_1(b(1-x))\operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)$ auf, so erhält man die translatierte Local Linking Number zu $x\in 1+\wp$ als

$$
\begin{aligned}
&<\phi,\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\phi>_{x\in 1+\wp}=\chi_1(1-x)\chi_1(b)\operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2\cdot\\
&\quad\Bigg(\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b)|b|\big(2v(b)-2(v(1-x)+1)+1\big)\\
&\qquad+\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-2v(b)-2(v(1-x)+1)+1\big)\\
&\qquad+\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)|b|\big(2v(b)-2v(1-x)+1\big)\\
&\qquad+\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-2v(b)-2v(1-x)+1\big)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Das ist genau der Term, der in Beispiel 5.2 behauptet wurde.
Die auftretenden äußeren Integrale für die Summanden des inneren Integrals für $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$ kann man fast alle aus denen für $x \in 1+\wp$ ablesen, wenn man dort $v(1-x)=0$ setzt. Die einzigen Ausnahmen sind für $y \in NN'$:

$$\int\int \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F \cap b\mathbf{o}_F}(y_2)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F \cap b^{-1}\mathbf{o}_F}(y_3)\ dy_2\ dy_3 = \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b)|b| + \mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})|b^{-1}|$$

und

$$\int\int \mathbf{1}_{b\mathbf{o}_F \cap -y_3^{-1}(1+\wp^{-v(y_3)})}(y_2)\mathbf{1}_{b^{-1}\mathbf{o}_F \backslash \mathbf{o}_F}(y_3)\ dy_2\ dy_3 = \mathbf{1}_{\wp}(b)|b|(1-q^{-1}).$$

Einzige Ausnahme für $y \in NwN$:

$$\int\int \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F \cap b^{-1}\mathbf{o}_F}(y_2)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F \cap b\wp}(y_3)\ dy_2\ dy_3 = \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b)|b|q^{-1} + \mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})|b^{-1}|.$$

Dabei wurde jeweils der Faktor $\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2$ auf der rechten Seite weggelassen. Das innere Integrale liefert für diese Terme den zusätzlichen Vorfaktor $\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)$. Durch Summation aller Beiträge entsteht nun die translatierte Local Linking Number für $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$:

$$\begin{aligned} < \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x = \chi_1(1-x)\chi_1(b)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2 \cdot \\ \Bigg(\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(b)\big(|v(x)|+1\big)(1+q^{-1}) + \mathbf{1}_{\wp}(b)|b|\big(4v(b)+2|v(x)|\big) \\ + \mathbf{1}_{\wp}(b^{-1})|b^{-1}|\big(-4v(b)+2|v(x)|\big)\Bigg). \end{aligned}$$

Auch dies entspricht dem Term in Beispiel 5.2.

Bemerkungen

In Abschnitt 8.12 findet man eine Eigenschaft des Zusammenwirkens der beiden Variablen x und b, die man auch an diesem Beispiel ablesen kann: Der Träger in x wird durch $|v(b)| >> 0$ beliebig nahe zu 1 hin ausgedehnt. Für festes b ist er natürlich von 1 wegbeschränkt, wie in Satz 2.7 bewiesen. Umgekehrt verkleinert ein x nahe 1 den Träger in b hin zu $|v(b)| >> 0$. Insbesondere ergeben sich hierbei Terme zur Asymptotik der translatierten Local Linking Numbers für $v(b) \to \pm\infty$. Eine Grenze n so, daß eine translatierte Local Linking Number als Funktion von b für $|v(b)| > n$ ein bestimmtes Verhalten hat, wird also im allgemeinen von $v(1-x)$ abhängen.

Außerdem wird deutlich, daß die Translation eine Local Linking Number fundamental verändert, denn die Local Linking Number $< \phi, \phi >_x$ für $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$ wie in Beispiel 5.2 ist schlicht

$$< \phi, \phi >_x = \chi_1(1-x)\mathbf{1}_{F^\times \backslash (1+\wp)}(x)\big(|v(x)|+1\big)\,\mathrm{vol}_{T\backslash G}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F^\times)),$$

wie man aus dem Beispiel für $b = 1$ abliest.

Dieses Beispiel 5.2 wurde mit großer Sorgfalt und derartiger Ausführlichkeit aufgeschrieben, weil es die Vorgehensweise der Berechnungen im Beweis von Vermutung 5.4 vorwegnimmt. Wer nur einen Eindruck von diesem Beweis erhalten und das hundertseitige Kapitel 8 nicht studieren möchte, erreicht dies durch Beispiel 5.2.
Zudem baut Kapitel 7.2, in dem die Ergebnisse dieser Dissertation an der lokalen Gross-Zagier-Formel quantitativ getestet werden, auf Beispiel 5.2 auf, so daß dessen sorgfältige Darstellung nur redlich erscheint.

5.2 Vermutung und Beweisansatz

Es scheint, daß die bisherigen Ergebnisse das Verhalten der translatierten Local Linking Numbers recht gut widerspiegeln: Der Träger als Funktion von b ist nicht mehr kompakt, man erhält Faktoren $\chi_1(b)^{\pm 1}|b|^{\pm 1}$. Außerdem treten Faktoren $v(b)$ auf. Ich vermute aber, daß das höchstens linear möglich ist. Alles in allem komme ich zu folgender Vermutung, die an dieser Stelle wohl eher wie ein frommer Wunsch aussehen muß, denn eine Vermutung.

Vermutung 5.4. *Für festes x haben die Local Linking Numbers*

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_x$$

als Funktionen von $b \in F^\times$ die Form

$$\chi_1^{-1}(b)\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|(a_{+,1}v(b)+a_{+,2}) + A(b) + \mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1})|b|^{-1}(a_{-,1}v(b)+a_{-,2})\Big)$$
$$+\chi_1(b)\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|(c_{+,1}v(b)+c_{+,2}) + C(b) + \mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1})|b|^{-1}(c_{-,1}v(b)+c_{-,2})\Big),$$

mit geeigneten Konstanten $a_{\pm,i}, c_{\pm,i}$ und lokal konstanten Funktionen A, C mit kompaktem Träger in $F^\times$.

Dieses Verhalten entspricht dem, welches man auf der analytischen Seite findet und somit für die geometrische Seite erhofft:
Zhang verwendet dort (Gleichung 3.3.6) als Pendant zur Translation die Produkte der Whittakerneuformen $W(\eta, \xi, b) = W_\theta(b\eta)W_E(b\xi)$. Für $b \to 0$ und festes ξ und η gehen beide Argumente gegen 0, und aus den entsprechenden Halmen (vergleiche Kapitel 3) liest man ab:

$$W(b\eta, b\xi) = \begin{cases} |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}(c_{1\theta}\chi_1(b\eta) + c_{2\theta}\chi_1^{-1}(b\eta))(c_{1E}v(b\xi) + c_{2E}), & \text{falls } \chi_1^2 \neq 1 \\ |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\chi_1(b\eta)(c_{1\theta}v(b\eta) + c_{2\theta})(c_{1E}v(b\xi) + c_{2E}), & \text{falls } \chi_1^2 = 1 \end{cases}.$$

Ist χ_1 nicht quadratisch, so haben die Whittakerprodukte für $b \to 0$ genau die Form der translatierten Local Linking Numbers. Ist χ_1 quadratisch, so sind die translatierten Local Linking Numbers linear in $v(b)$, die Whittakerprodukte lassen jedoch auch quadratische Terme zu. Also wird dann der wesentliche führende Term durch die Translation nicht verwirklicht. Für ein Matching mit den Whittakerdaten benötigt man somit noch einen anderen Operator als die Translation. Ein solcher wird in Kapitel 6 gegeben.

Vermutung 5.4 ist tatsächlich ein Theorem und gemessen an Gewagtheit und Aufwand das Hauptresultat dieser Arbeit. Der Beweis, der der Lesbarkeit halber in Kapitel 8 ausgelagert wird, besteht aus brutalen Rechnungen. Hier sei sein Vorgehen skizziert:
Der Teil der Local Linking Numbers, der die schwierigen Terme erzeugt, ist das innere Integral

$$\int_T \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt.$$

Das äußere Integral berechnet sich, wenn das innere Integral einmal gefunden ist, relativ unkompliziert. Um Aussagen über das innere Integral zu machen, vereinfacht man die Funktion ϕ soweit wie möglich: ϕ hat modulo T kompakten Träger. Untersucht man im folgenden diese Funktion lokal modulo T, so weiß man, daß sie sich immer aus endlich vielen solchen lokalen Teilen zusammensetzen läßt. Aussagen über das Verhalten aller dieser lokalen Teile übertragen sich somit direkt auf die allgemeinen Local Linking Numbers.
Es sei z aus dem Träger von ϕ. Da z in TNN' oder $TNwN$ liegt, kann man modulo T

$$z = \begin{pmatrix} 1 + z_2z_3 & z_2 \\ z_3 & 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & -1 + z_1z_4 \\ 1 & z_4 \end{pmatrix}$$

annehmen. Eine Unterscheidung danach, ob die z_i gleich null sind oder nicht, gibt acht verschiedene Typen von z. Da ϕ modulo T lokal konstant ist, gibt es ein von z abhängiges $m > 0$ so, daß für

$$U_z = \begin{pmatrix} 1 + z_2 z_3 + \wp^m & z_2 + \wp^m \\ z_3 + \wp^m & 1 + \wp^m \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$U_z = \begin{pmatrix} z_1 + \wp^m & -1 + z_1 z_4 + \wp^m \\ 1 + \wp^m & z_4 + \wp^m \end{pmatrix}$$

$\phi(U_z) = \phi(z)$ gilt. Insbesondere ist m so groß, daß $U_z \subset G$. Außerdem kann man m so groß machen, daß für $z_i \neq 0$ immer $|v(z_i)| < m$ gilt (beziehungsweise auch für $1+z_2z_3 \neq 0$ oder $-1+z_1z_4 \neq 0$, daß $|v(1+z_2z_3)| < m$, $|v(-1+z_1z_4)| < m$). Leicht rechnet man nach, daß m sich auch noch so groß machen läßt, daß U_z fundamental ist. In Kapitel 8 werden noch weitere Bedingungen an m gestellt, die aber hier noch nicht von belang sind. Nun sieht ϕ lokal aus wie $\phi_z := \chi \cdot \mathbf{1}_{U_z}$, ist sogar endliche Summe von solchen ϕ_z. Das Verhalten des inneren Integrals ergibt sich also aus dem Verhalten der Integrale

$$\int_T \phi_z(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt.$$

Man reduziere weiter den Träger von ψ wie anfangs skizziert auf einen modulo T kompakten Teil von entweder TNN' oder $TNwN$, um y handhabbar zu machen. Dann kann man ohne Einschränkung für y entweder

$$y = \begin{pmatrix} 1 + y_2 y_3 & y_2 \\ y_3 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } y = \begin{pmatrix} y_1 & -1 + y_1 y_4 \\ 1 & y_4 \end{pmatrix}$$

schreiben.
Das gibt zusammen mit den acht Typen für z nun 16 innere Integrale, deren Verhalten man studieren muß, wenn man Aussagen über das allgemeine innere Integral machen möchte. Kapitel 8 beschäftigt sich ausschließlich mit deren Berechnung und den daraus resultierenden Local Linking Numbers.

Der Vollständigkeit halber sei hier die Vorgehensweise einer solchen Integralberechnung skizziert: Damit für ein $t^{-1}\gamma(x)ty$ der Wert $\phi_z(t^{-1}\gamma(x)ty)$ ungleich null ist, muß es ein $(r, s) \in T$ geben so, daß

$$(r, s)t^{-1}\gamma(x)ty \in U_z. \tag{5.2.1}$$

Der Wert ist dann gleich $\chi_1^{-1}(r)\chi_1(s)$. Die zulässigen $t^{-1}\gamma(x)ty$ drückt man in Bedingungen an $t = (a, 1)$ durch y_i und x, die Bedingungen an y_i durch

x aus. Dann kann man integrieren. Die Bedingung 5.2.1 sei hier noch für die verschiedenen y und z ausgeschrieben:

Gleichung (I): Sei $y \in NN'$ und $z \in NN'$:

$$\begin{pmatrix} -r(1+y_2y_3-a^{-1}xy_3) & r(-y_2+a^{-1}x) \\ -s(a(1+y_2y_3)-y_3) & s(1-ay_2) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1+z_2z_3+\wp^m & z_2+\wp^m \\ z_3+\wp^m & 1+\wp^m \end{pmatrix}$$

Gleichung (II): Sei $y \in NN'$ und $z \in NwN$:

$$\begin{pmatrix} -r(1+y_2y_3-a^{-1}xy_3) & r(-y_2+a^{-1}x) \\ -s(a(1+y_2y_3)-y_3) & s(1-ay_2) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} z_1+\wp^m & -1+z_1z_4+\wp^m \\ 1+\wp^m & z_4+\wp^m \end{pmatrix}$$

Gleichung (III): Sei $y \in NwN$ und $z \in NN'$:

$$\begin{pmatrix} r(-y_1+a^{-1}x) & r(1-y_1y_4+a^{-1}y_4x) \\ s(1-ay_1) & s(y_4+a(1-y_1y_4)) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1+z_2z_3+\wp^m & z_2+\wp^m \\ z_3+\wp^m & 1+\wp^m \end{pmatrix}$$

Gleichung (IV): Sei $y \in NwN$ und $z \in NwN$:

$$\begin{pmatrix} r(-y_1+a^{-1}x) & r(1-y_1y_4+a^{-1}y_4x) \\ s(1-ay_1) & s(y_4+a(1-y_1y_4)) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} z_1+\wp^m & -1+z_1z_4+\wp^m \\ 1+\wp^m & z_4+\wp^m \end{pmatrix}$$

Die Bedingungen für die beiden Arten von y ähneln sich sehr. In Kapitel 8.1 werden Gleichung (III) und (IV) auf (I) und (II) zurückgeführt.

Kapitel 6

Ein Matchingoperator

Wie in Kapitel 3 ein Matching zwischen Produkten von Whittakerfunktionen (siehe Definition 1.14) und den Local Linking Numbers angegeben wurde, soll nun eine ähnliche Aussage über die Translate $W(b\eta, b\xi)$ dieser Produkte um $b \in F^\times$ mit $v(b) \geq 0$ und den Local Linking Numbers angegeben werden, auf die ein bestimmter Operator $\mathbb{T}_b$ wirkt. Zunächst soll die Asymptotik der Translation dieser Whittakerprodukte exakt dargestellt werden.

Satz 6.1. *Die Whittakerprodukte $\mathcal{W}(b\xi, b\eta)$ aus Definition 1.14 haben für $b \to 0$ und beliebiges, aber festes ξ sowie $\eta = 1 - \xi$ das folgende Verhalten.*
(a) Im Fall eines nichtkompakten Torus $T = F^\times \backslash (F^\times \oplus F^\times)$:

$$W(b\eta, b\xi) = \begin{cases} |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}(c_1\chi_1(b\eta) + c_2\chi_1^{-1}(b\eta))(c_3 v(b\xi) + c_4), & \textit{falls } \chi_1^2 \neq 1 \\ |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\chi_1(b\eta)(c_1 v(b\eta) + c_2)(c_3 v(b\xi) + c_4), & \textit{falls } \chi_1^2 = 1 \end{cases}.$$

(b) Im Fall eines kompakten Torus $T = F^\times \backslash K^\times$, wobei K/F eine quadratische Körpererweiterung ist: Falls χ nicht über die Norm faktorisiert, so ist

$$W(b\eta, b\xi) = 0.$$

Existiert ein Charakter χ_1 von $F^\times$ so, daß $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$, so gilt

$$W(b\eta, b\xi) = |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\chi_1(b\eta)\big(c_1 + c_2\omega(b\xi)\big)\big(c_3 \mathbf{1}_{\wp^m \cap (1-x)\,\mathrm{N}}(b) + c_4 \mathbf{1}_{\wp^m \cap (1-x)z\,\mathrm{N}}(b)\big),$$

wobei $z \in F^\times$ keine Norm ist und c_i, $i = 1, \ldots, 4$, Konstanten.

Beweis: Für $b \to 0$ gehen die beiden Argumente $b\xi$ und $b\eta$ gegen 0, und aus den entsprechenden Halmen der Kirillovmodelle (siehe Abschnitt 3) liest man die Behauptung direkt ab.

Es sei daran erinnert, daß im Falle eines nichtkompakten, also zerfallenden

Torus die Eigenschaft des Charakters $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$ über die Norm zu faktorisieren äquivalent dazu ist, daß $\chi_1^2 = 1$ gilt (Lemma 1.9).

Die in Kapitel 4 und 5 bislang untersuchte Translation der Local Linking Numbers stellt in dem Fall, daß der Charakter χ des Torus T nicht über die Norm faktorisiert, einen guten Operator für das Matching dar: Sowohl im kompakten wie auch im nichtkompakten Fall unterliegen die translatierten Linking Numbers der Asymptotik der Whittakerprodukte für $b \to 0$. Ist der Torus kompakt, dann ist

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_x = 0$$

für b nahe null (siehe Satz 4.2). Ist T nichtkompakt, so ist

$$< \phi, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_x$$

– abgesehen von Faktoren der Form $\chi_1^{\pm 1}(b)|b|$ – ein Polynom vom Grad eins in $v(b)$ (siehe Vermutung 5.4).
Wenn also $\chi \neq \chi_1 \circ \mathrm{N}$, dann wird dadurch sogar die gesamte charakteristische Asymptotik der Whittakerprodukte widergespiegelt (vergleiche Satz 6.1).
Faktorisiert jedoch χ über die Norm, so werden wesentliche Teile der Asymptotik nicht durch die Translate der Local Linking Numbers verwirklicht: Im kompakten Fall haben diese Translate immer kompakten Träger, die Whittakerprodukte nicht. Im nichtkompakten Fall haben die Linking Numbers immer höchstens Grad eins, die Whittakerprodukte aber Grad zwei in der Bewertung von b. Dabei haben gerade die Produkte der Whittakerneuformen, die bei Zhang durch Local Linking Numbers ausgedrückt werden, diese quadratische Asymptoktik (Zhang [Zh1], Lemmata 4.2.3 und 4.3.1).
Im Fall $\chi = \chi_1 \circ \mathrm{N}$ ist die Translation also noch kein wünschenswerter Operator, um die gesamte Asyptotik sichtbar zu machen. Hier soll ein neuer Operator $\mathbb{T}_b$ eingeführt werden, der diese Asymptotiken besser verwirklicht und gleichzeitig die guten Eigenschaften der Translation im Fall, daß χ nicht über die Norm faktorisiert, erhält. Hierzu muß man sich auf den folgenden „unverzweigten“ Fall beschränken:

Voraussetzung 6.2. *Es sei D eine zerfallende Algebra, also G isomorph zur* $\mathrm{PGL}_2(F)$. *Es sei K/F eine unverzweigte Erweiterung, zerfallen oder nicht, und der Charakter χ sei unverzweigt.*

Diese Voraussetzung „völliger Unverzweigtheit“ wird von fast allen Lokalisierungen einer Divisionsquaternionenalgebra über einem Zahlkörper erfüllt.

Der Operator $\mathbb{T}_b$ wird zunächst für den nichtkompakten und für den kompakten Fall separat konstruiert, aber Lemma 6.13 zeigt, daß es sich dabei um zwei Ausprägungen desselben Operators handelt.

6.1 Konstruktion für den nichtkompakten Fall

Im folgenden wird ein Matchingoperator in den Fällen angegeben, in denen der Torus T nichtkompakt ist, das heißt wenn K/F zerfällt. Nach Voraussetzung 6.2 wird angenommen, daß der Charakter χ unverzweigt ist. Dies ist an fast allen Stellen erfüllt. Dann sei $M > 0$ die Ordnung von χ. Es gilt also $\chi_1(\pi)^M = 1$, und M ist minimal mit dieser Eigenschaft.
Die Translate der Local Linking Numbers als Funktionen in $\beta \in F^\times$ (statt b) aus Vermutung 5.4 bestehen aus zwei Summanden, einem mit Vorfaktor $\chi_1(\beta)$ und einem mit Vorfaktor $\chi_1^{-1}(\beta)$:

$$< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_x = < \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_x^+ + < \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi >_x^-,$$

wobei

$$< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^+ := \chi_1(\beta) \cdot \tag{6.1.1}$$
$$\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(\beta)|\beta|(c_{+,1}v(\beta) + c_{+,2}) + C_+(\beta) + \mathbf{1}_{\wp^n}(\beta^{-1})|\beta|^{-1}(d_{+,1}v(\beta) + d_{+,2}) \Big)$$

und

$$< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^- := \chi_1^{-1}(\beta) \cdot \tag{6.1.2}$$
$$\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(\beta)|\beta|(c_{-,1}v(\beta) + c_{-,2}) + C_-(\beta) + \mathbf{1}_{\wp^n}(\beta^{-1})|\beta|^{-1}(d_{-,1}v(\beta) + d_{-,2}) \Big).$$

Der Operator $\mathbb{T}_b$, $v(b) \geq 0$, setzt sich zusammen aus zwei Operatoren, die jeweils mit einem dieser beiden Summanden arbeiten:

$$\mathbb{T}_b = \frac{1}{2}\big(\mathbb{T}_b^+ + \mathbb{T}_b^-\big). \tag{6.1.3}$$

Dabei werden die Teiloperatoren $\mathbb{T}_b^\pm$ wie folgt definiert: Für $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ setze

$$\mathbb{T}_b^+ < \phi, \psi >_x := \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1^{-1}(\pi)^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^+$$

und

$$\mathbb{T}_b^- < \phi, \psi >_x := \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1(\pi)^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^- .$$

Ist χ quadratisch, so fallen $\mathbb{T}_b^+$ und $\mathbb{T}_b^-$ zusammen. Daher der Faktor $\frac{1}{2}$ in der Definition (6.1.3). Der Operator $\mathbb{T}_b$ besteht im wesentlichen aus der Summe über Translationen mit Elementen β der Bewertung $v(\beta) = 0, \ldots, v(b)$. Die Gewichtung mit $|\beta|^{-1}$ stellt eine Normalisierung dar. Der Vorfaktor $\chi_1(\pi)^{\pm i}$ sorgt dafür (siehe den Beweis von Satz 6.3), daß das Ergebnis unabhängig von der Restklasse von $v(b)$ modulo M ist. Denn man beachte, daß man $\mathbb{T}_b^\pm$ auch umsummieren kann zu

$$\mathbb{T}_b^\pm < \phi, \psi >_x := \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{v(b)-k}{M} \rfloor} \frac{\chi_1^\mp(\pi)^k}{|\pi^{v(b)-Mj-k}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-Mj-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^\pm .$$

Satz 6.3. *Der Charakter χ sei unverzweigt und es sei M die Ordnung von χ. Weiter sei $x \in F^\times$ beliebig, aber fest. Dann gibt es zu $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ eine natürliche Zahl $n(\phi, \psi)$ so, daß für alle $b \in F^\times$ mit $v(b) \geq n(\phi, \psi)$ gilt*

$$\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x = \chi_1(b)\big(a_1 v(b) + a_2\big) + \chi_1^{-1}(b)\big(a_3 v(b) + a_4\big),$$

falls $\chi_1^2 \neq 1$. Im Fall $\chi_1^2 = 1$ erhält man

$$\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x = \chi_1(b)\big(a_0 v(b)^2 + a_1 v(b) + a_2\big).$$

Dabei sind $a_0, \ldots, a_4$ durch ϕ und ψ bestimmte Konstanten.

Bemerkung 6.4. *Es gibt einen $\mathbb{T}_b$ eng verwandten Operator, der auch Translationen um β mit $-v(b) \leq v(\beta) < 0$ einbezieht. Er leistet genau dasselbe wie $\mathbb{T}_b$, ist aber in seiner Symmetrie für Anwendungen (vergleiche Abschnitt 7.2) manchmal praktischer. Es sei*

$$\mathbb{S}_b = \frac{1}{4}\big(\mathbb{S}_b^+ + \mathbb{S}_b^-\big),$$

mit

$$\mathbb{S}_b^+ < \phi, \psi >_x := \sum_{s=0,1} \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1^{-1}(\pi)^{(-1)^s i}}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s (v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^+$$

und

$$\mathbb{S}_b^- < \phi, \psi >_x := \sum_{s=0,1} \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1(\pi)^{(-1)^s i}}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s (v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^- .$$

Der Summand zu $s = 0$ ist der Operator $\frac{1}{2}\mathbb{T}_b$. Es gilt mit durch ϕ und ψ bestimmt Konstanten $a_0, \ldots, a_4$

$$\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x = \chi_1(b)\big(a_1 v(b) + a_2\big) + \chi_1^{-1}(b)\big(a_3 v(b) + a_4\big),$$

falls $\chi_1^2 \neq 1$, und

$$\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x = \chi_1(b)\big(a_0 v(b)^2 + a_1 v(b) + a_2\big),$$

falls $\chi_1^2 = 1$.

Beweis von Satz 6.3: Ich weise diese Asymptotik für $\mathbb{T}_b^-$ nach. Es sei $n(\phi, \psi) := n$ die Schranke aus der Asymptotik der translatierten Local Linking Number aus (6.1.2). Es sei $v(b) \geq n$. Man unterscheidet die Summanden in $\mathbb{T}_b^- < \phi, \psi >_x$ danach, ob der Exponent $v(b) - i$ kleiner ist als n oder nicht. Ist $v(b) - i < n$, so ist

$$< \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^- = \chi_1^{-1}(\pi^{v(b)-i}) C_-(\pi^{v(b)-i}).$$

Dabei ist C_- eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger. Setzt man

$$\tilde{C}_-(\beta) := \frac{\chi_1^{-2}(\beta)}{|\beta|} C_-(\beta),$$

so beschreibt $\tilde{C}_-$ wiederum eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger. Nun kann man den Teil des Operators $\mathbb{T}_b^-$, in dem der Exponent $v(b) - i$ jedes Summanden kleiner ist als n, vereinfachen:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=v(b)-n+1}^{v(b)} \frac{\chi_1(\pi)^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^- \\ &= \sum_{i=v(b)-n+1}^{v(b)} \chi_1(b) \tilde{C}_-(\pi^{v(b)-i}) = \chi_1(b) \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{C}_-(\pi^l). \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Diese letzte Summe ist unabhängig von b und somit gibt dieser Teil des Operators $\mathbb{T}_b^-$ einen Beitrag der Form $\chi_1(b) \cdot \text{const}$. Hierin liegt der Grund, weshalb in der Definition des Operators $\mathbb{T}_b^-$ mit $\pi^{v(b)-i}$ und nicht mit $b\pi^{-i}$ translatiert wird. Denn da man nicht weiß, ob $C_-(\beta)$ sogar konstant auf den Niveaus $v(\beta)$ ist, kann nur so sicher gestellt werden, daß die Summe (6.1.4) abgesehen vom Faktor $\chi_1(b)$ unabhängig von b ist.
Es bleibt, den Teil

$$\sum_{i=0}^{v(b)-n} \frac{\chi_1(\pi)^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^- \tag{6.1.5}$$

von $\mathbb{T}_b^- < \phi, \psi >_x$ zu untersuchen, in dem alle Exponenten $v(b)-i$ größer oder gleich n sind. Mit (6.1.2) kann man hier schreiben

$$< \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^- = \chi_1^{-1}(\pi^{v(b)-i})|\pi^{v(b)-i}|\big(c_{-,1}(v(b)-i)+c_{-,2}\big).$$

Damit vereinfacht sich (6.1.5) zu

$$\chi_1^{-1}(b) \sum_{i=0}^{v(b)-n} \chi_1(\pi)^{2i}\big(c_{-,1}(v(b)-i)+c_{-,2}\big) \tag{6.1.6}$$

Um (6.1.6) zu bestimmen, muß man unterscheiden, ob χ_1 quadratisch ist oder nicht.
Es sei zunächst χ_1 quadratisch. Dann findet man für (6.1.6)

$$\begin{aligned} &\chi_1^{-1}(b) \sum_{i=0}^{v(b)-n} \chi_1(\pi)^{2i}\big(c_{-,1}(v(b)-i)+c_{-,2}\big) \\ &= \chi_1(b)(c_{-,1}v(b)+c_{-,2})(v(b)-n+1) \\ &\quad -\chi_1(b)c_{-,1}\frac{1}{2}(v(b)-n)(v(b)-n+1). \end{aligned}$$

Das ist genau die behauptete Asymptotik.

Es sei nun $\chi_1^2 \neq 1$. Die Ordnung M des Charakters χ_1 ist also größer als 2. Indem man die Schranke n gegebenenfalls vergrößert und die Funktion C_- angleicht, kann man annehmen, daß M ein Teiler von n ist, und somit $\chi_1(\pi)^n = 1$ erfüllt ist. Damit berechnet man (6.1.6):

$$\begin{aligned} &\chi_1^{-1}(b) \sum_{i=0}^{v(b)-n} \chi_1(\pi)^{2i}\big(c_{-,1}(v(b)-i)+c_{,2}\big) \\ &= (c_{-,1}v(b)+c_{-,2})\frac{\chi_1(b\pi)-\chi_1^{-1}(b\pi)}{\chi_1(\pi)-\chi_1^{-1}(\pi)} - c_{-,1}\chi_1^{-1}(b)\sum_{i=0}^{v(b)-n} i\chi_1(\pi)^{2i} \\ &= (c_{-,1}v(b)+c_{-,2})\frac{\chi_1(b\pi)-\chi_1^{-1}(b\pi)}{\chi_1(\pi)-\chi_1^{-1}(\pi)} - c_{-,1}\frac{\chi_1(b\pi)(v(b)-n+1)}{\chi_1(\pi)-\chi_1^{-1}(\pi)} \\ &\qquad +c_{-,1}\frac{\chi_1(b\pi^2)-1}{(\chi_1(\pi)-\chi_1^{-1}(\pi))^2}, \end{aligned}$$

denn für $x := \chi_1(\pi)^2$ und $N := v(b)-n$ gilt

$$\sum_{i=0}^{N} ix^i = \left(\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{N} x^{i+1}\right) - \sum_{i=0}^{N} x^i = x \cdot \frac{(N+1)x^N(x-1)-(x^{N+1}-1)}{(x-1)^2}.$$

Somit erfüllt auch der Fall $\chi_1^2 \neq 1$ die Behauptung.

Die Aussage für $\mathbb{T}_b^+$ erhält man aus der für $\mathbb{T}_b^-$, indem man dort χ_1^{-1} durch χ_1, C_- durch C_+ und $c_{-,i}$ durch $c_{+,i}$ ersetzt und Vorzeichen aufnimmt.

Beweis von Bemerkung 6.4: Es reicht wieder, die Behauptung für einen Teil, etwa $\mathbb{S}_b^-$, zu zeigen und dort für $s = 1$, denn der Summand mit $s = 0$ ist gerade der Operator $\mathbb{T}_b$. Für $s = 1$ bemerkt man, daß

$$\chi_1(\pi)^{(-1)^s i}\chi_1^{-1}(\pi^{(-1)^s(v(b)-i)}) = \chi_1(b)\chi_1(\pi)^{-2i}.$$

Nun schreibt man den Beweis (zu Satz 6.3) für $\mathbb{T}_b^-$ ab, wobei man χ_1 durch χ_1^{-1} und $c_{-,i}$ durch $d_{-,i}$ ersetzt.

Korollar 6.5. *$\mathbb{T}_b$ ist ein Matchingoperator. Das heißt: Abgesehen vom Faktor $|b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}$ haben die Funktionen $\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x$, $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\chi, G)$, für festes x dieselbe Asymptotik für $v(b) \to \infty$ wie die Whittakerprodukte. Dasselbe gilt für den Operator $\mathbb{S}_b$.*

Beweis: Vergleiche die Asymptotiken in Satz 6.3 beziehungsweise Bemerkung 6.4 mit denen aus Satz 6.1(a).

Bemerkung 6.6. *Es ist nicht anzunehmen, daß es sich in Korollar 6.5 um ein vollständiges Matching handelt vergleichbar dem in Satz 3.1. Die Vielfalt der zur Verfügung stehenden Local Linking Numbers läßt vermuten, daß für beliebige Konstanten $a_1, \ldots, a_4$ beziehungsweise $a_0, \ldots, a_2$ Funktionen ϕ und ψ gefunden werden können, für die $\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x$ die Gleichung aus Satz 6.3 mit Koeffizienten a_i erfüllt (beziehungsweise für die $\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x$ die Gleichung aus Bemerkung 6.4 mit Koeffizienten a_i erfüllt). Die Whittakerprodukte besitzen jedoch eine Faktorisierung (vergleiche Satz 6.1 (a)), die eine Beziehung zwischen den Koeffizienten voraussetzt. Demnach gilt vermutlich*

$$\{W(b\eta, b\xi)\} \subsetneq \{|b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x\}$$

beziehungsweise

$$\{W(b\eta, b\xi)\} \subsetneq \{|b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x\}.$$

Abschließend noch folgende Überlegung: Man kann sich die Frage stellen, ob man – ähnlich wie bei Orbitalintegralen – die translatierten Local Linking Numbers zerlegen kann in eine Summe bestehend aus einem „stabilen“ und einem „instabilen“ Summanden. Das größte Problem bei solchen Aussagen ist

im Fall der Local Linking Numbers, daß man zwei Funktionen, nämlich die innere Funktion ϕ und die äußere Funktion ψ, kontrollieren muß, im Gegensatz zu einer einzigen Funktion wie im Fall der Orbitalintegrale. Man kann hier trotzdem eine Art Aussage treffen, allerdings nur unter einer bestimmten Annahme, die Vermutung bleiben muß. Dazu benötigt man

Lemma 6.7. *Der Term höchster Potenz in $v(b)$ wird in $\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x$ durch die Terme höchster Potenz in $v(\beta)$ in den Summanden $< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x$ erzeugt. Insbesondere ist für Funktionen ϕ_0 derart, daß das innere Integral kompakten Träger hat, $\mathbb{T}_b < \phi_0, \psi >_x$ vom Typ $O(1)$, falls $\chi_1^2 \neq 1$ (beziehungsweise $O(v(b))$, falls $\chi_1^2 = 1$). Dasselbe gilt für $\mathbb{S}_b$.*

Beweis: Man schlage im Beweis von Satz 6.3 nach: Der Term $v(b)$ (bzw. $v(b)^2$) in $\mathbb{T}_b^- < \phi, \psi >_x$ trägt den Koeffizienten $c_{-,1}$, also den Koeffizienten von $v(\beta)$ in $< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^-$ (siehe (6.1.2)).
Da für Funktionen ϕ_0, deren inneres Intergal kompakten Träger hat, die Translation die Gestalt

$$\chi_1^{\pm 1}(b)\Big(a_+ \mathbf{1}_{\wp^n}(\beta)|\beta| + A_0(\beta) + a_- \mathbf{1}_{\wp^n}(\beta^{-1})|\beta|^{-1}\Big)$$

hat (vergleiche Satz 5.1), folgt die zweite Behauptung sofort. Die Aussage für $\mathbb{S}_b$ liest man wie im Beweis von Bemerkung 6.4 aus der für $\mathbb{T}_b$ ab.

Nimmt man somit an, daß der Vorrat der Funktionen ϕ_0 derart, daß das innere Integral kompakten Träger hat, „genügend reichhaltig“ ist, so ist jede translatierte Local Linking Number (bis auf eine multiplikative Konstante) die Summe einer speziellen, den Term höchster Potenz erzeugenden, und einer aus einer Funktion ϕ_0 entstehenden translatierten Local Linking Number.
Die spezielle translatierte Local Linking Number kann man dabei fest wählen, etwa als $< \phi, B.\phi >_x$, wobei $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_U$ und U die maximale kompakt offene und für χ fundamentale Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(F)$ ist (vergleiche Beispiel 5.2). Daß der Vorrat der Funktionen ϕ_0 „genügend reichhaltig“ sein soll, bedeutet, daß der Unterraum der translatierten Local Linking Numbers, der von solchen mit inneren Funktionen ϕ_0 erzeugt wird, der gesamte Unterraum von nicht maximaler Ordnung ist. Dies ist vermutlich der Fall, aber ein exakter Beweis erforderte genauere Aussagen über das Zusammenwirken der beiden Variablen x und b.

6.2 Konstruktion für den kompakten Fall

Hier wird ein Operator $\mathbb{T}_b$ für den Fall angegeben, daß der Torus $T = F^\times \backslash K^\times$ kompakt ist, also in dem Fall, in dem K/F eine Körpererweiterung ist. Wie in Voraussetzung 6.2 wird hier angenommen, daß sowohl diese Körpererweiterung als auch der Charakter χ unverzweigt ist. Der quadratische Charakter zur Körpererweiterung wird wie gehabt mit ω bezeichnet. Da χ unverzweigt ist und trivial auf $F^\times$, gilt sogar $\chi = 1$. Es seien ϕ und ψ aus $\mathcal{S}(\chi, G)$. Weiter sei π ein beliebiges festes Uniformisierendes von F und $l \in F^\times \backslash N$ keine Norm. Man definiert für $v(b) \geq 0$

$$\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x := \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\omega(b(1-x))^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x .$$

Satz 6.8. *Es seien ϕ und ψ Funktionen aus $\mathcal{S}(\chi, G)$. Es sei K/F eine unverzweigte Körpererweiterung und χ ein unverzweigter Charakter von T. Weiter sei $x \in \mathrm{N} := \mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$ beliebig, aber fest. Es sei $z \in F^\times \backslash \mathrm{N}$ beliebig. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n = n(\phi, \psi)$ und Konstanten $c_i = c_i(\phi, \psi)$, $i = 1, 2$, so, daß für alle $b \in F^\times$ mit $v(b) \geq n$ gilt*

$$\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x = c_1 \mathbf{1}_{\wp^n \cap (1-x)\,\mathrm{N}}(b) + c_2 \mathbf{1}_{\wp^n \cap (1-x)z\,\mathrm{N}}(b).$$

Bemerkung 6.9. *Wie im nichtkompakten Fall ist es für Anwendungen manchmal praktischer, in den Operator auch negative Bewertungen mit einzubeziehen. Deshalb definiert man*

$$\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x := \frac{1}{2} \sum_{s=0,1} \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\omega(b(1-x))^{i+s}}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s (v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x .$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.8 verhält sich der Operator $\mathbb{S}_b$ wie $\mathbb{T}_b$, das heißt für festes $x \in \mathrm{N}$ gibt es Konstanten c_i', $i = 1, 2$, derart, daß für alle $b \in F^\times$ mit $v(b) \geq n$ gilt

$$\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x = c_1' \mathbf{1}_{\wp^n \cap (1-x)\,\mathrm{N}}(b) + c_2' \mathbf{1}_{\wp^n \cap (1-x)z\,\mathrm{N}}(b).$$

Bemerkung 6.10. *Die Abhängigkeit der Operatoren $\mathbb{T}_b$ und $\mathbb{S}_b$ von $(1-x)$ scheint zunächst etwas verwunderlich, da gleichzeitig x ja festgehalten wird. Allerdings tritt dieser Term in allen folgenden Anwendungen auf natürliche Weise auf. $\mathbb{T}_b$ und $\mathbb{S}_b$ sind nur zwei von vielen möglichen Operatoren. Welcher Operator überhaupt optimal wäre ließe sich, wenn eine solche Aussage denn sinnvoll wäre, erst dann angeben, wenn das Zusammenspiel der beiden Variablen x und b in den translatierten Local Linking Numbers geklärt wäre. Für das Beispiel (siehe Kapitel 7.2), auf das wir einen Operator anwenden wollen, ist $\mathbb{S}_b$ aus Beispiel 6.9 eine richtige Wahl.*

Beweis von Satz 6.8: Nach Satz 4.2 sind die translatierten Local Linking Numbers hier lokal konstante Funktionen mit kompaktem Träger in $F^\times$. Es existieren somit endlich viele Stützstellen $a_i \in F^\times$, Koeffizienten $d_{a_i} \in \mathbb{C}$ und ein $m > 0$ mit denen man schreiben kann

$$< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x = \sum_i d_{a_i} |a_i|^{\operatorname{sign} v(a_i)} \mathbf{1}_{a_i(1+\wp^m)}(\beta). \tag{6.2.1}$$

Man kann annehmen, daß in dieser Summe alle π^j mit $-\max\{|v(a_i)|\} \leq j \leq \max\{|v(a_i)|\}$ als Stützstellen auftreten, indem man gegebenenfalls $d_{\pi^j} = 0$ setzt. Es sei nun $n := \max\{|v(a_i)|\} + 1$. Man rechnet für $v(b) \geq n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x &= \sum_{i=0}^{v(b)} \omega(b(1-x))^i \sum_j d_{a_j} \mathbf{1}_{a_j(1+\wp^m)}(\pi^{v(b)-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{v(b)} \omega(b(1-x))^i \sum_{l=-n+1}^{n-1} d_{\pi^l} \mathbf{1}_{\pi^l(1+\wp^m)}(\pi^{v(b)-i}) \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} d_{\pi^l} \omega(b(1-x))^{v(b)+l} \\
&= \mathbf{1}_{\mathrm{N}}(b(1-x)) \sum_{l=0}^{n-1} d_{\pi^l} \\
&\quad -\mathbf{1}_{z\,\mathrm{N}}(b(1-x))\omega(1-x) \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ gerade}}}^{n-1} d_{\pi^l} - \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ ungerade}}}^{n-1} d_{\pi^l} \right),
\end{aligned}$$

denn für $b(1-x) \in z\,\mathrm{N}$ ist $\omega(b(1-x))^{v(b)} = (-1)^{v(b)} = \omega(b) = -\omega(1-x)$. Setzt man nun

$$c_1 := \sum_{l=0}^{n-1} d_{\pi^l}$$

und

$$c_2 := -\omega(1-x) \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ gerade}}}^{n-1} d_{\pi^l} - \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ ungerade}}}^{n-1} d_{\pi^l} \right),$$

so folgt die Behauptung.

Beweis von Bemerkung 6.9: Man geht ganz analog wie im Beweis von Satz 6.8 vor und findet die Konstanten

$$c_1' = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} (d_{\pi^l} + d_{\pi^{-l}})$$

und

$$c_2' = \frac{1}{2}\omega(1-x)\left(\sum_{\substack{l=0\\ l \text{ gerade}}}^{n-1}(d_{\pi^{-l}} - d_{\pi^l}) - \sum_{\substack{l=0\\ l \text{ ungerade}}}^{n-1}(d_{\pi^{-l}} - d_{\pi^l})\right).$$

Lemma 6.11. *Es sei $x \in \mathrm{N} = \mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$ beliebig, aber fest, und es seien $\xi = \frac{x}{x-1}$ und $\eta = \frac{1}{1-x}$. Dann exisitieren $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ so, daß die Translate der Whittakerprodukte für $b \in F^\times$ mit $v(b) \geq n$ im Fall einer unverzweigten Körpererweiterung K/F und $\chi = 1$ die vereinfachte Form*

$$W(b\eta, b\xi) = |b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}\big(a_1\mathbf{1}_{\wp^n\cap(1-x)\,\mathrm{N}}(b) + a_2\mathbf{1}_{\wp^n\cap z(1-x)\,\mathrm{N}}(b)\big)$$

haben.

Beweis: Setzte in Satz 6.1 (b) $a_1 := (c_1 + c_2\omega(\xi))c_3$ und $a_2 := (c_1 - c_2\omega(\xi))c_4$.

Aus Satz 6.8 und Lemma 6.11 folgt unmittelbar

Korollar 6.12. *Unter den Voraussetzungen aus Satz 6.8 sind $\mathbb{T}_b$ und $\mathbb{S}_b$ Matchingoperatoren. Das heißt, daß die Asymptotiken für $v(b) \to \infty$ von $\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x$ (beziehungsweise $\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x$) und $W(b\eta, b\xi)$ bis auf einen Faktor $|b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}$ dieselben sind.*

6.3 Zusammenfassung

Abschließend soll noch gezeigt werden, daß die Operatoren $\mathbb{T}_b$, wie sie im kompakten Fall und im nichtkompakten Fall einzeln definiert werden, als verschiedene Ausprägungen eines einzigen Operators angesehen werden können. Dazu definiert man für $v(b) \geq 0$

$$\mathbb{T}_b^{\pm} < \phi, \psi >_x := \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1^{\mp 1}(\pi)^i\omega(b(1-x))^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{v(b)-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\psi >_x^{\pm}$$

und setzt

$$\mathbb{T}_b := \frac{1}{2}\Big(\mathbb{T}_b^+ + \mathbb{T}_b^-\Big).$$

Die Terme

$$< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\psi >_x^{\pm}$$

seien im nichtkompakten Fall wie in (6.1.1) und (6.1.2) definiert. Falls T kompakt ist, dann fallen sie zusammen zu

$$< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x .$$

Weiter definiert man

$$\mathbb{S}_b^{\pm} < \phi, \psi >_x \quad := \quad \sum_{s=0,1} \sum_{i=0}^{v(b)} \Bigg(\frac{\chi_1^{\mp 1}(\pi)^{(-1)^s i} \omega(b(1-x))^{i+s}}{|\pi^{v(b)-i}|} \cdot < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s (v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x^{\pm} \Bigg)$$

und setzt

$$\mathbb{S}_b := \frac{1}{4} \Big(\mathbb{S}_b^+ + \mathbb{S}_b^- \Big).$$

Lemma 6.13. *Der Operator $\mathbb{T}_b$ spezialisiert sich im kompakten Fall zu $\mathbb{T}_b$ aus Satz 6.8 und im nichtkompakten Fall zu $\mathbb{T}_b$ aus Satz 6.3. Ebenso spezialisiert sich $\mathbb{S}_b$ im kompakten Fall zu $\mathbb{S}_b$ aus Bemerkung 6.9 und im nichtkompakten Fall zu $\mathbb{S}_b$ aus Bemerkung 6.4.*

Beweis: Im kompakten Fall ist K/F nach Voraussetzung unverzweigt und somit $\chi = 1$. Im nichtkompakten Fall zerfällt die Erweiterung K/F, also ist $\omega = 1$.

Setzt man Lemma 6.13 mit Korollar 6.5 und Korollar 6.12 zusammen, so erhält man

Satz 6.14. *Es sei die Voraussetzung 6.2 erfüllt. Dann haben für festes x die Local Linking Numbers $\mathbb{T}_b < \phi, \psi >_x$ (beziehungsweise $\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x$) bis auf den Faktor $|b||\xi\eta|^{\frac{1}{2}}$ dieselbe Asymptotik wie die Whittakerprodukte aus Satz 6.1.*

Es gibt also Operatoren, die auf der geometrischen Seite die Aufgabe des analytischen Operators übernehmen. So definiert der Raum der Local Linking Numbers, auf die der Operator $\mathbb{T}_b$ (oder $\mathbb{S}_b$) wirkt, einen Teilraum in den Whittakerprodukten, auf die der Heckeoperator wirkt. Dieser Teilraum realisiert die Asymptotik für $v(b) \to \infty$ total. Obwohl nicht abschließend geklärt werden kann, ob dies ein echter Teilraum ist, oder er die Whittakerprodukte voll ausschöpft, kann man, da die Asymptotik wesentlich ist, auch hier von einem Matching der involvierten Räume reden.

Kapitel 7

Vergleich mit dem Zhangschen Operator

Als Beispiel für die Wirksamkeit der in dieser Arbeit vorgestellten Betrachtungsweise sollen hier die wesentlichen Teile der Zhangschen lokalen Gross-Zagier-Formel mit Hilfe des in Kapitel 6 definierten Operators neu formuliert werden.
Da hierfür quantitative Resultate aus [Zh1] zitiert werden müssen, die dort an einigen Stellen nicht exakt sind, sollen diese Resultate hier noch einmal bewiesen werden. Dabei folge ich in den Beweisen zu den Local Linking Numbers nicht [Zh1], sondern einer Überlegung, die ich Uwe Weselmann verdanke. Gleichzeitig können die Aussagen so auch ohne Übersichtlichkeits- und Übersetzungsprobleme unter Benutzung meiner Bezeichnungen referiert und mit meinen Ergebnissen verglichen werden.

Die lokale Gross-Zagier-Formel in [Zh1] setzt die Produkte lokaler Whittakerneuformen in Beziehung zur Local Linking Number resultierend aus einer speziellen Funktion ϕ. Diese Funktion ist in der Schreibweise von Definition 1.7 gegeben durch

$$\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{R^\times},$$

wobei $R^\times$ die Einheitengruppe der Ordnung

$$R = 1 + \pi_K^{c(\chi)} \mathbf{o}_K + \epsilon \pi_K^l \mathbf{o}_K$$

in der Quaternionenalgebra D ist. Darin ist $l \geq c(\chi)$ eine ganze Zahl, die bestimmt wird durch

$$l = \begin{cases} \mathrm{kgV}(v(N), c(\chi)^2), & \text{falls } K/F \text{ unverzweigt} \\ 0, & \text{falls } K/F \text{ verzweigt} \end{cases}.$$

Fast immer gilt also $l = 0$. In diesem Fall ist $R^\times$ die maximale kompakt offene Untergruppe von $D^\times$. Per Definition ist $R^\times$ fundamental für χ, und somit ϕ wohldefiniert.
Die spezielle Local Linking Number ist nun gegeben durch

$$< \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x .$$

Der noch zu definierende Operator $\mathbf{T}_b$ (vergleiche [Zh1], Gleichung 4.1.21) wird dort „Heckeoperator“ genannt. Seine Definition ist explizit abhängig von der Funktion ϕ. Er ist nur genau an den Stellen nicht die Identität, für die die folgende Voraussetzung erfüllt ist.

Voraussetzung 7.1. *Es sei D eine zerfallende Algebra, also G isomorph zur* $\mathrm{PGL}_2(F)$. *Es sei K/F eine unverzweigte Erweiterung, zerfallen oder nicht, und der Charakter χ sei unverzweigt.*

Dies ist dieselbe Voraussetzung wie 6.2. Insbesondere ist an diesen Stellen $l = 0$, also $R^\times = \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)$ die maximal kompakte Gruppe. An einer Stelle, die diese Voraussetzung 7.1 erfüllt, wird $\mathbf{T}_b$ dann wie folgt definiert: Es sei

$$H(b) := \{g \in M_2(\mathbf{o}_F) \mid v(\det g) = v(b)\}.$$

Dann setzt man ([Zh1] Gleichung (4.1.22))

$$\mathbf{T}_b\phi(g) := \int_{H(b)} \phi(hg)\ dh. \tag{7.0.1}$$

Dies ist nur deshalb wohldefiniert, weil ϕ im wesentlichen die charakteristische Funktion der maximal kompakten Gruppe $R^\times = \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)$ ist. Die Menge $H(b)$ kann man als disjunkte Vereinigung von Nebenklassen schreiben

$$H(b) = \bigcup \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F),$$

die über jeweils ein Vertreterpaar $(y_1, y_3) \in \mathbf{o}_F \times \mathbf{o}_F$ mit $v(y_1y_3) = v(b)$ und $y_2 \in \wp^{-v(y_1)}/\mathbf{o}_F$ läuft. Hier wird die Verwandtschaft mit dem analytischen Heckeoperator (vergleiche Lemma 1.16) augenscheinlich. $\mathbf{T}_b$ gleicht der Summation über die Translationen um die Nebenklassenvertreter. Diese und naheliegende Abwandlungen haben aber im allgemeinen nicht die gewünschten Eigenschaften. Zum Beispiel wäre der folgende ein naheliegender Ansatz für einen Operator, der in gewisser Weise das Zhangsche $\mathbf{T}_b$ imitiert und der Translation ρ engverwandt ist:

$$\tilde{\mathbf{T}}_b := \sum_{\text{ein } \alpha \in \pi^j \mathbf{o}_F^\times, j=0}^{v(b)} \frac{1}{|b\alpha^{-2}|^{\mathrm{sign}(v(b\alpha^{-2}))}} \rho \begin{pmatrix} b\alpha^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt angewandt auf eine Local Linking Number

$$\tilde{\mathbf{T}}_b < \phi, \psi >_x = \sum_{\text{ein } \alpha \in \pi^j \mathbf{o}_F^\times, j=0}^{v(b)} \frac{1}{|b\alpha^{-2}|^{\operatorname{sign}(v(b\alpha^{-2}))}} < \phi, \begin{pmatrix} b\alpha^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \psi >_x .$$

Hierbei ist es egal, welches $\alpha \in \pi^j \mathbf{o}_F^\times$ man wählt, da χ nach Voraussetzung unverzweigt ist.
Dieser Operator erzeugt zwar Terme in $\chi^{\pm 1}(b) v(b)^2$. Allerdings ist er, wie man aus der Definition ablesen kann, abhängig von der Nebenklasse von $v(b)$ modulo 2. Das könnte man vermeiden, wenn man auch die Translationen von Elementen der Bewertung $(v(b)+1) \bmod 2$ hinzunimmt. Die Operatoren $\mathbb{T}_b$ und $\mathbb{S}_b$ aus Abschnitt 6.1 sind eine Weiterführung dieses Ansatzes, die auch weitere Probleme – wie zum Beispiel die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Restklasse von $v(b)$ bezüglich der Ordnung des Charakters χ – aus dem Weg räumt.

Alle Anstrengungen der Kapitel 4 bis 6 und 8 werden unternommen, um den „Heckeoperator“ $\mathbf{T}_b$ durch ein allgemein gültiges, das heißt für alle Funktionen und nicht nur für $\chi \cdot \mathbf{1}_{R^\times}$ definiertes, Pendant zu ersetzen. Daher sollte ein solches Pendant – in Kapitel 6 eben durch $\mathbb{T}_b$ oder $\mathbb{S}_b$ gegeben – im Speziellen wieder eine lokale Gross-Zagier-Formel erfüllen, zumindest in den wesentlichen Termen. Dies zu zeigen ist Gegenstand dieses Kapitels.

7.1 Lokale Gross-Zagier-Formel

7.1.1 Zhangs Local Linking Numbers

Die Voraussetzung 7.1 sei erfüllt, das heißt es sei D eine zerfallende Algebra, also G isomorph zur $\mathrm{PGL}_2(F)$, die Erweiterung K/F sowie der Charakter χ seien unverzweigt. Unter dieser Voraussetzung ist bei Zhang $\phi := \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$.
In diesem Abschnitt soll für dieses ϕ die Local Linking Number

$$< \mathbf{T}_b \phi, \phi >_x$$

berechnet werden. Man bemerkt zunächst, daß für $y \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)$ nach Definition von $\mathbf{T}_b$ in Gleichung (7.0.1) gilt

$$\mathbf{T}_b \phi(gy) = \int_{H(b)} \phi(gyx)\, dx = \int_{H(b)} \phi(gx) = \mathbf{T}_b \phi(g).$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} < \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x &= \int_{T\backslash G}\int_T \mathbf{T}_b\phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ dt\bar{\phi}(y)\ dy \\ &= \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))\int_T \mathbf{T}_b\phi(t^{-1}\gamma(x)t)\ dt. \end{aligned}$$

Die Funktion ϕ selbst läßt sich hier zerlegen in eine Summe von Funktionen

$$\phi = \sum_\tau \chi(\tau)\mathbf{1}_{\tau\,\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}, \tag{7.1.1}$$

wobei τ die Nebenklassen von $T = T(F)$ nach $T(\mathbf{o}_F)$ durchläuft. Für einen Summanden davon findet man

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_b\mathbf{1}_{\tau\,\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}(x) &= \int \mathbf{1}_{\tau\,\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}(y)\mathbf{1}_{H(b)}(x^{-1}y)\ dy \\ &= \int \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}(y)\mathbf{1}_{H(b)}(x^{-1}\tau y)\ dy \\ &= \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))\mathbf{1}_{\tau b^{-1}H(b)}(x), \end{aligned}$$

denn es gilt

$$b^{-1}H(b) = \{h \in \mathrm{GL}_2(F) | h^{-1} \in H(b)\}.$$

Somit erhält man die Local Linking Number hier zu

$$< \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x = \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2 \sum_\tau \chi(\tau)\int_T \mathbf{1}_{\tau b^{-1}H(b)}(t^{-1}\gamma(x)t)\ dt. \tag{7.1.2}$$

Diese Formel wertet man nun getrennt aus für die Fälle eines kompakten beziehungsweise nichtkompakten Torus.

Lemma 7.2. *([Zh1] Lemma 4.2.3) Es sei K/F zerfallen, der Torus $T = F^\times\backslash K^\times$ somit nichtkompakt. Es sei $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$ ein unverzweigter Charakter von T, und $\phi \in \mathcal{S}(\chi, G)$ wie in (7.1.1). Dann gilt im Fall $\chi_1^2 \neq 1$:*

$$\begin{aligned} < \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x &= \frac{\chi_1(b(1-x)^{-1}\pi) - \chi_1^{-1}(b(1-x)^{-1}\pi)}{\chi_1(\pi) - \chi_1^{-1}(\pi)}\,\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \\ &\quad \cdot\mathbf{1}_{F^\times}(x)\mathbf{1}_{\frac{1-x}{x}\mathbf{o}_F\cap(1-x)\mathbf{o}_F}(b)(v(b) + v(\frac{x}{1-x}) + 1). \end{aligned}$$

Ist χ_1 quadratisch, so gilt

$$\begin{aligned} < \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x = \chi_1(b)\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\mathbf{1}_{F^\times}(x)\cdot \\ \mathbf{1}_{\frac{1-x}{x}\mathbf{o}_F\cap(1-x)\mathbf{o}_F}(b)(v(b) - v(1-x) + 1)(v(b) + v(\frac{x}{1-x}) + 1). \end{aligned}$$

Bemerkung 7.3. *Lemma 7.2 unterscheidet sich von [Zh1] Lemma 4.2.3 nur dadurch, daß dort nicht erwähnt wurde, daß χ quadratisch sein kann. In diesem Fall müssen die geometrischen Summen dort symbolisch gelesen werden.*
Man beachte auch die unterschiedlich Notation. Zhang setzt $b = \pi^n$. Außerdem formuliert er die Aussage mit hilfe von $\xi = \frac{x}{x-1}$ und $\eta = 1 - \xi = \frac{1}{1-x}$.

Beweis von Lemma 7.2: Man berechnet zunächst das Integral

$$\int_T \mathbf{1}_{\tau b^{-1} H(b)}(t^{-1}\gamma(x)t)\ dt$$

unter Benutzung des Isomorphismus $G \to \mathrm{PGL}_2(F)$ aus Definition 1.3. Demnach ist

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

man kann setzen $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in K^\times/\mathbf{o}_K^\times$, $t = (a, 1) \in T$ und die Bedingungen dafür, daß der Integrand $\mathbf{1}_{\tau b^{-1} H(b)}(t^{-1}\gamma(x)t)$ nicht verschwindet, lauten

$$(-\tau_1^{-1} b, \tau_2^{-1} b) \in \mathbf{o}_K,$$

$$(-\tau_1^{-1} a^{-1} bx, \tau_2^{-1} ab) \in \mathbf{o}_K$$

und

$$\det(t^{-1}\gamma(x)t) = x - 1 \in \mathrm{N}(\tau) b^{-1} \mathbf{o}_F^\times.$$

Oder anders gesagt: Nur wenn $v(\tau_2) = -v(\tau_1) + v(b) + v(1-x)$ im Bereich $v(1-x) \leq v(\tau_2) \leq v(b)$ liegt, ist das Integral von null verschieden. Der Integrationsbereich ist gegeben durch $-v(b) + v(\tau_2) \leq v(a) \leq v(\tau_2) + v(x) - v(1-x)$. Das Integral hat dann den Wert

$$\int_T \mathbf{1}_{\tau b^{-1} H(b)}(t^{-1}\gamma(x)t)\ dt = \mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\big(v(b)+v(x)-v(1-x)+1\big)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F \cap \wp^{v(1-x)-v(x)}}(b).$$

Der Faktor $\chi(\tau)$ hat hier den Wert $\chi(\tau) = \chi_1(b(1-x))\chi_1^{-2}(\tau_2)$, denn χ ist unverzweigt. Nun summiert man Gleichung (7.1.2) folgend auf: Wenn $\chi_1^2 = 1$, ergibt sich die Local Linking Number

$$\begin{aligned} < \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x &= \chi_1(b)\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \cdot \\ &\Bigg(\mathbf{1}_{F^\times \setminus (1+\wp)}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b)(v(b) - v(1-x) + 1)(v(b) + v(x) - v(1-x) + 1) \\ &\quad + \mathbf{1}_{1+\wp}(x)\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)(v(b) - v(1-x) + 1)^2\Bigg), \end{aligned}$$

was genau der Behauptung entspricht. Und im Fall $\chi_1^2 \neq 1$:

$$\begin{aligned}
< \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x &= \chi_1(b)\chi_1(1-x)\,\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \\
&\quad \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F\cap\wp^{v(1-x)-v(x)}}(b)(v(b)+v(x)-v(1-x)+1)\sum_{j=v(1-x)}^{v(b)} \chi_1^{-2}(\pi^j) \\
&= \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\frac{\chi_1(b(1-x)^{-1}\pi)-\chi_1^{-1}(b(1-x)^{-1}\pi)}{\chi_1(\pi)-\chi_1^{-1}(\pi)} \\
&\quad \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F\cap\wp^{v(1-x)-v(x)}}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)(v(b)+v(x)-v(1-x)+1).
\end{aligned}$$

Lemma 7.4. *([Zh1] Lemma 4.2.2) Es sei K/F eine unverzweigte Körpererweiterung und χ ein unverzweigter Charakter des kompakten Torus $T = F^\times\backslash K^\times$. Es sei also $\chi = 1$. Weiter sei D zerfallen, also $G \simeq \mathrm{PGL}_2(F)$. Es sei $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$. Dann gilt*

$$< \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x = \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}_T(T)\mathbf{1}_{\mathrm{N}}(x)\mathbf{1}_{\frac{1-x}{x}(\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N})}(b)\mathbf{1}_{(1-x)(\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N})}(b).$$

Beweis: Es sei $K = F(\sqrt{A})$. Ein spurfreies $\gamma(x)$ hat ohne Einschränkung die Form $\gamma(x) = \sqrt{A} + \epsilon(\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{A})$, wobei $\mathrm{N}(\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{A}) = x$. Die Bedingungen dafür, daß ein Integrand in (7.1.2) nicht verschwindet, lauten somit

$$\tau^{-1}b\sqrt{A} \in \mathbf{o}_K$$

$$\tau^{-1}b\bar{t}^{-1}t(\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{A}) \in \mathbf{o}_K$$

sowie

$$\det(t^{-1}\gamma(x)t) = A(x-1) \in b^{-1}\,\mathrm{N}(\tau)\mathbf{o}_F^\times.$$

Diese sind gleichbedeutend zu $|b| \leq \min\{\frac{|1-x|}{|x|}, |1-x|\}$ und $|\mathrm{N}(\tau)| = |b(1-x)|$. Es gibt nur eine einzige Nebenklasse τ in $T(F)/T(\mathbf{o}_F)$ für die das erfüllt ist, und das auch nur dann, wenn $b \in \mathrm{N}(1-x)$. Demnach ergibt (7.1.2)

$$\begin{aligned}
< \mathbf{T}_b\phi, \phi >_x &= \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}_T(T) \\
&\quad \cdot\Big(\mathbf{1}_{\mathrm{N}\backslash(1+\wp)}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N}}(b) + \mathbf{1}_{1+\wp}(x)\mathbf{1}_{(1-x)(\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N})}(b)\Big) \\
&= \mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F))^2\,\mathrm{vol}_T(T)\mathbf{1}_{\mathrm{N}}(x)\mathbf{1}_{\frac{1-x}{x}(\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N})}(b)\mathbf{1}_{(1-x)(\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N})}(b).
\end{aligned}$$

7.1.2 Neuformen

Es sei weiterhin Voraussetzung 7.1 erfüllt. Die in der lokalen Gross-Zagier-Formel auftretenden Whittakerprodukte sind die nichtkonstanten lokalen Fourierkoeffizienten des Kerns Ξ (vergleiche Kapitel 1.2). Sie sind das Produkt der Neuformen in der Kirillovdarstellung der Thetareihe und der Eisensteinreihe.

Letztere ist gegeben als Hauptreihendarstellung $\Pi(1,\omega)$. Die Thetareihe ist unter Voraussetzung 7.1 gegeben als $\Pi(\chi_1,\chi_1^{-1})$, wenn K/F zerfällt, und als $\Pi(1,\omega)$, wenn K/F eine Körpererweiterung ist. (Das sind jeweils die Spezialisierungen von $\Pi(\chi_1,\chi_1^{-1}\omega)$.)
Alle diese Darstellungen können interpretiert werden als die zentralen Stellen von Eisensteinreihen $\Pi(\mu_1|\cdot|^{s-\frac{1}{2}},\mu_2|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$ mit unverzweigten Charakteren μ_1,μ_2. Für solche Eisensteinreihen (vergleiche etwa [Bu] 3.7) ist die Neuform gegeben durch

$$f_{\text{neu}}(s,g)=f_\phi(s,g)=\mu_1(\det g)|\det g|^s\int_{F^\times}\phi\big((0,t)g\big)(\mu_1\mu_2^{-1})(t)|t|^{2s}\ d^\times t,$$

mit der Funktion $\phi\in\mathcal{S}(F^2)$ gegeben durch

$$\phi(x,y)=\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(y). \tag{7.1.3}$$

Es sei ψ ein nichttrivialer Charakter von F, von dem der Einfachheit halber angenommen werden soll, daß er Führer $\mathbf{o}_F$ hat. Die Whittakerfunktion W_{neu} von f_{neu} zu ψ erhält man als ersten Fourierkoeffizienten von f_ϕ

$$W_{\text{neu}}(s,g,\psi)=\int_F f_{\text{neu}}(s,\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}g)\bar{\psi}(x)\ dx.$$

Um die Neuformen im Kirillovmodell für alle benötigten Thetareihen und Eisensteinreihen auszurechnen, ist es praktisch, dies erst für die allgemeine Eisensteinreihe $\Pi(\mu_1|\cdot|^{s-\frac{1}{2}},\mu_2|\cdot|^{\frac{1}{2}-s})$ an der Stelle $s=\frac{1}{2}$ zu tun. Die Kirillovfunktion zu einer Whittakerfunktion ist gegeben durch Auswerten der letzteren an der Stelle $g=\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}$. Somit muß man berechnen:

$$W_{\text{neu}}(a):=W_{\text{neu}}(\frac{1}{2},\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix},\psi).$$

Dies ergibt mit ϕ aus Gleichung (7.1.3)

$$\begin{aligned}
W_{\text{neu}}(a) &= \int_F\int_{F^\times}\mu_1(a)|a|^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(at)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(xt)\mu_1\mu_2^{-1}(t)|t|\ d^\times t\ \bar{\psi}(x)\ dx\\
&= \mu_1(a)|a|^{\frac{1}{2}}\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)\int_{F^\times}\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(at)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(t^{-1})\mu_1\mu_2^{-1}(t)\ d^\times t\\
&= \mu_1(a)|a|^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(a)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)\operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\sum_{j=-v(a)}^{0}\mu_1\mu_2^{-1}(\pi^j)\\
&= |a|^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(a)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)\operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\begin{cases}\frac{\mu_1(a\pi)-\mu_2(a\pi)}{\mu_1(\pi)-\mu_2(\pi)}, & \text{falls } \mu_1\mu_2^{-1}\neq 1\\ \mu_2(a)(v(a)+1), & \text{falls } \mu_1\mu_2^{-1}=1\end{cases}.
\end{aligned}$$

Nun kann man für die Theta- und Eisensteinreihen an Stellen, die Voraussetzung 7.1 bequem ablesen:

Lemma 7.5. *Es sei K/F eine quadratische unverzweigte Körpererweiterung und $\chi = 1$. Dann sind Theta- und Eisensteinreihe in $s = \frac{1}{2}$ dieselben, nämlich $\Pi(1, \omega)$, und man findet deren Neuform im Kirillovmodell als*

$$\begin{aligned} W_{\theta,neu}(a) = W_{E,neu}(a) &= |a|^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(a) \operatorname{vol}(\mathbf{o}_F) \operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \frac{1-\omega(a\pi)}{1-\omega(\pi)} \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F \cap \mathrm{N}}(a) \operatorname{vol}(\mathbf{o}_F) \operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times). \end{aligned}$$

Lemma 7.6. *Es sei $K = F \oplus F$ zerfallen und $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$ unverzweigt. Dann ist die Thetareihe gegeben durch $\Pi(\chi_1, \chi_1^{-1})$, und deren Neuform im Kirillovmodell ist*

$$W_{\theta,neu}(a) = |a|^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(a) \operatorname{vol}(\mathbf{o}_F) \operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \begin{cases} \frac{\chi_1(a\pi) - \chi_1^{-1}(a\pi)}{\chi_1(\pi) - \chi_1^{-1}(\pi)}, & \text{falls } \chi_1^2 \neq 1 \\ \chi_1(a)(v(a)+1), & \text{falls } \chi_1^2 = 1 \end{cases}.$$

Die Eisensteinreihe $\Pi(1,1)$ besitzt im Kirillovmodell die Neuform

$$W_{E,neu}(a) = |a|^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(a)(v(a)+1) \operatorname{vol}(\mathbf{o}_F) \operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times).$$

Aus diesen Lemmata ergeben sich nun umgehend die Whittakerprodukte

$$W_{\theta,\mathrm{neu}}(b\eta) W_{E,\mathrm{neu}}(b\xi).$$

Dabei werden jeweils zwei Schreibweisen angegeben: Zum einen die in den Variablen ξ und $\eta = 1 - \xi$, so daß die Ergebnisse direkt mit denen aus [Zh1] vergleichbar sind. Zum anderen in der Variablen x, wobei wie gehabt $\xi = \frac{x}{x-1}$ gilt, um die Whittakerprodukte einfacher mit den Local Linking Numbers vergleichen zu können.

Lemma 7.7. *Es sei K/F eine quadratische unverzweigte Körpererweiterung und $\chi = 1$. Dann gilt bis auf den Faktor $\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2 \operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)^2$*

$$\begin{aligned} W_{\theta,neu}(b\eta) W_{E,neu}(b\xi) &= |\xi\eta|^{\frac{1}{2}} |b| \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b\xi) \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b\eta) \\ &= \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|1-x|} |b| \mathbf{1}_{\frac{1-x}{x}(\mathbf{o}_F \cap \mathrm{N})}(b) \mathbf{1}_{(1-x)(\mathbf{o}_F \cap \mathrm{N})}(b). \end{aligned}$$

Lemma 7.8. *Es sei $K = F \oplus F$ zerfallen und $\chi = (\chi_1, \chi_1^{-1})$ unverzweigt. Dann gilt bis auf den Faktor $\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)^2 \operatorname{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)^2$: Falls $\chi_1^2 = 1$,*

$$\begin{aligned} &W_{\theta,neu}(b\eta) W_{E,neu}(b\xi) \\ &\quad = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}} |b| \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b\xi) \mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b\eta) \big(v(b\xi)+1\big) \chi_1(b\eta)(v(b\eta)+1) \\ &\quad = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|1-x|} |b| \mathbf{1}_{\frac{1-x}{x}\mathbf{o}_F \cap (1-x)\mathbf{o}_F}(b) \chi_1(b(1-x)) \big(v(b) + v(\frac{x}{1-x}) + 1\big) \\ &\qquad\qquad \cdot \big(v(b) - v(1-x) + 1\big). \end{aligned}$$

Falls $\chi_1^2 \neq 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
&W_{\theta,neu}(b\eta)W_{E,neu}(b\xi)\\
&\quad= |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}|b|\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b\xi)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F}(b\eta)\big(v(b\xi)+1\big)\frac{\chi_1(b\eta\pi)-\chi_1^{-1}(b\eta\pi)}{\chi_1(\pi)-\chi_1^{-1}(\pi)}.\\
&\quad= \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|1-x|}|b|\mathbf{1}_{\frac{1-x}{x}\mathbf{o}_F\cap(1-x)\mathbf{o}_F}(b)\big(v(b)+v(\frac{x}{1-x})+1\big)\\
&\qquad\cdot\frac{\chi_1(b(1-x)^{-1}\pi)-\chi_1^{-1}(b(1-x)^{-1}\pi)}{\chi_1(\pi)-\chi_1^{-1}(\pi)}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 7.9. *Die Lemmata 7.7 und 7.8 sind im Prinzip [Zh1] Lemma 3.4.1, abgesehen von dem kleinen verwirrenden Schönheitsfehler, daß die Fälle $\chi_1^2 = 1$ und $\omega = 1$ dort symbolisch als stetige Fortsetzung aus den geometrischen Summen des allgemeinen Falls abzulesen sind.*

Nun kann man die lokale Gross-Zagier-Formel an den Stellen, an denen Voraussetzung 7.1 erfüllt ist, angeben:

Satz 7.10. *([Zh1] Lemma 4.3.1) Unter der Voraussetzung 7.1 gilt für die Neuformen $W_{\theta,neu}$ und $W_{E,neu}$ der Theta- und Eisensteinreihe und die Local Linking Number zur Funktion $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$ bis auf Volumenfaktoren:*

$$W_{\theta,neu}(b\eta)W_{E,neu}(b\xi) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}|b| < \mathbf{T}_b\phi, \phi >_{x=\frac{\xi}{\xi-1}} .$$

Beweis: Man vergleiche Lemma 7.4 mit Lemma 7.7 sowie Lemma 7.2 mit Lemma 7.8.

7.2 Reformulierung der lokalen Gross-Zagier-Formel

Nun soll der Zhangsche $\mathbf{T}_b$-Operator, der nur auf die Funktion $\chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$ anwendbar ist, durch den Operator $\mathbb{S}_b$ aus Bemerkung 6.4 beziehungsweise 6.9 ersetzt werden.
Beginnen wir mit dem Fall eines kompakten Torus.

Lemma 7.11. *Es sei K/F eine unverzweigte Körpererweiterung, und es sei χ unverzweigt. Das heißt $\chi = 1$. Weiter sei $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$. Dann gilt bis auf einen Volumenfaktor*

$$\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x = \mathbf{1}_{\mathrm{N}\setminus(1+\wp)}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N}}(b) + \mathbf{1}_{1+\wp}(x)|1-x|\mathbf{1}_{(1-x)(\mathbf{o}_F\cap\mathrm{N})}(b).$$

Beweis: Zunächst muß die translatierte Local Linking Number berechnet werden. Dies geschah bereits in Beispiel 4.8:

$$< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x =$$
$$\mathbf{1}_{\mathrm{N}\setminus(1+\wp)}(x)\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(\beta) + \mathbf{1}_{1+\wp}(x)\Big(\mathbf{1}_{(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(\beta) + \mathbf{1}_{(1-x)^{-1}\mathbf{o}_F^\times}(\beta)\Big)q^{-v(1-x)},$$

wenn man normiert $\mathrm{vol} := \mathrm{vol}_T(T)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F) = 1$. Wendet man den Operator

$$\mathbb{S}_b < \phi, \psi >_x := \frac{1}{2}\sum_{s=0,1}\sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\omega(b(1-x))^{i+s}}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s(v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\psi >_x .$$

aus Bemerkung 6.9 an, so erhält man also: Für $x \in \mathrm{N}\setminus(1+\wp)$:

$$\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x = \frac{1}{2}\Big(\omega(b(1-x))^{v(b)} + \omega(b(1-x))^{v(b)+1}\Big) = \mathbf{1}_{\mathrm{N}}(b).$$

Und für $x \in 1+\wp$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x &= \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)\omega(b(1-x))^{v(b)-v(1-x)}\Big(1+\omega(b(1-x))\Big) \\ &= \mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}\cap(1-x)\,\mathrm{N}}(b). \end{aligned}$$

Dies sind die behaupteten Terme.

Nun zum Fall eines nichtkompakten Torus. Des Aufwandes halber beschränke man sich hier auf den Fall $\chi_1^2 = 1$.

Lemma 7.12. *Es sei K/F zerfallen, der Charakter χ faktorisiere über die Norm, das heißt $\chi = (\chi_1, \chi_1)$ mit $\chi_1^2 = 1$, und es sei $\phi = \chi \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{o}_F)}$. Dann gilt bis auf einen Volumenfaktor*

$$\begin{aligned} &\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x = \chi_1(b(1-x)) \\ &\Bigg(\mathbf{1}_{F^\times\setminus(1+\wp)}(x)\Big(2v(b)^2 + 2(|v(x)|+1)v(b) + (1+q^{-1})(|v(x)|+1)\Big) \\ &\quad + \mathbf{1}_{1+\wp}(x)\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)\Big(1 + 2\big(v(b) - v(1-x) + 1\big)\big(v(b) - v(1-x)\big)\Big)\Bigg). \end{aligned}$$

Beweis: Um den Operator $\mathbb{S}_b$ aus Bemerkung 6.4 anwenden zu können, muß man zunächst die translatierten Local Linking Numbers $< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x$ zu $\beta \in F^\times$ kennen. Diese wurden in Beispiel 5.2 berechnet:

$$
\begin{aligned}
&< \phi, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x = \chi_1(1-x)\chi_1(\beta)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2 \cdot \\
&\Bigg[\mathbf{1}_{F^\times\setminus(1+\wp)}(x)\Bigg(\mathbf{1}_{\mathbf{o}_F^\times}(\beta)\big(|v(x)|+1\big)(1+q^{-1}) + \mathbf{1}_{\wp}(\beta)|\beta|\big(4v(\beta)+2|v(x)|\big) \\
&\qquad\qquad + \mathbf{1}_{\wp}(\beta^{-1})|\beta^{-1}|\big(-4v(\beta)+2|v(x)|\big)\Bigg) \\
&+ \quad \mathbf{1}_{1+\wp}(x)\Bigg(\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(\beta)|\beta|\big(4v(\beta)-4v(1-x)\big) \\
&\qquad\qquad + \mathbf{1}_{v(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(\beta)|\beta| + \mathbf{1}_{v(1-x)\mathbf{o}_F^\times}(\beta^{-1})|\beta^{-1}| \\
&\qquad\qquad + \mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)+1}}(\beta^{-1})|\beta^{-1}|\big(-4v(\beta)-4v(1-x)\big)\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Der Volumenfaktor $\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F)^2$ wird ab jetzt weggelassen. Da χ_1 quadratisch ist, ist $\mathbb{S}_b^+ = \mathbb{S}_b^-$, also nach Bemerkung 6.4

$$\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x = \frac{1}{2}\mathbb{S}_b^+ < \phi, \phi >_x .$$

Man erhält für $x \in 1+\wp$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s=0,1}\sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1(\pi)^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s(v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x \\
&= \chi_1(b(1-x))\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)\left[1 + \sum_{i=0}^{v(b)-v(1-x)-1} 4\Big(v(b)-i-v(1-x)\Big)\right] \\
&= \chi_1(b(1-x))\mathbf{1}_{\wp^{v(1-x)}}(b)\Big(1 + 2\big(v(b)-v(1-x)+1\big)\big(v(b)-v(1-x)\big)\Big).
\end{aligned}
$$

Und für $x \in F^\times \backslash (1+\wp)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s=0,1} \sum_{i=0}^{v(b)} \frac{\chi_1(\pi)^i}{|\pi^{v(b)-i}|} < \phi, \begin{pmatrix} \pi^{(-1)^s(v(b)-i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .\phi >_x \\
&= \chi_1(b(1-x)) \left[(|v(x)|+1)(1+q^{-1}) + \sum_{i=0}^{v(b)-1} \Big(4v(b) - 4i) + 2|v(x)| \Big) \right] \\
&= \chi_1(b)\chi_1(1-x) \Big(2v(b)^2 + 2(1+|v(x)|)v(b) + (1+q^{-1})(1+|v(x)|) \Big).
\end{aligned}$$

Dies sind genau die behaupteten Terme.

Im Fall des nicht kompakten Torus würde der Operator $\mathbb{T}_b$ dasselbe Ergebnis liefern wie $\mathbb{S}_b$ in Lemma 7.12, weil die translatierte Local Linking Number symmetrisch ist und man sich auf den Fall $\chi_1^2 = 1$ beschränkt hat. Wäre eines von beidem nicht der Fall oder ist der Torus kompakt (vergleiche Lemma 7.11), so würde das Ergebnis unter Verwendung von $\mathbb{T}_b$ von dem mit $\mathbb{S}_b$ abweichen.

Bemerkung 7.13. *Vergleicht man die Ergebnisse von Lemma 7.11 mit den Ergebnissen für die Whittakerprodukte aus Lemma 7.7, so findet man im Fall einer Körpererweiterung bis auf Volumenfaktoren*

$$W_{\theta,neu}(b\eta)W_{E,neu}(b\xi) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}|b|\, \mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x .$$

In diesem Fall ergibt die Anwendung des $\mathbb{S}_b$-Operators also exakt die lokale Gross-Zagier-Formel aus Satz 7.10!
Vergleicht man jedoch Lemma 7.12 mit Lemma 7.8, so findet man, daß bis auf einen Volumenfaktor und einen Faktor 2, den man durch Normierung der Maße vernichten kann, im Fall $K = F \oplus F$ zerfallend gilt

$$W_{\theta,neu}(b\eta)W_{E,neu}(b\xi) = |\xi\eta|^{\frac{1}{2}}|b|\mathbb{S}_b < \phi, \phi >_x + O(v(b)).$$

Also realisiert der $\mathbb{S}_b$-Operator wenigstens im führenden Term das Produkt der Whittakerneuformen, und mit Lemma 6.7 kann man auch in den niederen Termen Gleichheit erzielen. Die inneren Integrale mit kompaktem Träger, die man dazu zum eigentlichen inneren Integral addieren muß, ließen sich sogar direkt angeben, wenn man die Berechnung des Beispiels 5.2 nochmals verfolgte.

Kapitel 8

Beweis von Vermutung 5.4

In diesem Kapitel wird Vermutung 5.4 bewiesen. Dazu werden die 16 inneren Integrale aus Kapitel 5.2 berechnet und das Verhalten der daraus resultierenden Local Linking Numbers untersucht.
Es wird zunächst noch einmal genau das Vorgehen beim Berechnen der Local Linking Numbers dargelegt. Dies ist nach Kapitel 5.2 zwar nicht zwingend notwendig, wird aber die Lesbarkeit dieses Kapitels, das geprägt ist von verschlungenen Rechnungen, erhöhen. In den Abschnitten 8.1 und 8.2 folgen eine Reihe von Reduktionen, die die Rechnung in vielen Spezialfällen ersparen oder abkürzen. In den Abschnitten 8.3 bis 8.10 werden die Rechnungen explizit durchgeführt. Sie sind im einzelnen einander sehr ähnlich, die Vorgehensweise daher fast schematisch. Nach den ersten ein, zwei Rechnungen bekommt man einen vollständigen Überblick darüber, welche Arten von Ungleichungen gelöst werden müssen. Die übrigen Rechnungen bergen nur eng verwandte Probleme, wie im Nachhinein festgestellt wird. Das zeigt sich auch an den äußeren Integralen, die dazu berechnet werden müssen. Sie wurden daher zusammengefaßt: Abschnitt 8.11 enthält die Liste aller auftretenden Integrale.

Wie in Abschnitt 8.1 dargelegt werden wird, genügt es, von den Gleichungen (I)–(IV) aus Kapitel 5.2 lediglich die Gleichungen (I) und (II) zu betrachten. Insbesondere befindet man sich also in dem Fall $\operatorname{supp}\psi \subset TNN'$. Die Local Linking Numbers, deren Verhalten für $v(b) \to \pm\infty$ untersucht werden soll, sind die Funktionen

$$\chi_1^{-1}(b) \int_{F\times F} \int_{F^\times} \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ d^\times a\ \bar{\psi}(b^{-1}y_2, by_3)\ dy_2\ dy_3,$$

wobei

$$t^{-1}\gamma(x)ty = \begin{pmatrix} -(1+y_2y_3-a^{-1}xy_3) & (-y_2+a^{-1}x) \\ -(a(1+y_2y_3)-y_3) & (1-ay_2) \end{pmatrix}.$$

Die zweite Variable x der Local Linking Numbers ist dabei zwar beliebig, aber fest. Dies ist schade, aber der Rechenaufwand für variables x scheint nicht zu bewältigen. Die Funktion ϕ hat die Form

$$\phi(tg) = \chi(t)\mathbf{1}_{U_z}(g).$$

Hierin hat wiederum U_z die Gestalt

$$U_z = \begin{pmatrix} 1 + z_2 z_3 + \wp^m & z_2 + \wp^m \\ z_3 + \wp^m & 1 + \wp^m \end{pmatrix}$$

oder

$$U_z = \begin{pmatrix} z_1 + \wp^m & -1 + z_1 z_4 + \wp^m \\ 1 + \wp^m & z_4 + \wp^m \end{pmatrix}.$$

Die natürliche Zahl m kann man dabei beliebig groß wählen. In jedem Fall soll sie größer sein als $c(\chi_1)$ und – sodenn z_i, $1 + z_2 z_3$ (bzw. $-1 + z_1 z_4$) von null verschieden – auch größer als $2|v(z_i)|$, $2|v(1+z_2 z_3)|$ (bzw. $2|v(-1+z_1 z_4)|$) und größer als $c(\chi_1) - v(z_i)$, $c(\chi_1) - v(1 + z_2 z_3)$ (bzw. $c(\chi_1) - v(-1 + z_1 z_4)$), für $i = 2, 3$ (bzw. $1, 4$).
Der Wert $\phi(t^{-1}\gamma(x)ty)$ ist genau dann ungleich null, wenn es ein Element $(r, s) \in K^\times$ gibt so, daß

$$(r, s)t^{-1}\gamma(x)ty \in U_z.$$

Dies ist Gleichung (I) bzw. (II). Dann ist der Wert $\phi(t^{-1}\gamma(x)ty) = \chi_1^{-1}(r)\chi_1(s)$. Um das innere Integral zu berechnen, muß man diese Bedingung auswerten. Das entspricht der Umformung von Gleichung (I) bzw. (II) in eine Bedingung an die Integrationsvariable a in Abhängigkeit von (y_2, y_3) und x.
Hilfreich ist hier oft die Bedingung, die dabei an die Determinante gestellt werden muß:

$$\det((r, s)t^{-1}\gamma(x)ty) = rs(x - 1) \in \det U_z$$

Da $\chi_1(\det U_z = 1 + \wp^m + z_2 z_3 \wp^m + z_2 \wp^m + z_3 \wp^m) = 1$ (bzw. $\chi_1(\det U_z = 1 + \wp^m + z_1 z_4 \wp^m + z_1 \wp^m + z_4 \wp^m) = 1$) nach Wahl von m, folgt insbesondere

$$\chi_1^{-1}(r)\chi_1(s) = \chi_1^2(s)\chi_1(x - 1) = \chi_1^{-2}(r)\chi_1^{-1}(x - 1).$$

Dies ist aber auch zusammen mit einer Bedingung an den Träger der Funktion in a und (y_2, y_3) der Integrand des inneren Integrals.

Ist einmal das innere Integral ausgewertet, bleibt die Berechnung des äußeren. Hierzu betrachtet man die Gestalt von $\bar{\psi}$, mit dem das innere Integral multipliziert wird.

$\bar{\psi}$ wird im folgenden häufig als **äußere Funktion** im Gegensatz zum **inneren Integral**

$$\int_{F^\times} \phi(t^{-1}\gamma(x)ty)\ d^\times a$$

bezeichnet (vergleiche auch Definition 1.6).
Als Funktion von $(b^{-1}y_2, by_3)$ ist ψ lokal konstant mit kompaktem Träger. Als solche ist sie eine Linearkombination der elementaren Schwartzfunktionen $\mathbf{1}_{\wp^m}(b^{-1}y_2)\mathbf{1}_{\wp^m}(by_3)$, $\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)\mathbf{1}_{\wp^m}(by_3)$, $\mathbf{1}_{\wp^m}(b^{-1}y_2)\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(by_3)$ und $\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(by_3)$. Man kann dabei annehmen, daß alle Summanden dasselbe $m > 0$ tragen und daß $-m < v(a_i) < m$, $i = 1, 2$, denn wenn man m beliebig groß macht reicht es immer, endlich viele weitere Stützpunkte a_i hinzunehmen, denn der Träger von ψ ist kompakt. Auch kann man annehmen, daß es ich bei diesem m um dasselbe handelt, wie in der Definition von ϕ. Diese Annahmen sind natürlich nicht zwingend, aber praktisch. Sie setzen zum Beispiel in Reduktion 8.5 die Anzahl der Rechenschritte drastisch herunter.
Um die Asymptotik der Local Linking Numbers zu bestimmen, genügt es, $\bar{\psi}$ durch die oben aufgeführten elementaren Schwartzfunktionen laufen zu lassen.

Die Rechnungen der Abschnitte 8.3–8.10, das heißt die Fälle von Gleichung (I) und (II) für $z_i = 0$ oder $z_i \neq 0$, verfolgen das gerade skizzierte Programm ohne viel Kommentar nach dem Schema: Bedingungen an a und (y_2, y_3) aufstellen, in den einzelnen dabei auftretenden Fällen das innere Integral berechnen, dann das äußere. Eine große Hilfe sind dabei die Reduktionen aus Abschnitt 8.2. Wann immer eine Stelle erreicht wird, an der eine dieser Reduktionen greift, wird die Rechnung sofort abgebrochen. Sie dennoch zuende zu führen und damit auch Aussagen über variables x zu erhalten, würde (geschätzt nach Ausführung einer expliziten Rechnung) den Aufwand mindestens verfünffachen.

8.1 Transformation von Gleichung (III) und (IV) in Gleichung (II) und (I)

Betrachtet man die Gleichungen (I) bis (IV) näher, so fällt die Ähnlichkeit von Gleichung (IV) zu Gleichung (I) beziehungsweise von Gleichung (III) zu Gleichung (II) ins Auge. Zur besseren Lesbarkeit seien diese hier noch einmal aufgeführt:
Gleichung (I): Sei $y \in NN'$ und $z \in NN'$:

$$\begin{pmatrix} -r(1+y_2y_3-a^{-1}xy_3) & r(-y_2+a^{-1}x) \\ -s(a(1+y_2y_3)-y_3) & s(1-ay_2) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1+z_2z_3+\wp^m & z_2+\wp^m \\ z_3+\wp^m & 1+\wp^m \end{pmatrix}$$

Gleichung (II): Sei $y \in NN'$ und $z \in NwN$:

$$\begin{pmatrix} -r(1+y_2y_3-a^{-1}xy_3) & r(-y_2+a^{-1}x) \\ -s(a(1+y_2y_3)-y_3) & s(1-ay_2) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} z_1+\wp^m & -1+z_1z_4+\wp^m \\ 1+\wp^m & z_4+\wp^m \end{pmatrix}$$

Gleichung (III): Sei $y \in NwN$ und $z \in NN'$:

$$\begin{pmatrix} r(-y_1+a^{-1}x) & r(1-y_1y_4+a^{-1}y_4x) \\ s(1-ay_1) & s(y_4+a(1-y_1y_4)) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1+z_2z_3+\wp^m & z_2+\wp^m \\ z_3+\wp^m & 1+\wp^m \end{pmatrix}$$

Gleichung (IV): Sei $y \in NwN$ und $z \in NwN$:

$$\begin{pmatrix} r(-y_1+a^{-1}x) & r(1-y_1y_4+a^{-1}y_4x) \\ s(1-ay_1) & s(y_4+a(1-y_1y_4)) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} z_1+\wp^m & -1+z_1z_4+\wp^m \\ 1+\wp^m & z_4+\wp^m \end{pmatrix}$$

Hier werden die Substitutionen angegeben, die sie in einander überführen. Man schicke für $y \in NN'$

$$y_2 \mapsto y_1, \qquad y_3 \mapsto -y_4.$$

Dies transformiert

$$(r,s)t^{-1}\gamma(x)ty = \begin{pmatrix} -r(1+y_2y_3-a^{-1}xy_3) & r(-y_2+a^{-1}x) \\ -s(a(1+y_2y_3)-y_3) & s(1-ay_2) \end{pmatrix}$$

in

$$\begin{pmatrix} -r(1-y_1y_4+a^{-1}xy_4) & r(-y_1+a^{-1}x) \\ -s(a(1-y_1y_4)+y_4) & s(1-ay_1) \end{pmatrix}$$

Um aus Gleichung (I) Gleichung (IV) zu erhalten, ersetze man in (I) noch

$$z_2 \mapsto z_1, \qquad z_3 \mapsto -z_4$$

und vertausche die Spalten.
Ebenso erhält man Gleichung (III) aus Gleichung (II), indem man zunächst $(r,s) \mapsto (-r,-s)$ ersetzt, dann in (II) die Substitution

$$z_1 \mapsto z_2, \qquad z_4 \mapsto -z_3$$

vornimmt und zuletzt wieder die Spalten vertauscht.
In der äußeren Funktion ψ findet dann folgende Substitution statt:

$$\psi(b^{-1}y_2, by_3) \mapsto \psi(b^{-1}y_1, -by_4).$$

Möchte man ein für y aus NN' gewonnenes Ergebnis auf eines für y aus NwN übertragen, dann muß man also lediglich b durch b^{-1} ersetzen.
Somit sind die sechzehn zu untersuchenden Fälle, die sich aus Gleichung (I) bis (IV) ergeben, reduziert auf die acht Fälle, die aus Gleichung (I) und (II) entstehen.

8.2 Reduktionen

Reduktion 8.1. *In Gleichung (I) sei $z_3 \neq 0$. Dann kann man annehmen, daß $v(z_3) \geq 0$. Ebenso kann man in Gleichung (II) für $z_4 \neq 0$ annehmen, daß $v(z_4) > 0$.*

Beweis: Diese Bedingungen an die z_i implizieren, daß in

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

beide Einträge der unteren Zeile von null verschieden sind. Dann liegt z sowohl in TNN' als auch in $TNwN$. Ist $v(z_3) \geq v(z_4)$, so wählt man die Darstellung in TNN', ist $v(z_3) < v(z_4)$, dann wählt man die in $TNwN$. Hier kann man also sogar $v(z_4) > 0$ annehmen.

Reduktion 8.2. *Im inneren Integral genügt es, sich auf solche Bereiche von (y_2, y_3) zu beschränken, die keinen kompakten Träger in F^2 haben.*

Beweis: Satz 5.1 gibt das Verhalten der Local Linking Numbers an, die in (y_2, y_3) kompakten Träger haben. Es entspricht dem in Vermutung 5.4 angegebenen, braucht also nicht noch einmal untersucht werden.

Reduktion 8.3. *Im inneren Integral sei ein nach oben beschränkter Bereich für (y_2, y_3) gegeben, also $v(y_2) < n_2$ und $v(y_3) < n_3$ für ganze Zahlen n_2, n_3. Dann haben alle Local Linking Numbers, die aus diesem Bereich entstehen können, kompakten (das heißt in $F^\times$ kompakten) Träger in b. Da in der Vermutung nur die Asymptotik für $v(b) \to \pm\infty$ nicht von vornherein klar ist, brauchen obige Fälle nicht untersucht zu werden.*

Beweis: Das innere Integral ist in diesem Bereich eine Funktion $f(y_2, y_3)$ mit Träger in der Menge $\{(y_2, y_3) \mid v(y_2) < n_2, v(y_3) < n_3\}$. Der Beitrag zur Local Linking Number ist gegeben durch

$$\chi_1^{-1}(b) \int f(y_2, y_3) \bar{\psi}(b^{-1}y_2, by_3)\, dy_2\, dy_3.$$

Die äußere Funktion ψ ist eine Schwartzfunktion, also eine Linearkombination von Produkten aus Faktoren $\mathbf{1}_{\wp^m}(b^{-1}y_2)$ bzw. $\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)$ und $\mathbf{1}_{\wp^m}(by_3)$ bzw. $\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(by_3)$. Die Funktionen von $b^{-1}y_2$ implizieren $v(y_2) \geq v(b) + m$ bzw. $v(y_2) = v(b) + v(a_2)$; die Funktionen von by_3 implizieren $v(y_3) \geq -v(b) + m$ bzw. $v(y_3) = -v(b) + v(a_3)$. Kombiniert man diese Ungleichungen mit den oberen Schranken n_2 und n_3, so erhält man die Bedingungen $v(b) \leq n_2 - m$ bzw. $v(b) \leq n_2 - v(a_2)$ und $v(b) \geq m - n_3$ bzw. $v(b) \geq v(a_3) - n_3$. Man hat also immer eine obere und eine untere Schranke für $v(b)$: Die Local Linking Number hat kompakten Träger.

Reduktion 8.4. *Fügt man Reduktion 8.2 und Reduktion 8.3 zusammen, so sieht man, daß es genügt, nur die zwei folgenden Bereiche zu betrachten:*
(i) $v(y_2) < n_2$ *und* $v(y_3) \geq n_3$
sowie
(ii) $v(y_2) \geq n_2$ *und* $v(y_3) < n_3$,
mit jeweils geeignet wählbaren Schranken n_2 *und* n_3.

In dieser Konsequenz angewendet wird Reduktion 8.4 erst ab Abschnitt 8.7. Man kann durch sie praktische Schranken in Abhängigkeit von x wählen. In den ersten vier Rechnungen (Abschnitte 8.3 bis 8.6) habe ich das nicht getan. Es hat nämlich durchaus einen Sinn, diese Schranken unabhängig von x zu wählen: Man durchschaut dadurch die Abhängigkeit zwischen x und b besser. So geben die ersten vier Rechnungen ein Gefühl für diese Abhängigkeit, während in den zweiten vier Rechnungen (Abschnitte 8.7 bis 8.10) der Aufwand durch geschickte Wahl der Schranken reduziert wurde. Nachträglich sieht man, daß in den letzten Rechnungen keine neuen x-Abhängigkeiten entstehen sollten: Dazu gleichen sie zu sehr den ersten vier.

Reduktion 8.5. *Im inneren Integral sei ein Bereich für* (y_2, y_3) *gegeben, in dem* $v(y_2) \leq -v(y_3)$ *gilt. Dann sind die einzigen möglichen äußeren Funktionen* $\psi(b^{-1}y_2, by_3)$*, für die die zugehörige Linking Number nicht verschwindet, Linearkombinationen von Funktionen der Form* $\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(by_3)$ *mit* $v(a_2) \leq -v(a_3)$.

Beweis: Man untersucht die durch die äußere Funktion ψ gegebenen Bedingungen. Wieder genügt es, dies für die elementaren Schwartzfunktionen zu tun.
Betrachtet man $\mathbf{1}_{\wp^m}(b^{-1}y_2)$, so impliziert das $v(y_3) \leq -v(y_2) \leq -m - v(b)$. Kombiniert man dies mit $\mathbf{1}_{\wp^m}(by_3)$, so folgt $-v(b) + m \leq v(y_3) \leq -v(b) - m$. Da $m > 0$, ist es unmöglich, diese Bedingung zu erfüllen. Kombiniert man $\mathbf{1}_{\wp^m}(b^{-1}y_2)$ mit $\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(by_3)$, so erhält man $-v(b)+v(a_3) = v(y_3) \leq -v(b)-m$. Da wir zu Beginn dieses Kapitels festgelegt haben, daß $v(a_i) > -m$ gelten soll, ist auch diese Bedingung unerfüllbar.
Betrachtet man $\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)$, so folgt $v(y_3) \leq -v(a_2) - v(b)$. Kombiniert mit $\mathbf{1}_{\wp^m}(by_3)$ gibt das $-v(b) + m \leq v(y_3) \leq -v(b) - v(a_2)$. Diese Bedingung ist wie oben nicht erfüllbar. Die Kombination $\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(by_3)$ ergibt die Bedingung $-v(b) + v(a_3) = v(y_3) \leq -v(b) - v(a_2)$, was genau dann erfüllbar ist, wenn $v(a_2) \leq -v(a_3)$.

8.3 Gleichung (I): $z_2 = 0$ und $z_3 = 0$

Hier wird zunächst untersucht, wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in 1 + \wp^m \tag{8.3.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in \wp^m \tag{8.3.2}$$

$$-s(a - (1 - ay_2)y_3) \in \wp^m \tag{8.3.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in 1 + \wp^m \tag{8.3.4}$$

Die Determinantenbedingung ergibt

$$-r \in (1 - x)^{-1}(1 - ay_2)(1 + \wp^m). \tag{8.3.5}$$

Nimmt man an, daß (8.3.2) erfüllt ist, und setzt dies in (8.3.1) ein, so erhält man

$$-r \in 1 - r(-y_2 + a^{-1}x)y_3 + \wp^m \subset 1 + \wp^{m+v(y_3)} + \wp^m. \tag{8.3.6}$$

Die Bedingungen (8.3.3) und (8.3.4) kann man wie folgt umformen: Aus (8.3.4) zieht man

$$s \in (1 - ay_2)^{-1}(1 + \wp^m).$$

In (8.3.3) eingesetzt ergibt das

$$\frac{a}{1 - ay_2} - y_3 \in \wp^m. \tag{8.3.7}$$

Eine Unterscheidung nach $y_3 \in \wp^m$ oder $y_3 \notin \wp^m$ erzeugt folgende Fälle:

(i) $v(y_3) \geq m$ und $v(\frac{a}{ay_2-1}) \geq m$:

- (α) $v(a) > -v(y_2)$ und $v(a) \geq m$
- (β) $v(a) < -v(y_2)$ und $v(y_2) \leq -m$
- (γ) $v(a) = -v(y_2)$: $a \in y_2^{-1}\big(\mathbf{o}_F^\times \backslash (1 + \wp^{-m-v(y_2)+1})\big)$ und $v(y_2) \leq -m$

(ii) $v(y_3) = v(\frac{a}{ay_2-1}) < m$:
Bedingung (8.3.7) aufgelöst nach a^{-1} lautet

$$a^{-1} \in \frac{1 + y_2y_3}{y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}). \tag{8.3.8}$$

Nimmt man an, daß $v(ay_2) > 0$, so folgt $v(a) = v(y_3) > -v(y_2)$. Dieser Fall wird in der unten stehenden Zusammenfassung (α) genannt.
Nimmt man an, daß $v(ay_2) < 0$, so folgt zunächst aus (8.3.7), daß $v(y_2) = -v(y_3)$. Ist der Exponent $m - v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$ aus (8.3.8) kleiner gleich null, so muß $v(a) \leq 2v(y_3) - m$ gelten und für y_2 findet man die zusätzliche Bedingung

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_3)}).$$

Ist der Exponent $m - v(y_3) - v(1 + y_2y_3) > 0$, so ist $v(a) = v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$ und die Annahme $v(ay_2) < 0$ liefert $0 < v(1 + y_2y_3)$. Die Exponentenbedingung gibt die obere Schranke $v(1 + y_2y_3) < m - v(y_3)$. Dies wird in Fall ($\beta$) zusammengefaßt.
Nimmt man zuletzt an, daß $v(ay_2) = 0$ (das ist Fall (γ)), so ist der Exponent in (8.3.8) immer größer als null, denn wäre er ≤ 0, so folgte $-v(a) = v(y_2) \geq m - 2v(y_3)$. Dann wäre aber $v(y_2y_3) \geq m - v(y_3) > 0$ im Widerspruch zur Annahme eines nicht positiven Exponenten. Somit ist $-v(y_2) = v(a) = v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$. Also ist $0 \leq v(1 - ay_2) = -v(1 + y_2y_3) = -v(y_2) - v(y_3)$. Im Fall $v(y_2) = -v(y_3)$ muß also noch

$$y_2 \in -y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times \backslash (1 + \wp))$$

gelten.
Zusammenfassung (ii):

- (α) $v(y_3) = v(a) > -v(y_2)$ und
$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)})$$
- (β) $v(a) < -v(y_2)$ und $v(y_3) = -v(y_2)$:
  - ($\beta 1$) $y_2 \in -y_3(1 + \wp^{m-v(y_3)})$ und $v(a) \leq 2v(y_3) - m$
  - ($\beta 2$) $y_2 \in -y_3^{-1}\big((1 + \wp)\backslash(1 + \wp^{m-v(y_3)})\big)$ und
$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$$
- (γ) $v(a) = -v(y_2)$ und $0 \leq v(1 - ay_2) = -v(y_2) - v(y_3)$:
  - ($\gamma 1$) $y_2 \in -y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times \backslash (1 + \wp))$ und
$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)})$$
  - ($\gamma 2$) $v(y_2) < -v(y_3)$ und
$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(y_2y_3)}).$$

Für die Fälle (i) und (ii) werden jetzt die Bedingungen (8.3.2), (8.3.5) und (8.3.6), die nun gleichbedeutend zu (8.3.1) und (8.3.2) sind, untersucht.

Fall (i):

Hier wird angenommen, daß

$$v(y_2) < -m,$$

denn der Bereich der (y_2, y_3), in dem $v(y_2) \geq -m$ und $v(y_3) \geq m$ gilt, ist kompakt und braucht wegen Reduktion 8.2 nicht weiter untersucht zu werden. Kombination von Bedingung (8.3.5) und (8.3.6) liefert

$$-r \in (1-x)^{-1}(1-ay_2)(1+\wp^m) \cap (1+\wp^m) = 1+\wp^m, \tag{8.3.9}$$

wenn

$$1 - ay_2 \in (1-x)(1+\wp^m), \tag{8.3.10}$$

also wenn

$$a \in \frac{x}{y_2}(1+\wp^{m+v(1-x)-v(x)}) \tag{8.3.11}$$

erfüllt ist. Sonst gibt es keinen zulässigen Bereich für r, das heißt die Linking Number verschwindet. Insbesondere ist also $v(r) = 0$. Das nützt man aus, um (8.3.2) nach a aufzulösen:

$$a \in \frac{x}{y_2}(1+\wp^{m-v(y_2)}). \tag{8.3.12}$$

Fall (i) (α):
Hier ist $v(ay_2) > 0$ und somit folgt aus (8.3.9), daß $0 = -v(1-x)$. Somit ist $x \in \mathbf{o}_F \backslash (1+\wp)$. Der Exponent in (8.3.11) ist also $m - v(x)$.
Ist $v(x) < m$, so erhält man für diesen Exponenten $0 < m - v(x) \leq m - v(y_2)$. Also ist der Bereich für a gegeben durch (8.3.12). Damit wirklich $v(ay_2) > 0$ gilt, muß sogar $v(x) > 0$ gelten.
Für $v(x) \geq m$ ist der Exponent nicht mehr größer als null, und somit hat man $v(a) \geq m - v(y_2)$, was von a aus (8.3.12) erfüllt wird.
Fall (i) (β):
Da hier $v(ay_2) < 0$, folgt aus (8.3.10), daß $0 > v(1-x) = v(x)$ gilt. Der Exponent in (8.3.11) lautet somit m, und der zulässige Bereich von a wird durch (8.3.12) gegeben.
Fall (i) (γ):
Hier ist $v(ay_2) = 0$, also ergibt $v(r) = 0$, daß $v(1-x) = v(1-ay_2)$ und somit $x \in \mathbf{o}_F^\times \backslash (1+\wp^{-m-v(y_2)+1})$ gelten muß. Der Exponent in (8.3.11) ist dann $m + v(1-x) < m - v(y_2)$, und der zulässige Bereich für a durch (8.3.12) gegeben.

Zusammenfassung von Fall (i):

Der relevante Bereich im Fall (i) ist nur dann nicht leer, wenn $x \in F^\times \backslash (1 + \wp^{-m-v(y_2)+1})$ gilt. Dann ist er gegeben durch

$$v(y_3) \geq m, \quad v(y_2) < -m.$$

Dabei ist

$$a \in \frac{x}{y_2}(1 + \wp^{m-v(y_2)}).$$

Für $\chi_1^{-2}(1 - ay_2)$ erhält man also mit $a = \frac{x}{y_2}(1 + a')$, $a' \in \wp^{m-v(y_2)}$,

$$\chi_1^{-2}(1 - ay_2) = \chi_1^{-2}(1 - x(1 + a')) = \chi_1^{-2}(1 - x),$$

denn $\chi_1^{-2}(1 - \frac{xa'}{1-x}) = 1$ für alle zulässigen x und a'. Daraus ergibt sich der Integrand

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(1 - ay_2)\chi_1(x - 1) = \chi_1^{-1}(x - 1),$$

also das Integral

$$\int_{\frac{x}{y_2}(1+\wp^{m-v(y_2)})} \chi_1(r^{-1}s)\ d^\times a = \chi_1^{-1}(x - 1)q^{v(y_2)} \operatorname{vol}^\times(1 + \wp^m).$$

Das gibt insgesamt ein inneres Integral von

$$\chi_1^{-1}(x - 1)\mathbf{1}_{\wp^m}(y_3)\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{-m}}(y_2)q^{v(y_2)} \cdot \text{const.}.$$

Die Local Linking Numbers, die sich damit ergeben, sind in Abschnitt 8.11.1 berechnet.

Fall (ii):

Hier kann man sogar annehmen, daß

$$v(y_3) < -m$$

gilt. Denn sonst erhält man in (α), daß $v(y_2) > -v(y_3) > m$ und $v(y_3) \geq -m$, also einen kompakten Bereich, der von Reduktion 8.2 erfaßt wird; und in (β) und (γ), daß $v(y_2) \leq -v(y_3) \leq m$ und $v(y_3) < m$, das heißt einen Bereich, der von Reduktion 8.3 abgedeckt wird. Aus demselben Grund kann man jetzt auch noch

$$v(y_2) \geq m$$

fordern.
Die Kombination von (8.3.5) und (8.3.6) lautet dann

$$-r \in (1-x)^{-1}(1-ay_2)(1+\wp^m) \cap \wp^{m+v(y_3)} = (1-x)^{-1}(1-ay_2)(1+\wp^m), \quad (8.3.13)$$

wenn

$$1 - ay_2 \in (1-x)\wp^{m+v(y_3)} \tag{8.3.14}$$

erfüllt ist. Sonst gibt es kein passendes r und die Linking Number verschwindet.

Fall (ii) (α):
Hier ist $v(ay_2) > 0$ und somit ist (8.3.14) genau dann erfüllt, wenn $v(y_3) \leq -m - v(1-x)$ gilt. Setzt man $v(r) = -v(1-x)$ in (8.3.2) ein, so erhält man

$$-v(1-x) + v(-y_2 + a^{-1}x) \geq m,$$

das heißt

$$v(x - ay_2) \geq m + v(y_3) + v(1-x). \tag{8.3.15}$$

Man prüft nach, daß diese Bedingung immer erfüllt ist, weil $m + v(y_3) < 0$:
Im Fall $v(x) \geq v(ay_2)$ ist $v(x - ay_2) > 0 > m + v(y_3)$.
Im Fall $v(x) < v(ay_2)$ unterscheidet man weiter: Falls $v(x) > 0$, so ist $v(x) > m + v(y_3)$, was (8.3.15) impliziert. Falls $v(x) < 0$, so ist $v(x) > m + v(y_3) + v(x)$, also (8.3.15) immer erfüllt. Falls $v(x) = 0$, so gilt wegen (8.3.14) immer noch $v(y_3) \leq -m - v(1-x)$, und das gibt wiederum (8.3.15).
Zusammenfassung Fall (ii) (α):
Der interessante Bereich ist hier gegeben durch

$$v(y_3) < -m, \quad v(y_2) > -v(y_3).$$

a variiert im Bereich

$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2 y_3}(1 + \wp^{m - v(y_3)}),$$

sodaß man

$$\chi_1^{-2}(1 - ay_2) = \chi_1^{-2}(1 - \frac{y_2 y_3 (1 + a')}{1 + y_2 y_3}) = \chi_1^2(1 + y_2 y_3)$$

erhält. Mit $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(1 - ay_2)\chi_1(x-1)$ lautet das Integral nach a

$$\int_{\frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)})} \chi_1(r^{-1}s)\ d^\times a = \chi_1^2(1 + y_2 y_3)\chi_1(x-1) q^{v(y_3)} \operatorname{vol}^\times(1 + \wp^m).$$

Als inneres Integral erhält man somit

$$\chi_1(x-1)\chi_1^2(1 + y_2 y_3)\mathbf{1}_{F \setminus \wp^{-m}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2) q^{v(y_3)} \cdot \text{const.}$$

Die Local Linking Numbers, die sich aus diesem inneren Integral ergeben können, findet man in Abschnitt 8.11.2.

Fall (ii) (β):
Hier ist $v(ay_2) < 0$ und $v(y_2) = -v(y_3)$, das heißt (8.3.14) fordert die untere Schranke $m + 2v(y_3) + v(1-x) \leq v(a)$. Setzt man die Bedingung $v(r) = -v(1-x) + v(ay_2)$, die man aus (8.3.13) erhält, ein in (8.3.2), so gibt das

$$v(r(-y_2 + a^{-1}x)) = -v(1-x) + v(y_2) + v(x - ay_2) \geq m. \tag{8.3.16}$$

Fall (ii) (β1):
Hier hat man $m + 2v(y_3) + v(1-x) \leq v(a) \leq 2v(y_3) - m$. Das impliziert insbesondere $-2m \geq v(1-x) = v(x)$. Nimm man an, daß $v(x) \leq v(ay_2)$, also daß $v(y_2) = -v(y_3) \geq v(x) - v(a) \geq v(x) - 2v(y_3) + m$, so erhält man den kompakten Bereich $m + v(x) \leq v(y_3) < -m$, $m < v(y_2) \leq -m - v(x)$, den man wegen Reduktion 8.2 nicht weiter untersuchen muß.
Es sei daher $v(x) > v(ay_2)$. (8.3.16) lautet dann $2v(y_2) + v(a) - v(x) \geq m$, also $v(a) \geq m + 2v(y_3) + v(x)$. Das ist immer erfüllt. Dann findet man

$$\chi_1^{-2}(1 - ay_2) = \chi_1^{-2}(ay_2)\chi_1^{-2}(1 - (ay_2)^{-1}) = \chi_1^{-2}(ay_2).$$

Das Integral nach a lautet also bis auf den Faktor $\chi_1^{-2}(y_2)\chi_1(x-1)$: Falls $\chi_1^2 = 1$:

$$\int_{m+2v(y_3)+v(x) \leq v(a) \leq 2v(y_3)-m} \chi_1^{-2}(a)\ d^\times a = \mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(-v(x) - 2m + 1).$$

Falls $\chi_1^2 \neq 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_{m+2v(y_3)+v(x) \leq v(a) \leq 2v(y_3)-m} \chi_1^{-2}(a)\ d^\times a \\
&= \sum_{j=m+2v(y_3)+v(x)}^{2v(y_3)-m} \chi_1^{-2}(\pi^j)\delta(c(\chi_1^2) = 0)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times) \\
&= \chi_1^{-2}(y_3^2)(c_1 + c_2\chi_1^{-2}(x))\delta(c(\chi_1^2) = 0),
\end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten c_1, c_2.
Ein nicht durch die Reduktionen abgedeckter Bereich entsteht nur für $v(x) \leq -2m$. Das innere Integral lautet dann für $\chi_1^2 = 1$

$$\chi_1(x-1)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{v(x)+m}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2),$$

und für $\chi_1^2 \neq 1$

$$\delta(c(\chi_1^2) = 0)\chi_1^{-2}(y_3)(c_1\chi_1(x-1) + c_2\chi_1^{-1}(x-1))\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{v(x)+m}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2).$$

Die zugehörigen Local Linking Numbers sind in Abschnitt 8.11.4 aufgeschrieben.

Fall (ii) (β2):
Hier ist $v(a) = v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \geq m + 2v(y_3) + v(1 - x)$, was zum einen $v(y_3) < -m - v(1-x)$ impliziert, zum anderen eine zweite obere Schranke für $v(1 + y_2y_3)$ angibt:

$$0 < v(1 + y_2y_3) \leq \min\{m - v(y_3) - 1, -m - v(y_3) - v(1 - x)\}. \tag{8.3.17}$$

Ist $v(x) \leq -2m$, so gibt dies

$$y_2 \in -y_3^{-1}\Big((1 + \wp)\backslash(1 + \wp^{m-v(y_3)})\Big).$$

Ist $v(x) > -2m$, so hat man

$$y_2 \in -y_3^{-1}\Big((1 + \wp)\backslash(1 + \wp^{-m-v(y_3)-v(1-x)})\Big).$$

Nimmt man an, daß $v(x) \leq v(ay_2)$, also insbesondere $v(x) < 0$, so lautet Bedingung (8.3.16)

$$-v(y_3) - v(x) + v(x - ay_2) \geq m,$$

was wegen $v(y_3) < -m$ und $v(x - ay_2) \geq v(x)$ erfüllt ist. Ist $v(x) > v(ay_2)$, so schreibt sich (8.3.16) als

$$-v(1 - x) - v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \geq m,$$

was wegen (8.3.17) immer gegeben ist. Der zulässige Bereich für a in (β2) ist gegeben als

$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}).$$

Daher ist der Bereich von $1 - ay_2$ genau

$$\Big(1 - \frac{y_2y_3}{1 + y_2y_3}\Big)\Big(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}\Big).$$

Daraus schließt man:

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})} \chi_1^{-2}(1 - ay_2)\ d^\times a \\
&= \chi_1^2(1 + y_2y_3) \int_{\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}} \chi_1^{-2}(1 + a')\ da' \\
&= \chi_1^2(1 + y_2y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\delta(c(\chi_1^2) \leq m - v(y_3) - v(1 + y_2y_3)) \cdot \text{const.}.
\end{aligned}$$

Man erhält das innere Integral zu

$$\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\delta(c(\chi_1^2)\leq m-v(y_3)-v(1+y_2y_3))$$
$$\cdot\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2)\cdot\text{const.},$$

wobei $n_3=\min\{-m,-m-v(1-x)\}$ und $n_2=\min\{m,-m-v(1-x)\}$ gesetzt wurde. Die zugehörigen Local Linking Numbers befinden sich in Abschnitt 8.11.4.

Fall (ii) (γ):
Hier gilt $v(ay_2)=0$ und $0\leq v(1-ay_2)=-v(y_2)-v(y_3)$.

Fall (ii) (γ1):
Hier ist $v(y_2)+v(y_3)=0$, und daher auch $v(1-ay_2)=0$. Bedingung (8.3.13) erzwingt

$$v(r)=-v(1-x)\geq m+v(y_3),$$

also $v(y_3)\leq -m-v(1-x)$. Mit dieser Bedingung sieht man schnell, daß (8.3.2), das heißt

$$-v(1-x)-v(y_3)+v(x-ay_2)\geq m,$$

immer erfüllt ist. Außerdem ist

$$a\in\frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)}).$$

Das impliziert

$$1-ay_2\in\frac{1}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)}).$$

Das gibt ein Integral

$$\int_{\frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)})}\chi_1^{-2}(1-ay_2)\ d^\times a=\chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(y_3)}\operatorname{vol}^\times(1+\wp^m),$$

also ein gesamtes inneres Integral

$$\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp))}(y_2)\cdot\text{const.},$$

wobei $n_3:=\min\{-m,-m-v(1-x)+1\}$. Die Linking Numbers, die sich daraus ergeben, stehen in Abschnitt 8.11.4.

Fall (ii) (γ2):
Nun ist $0 < v(1-ay_2) = -v(y_2) - v(y_3)$. Bedingung (8.3.13) ist hier gleichbedeutend zu

$$v(y_2) \leq -m - v(1-x) - 2v(y_3).$$

Man hat somit die Bedingung $m \leq v(y_2) < \min\{-v(y_3), -m - v(1-x) - 2v(y_3) + 1\}$. Ist dieses Minimum gleich $-m - v(1-x) - 2v(y_3) + 1$, so folgt $-m > v(y_3) \geq -m - v(1-x)$. Dann hat man die obere Schranke $v(y_2) < -v(y_3) \leq m + v(1-x)$, insgesamt also einen Bereich, der von Reduktion 8.3 abgedeckt wird. Daher sei im folgenden $v(y_3) < -m - v(1-x)$, also $v(y_2) < -v(y_3)$. Mit dieser Bedingung verifiziert man sofort (8.3.2), was hier gerade

$$v(x - ay_2) \geq m + v(1-x) + v(y_3)$$

entspricht. Außerdem ist

$$a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1 + \wp^{m-2v(y_3)-v(y_2)}),$$

also

$$1 - ay_2 = 1 - \frac{y_2y_3(1+a')}{1+y_2y_3} \in \frac{1}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)}).$$

Somit ergibt das Integral

$$\int_{\frac{y_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-2v(y_3)-v(y_2)})} \chi_1^{-2}(1-ay_2)\, d^\times a = \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{2(y_3)+v(y_2)}\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^m).$$

Und man erhält mit $n_3 := \min\{-m, -m - v(1-x)\}$ das innere Integral

$$\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1)q^{2(y_3)+v(y_2)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2)\cdot \text{const.},$$

dessen Linking Numbers in Abschnitt 8.11.3 aufgelistet sind.

8.4 Gleichung (I): $z_2 \neq 0$ und $z_3 = 0$

Es wird zunächst untersucht, wann wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in 1 + \wp^m \tag{8.4.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in z_2 + \wp^m \tag{8.4.2}$$

$$-s(a(1 + y_2y_3) - y_3) \in \wp^m \tag{8.4.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in 1 + \wp^m \tag{8.4.4}$$

Die Determinantenbedingung ergibt

$$-r \in (1 - x)^{-1}(1 - ay_2)(1 + \wp^m + z_2\wp^m). \tag{8.4.5}$$

Nimmt man an, daß (8.4.2) erfüllt ist, und setzt dies in (8.4.1) ein, so erhält man

$$-r \in 1 - r(-y_2 + a^{-1}x)y_3 + \wp^m \subset 1 - z_2y_3 + \wp^{m+v(y_3)} + \wp^m. \tag{8.4.6}$$

Statt der Bedingungen (8.4.1) und (8.4.2) werden im folgenden die dazu gleichbedeutenden Bedingungen (8.4.6) und (8.4.2) mit hilfe von (8.4.5) untersucht. Die Bedingungen (8.4.3) und (8.4.4) sind dieselben wie die im Fall $z_2 = 0$ (Abschnitt 8.3) und werden hier übernommen:
(i) $v(y_3) \geq m$ und $v(\frac{a}{ay_2-1}) \geq m$:

- (α) $v(a) > -v(y_2)$ und $v(a) \geq m$
- (β) $v(a) < -v(y_2)$ und $v(y_2) \leq -m$
- (γ) $v(a) = -v(y_2)$: $a \in y_2^{-1}\big(\mathbf{o}_F^\times \backslash (1 + \wp^{-m-v(y_2)+1})\big)$ und $v(y_2) \leq -m$

(ii) $v(y_3) = v(\frac{a}{ay_2-1}) < m$:

- (α) $v(y_3) = v(a) > -v(y_2)$ und

$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)})$$

- (β) $v(a) < -v(y_2)$ und $v(y_3) = -v(y_2)$:
  - ($\beta 1$) $y_2 \in -y_3(1 + \wp^{m-v(y_3)})$ und $v(a) \leq 2v(y_3) - m$
  - ($\beta 2$) $y_2 \in -y_3^{-1}\big((1 + \wp)\backslash(1 + \wp^{m-v(y_3)})\big)$ und

$$a \in \frac{y_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$$

- (γ) $v(a) = -v(y_2)$ und $0 \leq v(1 - ay_2) = -v(y_2) - v(y_3)$:
  - ($\gamma 1$) $y_2 \in -y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times \backslash (1 + \wp))$ und
  $$a \in \frac{y_3}{1 + y_2 y_3}(1 + \wp^{m - v(y_3)})$$
  - ($\gamma 2$) $v(y_2) < -v(y_3)$ und
  $$a \in \frac{y_3}{1 + y_2 y_3}(1 + \wp^{m - v(y_3) - v(y_2 y_3)}).$$

Nun werden die Bedingungen (8.4.5), (8.4.6) und (8.4.2) in diesen verschiedenen Fällen untersucht:

Fall (i):

Der Bereich der (y_2, y_3), in dem $v(y_2) \geq \min\{-m, -m + v(x) - v(1-x)\}$ gilt, ist kompakt und kann wegen Reduktion 8.2 vernachlässigt werden. Im folgenden sei daher immer

$$v(y_2) < \min\{-m, -m + v(x) - v(1 - x)\} \tag{8.4.7}$$

angenommen.
Bedingung (8.4.6) wird hier wegen der Wahl von m zu

$$-r \in (1 - z_2 y_3)(1 + \wp^m). \tag{8.4.8}$$

Betrachtet man die Bewertungen von (8.4.8) und (8.4.5), so erhält man

$$v(r) = -v(1 - x) + v(1 - ay_2) = v(1 - z_2 y_3) = 0,$$

also $v(1 - ay_2) = v(1 - x)$. Außerdem können (8.4.8) und (8.4.5) nur gleichzeitig erfüllt werden, wenn

$$(1 - ay_2) \in (1 - x)(1 - z_2 y_3)(1 + \wp^m + \wp^{m + v(z_2)}).$$

Nach a aufgelöst heißt das im Fall $v(z_2) \geq 0$

$$a \in \frac{x + z_2 y_3 (1 - x)}{y_2}(1 + \wp^{m + v(1-x) - v(x + z_2 y_3 (1-x))}) \tag{8.4.9}$$

und im Fall $v(z_2) < 0$

$$a \in \frac{x + z_2 y_3 (1 - x)}{y_2}(1 + \wp^{m + v(z_2) + v(1-x) - v(x + z_2 y_3 (1-x))}). \tag{8.4.10}$$

In beiden Fällen ist dann

$$-r \in (1 - z_2 y_3)(1 + \wp^m). \tag{8.4.11}$$

Die weiteren Schritte setzen $v(z_2) \geq 0$ voraus. Im Fall $v(z_2) < 0$ schließt man völlig analog (es ist lediglich immer ein Term $v(z_2)$ mitzuführen), und man kommt auf dasselbe Ergebnis.
Da $v(r) = 0$, folgt aus (8.4.2)

$$v(-y_2 + a^{-1}x) = v(z_2),$$

also

$$a \in \frac{x}{y_2}\Big((1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)})\backslash(1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)+1})\Big).$$

Zusammen mit (8.4.9) heißt das

$$\begin{aligned} a \quad \in \quad & \frac{x}{y_2}\big((1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)})\backslash(1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)+1})\big) \\ & \cap \frac{x}{y_2}(1 + z_2 y_3 \frac{1-x}{x})(1 + \wp^{m+v(1-x)-v(x+z_2 y_3(1-x))}). \end{aligned} \tag{8.4.12}$$

Es sei nun zunächst $m+v(1-x)-v(x+z_2y_3(1-x)) > 0$. Weil $v(z_2y_3(1-x)) > m+v(1-x)$, ist das gleichbedeutend zu $v(x) < m+v(1-x)$, also zu $v(x) < m$. Dann lautet (8.4.12)

$$a \in \frac{x}{y_2}\big((1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)})\backslash(1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)+1})\big) \cap \frac{x}{y_2}(1 + \wp^{m+v(1-x)-v(x)}).$$

Wegen (8.4.7) ist dies dasselbe wie

$$a \in \frac{x}{y_2}\Big((1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)})\backslash(1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)+1})\Big). \tag{8.4.13}$$

Ist andererseits $m+v(1-x)-v(x+z_2y_3(1-x)) \leq 0$, also $v(x) \geq m$, so lautet (8.4.12)

$$a \in \frac{x}{y_2}\big((1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)})\backslash(1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)+1})\big) \cap \wp^{m-v(y_2)},$$

was wiederum

$$a \in \frac{x}{y_2}\Big((1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)})\backslash(1 + \wp^{v(z_2)-v(y_2)+1})\Big),$$

also (8.4.13), ergibt.
Setzt man nun $a^{-1} = \frac{y_2}{x}(1 + a')$ und $r = (1 - z_2y_3)(1 + r')$ in (8.4.2), so gibt das

$$r(-y_2 + a^{-1}x) = (1 - z_2y_3)(1 + r')y_2a' \in z_2(1 + \wp^{m-v(z_2)}),$$

beziehungsweise, wegen $v(r') \geq m$,

$$a' \in \frac{z_2}{y_2(1 - z_2 y_3)}(1 + \wp^{m - v(z_2)}),$$

kombiniert mit (8.4.13):

$$a^{-1} \in \frac{y_2}{x}(1 + \frac{z_2}{y_2(1 - z_2 y_3)})(1 + \wp^{m - v(y_2)}),$$

also

$$a \in \frac{x}{y_2}(1 + \frac{z_2}{y_2(1 - z_2 y_3)})^{-1}(1 + \wp^{m - v(y_2)}). \tag{8.4.14}$$

Die Bedingungen (8.4.6), (8.4.5) und (8.4.2) sind also hier gleichbedeutend zu (8.4.14) und (8.4.11). Dafür prüft man nun die Fälle (α)–(γ):

Fall (i) (α):

Die Bedingung $v(a) > -v(y_2)$ ist gleichbedeutend zu $v(x) > 0$, und dann ist $v(a) = v(x) - v(y_2) > m$. Die zweite Forderung ist also immer erfüllt.

Fall (i) (β):

Die Bedingung $v(a) < -v(y_2)$ ist gleichbedeutend zu $v(x) < 0$, und $v(y_2) \leq -m$ wird von (8.4.7) gesichert.

Fall (i) (γ):

Die Bedingung $v(a) = -v(y_2)$ ist gleichbedeutend zu $v(x) = 0$, und $v(y_2) \leq -m$ wird wiederum von (8.4.7) impliziert. Zusätzlich muß hier

$$a \in y_2^{-1}\big(\mathbf{o}_F^\times \backslash (1 + \wp^{-m - v(y_2) + 1})\big) \tag{8.4.15}$$

erfüllt werden. Da $m + v(z_2) - v(y_2) > v(z_2) - v(y_2) \geq -m - v(y_2) + 1$, sind (8.4.15) und (8.4.14) zugleich genau dann erfüllt, wenn

$$x(1 + \frac{z_2}{y_2(1 - z_2 y_3)})^{-1} \cap (1 + \wp^{-m - v(y_2) + 1}) = \emptyset,$$

also wenn $v(1-x) \leq -m - v(y_2) + 1$. Letzteres ist wegen (8.4.7) immer gegeben.

Zusammenfassung Fall (i):

Der hier relevante Bereich ist für beliebiges x gegeben durch

$$v(y_3) \geq m, \quad v(y_2) < n_2 := \min\{-m, -m + v(x) - v(1-x)\}.$$

Hierbei ist

$$a \in \frac{x}{y_2}(1 + \frac{z_2}{y_2(1 - z_2 y_3)})^{-1}(1 + \wp^{m - v(y_2)}).$$

Der Faktor $\chi_1^{-2}(1 - ay_2)$ ergibt sich mit $a = \frac{x}{y_2}(1 + a')$ zu

$$\chi_1^{-2}(1 - ay_2) = \chi_1^{-2}(1-x)\chi_1^{-2}(1 - \frac{xa'}{1-x}) = \chi_1^{-2}(1-x),$$

denn $v(\frac{xa'}{1-x}) = v(x) - v(1-x) + v(z_2) - v(y_2) \geq v(z_2) + m \geq c(\chi_1)$. Dies ergibt einen Faktor $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(1 - ay_2)\chi_1(x-1) = \chi_1^{-1}(x-1)$. Das innere Integral liefert demnach den Beitrag

$$\chi_1^{-1}(x-1)\mathbf{1}_{\wp^m}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_2}}(y_2)q^{v(y_2)} \cdot \text{const.}.$$

Die Linking Numbers, die sich daraus ergeben, sind in Abschnitt 8.11.1 aufgelistet.

Fall (ii):

Gibt man die Bedingung $-m \leq v(y_3) < m$ vor, so erhält man in den Fällen (α), (β) und $(\gamma 1)$ einen kompakten Bereich für (y_2, y_3), der von Reduktion 8.2 erfaßt wird. Im Fall $(\gamma 2)$ ist $v(y_2) < -v(y_3)$, also nach Reduktion 8.5 nur die äußere Funktion $\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)$ von Belang. Zusammen mit $-m \leq v(y_3) < m$ ergibt das den kompakten Bereich $v(a_3) - m < v(b) \leq m + v(a_3)$, in dem der Träger der Local Linking Number enthalten sein muß. Dieser Bereich ist nicht von Interesse für die Analyse der Linking Numbers für $v(b) \to \pm\infty$.
Man kann sich also in Fall (ii) auf den Bereich

$$v(y_3) < -m$$

zurückziehen.
Die Bedingung (8.4.6) wird hier zu

$$-r \in (1 - z_2 y_3)(1 + \wp^{m - v(z_2)}). \tag{8.4.16}$$

Um die Bedingungen (8.4.5) und (8.4.16) gleichzeitig zu erfüllen, muß gelten

$$1 - ay_2 \in (1-x)(1 - z_2 y_3)(1 + \wp^m + \wp^{m - v(z_2)} + \wp^{m + v(z_2)}).$$

Nach a aufgelöst heißt das

$$a \in \frac{x + z_2 y_3(1-x)}{y_2}(1 + \wp^{m+v(z_2)-|v(z_2)|+v(y_3)+v(1-x)-v(x+z_2y_3(1-x))}). \quad (8.4.17)$$

Dabei ist für $v(z_2) \geq 0$

$$-r \in (1-x)^{-1}(1-ay_2)(1+\wp^m)$$

und für $v(z_2) < 0$

$$-r \in (1-z_2y_3)(1+\wp^{m-v(z_2)})$$

die jeweils schärfere Bedingung von (8.4.5) und (8.4.16).
Nun unterscheidet man nach (α)–(γ):

Fall (ii) (α):

Hier ist $v(ay_2) > 0$ und somit folgt aus (8.4.5) und (8.4.16), daß $v(r) = v(z_2) + v(y_3) = -v(1-x)$ gelten muß. Die Bewertung von y_3 ist also festgelegt, und für y_2 findet man $v(y_2) > -v(y_3) = v(1-x) + v(z_2)$. Das heißt, der Bereich zulässiger (y_2, y_3) ist kompakt und wird von Reduktion 8.2 abgedeckt.

Fall (ii) (β):

Die Bedingung $v(a) < -v(y_2)$ impliziert wegen (8.4.17) die Bedingung $v(x + z_2y_3(1-x)) < 0$. Denn unterscheidet man nach $v(x)$, so findet man:
Für $v(x) > 0$: $v(x + z_2y_3(1-x)) = v(z_2) + v(y_3) < 0$ ist immer erfüllt.
Für $v(x) < 0$: $v(x + z_2y_3(1-x)) = v(z_2) + v(y_3) + v(x) < 0$ ist immer erfüllt.
Für $v(x) = 0$: Damit $v(x+z_2y_3(1-x)) < 0$ gilt, muß $x \in \mathbf{o}_F^\times \backslash (1+\wp^{-v(z_2)-v(y_3)})$ erfüllt sein, also $v(y_3) < -v(1-x) - v(z_2)$.
In allen Fällen folgt $v(y_3) + v(1-x) - v(x + z_2y_3(1-x)) = -v(z_2)$ und somit

$$a \in \frac{x + z_2y_3(1-x)}{y_2}(1 + \wp^{m-|v(z_2)|}). \quad (8.4.18)$$

Ist $v(x+z_2y_3(1-x)) \geq 0$, also $x \in 1+\wp^{-v(z_2)-v(y_3)}$, so dürfte der Exponent von (8.4.17) nicht positiv sein, um $v(a) < -v(y_2)$ möglich zu machen. Es ist aber $m + v(z_2) - |v(z_2)| + v(y_3) + v(1-x) - v(y_2) \geq m - |v(z_2)| - v(y_2) > -v(y_2)$. Es fände sich dann also kein Bereich für a.
Fall (ii) (β1):
Die Bedingung $v(a) \leq 2v(y_3) - m$ wird mit (8.4.18) zu $v(x + z_2y_3(1-x)) - v(y_2) = v(z_2) + 2v(y_3) + v(1-x) \leq 2v(y_3) - m$, was $v(x) \leq -m - v(z_2) < 0$

impliziert. Setzt man $r = -(1 - z_2y_3)(1 + r')$ mit $r' \in \wp^{m-v(z_2)}$ und $a^{-1} = \frac{y_2}{x+z_2y_3(1-x)}(1+a')$ mit $a' \in \wp^{m-|v(z_2)|}$ ein in (8.4.2), so erhält man die Bedingung

$$r(-y_2+a^{-1}x) = -(1-z_2y_3)(1+r')(-y_2+\frac{y_2x(1+a')}{x+z_3y_3(1-x)}) \in z_2(1+\wp^{m-v(z_2)}),$$

was zusammen mit $y_2 = -y_3^{-1}(1 + y_2') \in -y_3^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_3)})$ gleichbedeutend ist zu

$$(1 + y_2' - \frac{y_2}{z_2})\frac{1 + \frac{a'}{z_2y_3(1-x^{-1})}}{1 - \frac{1}{z_2y_3(1-x^{-1})}} \in 1 + \wp^{m-v(z_2)}.$$

Dies ist wegen $v(y_2') \geq m - v(y_3) > 2m$, $v(\frac{y_2}{z_2}) > m - v(z_2)$ und $v(z_2y_3(1 - x^{-1})) = v(z_2) + v(y_3) < v(z_2) - m$ stets erfüllt.

Zusammenfassung Fall (ii) (β1): Der zulässige Bereich ist hier

$$v(y_3) < -m, \quad y_2 \in -y_3^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_3)}).$$

Dabei ist

$$v(x) \leq -m - v(z_2) \quad \text{und } a \in \frac{x + z_2y_3(1-x)}{y_2}(1 + \wp^{m-|v(z_2)|}).$$

Der Faktor $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(s)\chi_1(x-1)$ findet sich als

$$\begin{aligned}\chi_1(r^{-1}s) &= \chi_1^{-2}(1 - ay_2)\chi_1(x-1)\\ &= \chi_1^{-2}(1 - (x + z_2y_3(1-x))(1+a'))\chi_1(x-1)\\ &= \chi_1^{-2}(z_2y_3)\chi_1^{-1}(x-1).\end{aligned}$$

Das innere Integral ergibt somit

$$\chi_1^{-1}(x-1)\chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-m}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2) \cdot \text{const.}.$$

Die zugehörigen Local Linking Numbers befinden sich in Abschnitt 8.11.4.

Fall (ii) (β2):

Zusätzlich sei hier gefordert, daß $v(y_3) < n_3 := \min\{-m, -m - v(1-x)\}$ ist. Der Bereich der (y_2, y_3), den man hierbei vernachlässigt, ist kompakt und wird von Reduktion 8.2 abgedeckt.

Man setzte $a = \frac{x+z_2y_3(1-x)}{y_2}(1 + a')^{-1}$ aus (8.4.18) und $r = -(1 - z_2y_3)(1 + r')$ mit $r' \in \wp^{m-\frac{1}{2}(-v(z_2)-|v(z_2)|)}$ ein in (8.4.2) und erhalte

$$\begin{aligned}r(-y_2 + a^{-1}x) &= -(1 - z_2y_3)(1 + r')(-y_2)(1 - \frac{x(1+a')}{x + z_2y_3(1-x)})\\ &= z_2y_2y_3(-1 + \frac{1}{y_3z_2})(1 + r')(1 - \frac{x(1+a')}{x + z_2y_3(1-x)}) \in z_2(1 + \wp^{m-v(z_2)}).\end{aligned}$$

Da $v(\frac{x(1+a')}{x+z_3y_3(1-x)}) > m - v(z_2)$ nach Wahl von n_3, ist dies gleichbedeutend zu

$$y_2y_3(-1 + \frac{1}{y_3z_2}) \in 1 + \wp^{m-v(z_2)},$$

also zu

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1 + \wp^{m-v(z_2)}).$$

Außerdem muß hier

$$a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}) \cap \frac{x + z_2y_3(1-x)}{y_2}(1 + \wp^{m-|v(z_2)|}) \quad (8.4.19)$$

erfüllt werden. Die Bewertungen erzwingen somit $m - v(y_3) > v(1 + y_2y_3) = -v(x + z_2y_3(1-x)) = -v(z_2) - v(y_3) - v(1-x) \geq m - v(z_2)$, also $v(x) > -m - v(z_2)$. Nun wird unterschieden danach, welcher der beiden Exponenten in (8.4.19) der größere ist:
Sei $m + v(z_2) + v(1-x) \leq m - |v(z_2)|$. Dann ist (8.4.19) gleichbedeutend zu

$$a \in \frac{x + z_2y_3(1-x)}{y_2}(1 + \wp^{m-|v(z_2)|}), \quad (8.4.20)$$

falls

$$\frac{y_3}{1+y_2y_3} \in \frac{x + z_2y_3(1-x)}{y_2}(1 + \wp^{m+v(z_2)+v(1-x)}). \quad (8.4.21)$$

Ist dies nicht erfüllt, so gibt es keinen zulässigen Bereich für a. Die Bedingung (8.4.21) ist, wie man nach einer kleinen Rechnung sieht, gleichbedeutend zu

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1 - (x + z_2y_3(1-x))^{-1})(1 + \wp^{m-v(y_3)}) \quad (8.4.22)$$

Verglichen mit der Bedingung

$$y_2 \in -y_3^{-1}\big((1 + \wp^{m-v(z_2)})\backslash(1 + \wp^{m-v(y_3)})\big),$$

ist das eine zusätzliche Einschränkung, die aber immer erfüllt werden kann.

Sei nun $m + v(z_2) + v(1-x) > m - |v(z_2)|$. Dann ist (8.4.19) gleichbedeutend zu

$$a \in \frac{y_3}{1+y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}),$$

falls

$$\frac{y_3}{1+y_2y_3} \in \frac{x + z_2y_3(1-x)}{y_2}(1 + \wp^{m-|v(z_2)|}), \quad (8.4.23)$$

sonst ist der Bereich für a leer. Man rechnet nach, daß (8.4.23) gleichbedeutend ist zu

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1-(x+z_2y_3(1-x))^{-1})(1+\wp^{m-|v(z_2)|-v(x+z_2y_3(x-1))}),$$

was wie oben eine echte Einschränkung ist.
Zusammenfassung Fall (ii) (β2):
Hier ist der relevante Bereich von (y_2, y_3) gegeben durch

$$v(y_3) < \min\{-m, -m - v(1-x)\}$$

und

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1-(x+z_2y_3(1-x))^{-1})(1+\wp^{n_2-v(y_3)});$$

mit $n_2 = m$ oder $n_2 = m - |v(z_2)| - v(z_2) - v(1-x)$.
Den Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$ erhält man wie in (β1) als

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(1-ay_2)\chi_1(x-1) = \chi_1^{-1}(x-1)\chi_1^{-2}(z_2y_3),$$

und somit ist das innere Integral von der Form

$$\chi_1^{-1}(x-1)\chi_1^2(y_2)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1-(x+z_2y_3(x-1))^{-1})(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2)\cdot \text{const.}.$$

Die zugehörigen Linking Numbers finden sich in Abschnitt 8.11.4.

Fall (ii) (γ):

Fall (ii) (γ1): Hier ist $v(1-ay_2) = -v(y_2) - v(y_3) = 0$ und aus (8.4.5) und (8.4.16) folgt $v(y_3) = -v(1-x) - v(z_2)$. Der zulässige Bereich von (y_2, y_3) ist somit kompakt und braucht wegen Reduktion 8.2 nicht weiter untersucht zu werden.
Fall (ii) (γ2): Hier ist $0 < v(1-ay_2) = -v(y_2) - v(y_3)$ und (8.4.5) und (8.4.16) implizieren $v(r) = v(z_2) + v(y_3) = -v(1-x) - v(y_2) - v(y_3)$. Daraus folgt $v(y_2) = -2v(y_3) - v(1-x) - v(z_2) < -v(y_3)$, also $-v(1-x) - v(z_2) < v(y_3) < -m$ und $2m - v(1-x) - v(z_2) < v(y_2) < v(1-x) + v(z_2)$. Dies ist wieder ein kompakter Bereich und Reduktion 8.2 erledigt den Rest.

8.5 Gleichung (I): $z_2 \neq 0$ und $z_3 \neq 0$

Hier wird zunächst untersucht, wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in 1 + z_2 z_3 + \wp^m \tag{8.5.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in z_2 + \wp^m \tag{8.5.2}$$

$$-s(a - (1 - ay_2)y_3) \in z_3 + \wp^m \tag{8.5.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in 1 + \wp^m \tag{8.5.4}$$

Die Determinantenbedingung ergibt

$$-r \in (1 - x)^{-1}(1 - ay_2)(1 + \wp^m + z_2\wp^m), \tag{8.5.5}$$

denn man kann nach Reduktion 8.1 annehmen, daß $v(z_3) \geq 0$ gilt. Setzt man (8.5.2) ein in (8.5.1), so erhält man

$$-r \in 1 + z_2(z_3 - y_3) + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.5.6}$$

Statt der Relationen (8.5.1) und (8.5.2), kann man äquivalent (8.5.2) und (8.5.6) untersuchen.
(8.5.4) und (8.5.3) sind gleichbedeutend zu

$$s \in (1 - ay_2)^{-1}(1 + \wp^m) \tag{8.5.7}$$

und

$$\frac{a}{ay_2 - 1} \in (z_3 - y_3)(1 + \wp^{m-v(z_3-y_3)}). \tag{8.5.8}$$

Für diese wird nun unterschieden:

(i) Sei $m - v(z_3 - y_3) \leq 0$, also $y_3 \in z_3 + \wp^m$.
Insbesondere gilt hier $v(y_3) = v(z_3)$. Man unterteile den Bereich für y_2 willkürlich in zwei Teile $v(y_2) < n_2$ und $v(y_2) \geq n_2$. Dann fällt der erste unter Reduktion 8.3 und der zweite unter Reduktion 8.2. Den Fall (i) braucht man also nicht weiter zu untersuchen.
(ii) Sei $m - v(z_3 - y_3) > 0$, das heißt $y_3 \notin z_3 + \wp^m$.
Dann löst man (8.5.8) nach a^{-1} auf,

$$a^{-1} \in (y_2 - \frac{1}{z_3 - y_3})(1 + \wp^{m-v(z_3-y_3)-v(y_2(z_3-y_3)-1)}), \tag{8.5.9}$$

und erhält je nachdem, ob $m - v(z_3 - y_3) - v(y_2(z_3 - y_3) - 1)$ kleiner gleich oder größer als null ist, zwei Möglichkeiten:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & y_2 \in (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m - v(z_3 - y_3)}) \text{ und } v(a) \leq 2v(z_3 - y_3) - m, \\ (\beta) & y_2 \notin (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m - v(z_3 - y_3)}) \text{ und} \\ & a \in (y_2 - \dfrac{1}{z_3 - y_3})^{-1}(1 + \wp^{m - v(z_3 - y_3) - v(y_2(z_3 - y_3) - 1)}). \end{array}$$

Für diese Fälle untersucht man nun die Bedingungen (8.5.1), (8.5.2) und (8.5.5).

Fall (ii) (α)

Hier gilt $y_2 \in (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m - v(z_3 - y_3)})$ und $v(a) \leq 2v(z_3 - y_3) - m$. Da $v(y_2)$ durch $-m$ nach unten beschränkt ist, erhält man mit $v(y_3) \geq -m$ einen kompakten Bereich für (y_2, y_3), dessen Untersuchung dank Reduktion 8.2 nicht nötig ist. Es sei daher

$$v(y_3) < -m.$$

Dann ist $v(y_2) = -v(y_3)$ und $v(a) \leq 2v(y_3) - m$. Angenommen, es ist $v(x) \geq 0$. Dann folgt aus (8.5.2) und (8.5.5) durch Betrachtung der Bewertungen weil $v(1 - ay_2) = v(ay_2) < 0$, daß

$$v(z_2) = v(r) + v(-y_2 + a^{-1}x) = -v(1 - x) + v(a) - 2v(y_3) \leq -m,$$

im Widerspruch zu $v(z_2) > -m$. Also ist $v(x) < 0$.
Angenommen, $v(y_2) \geq v(a^{-1}x)$. Dann folgt wie eben

$$v(z_2) \geq -v(x) + v(a) - v(y_3) - v(a) + v(x) = -v(y_3) > m,$$

im Widerspruch zu $v(z_2) < m$. Also ist $v(y_2) < v(a^{-1}x)$, und das impliziert wiederum durch (8.5.2) und (8.5.5) sogar $v(x) \leq -m - v(z_2)$.
Bedingung (8.5.6) lautet hier

$$-r \in (1 + z_2 y_2^{-1})(1 + \wp^{m - v(z_2)}).$$

Zusammen mit (8.5.5) gibt das

$$-r \in (1-x)^{-1}(1-ay_2)(1+\wp^m+\wp^{m+v(z_2)}) \cap (1+z_2y_2^{-1})(1+\wp^{m-v(z_2)}). \quad (8.5.10)$$

Damit dieser Schnitt nicht leer ist, muß

$$(1 - ay_2) \in (1 - x)(1 + z_2 y_2^{-1})(1 + \wp^{m - |v(z_2)|})$$

erfüllt werden, also

$$a \in y_2^{-1}(x - z_2 y_2^{-1}(1-x))(1+\wp^{m-|v(z_2)|}).$$

Um zu prüfen, ob alle Relationen (8.5.1)–(8.5.5) erfüllt sind, genügt es, nun r und a in (8.5.2) einzusetzen. r hat eine Darstellung $r = -(1+z_2 y_2^{-1})(1+r')$ mit $r' \in \wp^{m-v(z_2)}$. Man rechnet

$$r(-y_2 + a^{-1}x) = z_2(1 + y_2 z_2^{-1} + a^{-1}x(z_2^{-1} + y_2^{-1}))(1+r')$$

und betrachtet die Bewertungen

$$\begin{aligned} v(a^{-1}x(z_2^{-1}+y_2^{-1})) &= -v(a) + v(x) + v(y_3) + v(1+z_2^{-1}y_2) \\ &= v(y_2) - v(z_2) > m - v(z_2). \end{aligned}$$

Also ist

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in z_2(1+\wp^{m-v(z_2)}),$$

und das ist (8.5.2).

Zusammenfassung:

Der einzige Bereich, der in Fall (ii)(α) eine Rolle spielt, ist

$$v(y_3) < -m, \qquad y_2 \in (z_3 - y_3)^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)}).$$

Hier ist $v(x) \leq -m - v(z_2)$ und

$$a \in y_2^{-1}(x - z_2 y_2^{-1}(1-x))(1+\wp^{m-|v(z_2)|}).$$

Das innere Integral ergibt sich als Funktion von (y_2, y_3) zu

$$\chi_1^2(y_2)\mathbf{1}_{\wp^{m+v(z_2)}}(x^{-1})\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-m}}(y_3)\mathbf{1}_{(z_3-y_3)^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2)\cdot \text{const.},$$

denn

$$\begin{aligned} \chi_1(r^{-1}s) &= \chi_1^{-2}(1-ay_2)\chi_1(x-1) \\ &= \chi_1^{-2}(1-(x-z_2y_2^{-1}(1-x))(1+a'))\chi_1(x-1) \\ &= \chi_1^{-2}(x-z_2y_2^{-1}(1-x))\chi_1(x-1) = \chi_1^{-2}(z_2y_2^{-1})\chi_1^{-1}(x-1) \end{aligned}$$

und die Integration nach a liefert

$$\int \mathbf{1}_{y_2^{-1}(x-z_2y_2^{-1}(1-x))(1+\wp^{m-|v(z_2)|})}(a)\ d^\times a = \mathrm{vol}^\times(1+\wp^{m-|v(z_2)|}) = \text{const.}.$$

Die Local Linking Numbers, die nun auftreten können findet man in Abschnitt 8.11.4.

Fall (ii) (β)

Hier ist $y_3 \notin z_3 + \wp^m$,

$$y_2 \notin (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m - v(z_3 - y_3)})$$

und

$$a \in (y_2 - \frac{1}{z_3 - y_3})^{-1}(1 + \wp^{m - v(z_3 - y_3) - v(y_2(z_3 - y_3) - 1)}). \tag{8.5.11}$$

Weil nach Reduktion 8.2 kompakte Bereiche von (y_2, y_3) bereits das vermutete Verhalten der Local Linking Numbers implizieren, kann man annehmen, in einem der folgenden Bereiche zu arbeiten:
(a) $v(y_2) < n_2$ und $v(y_3) > n_3$,
(b) $v(y_2) > n_2$ und $v(y_3) < n_3$,
(c) $v(y_2) < n_2$ und $v(y_3) < n_3$,
mit jeweils beliebig wählbaren ganzen Konstanten n_2, n_3. Den Fall (c) kann man unter Berufung auf Reduktion 8.3 beiseite lassen.

Fall (ii) (β) (a)

Man wähle

$$v(y_3) \geq 2m \quad \text{und} \quad v(y_2) < -m.$$

Dann ist $v(z_3 - y_3) = v(z_3)$, $v(y_2(z_3 - y_3) - 1) = v(y_2) + v(z_3)$ und

$$a \in (y_2 - \frac{1}{z_3 - y_3})^{-1}(1 + \wp^{m - 2v(z_3) - v(y_2)}),$$

mit $v(a) = -v(y_2)$. Außerdem findet man $v(1 - ay_2) = -v(1 - y_2(z_3 - y_3)) = -v(y_2) - v(z_3) > 0$. Relation (8.5.6) lautet hier

$$-r \in 1 + z_2 z_3 + \wp^m. \tag{8.5.12}$$

Das impliziert $v(r) = v(1 + z_2 z_3)$, falls $1 + z_2 z_3 \neq 0$. Zusammen mit (8.5.5) folgt

$$v(y_2) = -v(z_3) - v(1 + z_2 z_3) - v(1 - x).$$

Das heißt (in Abhängigkeit von x) ist der Bereich der zulässigen (y_2, y_3) immer kompakt und wird von Reduktion 8.2 abgedeckt.
Im Fall $1 + z_2 z_3 = 0$, also $z_2 = -z_3^{-1}$, mache man die Schranke für $v(y_2)$ noch kleiner. Der Bereich der (y_2, y_3), den man dabei vernachlässigt, hat kompakten Träger, wird also von Reduktion 8.2 erfaßt. Es sei $v(y_2) < n_2 := \min\{-m, -3m + v(x) - v(1 - x)\}$. Der Sinn dieser Einschränkung wird unten klar werden. Nun setze man (8.5.5) und a in (8.5.2) ein. Dazu schreibt man

$a = y_2^{-1}(1+a') = y_2^{-1}(1+\tilde{a})^{-1}$ mit $(1+a') = (1+\tilde{a})^{-1} \in (1 - y_2^{-1}(z_3 - y_3)^{-1})^{-1}(1+\wp^{m-2v(z_3)-v(y_2)})$. Damit ist

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in z_2(1+\wp^{m-v(z_2)})$$

gleichbedeutend zu

$$-a'y_2(1+\frac{x\tilde{a}}{x-1}) \in z_2(1+\wp^{m+v(z_2)}),$$

wenn man die Wahlfreiheit für $r \in (x-1)^{-1}(1-ay_2)(1+\wp^{m+v(z_2)})$ bedenkt, denn:

$$\begin{aligned}
&r(-y_2 + a^{-1}x)(1+r')^{-1} \\
&= (x-1)^{-1}(1-(1+a'))(-y_2)(1-x(1+\tilde{a})) \\
&= a'y_2(x-1)^{-1}(1-x)(1-\frac{\tilde{a}x}{1-x}) = -a'y_2(1+\frac{\tilde{a}x}{x-1}).
\end{aligned}$$

Durch Wahl der Schranke n_2 erhält man sogar

$$-a'y_2 \in z_2(1+\wp^{m+v(z_2)}). \tag{8.5.13}$$

Nach obiger Wahl findet man für a':

$$a' = \frac{1+a_1}{y_2(z_3-y_3)-1} + a_1 = \frac{1+a_1y_2(z_3-y_3)}{y_2(z_3-y_3)-1}$$

mit $a_1 \in \wp^{m-2v(z_3)-v(y_2)}$. Einsetzen von a' in (8.5.13) ergibt

$$\frac{y_2}{1-y_2(z_3-y_3)} \in z_2(1+\wp^{m+v(z_2)}),$$

denn $v(a_1y_2(z_3-y_3)) \geq m - v(z_3) = m + v(z_2)$. Aufgelöst nach y_2^{-1} lautet dies nun

$$y_2^{-1} \in \wp^m,$$

was durch die Voraussetzung $v(y_2) < n_2$ gegeben ist. Nun muß noch Bedingung (8.5.1) erfüllt werden. Setzt man dort die jetzt bereits erfüllte Bedingung (8.5.2) ein, so erhält man

$$-r \in -z_2y_3 + \wp^m = \wp^m.$$

Zusammen mit (8.5.5) heißt das $v(r) = -v(1-x) - v(y_2) - v(z_3) \geq m$, also $v(y_2) \leq -m - v(1-x) - v(z_3)$.

Zusammenfassung:
Der Bereich in Fall (ii) (β) (a), der nicht von den Reduktionen erfaßt wird, lautet

$$v(y_2) \leq n_2' := \min\{n_2 - 1, -m - v(1-x) - v(z_3)\}, \quad v(y_3) \geq 2m,$$

$$a \in (y_2 - \frac{1}{z_3 - y_3})^{-1}(1 + \wp^{m-2v(z_3)-v(y_2)}).$$

Der Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \chi_1(r^{-1}s) &= \chi_1^2(s)\chi_1(x-1) = \chi_1^{-2}(1-ay_2)\chi_1(x-1) \\ &= \chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3)) \end{aligned}$$

Das innere Integral ergibt somit

$$\chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_2'+1}}(y_2)\mathbf{1}_{\wp^{2m}}(y_3)q^{v(y_2)} \cdot \text{const.}.$$

Die zugehörigen Local Linking Numbers finden sich in Abschnitt 8.11.1.

Fall (ii) (β) (b)

Man wähle die Schranken

$$v(y_2) > m \quad \text{und} \quad v(y_3) < -m.$$

Damit erhält man $v(z_3 - y_3) = v(y_3)$ und $v(a) = v(y_3) - v(y_2(z_3 - y_3) - 1)$. Relation (8.5.6) lautet hier.

$$-r \in z_2(z_3 - y_3) + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.5.14}$$

Falls $v(y_2) > -v(y_3)$ gilt, dann ist $v(y_2(z_3 - y_3) - 1) = 0$, $v(ay_2) = v(y_2) + v(y_3) > 0$, also $v(1 - ay_2) = 0$. Die Bewertungen von (8.5.14) und (8.5.5) implizieren dann

$$-v(1-x) = v(z_2) + v(y_3).$$

Also ist der Bereich der zulässigen (y_2, y_3) gegeben durch $v(y_3) = -v(1-x) - v(z_2)$ und $v(y_2) > v(1-x) + v(z_2)$ kompakt und wird von Reduktion 8.2 erfaßt.

Gilt $v(y_2) < -v(y_3)$, so ist $v(y_2(z_3 - y_3) - 1) = v(y_2) + v(y_3) < 0$, also $v(ay_2) = 0$. Dann folgt aus Betrachtung der Bewertungen von (8.5.14) und (8.5.5)

$$v(y_3) = v(1 - ay_2) - v(z_2) - v(1-x) \geq -v(z_2) - v(1-x),$$

was mit $v(y_2) > m$ wiederum ein Fall für Reduktion 8.2 ist.

Gilt $v(y_2) = -v(y_3)$, so ist $0 \leq v(y_2(z_3 - y_3) - 1) < m - v(y_3)$.
Ist $v(y_2(z_3 - y_3) - 1) = 0$, so folgt aus (8.5.14) und (8.5.5) wieder mit dem Bewertungsargument

$$v(y_3) = v(1 - ay_2) - v(z_2) - v(1 - x) \geq -v(z_2) - v(1 - x),$$

also mit $v(y_2) > m$ ein Fall von Reduktion 8.2.
Es sei daher $0 < v(y_2(z_3 - y_3) - 1) < m - v(y_3)$. Damit (8.5.14) und (8.5.5) gleichzeitig erfüllt werden können, muß

$$1 - ay_2 \in (1 - x)(1 + z_2(z_3 - y_3))(1 + \wp^{m-|v(z_2)|})$$

gelten. Aufgelöst nach a lautet dies

$$a \in y_2^{-1}(1 - (1 - x)(1 + z_2(z_3 - y_3)))(1 + \wp^{m-|v(z_2)|}), \tag{8.5.15}$$

falls $x \notin 1 + \wp^{-v(z_2)-v(y_3)}$, das heißt falls $v(y_3) < -v(1-x) - v(z_2)$. Den übrigen Bereich $-v(1 - x) - v(z_2) \leq v(y_3) < -m$, $m < v(y_2)$ kann man, da kompakt, beiseite lassen. Nun muß bestimmt werden, wann sowohl (8.5.11) und (8.5.15) erfüllt werden können. Das ist nur möglich, wenn

$$1 - y_2^{-1}(z_3 - y_3)^{-1} \in (x - (1 - x)(1 + z_2(z_3 - y_3)))(1 + \wp^{\min}),$$

wobei $\min := \min\{m - |v(z_2)|, m - v(z_3 - y_3) - v(y_2(z_3 - y_3) - 1)\}$ gesetzt wurde. Dies geschrieben als Bedingung an y_2^{-1} lautet

$$y_2^{-1} \in (z_3 - y_3)(1 - x)(1 + z_2(z_3 - y_3))(1 + \wp^{\min}),$$

was insbesondere für die Bewertung liefert

$$v(y_3) = -v(y_2) = v(1 - x) + v(y_3) + v(1 + z_2(z_3 - y_3)),$$

also $v(1+z_2(z_3-y_3)) = -v(1-x)$. Hiermit wird die Bewertung von y_3 festgelegt:

$$v(y_3) = -v(z_2) - v(1 - x).$$

Das ist wieder ein kompakter Bereich für (y_2, y_3), der wegen Reduktion 8.2 nicht weiter untersucht werden muß.

8.6 Gleichung (I): $z_2 = 0$ und $z_3 \neq 0$

Hier wird zunächst untersucht, wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in 1 + \wp^m \tag{8.6.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in \wp^m \tag{8.6.2}$$

$$-s(a(1 + y_2y_3) - y_3) \in z_3 + \wp^m \tag{8.6.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in 1 + \wp^m \tag{8.6.4}$$

Die Determinantenbedingung ergibt

$$-r \in (1 - x)^{-1}(1 - ay_2)(1 + \wp^m), \tag{8.6.5}$$

denn man kann nach Reduktion 8.1 annehmen, daß $v(z_3) \geq 0$ gilt. Setzt man (8.6.2) in (8.6.1) ein, so erhält man

$$-r \in 1 + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.6.6}$$

Die Relationen (8.6.3) und (8.6.4) sind dieselben wie (8.5.3) und (8.5.4) in Abschnitt 8.5. Also kann man die dort gemachte Fallunterscheidung übernehmen: Die einzigen Möglichkeiten, die von (8.6.3) und (8.6.4) impliziert werden und nicht von vornherein durch die Reduktionen aus Abschnitt 8.2 abgedeckt sind, sind:

$$\begin{array}{ll}
(\alpha) & y_3 \notin z_3 + \wp^m, \quad y_2 \in (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m-v(z_3-y_3)}) \text{ und} \\
 & v(a) \leq 2v(z_3 - y_3) - m, \\
(\beta) & y_3 \notin z_3 + \wp^m, \quad y_2 \notin (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m-v(z_3-y_3)}) \text{ und} \\
 & a \in (y_2 - \dfrac{1}{z_3 - y_3})^{-1}(1 + \wp^{m-v(z_3-y_3)-v(y_2(z_3-y_3)-1)}).
\end{array}$$

Fall (α):

Für $v(y_3) \geq -m$ ist $v(y_2)$ durch $-m$ nach unten beschränkt. Der zugehörige Bereich für (y_2, y_3) ist kompakt, dessen Untersuchung durch Reduktion 8.2 also nicht nötig. Es sei daher

$$v(y_3) < -m.$$

Dann ist $v(y_2) = -v(y_3)$ und $v(a) \leq 2v(y_3) - m$.
Nimmt man an, Bedingung (8.6.2) ist erfüllt, und setzt sie in (8.6.1) ein, so erhält man

$$-r \in \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.6.7}$$

Zusammen mit (8.6.5) heißt das

$$-v(1-x)+v(y_3)-m \geq v(r) = -v(1-x)+v(a)-v(y_3) \geq m+v(y_3).$$

Daraus folgt zum einen, daß $v(x) =\leq -2m$ sein muß und zum anderen ergibt sich eine untere Schranke für $v(a)$:

$$m+2v(y_3)+v(x) \leq v(a) \leq 2v(y_3)-m. \tag{8.6.8}$$

Diese Bedingungen nutzt man zum Studium von (8.6.2):

$$v(r(-y_2+a^{-1}x)) = -v(x)-v(y_3)+v(x-ay_2) \geq m. \tag{8.6.9}$$

Wenn $v(x) \leq v(ay_2)$ ist, so folgt $v(x)+m \leq v(y_3) < -m$, was den Bereich für (y_2, y_3) kompakt macht und Reduktion 8.2 wirksam.
Sei also $v(x) > v(ay_2)$. Dann ist (8.6.9) gleichbedeutend zu $m+2v(y_3)+v(x) \leq v(a)$. Das heißt, Bedingung (8.6.2) ist immer erfüllt. Nun hat man eine zusätzliche Bedingung an a:

$$m+2v(y_3)+v(x) \leq v(a) \leq \min\{2v(y_3)-m, v(x)+v(y_3)+1\}$$

Der Fall $2v(y_3)-m \geq v(x)+v(y_3)$ für zu der Einschränkung $v(x)+m \leq v(y_3) < -m$, das heißt auf einen kompakten Bereich, für den Reduktion 8.2 zuständig ist.
Deshalb sei $2v(y_3)-m < v(x)+v(y_3)$ angenommen. Man erhält also:
Zusammenfassung:
Der einzige Bereich, der in Fall (α) nicht von den Reduktionen erfaßt wird, ist der, in dem $v(x) \leq -2m$ gilt. Dann ist

$$v(y_3) < v(x)+m \quad \text{und} \quad y_2 \in (z_3-y_3)^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)}),$$

und der Bereich für a ist

$$m+2v(y_3)+v(x) \leq v(a) \leq 2v(y_3)-m.$$

Da der Faktor

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(1-ay_2)\chi_1(x-1) = \chi_1^{-2}(ay_2)\chi_1(x-1),$$

muß das Integral

$$\int_{m+2v(y_3)+v(x)\leq v(a)\leq 2v(y_3)-m} \chi_1^{-2}(a)\ d^\times a$$

berechnet werden. Ist $\chi_1^2 = 1$, so ist das schlicht

$$\int_{m+2v(y_3)+v(x)\leq v(a)\leq 2v(y_3)-m} d^\times a = \mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(-v(x) - 2m + 1) = \mathrm{const.}.$$

Wenn $\chi_1^2 \neq 1$, dann erhält man

$$\begin{aligned}
&\int_{m+2v(y_3)+v(x)\leq v(a)\leq 2v(y_3)-m} \chi_1^{-2}(a)\ d^\times a \\
&= \sum_{j=m+2v(y_3)+v(x)}^{2v(y_3)-m} \chi_1^{-2}(\pi^j) \int_{\mathbf{o}_F^\times} \chi_1^{-2}(a)\ d^\times a \\
&= \delta(c(\chi_1^2) = 0)\chi_1^{-2}(y_3^2)\Big(\chi_1(\pi)^{2m-2} - \chi_1^{-2}(x)\chi_1(\pi)^{-2m}\Big) \\
&\qquad \cdot(\chi_1^{-2}(\pi) - 1)^{-1}\,\mathrm{vol}(\mathbf{o}_F^\times).
\end{aligned}$$

Also gibt das im Fall $\chi_1^2 = 1$ ein inneres Integral der Form

$$\chi_1(x-1)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{(z_3-y_3)^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2)\cdot \mathrm{const.},$$

im Fall $\chi_1^2 \neq 1$ ein inneres Integral der Form

$$\chi_1^{-2}(y_2y_3^2)(c_1\chi_1(x-1) + c_2\chi_1^{-1}(x-1))\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{(z_3-y_3)^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2),$$

das nur auftritt, wenn $\delta(c(\chi_1^2) = 0)$ gegeben ist. Für den Vorfaktor gilt $\chi_1^{-2}(y_2y_3) = \chi_1^{-2}(y_3)\chi_1^2(1 - \frac{z_3}{y_3}) = \chi_1^{-2}(y_3)$. Die Linking Numbers, die sich daraus ergeben können, finden sich in Abschnitt 8.11.4.

Fall (β):

Hier ist $y_3 \notin z_3 + \wp^m$,

$$y_2 \notin (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m-v(z_3-y_3)})$$

und

$$a \in (y_2 - \frac{1}{z_3 - y_3})^{-1}(1 + \wp^{m-v(z_3-y_3)-v(y_2(z_3-y_3)-1)}).$$

Mit Reduktion 8.2 und 8.3 reicht es, die Bereiche
(a) $v(y_2) < n_2$ und $v(y_3) > n_3$,
(b) $v(y_2) > n_2$ und $v(y_3) < n_3$,
mit jeweils beliebig wählbaren ganzen Konstanten n_2, n_3, zu untersuchen.

Fall (β) (a):

Man wähle die Schranken

$$v(y_2) < -m \quad \text{und} \quad v(y_3) > m.$$

Dann ist

$$a \in (y_2 - \frac{1}{z_3 - y_3})^{-1}(1 + \wp^{m - v(y_2)}). \tag{8.6.10}$$

Es sei zunächst angenommen, daß (8.6.2) erfüllt ist. Dann setzt man die Bedingung in (8.6.1) ein und erhält

$$-r \in 1 + \wp^m. \tag{8.6.11}$$

Damit zusätzlich zu (8.6.11) auch (8.6.5) erfüllt ist, muß

$$-r \in (1 + \wp^m) \cap (1 - x)^{-1}(1 - ay_2)(1 + \wp^m)$$

gelten. Dieser Schnitt ist genau dann nicht leer, wenn

$$a \in \frac{x}{y_2}(1 + \wp^{m + v(1-x) - v(x)}). \tag{8.6.12}$$

Ist $v(x) \neq 0$ und $v(x) < m$, dann liest man aus (8.6.12) ab $v(a) = v(x) - v(y_2) \neq -v(y_2)$. Ist $v(x) \geq m$, so schließt man analog $v(a) \geq m - v(y_2)$. Beides ist ein Widerspruch zu (8.6.10). Daher ist hier $v(x) = 0$ zwingend. Damit a sowohl Bedingung (8.6.12) als auch (8.6.10) genügt, muß dann

$$\frac{x}{y_2} \in \frac{z_3 - y_3}{y_2(z_3 - y_3) - 1}(1 + \wp^{\min})$$

gelten. Dabei wurde zur Abkürzung $\min := \min\{m + v(1 - x), m - v(y_2)\}$ gesetzt. Also ist

$$x \in (1 - \frac{1}{y_2(z_3 - y_3) - 1})^{-1}(1 + \wp^{\min}),$$

was $v(1 - x) = -v(y_2) - v(z_3)$ festlegt. Somit ist der Bereich der zulässigen (y_2, y_3) gegeben durch $v(y_2) = -v(1-x) - v(z_3)$ und $v(y_3) > m$ kompakt, und Reduktion 8.2 greift erneut.

Fall (β) (b):

Man wähle die Schranken

$$v(y_2) \geq m, \qquad v(y_3) < -m.$$

Dann ist

$$a \in \frac{z_3 - y_3}{y_2(z_3 - y_3) - 1}(1 + \wp^{m - v(y_3) - v(y_2(z_3 - y_3) - 1)}). \tag{8.6.13}$$

Analog zu Fall (β) (a) nimmt man zunächst an, daß (8.6.2) gilt und setzt in (8.6.1) ein. Das gibt

$$-r \in \wp^{m + v(y_3)}. \tag{8.6.14}$$

Im Fall $v(y_2) > -v(y_3)$ folgt aus (8.6.5) und (8.6.14)

$$v(r) = -v(1 - x) \geq m + v(y_3),$$

also

$$v(y_3) \leq \min\{-m - 1, -m - v(1 - x)\}.$$

Setzt man (8.6.5) in (8.6.2) ein, so erhält man

$$v(r) + v(-y_2 + a^{-1}x) = -v(1 - x) - v(y_3) + v(x - ay_2) \geq m,$$

was von den letzten Bedingungen impliziert wird. Der zulässige Bereich lautet also

$$v(y_3) < n_3 := \min\{-m, -m - v(1 - x) + 1\}, \quad v(y_2) > -v(y_3)$$

mit

$$a \in \frac{z_3 - y_3}{y_2(z_3 - y_3) - 1}(1 + \wp^{m - v(y_3)}).$$

Weil

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(1 - ay_2)\chi_1(x - 1) = \chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\chi_1(x - 1)$$

und Integration nach a

$$\int \mathbf{1}_{\frac{z_3 - y_3}{y_2(z_3 - y_3) - 1}(1 + \wp^{m - v(y_3)})}(a)\ d^\times a = \mathrm{vol}^\times(1 + \wp^m)q^{v(y_3)}$$

liefert, hat das innere Integral die Gestalt

$$\chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\chi_1(x - 1)\mathbf{1}_{F \setminus \wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)} \cdot \text{const.}.$$

Die Linking Numbers, die dadurch auftreten können, werden in Abschnitt 8.11.2 berechnet.
Im Fall $v(y_2) < -v(y_3)$ ist $v(y_2(z_3 - y_3) - 1) = v(y_2) + v(y_3) < 0$, $v(a) = -v(y_2)$ und

$$v(1 - ay_2) = v(1 - (1 - y_2^{-1}(z_3 - y_3)^{-1})^{-1}) = -v(y_2) - v(y_3) > 0.$$

Betrachtet man also die Bewertung von (8.6.5), so erhält man zusammen mit (8.6.14)

$$v(r) = -v(1-x) - v(y_2) - v(y_3) \geq m + v(y_3). \tag{8.6.15}$$

Man schränke nun den Bereich von y_3 weiter ein, $v(y_3) < n_3 := \min\{-m, -m-v(1-x)+1\}$. Der Bereich $-m-v(1-x) < v(y_3) < -m$, den man dabei außer acht läßt, ist kompakt und fällt unter Reduktion 8.2. In dem neuen Bereich von y_3 ist die Bedingung

$$v(r) + v(-y_2 + a^{-1}x) = -v(1-x) - v(y_3) + v(x - ay_2) \geq m,$$

die man erhält, wenn man (8.6.15) in (8.6.2) einsetzt, immer erfüllt.
Der Bereich für (y_2, y_3) lautet also

$$v(y_3) < n_3, \quad m < v(y_2) < -v(y_3),$$

Für a hat man die Bedingung (8.6.13)

$$a \in \frac{z_3 - y_3}{y_2(z_3 - y_3) - 1}(1 + \wp^{m-2v(y_3)-v(y_2)}),$$

die

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(1 + ay_2)\chi_1(x-1) = \chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\chi_1(x-1)$$

impliziert und dem inneren Integral die Form

$$\chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\chi_1(x-1)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2)q^{2v(y_3)+v(y_2)} \cdot \text{const.}$$

gibt. Die dazu gehörenden Local Linking Numbers findet man in Abschnitt 8.11.3.

Im Fall $v(y_2) = -v(y_3)$ ist $0 \leq v(y_2(z_3 - y_3) - 1)$, und, da $y_2 \notin (z_3 - y_3)^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_3)})$ nach Voraussetzung von Fall (β), ist $v(y_2(z_3 - y_3) - 1) < m - v(y_3)$. Man findet außerdem

$$v(ay_2) = v(1 - ay_2) = -v(y_2(z_3 - y_3) - 1).$$

Setzt man r aus (8.6.5) ein in (8.6.14), so erhält man

$$v(r) = -v(1-x) - v(y_2(z_3 - y_3) - 1) \geq m + v(y_3), \tag{8.6.16}$$

was $0 \leq v(y_2(z_3 - y_3) - 1) \leq -v(1-x) - m - v(y_3)$ und $v(y_3) \leq -m - v(1-x)$ impliziert. Setzt man (8.6.16) ein in (8.6.2), dann erhält man

$$v(r) + v(-y_2 + a^{-1}x) = -v(1-x) - v(y_3) + v(x - ay_2) \geq m. \tag{8.6.17}$$

Mit Hilfe einer Fallunterscheidung nach $v(x)$ sieht man, daß (8.6.17) immer erfüllt ist: Ist $v(x) \geq v(ay_2)$, so folgt

$$v(x - ay_2) \geq -v(y_2(z_3 - y_3) - 1) \geq m + v(y_3) + v(1 - x),$$

was nichts anderes als (8.6.17) ist. Ist $v(x) < v(ay_2)$, dann ist insbesondere $v(x) < 0$ und (8.6.17) gleichbedeutend zu

$$v(x) \geq m + v(y_3) + v(x),$$

also zu $v(y_3) \leq -m$, was in Fall (β) (b) immer erfüllt ist. Der Bereich der zulässigen y_2 ist nun wegen $v(y_2) = -v(y_3)$

$$y_2 \in (z_3 - y_3)^{-1}\big(\mathbf{o_F}^\times \backslash ((1 + \wp^{-m-v(y_3)-v(1-x)}) \cup (1 + \wp^{m-v(y_3)}))\big),$$

also für $v(x) < -2m$

$$y_2 \in (z_3 - y_3)^{-1}\big(\mathbf{o_F}^\times \backslash (1 + \wp^{m-v(y_3)})\big),$$

und für $v(x) \geq -2m$

$$y_2 \in (z_3 - y_3)^{-1}\big(\mathbf{o_F}^\times \backslash (1 + \wp^{-m-v(y_3)-v(1-x)})\big).$$

Der Bereich für y_3 ist

$$v(y_3) < n_3 := \min\{-m, -m - v(1 - x) + 1\},$$

für a gilt laut (8.6.10)

$$a \in \frac{z_3 - y_3}{y_2(z_3 - y_3) - 1}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(y_2(z_3-y_3)-1)}).$$

Das gibt wiederum den Faktor $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\chi_1(x - 1)$. Somit lautet das innere Integral

$$\begin{aligned}&\chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\chi_1(x - 1)\\ &\quad\cdot \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{(z_3-y_3)^{-1}(\mathbf{o_F}^\times\backslash(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)q^{v(y_3)+v(y_2(z_3-y_3)-1)} \cdot \text{const.},\end{aligned}$$

mit $n_2 = m$ bzw. $n_2 = -m - v(1 - x)$. Die Local Linking Numbers, die daraus entstehen, findet man, wenn man die Ergebnisse des 3. und 5. Falls in Abschnitt 8.11.4 mit den entsprechenden, dort erläuterten Substitutionen addiert.

8.7 Gleichung (II): $z_1 = 0$ und $z_4 = 0$

Hier wird erst einmal untersucht, wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in \wp^m \tag{8.7.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in -1 + \wp^m \tag{8.7.2}$$

$$-s(a - (1 - ay_2)y_3) \in 1 + \wp^m \tag{8.7.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in \wp^m \tag{8.7.4}$$

Die Determinantenbedingung ist

$$rs(x - 1) \in 1 + \wp^m. \tag{8.7.5}$$

Nimmt man an, daß (8.7.2) erfüllt ist, und setzt dies in (8.7.1) ein, so erhält man

$$-r \in y_3 + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.7.6}$$

Aufgrund von Reduktion 8.4 reicht es, die zwei Bereiche
(i) $v(y_3) \geq n_3$ und $v(y_2) < n_2$
und
(ii) $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) \geq n_2$
mit jeweils geeignet wählbaren Schranken n_2, n_3 zu betrachten.

Fall (i): $v(y_3) \geq n_3$ **und** $v(y_2) < n_2$

Man wähle

$$n_2 := \min\{-m, -m - v(1 - x)\} \quad \text{und} \quad n_3 := m.$$

Setzt man (8.7.4) in (8.7.3) ein, so gibt das

$$-sa \in 1 + \wp^m. \tag{8.7.7}$$

Dies macht aus (8.7.4) die Bedingung

$$v(1 - ay_2) \geq m + v(a), \tag{8.7.8}$$

und (8.7.3) impliziert damit wiederum

$$a - (1 - ay_2)y_3 \in a(1 + \wp^{m+v(y_3)}).$$

Ist $v(ay_2) > 0$, so folgt mit (8.7.8), daß $-v(y_2) < v(a) \leq -m$, also insbesondere $v(y_2) > m$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von n_2.

Ist $v(ay_2) < 0$, so impliziert (8.7.8) wieder $v(y_2) \geq m$.
Es gilt also $v(a) = -v(y_2)$, und (8.7.8) nach a aufgelöst lautet

$$a \in y_2^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}). \tag{8.7.9}$$

Setzt man (8.7.7) in die Determinatenbedingung (8.7.5) ein, so erhält man

$$-r \in a(x-1)^{-1}(1 + \wp^m).$$

$-r$ in (8.7.2) liefert nun die Bedingung

$$a \in y_2^{-1}(1 + \wp^{m+v(1-x)}),$$

was, verglichen mit (8.7.9), keine neue Bedingung ist, denn $v(y_2) < -m - v(1-x)$. Es bleibt, Bedingung (8.7.1) zu prüfen:

$$-r \in \wp^m - r(-y_2 + a^{-1}x)y_3 = \wp^m,$$

wegen der Wahl von n_3. Dies ist erfüllt, weil $v(r) = -v(y_2) - v(x-1) \geq m$.
Der Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$ ergibt sich zu

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(s)\chi_1(x-1) = \chi_1^{-2}(a)\chi_1(x-1) = \chi_1^2(y_2)\chi_1(x-1),$$

das Integral nach a demnach zu

$$\int_{y_2^{-1}(1+\wp^{m-v(y_2)})} \chi_1(r^{-1}s)\ d^\times a = \chi_1^2(y_2)\chi_1(x-1)q^{v(y_2)}\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^m).$$

Das innere Integral hat somit die Gestalt

$$\chi_1(x-1)\chi_1^2(y_2)\mathbf{1}_{\wp^m}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_2}}(y_2)q^{v(y_2)} \cdot \mathrm{const.}.$$

Die hieraus möglichen Local Linking Numbers finden sich in Abschnitt 8.11.1.

Fall (ii): $v(y_3) < n_3$ **und** $v(y_2) \geq n_2$

Hier wähle man

$$n_2 := m \quad \text{und} \quad n_3 := \min\{-m, -m - v(1-x), -m - v(x)\}.$$

Setzt man (8.7.2) in (8.7.1) ein, so erhält man

$$-r \in y_3(1 + \wp^m). \tag{8.7.10}$$

(8.7.2) und (8.7.10) zusammen lauten also

$$-r \in y_3(1+\wp^m) \cap (-y_2 + a^{-1}x)^{-1}(1+\wp^m) = y_3(1+\wp^m), \tag{8.7.11}$$

falls

$$-y_2 + a^{-1}x \in y_3^{-1}(1 + \wp^m),$$

also falls

$$a^{-1} \in \frac{1 + y_2y_3}{xy_3}(1 + \wp^{m-v(1+y_2y_3)}).$$

(8.7.1) gibt eine noch stärkere Bedingung an a: $-r$ aus (8.7.11) in (8.7.1) gibt

$$1 + y_2y_3 - a^{-1}xy_3 \in \wp^{m-v(y_3)},$$

also

$$a^{-1} \in \frac{1 + y_2y_3}{xy_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}).$$

Fall(α): Für $v(1 + y_2y_3) < m - v(y_3)$ heißt das

$$a \in \frac{xy_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}). \tag{8.7.12}$$

Fall(β): Für $v(1 + y_2y_3) \geq m - v(y_3)$ heißt es lediglich

$$v(a) \leq -m + 2v(y_3) + v(x). \tag{8.7.13}$$

Man lege diese Fälle für einen Moment beiseite, um die Bedingungen (8.7.3) und (8.7.4) zu untersuchen. Setzt man (8.7.10) in (8.7.5), so gibt das

$$-s \in (y_3(x - 1))^{-1}(1 + \wp^m). \tag{8.7.14}$$

Dies wiederum in (8.7.3) ergibt

$$a(1 + y_2y_3) - y_3 \in y_3(x - 1)(1 + \wp^m),$$

also

$$a \in \frac{xy_3}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m+v(1-x)-v(x)}). \tag{8.7.15}$$

Es muß noch (8.7.4) erfüllt werden mit s aus (8.7.14):

$$v(1 - ay_2) \geq m + v(y_3) + v(1 - x). \tag{8.7.16}$$

Nun unterscheidet man nach der Bewertung von x:
1. Fall: $v(x) < m$
Hier ist der Exponent $m+v(1-x)-v(x)$ positiv. Da $m+v(y_3)+v(1-x) < 0$ nach Wahl von n_3, ist Bedingung (8.7.16) im Fall $v(ay_2) \geq 0$ immer erfüllt. Da $v(a) = v(x) + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$, ist $v(ay_2) \geq 0$ gleichbedeutend zu $v(x)+v(y_2y_3) \geq v(1+y_2y_3)$. Man erhält also die Einschränkungen: Falls $v(y_2) <$

$-v(y_3)$, so muß $v(x) \geq 0$ gelten. Ist $v(y_2) > -v(y_3)$, so muß auch noch $v(y_2) \geq -v(y_3) - v(x)$ erfüllt sein. Ist $v(y_2) = -v(y_3)$, so gilt $0 \leq v(1 + y_2y_3) \leq v(x)$.
Im Fall $v(ay_2) < 0$ ergibt sich aus (8.7.4) die Bedingung $-v(y_2) > v(a) \geq m + v(y_3) - v(y_2) + v(1 - x)$. Damit erhält man die Einschränkungen: Falls $v(y_2) < -v(y_3)$, so gilt $v(x) < 0$. Für $v(y_2) > -v(y_3)$ muß $v(y_2) \geq m + v(x)$ gelten. Und für $v(y_2) = -v(y_3)$ findet man $v(x) < v(1 + y_2y_3) \leq -m - v(y_3) + v(x) - v(1 - x)$.
Faßt man all dies zusammen, so heißt das: Im Fall $v(x) < m$ sind (8.7.3) und (8.7.4) genau dann erfüllt, wenn

$$v(y_2) \neq -v(y_3) \quad \text{oder} \quad 0 \leq v(1 + y_2y_3) \leq -m - v(y_3) + v(x) - v(1 - x)$$

gilt. Dann sind die möglichen a durch (8.7.15) gegeben.
2. Fall: $v(x) \geq m$
Hier lautet (8.7.15) einfach

$$v(a) \geq m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3). \tag{8.7.17}$$

Wieder muß man noch (8.7.16) erfüllen:
Falls $v(ay_2) \geq 0$, ist (8.7.16) dank der Wahl von n_3 immer erfüllt. Man vergleicht die beiden unteren Schranken für $v(a)$: Es ist $-v(y_2) > m + v(y_3) - v(1+y_2y_3)$ gleichbedeutend zu $v(1+y_2y_3) > m+v(y_2y_3)$. Das kann nur gelten, wenn $v(y_2) = -v(y_3)$. Dann gilt also $m < v(1 + y_2y_3)$ und $v(a) \leq v(y_3)$. Somit ist in allen anderen Fällen, also $v(y_2) \neq -v(y_3)$ oder $0 \leq v(1 + y_2y_3) \leq m$, die Relation $-v(y_2) \leq m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$ erfüllt, das heißt man hat die untere Schranke $v(a) \geq m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$. Zum besseren Wiederfinden zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} v(1 + y_2y_3) > m: &\quad v(a) \geq v(y_3) \\ v(1 + y_2y_3) \leq m: &\quad v(a) \geq m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3). \end{aligned}$$

Im Fall $v(ay_2) < 0$ muß immer $-v(y_2) > v(a) \geq m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$ gelten und außerdem noch $v(a) \geq m + v(y_3) - v(y_2) + v(1 - x)$. Es ist also zunächst $v(1 + y_2y_3) > m$. Gilt sogar $v(1 + y_2y_3) > -v(y_3)$, so lautet der Bereich für a: $v(y_3) > v(a) \geq m + 2v(y_3)$. Ist hingegen $v(1 + y_2y_3) \leq -v(y_3)$, so gilt $v(y_3) > v(a) \leq m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$.
Zusammenfassend erhält man also:

$$\begin{aligned} m < v(1 + y_2y_3) \leq -v(y_3): &\quad v(y_3) > v(a) \leq m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \\ -v(y_3) < v(1 + y_2y_3): &\quad v(y_3) > v(a) \geq m + 2v(y_3) \end{aligned}$$

Jetzt müssen die Fälle 1 und 2 kombiniert werden mit den Fällen (α) und (β). Das heißt: Nun werden die Bedingungen (8.7.3) und (8.7.4) kombiniert mit (8.7.1) und (8.7.2).

1. Fall (α):
Hier ist $v(x) < m$ und $v(1+y_2y_3) < m - v(y_3)$. Bedingung (8.7.15) zusammen mit (8.7.12) lautet

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m+v(1-x)-v(x)}) \cap \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}).$$

Man sieht leicht, daß, da $v(x) < m$, stets $m + v(1-x) - v(x) < m - v(y_3) - v(1+y_2y_3)$ gilt. Somit hat man

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})$$

und die zulässigen y_2 sind bestimmt durch

$$v(y_2) \neq -v(y_3) \quad \text{oder} \quad 0 \leq v(1+y_2y_3) \leq -m - v(y_3) + v(x) - v(1-x).$$

1. Fall (β):
Hier ist $v(x) < m$ und $v(1+y_2y_3) \geq m - v(y_3)$. Aber im 1. Fall gilt immer $v(1+y_2y_3) \leq -m - v(y_3) + v(x) - v(1-x) < -v(y_3)$. Dieser Fall liefert also keinen Beitrag zum inneren Integral.
2. Fall (α):
Hier ist $v(x) \geq m$ und $v(1+y_2y_3) < m - v(y_3)$. Der Bereich für a aus (8.7.15) impliziert $v(a) = v(x)+v(y_3)-v(1+y_2y_3)$. Im Bereich vom 2. Fall mit $v(ay_2) \geq$ muß also $-v(y_2) \leq v(x)+v(y_3)-v(1+y_2y_3)$ erfüllt sein und damit $v(1+y_2y_3) \leq v(x)$ gelten. Im Fall $v(ay_2) < 0$ muß man $v(y_3) > v(a) = v(x) + v(y_3) - v(1+y_2y_3) \geq m + 2v(y_3)$ erfüllen, das heißt $v(x) < v(1+y_2y_3) \leq -v(y_3) + v(x) - m$. Die zulässigen y_2 sind somit insgesamt gegeben durch

$$v(y_2) \neq -v(y_3) \text{ oder } v(y_2) = -v(y_3) \text{ mit } 0 \leq v(1+y_2y_3) \leq -m - v(y_3) + v(x).$$

Der Bereich von a ist durch (8.7.15) festgelegt:

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}).$$

2. Fall (β):
Hier ist $v(x) \geq m$ und $v(1+y_2y_3) \geq m - v(y_3)$. Da nach Wahl von n_3 stets $v(y_3) < -m + 2v(y_3) + v(x)$ gilt, kann aus dem 2. Fall nur der Bereich $v(y_3) >$

$v(a) \geq m+2v(y_3)$ infrage kommen. Zusammen mit der oberen Schranke $v(a) \leq -m + 2v(y_3) + v(x)$ ergibt das den Bereich für innere Integral

$$v(1 + y_2 y_3) \geq m - v(y_3)$$

mit

$$m + 2v(y_3) \leq v(a) \leq -m + 2v(y_3) + v(x).$$

Die inneren Integrale lassen sich nun leicht bestimmen: In allen Fällen hat man für den Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$:

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(r)\chi_1^{-1}(x-1) = \chi_1^{-2}(y_3)\chi_1^{-1}(x-1).$$

Die möglichen Integrale nach a lauten somit

$$\int_{\frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)})} d^\times a = q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)} \cdot \text{const.}$$

aus Fall (α), beziehungsweise

$$\int_{m+2v(y_3)\leq v(a)\leq -m+2v(y_3)+v(x)} d^\times a = \text{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(v(x) - 2m + 1) = \text{const.}$$

aus Fall (β). Dies gibt zuletzt die inneren Integrale

$$\chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2) \cdot \text{const.},$$

dessen Local Linking Numbers in Abschnitt 8.11.4 berechnet werden, sowie

$$\chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\Big(\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2) + \mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2) \\ + \mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)\Big) \cdot \text{const.},$$

mit $n_3 := \min\{-m, -m-v(1-x), -m-v(x)\}$ und $n_2 > n_3$. Die Local Linking Numbers der verschiedenen Summanden finden sich in den Abschnitten 8.11.2, 8.11.3 und 8.11.4.

8.8 Gleichung (II): $z_1 \neq 0$ und $z_4 = 0$

Hier wird erst einmal untersucht, wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in z_1 + \wp^m \tag{8.8.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in -1 + \wp^m \tag{8.8.2}$$

$$-s(a - (1 - ay_2)y_3) \in 1 + \wp^m \tag{8.8.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in \wp^m \tag{8.8.4}$$

Die Determinantenbedingung ist

$$rs(x - 1) \in 1 + \wp^m + z_1\wp^m. \tag{8.8.5}$$

Nimmt man an, daß (8.8.2) erfüllt ist, und setzt dies in (8.8.1) ein, so erhält man

$$-r \in z_1 + y_3 + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.8.6}$$

Aufgrund von Reduktion 8.4 reicht es, die zwei Bereiche
(i) $v(y_3) \geq n_3$ und $v(y_2) < n_2$
und
(ii) $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) \geq n_2$
mit jeweils geeignet wählbaren Schranken n_2, n_3 zu betrachten.

Fall (i): $v(y_3) \geq n_3$ **und** $v(y_2) < n_2$

Man wähle $n_3 = m$ und $n_2 = -m$. Wie in Abschnitt 8.7 findet man, daß die Bedingungen (8.8.3) und (8.8.4) genau dann erfüllt sind, wenn

$$a \in y_2^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}) \tag{8.8.7}$$

und

$$-s \in a^{-1}(1 + \wp^m) \cap (a - (1 - ay_2)y_3)^{-1}(1 + \wp^m)$$

gilt. Setzt man dies in (8.8.5) ein und nimmt (8.8.6) hinzu, so erhält man

$$-r \in a(x - 1)^{-1}(1 + \wp^m + \wp^{m+v(z_1)}) \cap z_1(1 + \wp^{m-v(z_1)}).$$

Dieser Durchschnitt ist nur dann nicht leer, wenn

$$a \in z_1(x - 1)(1 + \wp^{m-|v(z_1)|}). \tag{8.8.8}$$

Jetzt hat man zwei Bedingungen für a, nämlich (8.8.7) und (8.8.8), die zusammen

$$a \in y_2^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}) \cap z_1(x - 1)(1 + \wp^{m-|v(z_1)|})$$

ergeben. Insbesondere ist also $v(y_2) = -v(z_1) - v(1 - x)$. Zusammen mit $v(y_3) \geq n_3$ gibt das einen kompakten Bereich zulässiger (y_2, y_3), den man wegen Reduktion 8.2 nicht weiter untersuchen muß.

Fall (ii): $v(y_3) < n_3$ **und** $v(y_2) \geq n_2$

Hier wählt man $n_2 = m$ und $n_3 = \min\{-m, -m - v(1-x), -m - v(x)\}$. Insbesondere ist also $v(z_1 + y_3) = v(y_3)$, denn m war unter anderem so groß gewählt, daß $-m < 2v(z_1) < m$.
Dann kombiniert man zunächst (8.8.2) mit (8.8.6) und erhält

$$-r \in (z_1 + y_3)(1 + \wp^m) \cap (-y_2 + a^{-1}x)^{-1}(1 + \wp^m). \tag{8.8.9}$$

Dieser Durchschnitt ist genau dann nicht leer, wenn

$$-y_2 + a^{-1}x \in (z_1 + y_3)^{-1}(1 + \wp^m),$$

also wenn

$$a^{-1} \in \frac{1 + y_2(z_1 + y_3)}{x(z_1 + y_3)}(1 + \wp^{m - v(1 + y_2(z_1 + y_3))}).$$

Eine noch stärkere Bedingung erhält man, wenn man (8.8.6) in (8.8.1) ersetzt: Man schreibt $-r = (z_1 + y_3)(1 + r')$ mit $r' \in \wp^m$ und erhält

$$1 + y_2 y_3 - a^{-1}xy_3 \in \frac{z_1}{(z_1 + y_3)(1 + r')}(1 + \wp^{m - v(z_1)}).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$m' := \min\{m, m - v(z_1)\},$$

so folgt hieraus

$$a^{-1} \in \frac{1 + y_2(z_1 + y_3)}{x(z_1 + y_3)}(1 + \wp^{m' - v(y_3) - v(1 + y_2(z_1 + y_3))}). \tag{8.8.10}$$

Da $-r$ im Bereich (8.8.9) frei wählbar, sind die Bedingungen (8.8.1) und (8.8.2) also zusammen äquivalent zu (8.8.10). Man unterscheidet noch

Fall (α): $v(1 + y_2(z_1 + y_3)) < m' - v(y_3)$
Hier ist (8.8.10) gleichbedeutend zu

$$a \in \frac{x(z_1 + y_3)}{1 + y_2(z_1 + y_3)}(1 + \wp^{m' - v(y_3) - v(1 + y_2(z_1 + y_3))}). \tag{8.8.11}$$

Fall (β): $v(1 + y_2(z_1 + y_3)) \geq m' - v(y_3)$
Hier lautet (8.8.10) lediglich

$$v(a) \leq -m' + 2v(y_3) + v(x). \tag{8.8.12}$$

Nun setzt man $-r = (z_1 + y_3)(1 + r')$ mit $r' \in \wp^m$, das im Fall $v(z_1) < 0$ modulo $\wp^{m-v(z_1)}$ festgelegt ist, ein in die Determinantenbedingung (8.8.5). In jedem Fall gibt das

$$-s \in (x-1)^{-1}(z_1 + y_3)^{-1}(1 + \wp^m + \wp^{m+v(z_1)}). \tag{8.8.13}$$

Im folgenden wird

$$\tilde{m} := \min\{m, m + v(z_1)\}$$

gesetzt. Insbesondere ist also $\tilde{m} - m' = v(z_1)$.
Die Bedingungen, die sich jetzt aus (8.8.3) und (8.8.4) ergeben, findet man analog zu Abschnitt 8.7(ii):
(8.8.3) lautet

$$a(1 + y_2y_3) - y_3 \in (-s)^{-1}(1 + \wp^m),$$

also mit $-s$ aus (8.8.13):

$$a(1 + y_2y_3) - y_3 \in (z_1 + y_3)(x-1)(1 + \wp^{\tilde{m}}),$$

oder aufgelöst nach a

$$a \in \frac{(z_1 + y_3)x - z_1}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{\tilde{m}+v(1-x)-v(x)}). \tag{8.8.14}$$

Man muß noch (8.8.4) erfüllen, also

$$v(1 - ay_2) \geq v(y_3) + v(1-x) + m. \tag{8.8.15}$$

Insbesondere ist das dank der Wahl der Schranke n_3 für $v(y_3)$ keine neue Bedingung, wenn $v(ay_2) \geq 0$, denn es ist $v(y_3) + v(1-x) + m < 0$.
Man unterscheidet nach der Bewertung von x:

1. Fall: $v(x) < \tilde{m}$
Hier ist der Exponent in (8.8.14) größer als null und insbesondere $v(a) = v(y_3) + v(x) - v(1 + y_2y_3)$.
Da genau die gleichen Bedingungen wie in Abschnitt 8.7 (ii) 1. Fall vorliegen, kann man das Ergebnis von dort direkt übernehmen: Die zulässigen y_2 sind gegeben durch

$$v(y_2) > -v(y_3) \text{ oder } m \leq v(y_2) < -v(y_3)$$

oder durch

$$v(y_2) = -v(y_3) \text{ mit } 0 \leq v(1 + y_2y_3) \leq -m - v(y_3) - v(1-x) + v(x).$$

Der Bereich für a wird von (8.8.14) festgelegt.

2. Fall: $v(x) \geq \tilde{m}$
Hier ist der Exponent in (8.8.14) nicht mehr positiv und man schreibt besser

$$v(a) \geq \tilde{m} + v(y_3) - v(1 + y_2 y_3). \tag{8.8.16}$$

Der Fall $v(ay_2) \geq 0$, in dem (8.8.15) immer erfüllt ist, liefert:
Falls $-v(y_2) > \tilde{m}+v(y_3)-v(1+y_2y_3)$, so muß $v(y_2) = -v(y_3)$ und $v(1+y_2y_3) > \tilde{m}$ gelten und dann ist $v(a) \geq v(y_3)$.
Falls $-v(y_2) \leq \tilde{m} + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$, dann muß $v(y_2) = -v(y_3)$ und $0 \leq v(1 + y_2y_3) \leq \tilde{m}$ oder $v(y_2) \neq -v(y_3)$ erfüllt sein. Dann ist $v(a) \geq \tilde{m} + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$. Also gilt zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} v(1 + y_2y_3) \leq \tilde{m} : &\qquad v(a) \geq \tilde{m} + v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \\ v(1 + y_2y_3) > \tilde{m} : &\qquad v(a) \geq v(y_3). \end{aligned}$$

Im Fall $v(ay_2) < 0$ hat man $-v(y_2) > v(a) \geq \tilde{m} + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$, was $v(1 + y_2y_3) > \tilde{m}$, insbesondere also $v(y_2) = -v(y_3)$, impliziert. Außerdem muß noch (8.8.15), das heißt $v(a) \geq -v(y_2) + v(y_3) + v(1 - x) + m$, erfüllt werden. Ist $v(1 + y_2y_3) \leq \tilde{m} - m' - v(y_3)$, so ergibt sich $v(a) \geq \tilde{m} + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$. Falls $v(1+y_2y_3) > \tilde{m}-m'-v(y_3)$, hat man $v(a) \geq m+v(y_3)$. Zusammenfassend ergibt sich also mit $\tilde{m} - m' = v(z_1)$:

$$\begin{aligned} \tilde{m} < v(1 + y_2y_3) \leq v(z_1) - v(y_3) : &\qquad v(y_3) > v(a) \geq \tilde{m} + v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \\ v(z_1) - v(y_3) < v(1 + y_2y_3) : &\qquad v(y_3) > v(a) \geq m + 2v(y_3). \end{aligned}$$

Diese beiden Fälle müssen jetzt mit den Fällen (α) und (β) kombiniert werden. Dies entspricht der Kombination der Bedingungen (8.8.3) und (8.8.4) mit den Bedingungen (8.8.1) und (8.8.2).

1. Fall (α):
Hier gilt $v(x) < \tilde{m}$ und $v(1 + y_2(z_1 + y_3)) < m' - v(y_3)$. Die zwei Bedingungen (8.8.11) und (8.8.14) lauten kombiniert

$$\begin{aligned} a \quad \in \quad & \frac{x(z_1 + y_3)}{1 + y_2(z_1 + y_3)}(1 + \wp^{m'-v(y_3)-v(1+y_2(z_1+y_3))}) \\ & \bigcap \frac{x(z_1 + y_3) - z_1}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{\tilde{m}+v(1-x)-v(x)}). \end{aligned}$$

Insbesondere muß also $v(1+y_2(z_1+y_3)) = v(1+y_2y_3)$ gelten. Leicht sieht man, daß für die Exponenten nun immer $m' - v(y_3) - v(1+y_2(z_1+y_3)) < \tilde{m} + v(1-x) - v(x)$ gilt. Somit ist a durch (8.8.11) gegeben, falls

$$1 + \frac{y_2 z_1}{1+y_2y_3} \in (1 + \frac{z_1}{x(z_1+y_3)-z_1})(1+\wp^{\tilde{m}+v(1-x)-v(x)})$$

erfüllt ist. Dies gilt nach Wahl der oberen Schranke n_3 von $v(y_3)$ immer, denn die Vorfaktoren liegen selbst in $1+\wp^{\tilde{m}+v(1-x)-v(x)}$: Zum einen ist $v(\frac{y_2z_1}{1+y_2y_3}) \geq v(y_2y_3) + v(z_1) + m + v(1-x) - v(x) \geq \tilde{m} + v(1-x) - v(x)$, da $v(y_3) < -\tilde{m}+v(z_1)-v(1-x)+v(x)$. Zum anderen ist $v(\frac{z_1}{x(z_1+y_3)-z_1}) \geq \tilde{m}+v(1-x)-v(x)$, weil $v(y_3) < -\tilde{m} + v(z_1) - v(1-x)$.
Der Beitrag zum inneren Integral ist im 1. Fall (α) also gegeben durch solche y_2, die die Bedingungen

$$v(y_2) > -v(y_3) \text{ oder } m \leq v(y_2) < -v(y_3)$$

oder

$$v(y_2) = -v(y_3) \text{ mit } 0 \leq v(1+y_2y_3) \leq -m - v(y_3) - v(1-x) + v(x)$$

erfüllen. Der Bereich für a wird von (8.8.14) festgelegt.

1. Fall (β):
Hier gilt $v(x) < \tilde{m}$ und $v(1+y_2(z_1+y_3)) \geq m' - v(y_3)$. Die Bewertung von a liest man aus (8.8.14) ab: $v(a) = v(y_3)+v(x)-v(1+y_2y_3)$, und $v(a)$ wird wegen (8.8.12) nach oben beschränkt durch $-m' + 2v(y_3) + v(x)$. Dies ist äquivalent zu $v(1+y_2y_3) \geq m' - v(y_3)$. Im 1. Fall hat man aber auch eine obere Schranke $v(1+y_2y_3) \leq -m - v(y_3) - v(1-x) + v(x)$. Da $m+m' > \tilde{m} > v(x) - v(1-x)$, gibt es somit keinen zulässigen Bereich für $v(1+y_2y_3)$.
Der 1. Fall (β) leistet keinen Beitrag zum inneren Integral.

Sinnvoll für die zwei anderen Fälle ist folgende
Vorbemerkung: Eine Fallunterscheidung zeigt:
Ist $v(y_2) \neq -v(y_3)$, so ist $v(1+y_2y_3) = v(1+y_2(z_1+y_3))$ immer gegeben.
Ist $v(y_2) = -v(y_3)$, so hat man:

$$\begin{aligned}
v(1+y_2y_3) < v(z_1) - v(y_3): &\quad v(1+y_2(z_1+y_3)) = v(1+y_2y_3),\\
v(1+y_2y_3) > v(z_1) - v(y_3): &\quad v(1+y_2(z_1+y_3)) = v(z_1) - v(y_3)\\
&\quad \text{und } v(1+y_2(z_1+y_3)) < v(1+y_2y_3),\\
v(1+y_2y_3) = v(z_1) - v(y_3): &\quad v(1+y_2(z_1+y_3)) \geq v(1+y_2y_3).
\end{aligned}$$

2. Fall (α):
Hier ist $v(x) \geq \tilde{m}$ und a durch (8.8.11) festgelegt. Also ist $v(a) = v(x)+v(y_3)-v(1+y_2(z_1+y_3))$. Weiter ist $v(1+y_2(z_1+y_3)) < m' - v(y_3)$.
Da man im 2. Fall ist, muß zunächst einmal $v(a) \geq \tilde{m} + v(y_3) - v(1+y_2y_3)$ erfüllt werden, also

$$v(1+y_2y_3) - v(1+y_2(z_1+y_3)) \geq \tilde{m} - v(x). \tag{8.8.17}$$

Man unterscheidet noch nach der Bewertung von ay_2:
Ist $v(ay_2) \geq 0$, so muß für $v(1+y_2y_3) > \tilde{m}$ sogar $v(a) \geq v(y_3)$ gelten, das heißt $v(1+y_2(z_1+y_3)) \leq v(x)$. Da sowohl $v(x) < m' - v(y_3)$ als auch $v(x) < v(z_1) - v(x)$ dank Wahl der Schranke n_3, schließt man mit hilfe der Vorbemerkung, daß hier $\tilde{m} < v(1+y_2y_3) = v(1+y_2(z_1+y_3)) \leq v(x)$ gilt.
Für $v(1+y_2y_3) \leq \tilde{m}$, ist sogar immer $v(1+y_2y_3) = v(1+y_2(z_1+y_3))$, weil $\tilde{m} < v(z_1) - v(y_3)$, und somit ist (8.8.17) immer erfüllt.

Es sei nun $v(ay_2) < 0$. Hier muß also $v(y_3) > v(x) + v(y_3) - v(1+y_2(z_1+y_3))$ erfüllt werden.
Man untersucht zunächst den Fall $\tilde{m} < v(1+y_2y_3) \leq \tilde{m} - m' - v(y_3) = v(z_1) - v(y_3)$:
Ist sogar $v(1+y_2y_3) < v(z_1) - v(y_3)$, dann erhält man mit (8.8.17) und der Vorbemerkung die Bedingung $v(x) < v(1+y_2(z_1+y_3)) = v(1+y_2y_3) < v(z_1) - v(y_3)$. Ist hingegen $v(1+y_2y_3) = v(z_1) - v(y_3)$, dann muß $v(y_3) > v(x) + v(y_3) - v(1+y_2(z_1+y_3)) \geq \tilde{m} + v(z_1)$ gelten. Insbesondere heißt das $v(y_3) > \tilde{m} + v(z_1) > -m$, im Widerspruch zu $v(y_3) < n_3 \leq -m$.
Im Fall $\tilde{m} - m' - v(y_3) < v(1+y_2y_3)$ gilt nach der Vorbemerkung $v(1+y_2(z_1+y_3)) = v(z_1) - v(y_3)$. Dann muß man wegen (8.8.17) die Bedingung $v(y_3) > v(x)+v(z_1) > \tilde{m}+v(z_1)$ erfüllen. Wie eben gesehen ist das unmöglich.
Der gesamte Beitrag vom 2. Fall (α) zum inneren Integral ist also gegeben durch die folgenden zulässigen y_2:

$$v(y_2) > -v(y_3) \text{ oder } m \leq v(y_2) < -v(y_3)$$

oder

$$v(y_2) = -v(y_3) \text{ und } 0 \leq v(1+y_2y_3) = v(1+y_2(z_1+y_3)) < v(z_1) - v(y_3).$$

Der Bereich für a ist durch (8.8.11) gegeben.

2. Fall (β):
Hier gilt $v(x) \geq \tilde{m}$ und $\tilde{m} + v(y_3) - v(1+y_2y_3) \leq v(a) \leq -m' + 2v(y_3) + v(x)$ sowie $v(1+y_2(z_1+y_3)) \geq m' - v(y_3)$. Weil $m > 2v(z_1)$, ist somit immer

$v(1+y_2(z_1+y_3)) > v(z_1)-v(y_3)$ gegeben. Nach der Vorbemerkung ist das nur möglich, wenn $v(1+y_2y_3) = v(z_1)-v(y_3)$. Insbesondere ist also $v(1+y_2y_3) > \tilde{m}$. Im Fall $v(ay_2) \geq 0$ muß noch $v(y_3) \leq v(a) \leq -m'+2v(y_3)+v(x)$ erfüllt werden, insbesondere also $v(y_3) \geq m' + v(x) > 0$, im Widerspruch zu $v(y_3) < n_3 < 0$. Im Fall $v(ay_2) < 0$ nutzt man aus, daß $v(1 + y_2y_3) = v(z_1) - v(y_3) = \tilde{m} - m' - v(y_3)$. Damit erhält man die Bedingnung an a in diesem Fall zu $-m' + 2v(y_3) + v(x) \geq v(a) \geq \tilde{m} + v(z_3)$. Dies impliziert jedoch den Widerspruch $2v(y_3) \geq \tilde{m} + m' + v(z_1) + v(x) > 0$.
Der 2. Fall (β) liefert also keinen Beitrag zum inneren Integral.

Insgesamt hat man nur im Fall (α) einen Beitrag zum inneren Integral. Der Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$ ist dank Relation (8.8.9) gegeben durch

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(r)\chi_1^{-1}(x-1) = \chi_1^{-2}(z_1+y_3)\chi_1^{-1}(x-1).$$

Das Integral nach a ergibt

$$\int_{\frac{x(z_1+y_3)}{1+y_2(z_1+y_3)}(1+\wp^{m'-v(y_3)-v(1+y_2(z_1+y_3))})} d^\times a = \mathrm{vol}(1+\wp^{m'})q^{v(y_3)+v(1+y_2(z_1+y_3))}.$$

Das innere Integral hat somit die Form

$$\begin{aligned}&\text{const.}\cdot\chi_1^{-2}(z_1+y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2(z_1+y_3))}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\\ &\quad\cdot\Big(\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)+\mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2)+\mathbf{1}_{(z_1+y_3)^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)\Big),\end{aligned}$$

mit $n_3 = \min\{-m, -m-v(x), -m-v(1-x)\}$ und $n_2 - n_3 > 0$. Man bemerkt noch, daß immer gilt $v(z_1+y_3) = v(y_3)$. Die Substitution $y_3 \mapsto z_1+y_3$ erlaubt, die Local Linking Numbers so zu berechnen, wie in den Abschnitten 8.11.2, 8.11.3 und 8.11.4 angegeben.

8.9 Gleichung (II): $z_1 = 0$ und $z_4 \neq 0$

Hier wird erst einmal untersucht, wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in \wp^m \tag{8.9.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in -1 + \wp^m \tag{8.9.2}$$

$$-s(a - (1 - ay_2)y_3) \in 1 + \wp^m \tag{8.9.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in z_4 + \wp^m \tag{8.9.4}$$

Die Determinantenbedingung ist

$$rs(x - 1) \in 1 + \wp^m. \tag{8.9.5}$$

Nimmt man an, daß (8.9.2) erfüllt ist, und setzt dies in (8.9.1) ein, so erhält man

$$-r \in y_3 + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.9.6}$$

Ebenso erhält man aus (8.9.4) eingesetzt in (8.9.3)

$$-sa \in 1 - z_4 y_3 + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.9.7}$$

Wegen Reduktion 8.1, kann man sich auf den Fall $v(z_4) > 0$ beschränken.
Aufgrund von Reduktion 8.4 reicht es wieder, die zwei Bereiche
(i) $v(y_3) \geq n_3$ und $v(y_2) < n_2$
und
(ii) $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) \geq n_2$
mit jeweils geeignet wählbaren Schranken n_2, n_3 zu betrachten.

Fall (i): $v(y_3) \geq n_3$ **und** $v(y_2) < n_2$

Man wähle $n_3 = \max\{m, m + v(1 - x)\}$ und $n_2 = \min\{-m, -m - v(1 - x) - v(x)\}$.
Dann ergeben sich die Bedingungen (8.9.6) und (8.9.7) zu

$$-r \in \wp^m \tag{8.9.8}$$

und

$$-s \in a^{-1}(1 + \wp^m). \tag{8.9.9}$$

Setzt man (8.9.9) in (8.9.4) ein, so erhält man

$$a^{-1} \in (y_2 - z_4)(1 + \wp^{m-v(y_2)}),$$

und (8.9.9) in (8.9.3) ergibt

$$a^{-1} \in y_2(1 + \wp^{m-v(y_2y_3)})$$

Setzt man diese beiden Bedingungen im Fall $v(y_2y_3) < m$ zusammen, so erhält man

$$a \in (y_2 - z_4)^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}), \tag{8.9.10}$$

falls $1 - \frac{z_4}{y_2} \in 1 + \wp^{m-v(y_2y_3)}$, also falls $v(y_3) \geq m - v(z_4)$. Das ist nach Wahl von n_3 immer gegeben.
Im Fall $v(y_2y_3) \geq m$ hat man ebenso a durch (8.9.10) bestimmt und muß noch die zusätzliche Bedingung $-v(y_2) = v(a) \leq -m + v(y_3)$ erfüllen. Aber dies heißt gerade $v(y_2y_3) \geq m$.
Insgesamt sind also die Bedingungen (8.9.3) und (8.9.4) gleichbedeutend zu (8.9.10) und

$$-s \in (y_2 - z_4)(1 + \wp^m). \tag{8.9.11}$$

Setzt man (8.9.11) ein in (8.9.5), so erhält man

$$-r \in (y_2 - z_4)^{-1}(x - 1)^{-1}(1 + \wp^m).$$

Dies zusammen mit (8.9.2) liefert

$$-r \in (y_2 - z_4)^{-1}(x - 1)^{-1}(1 + \wp^m) \cap (-y_2 + a^{-1}x)^{-1}(1 + \wp^m), \tag{8.9.12}$$

und dieser Schnitt ist genau dann nicht leer, wenn

$$a^{-1} \in \frac{(y_2 - z_4)x + z_4}{x}(1 + \wp^{m+v(y_2)+v(1-x)-v((y_2-z_4)x+z_4)}). \tag{8.9.13}$$

Da $v((y_2 - z_4)x) < v(z_4)$ nach Wahl von n_3 immer gilt, ist der Exponent gleich $m + v(1 - x) - v(x)$.
Ist also $v(x) < m$, so ist dieser Exponent positiv, und man erhält die Bedingung

$$a \in \frac{x}{(y_2 - z_4)x + z_4}(1 + \wp^{m+v(1-x)-v(x)}).$$

Vergleicht man dies mit (8.9.10), so gibt das

$$a \in \frac{x}{(y_2 - z_4)x + z_4}(1 + \wp^{m+v(1-x)-v(x)}) \cap (y_2 - z_4)^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}),$$

was wiederum gerade (8.9.10) bedeutet, denn $m - v(y_2) \geq m + v(1-x) - v(x)$ ist durch Wahl von n_2 immer erfüllt. Allerdings muß, damit dieser Durchschnitt nicht leer ist,

$$x + \frac{z_4}{y_2 - z_4} \in x(1 + \wp^{m+v(1-x)-v(x)})$$

erfüllt sein. Dies ist aber wiederum durch Wahl von n_2 gewährleistet, da geichbedeutend zu $v(z_4) - v(y_2) \geq m + v(1-x)$.
Ist $v(x) \geq m$, so ist der Exponent in (8.9.13) nicht positiv, und man erhält die Bedingung $v(a) \leq -m - v(y_3) - v(1-x) + v(x)$. Zusammen mit (8.9.10) hat man also $-v(y_2) = v(a) \leq -m - v(y_3) - v(1-x) + v(x)$. Das ist gleichbedeutend zu der Voraussetzung, das der Exponent in (8.9.13) nicht positiv ist. Auch hier ist a somit nur durch (8.9.10) eingeschränkt.
Nun muß man noch (8.9.1) prüfen: Setzt man dort den ersten Teil von (8.9.12) ein, so erhält man

$$1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3 \in \wp^{m+v(y_2)+v(1-x)},$$

was geleichbedeutend zu

$$a^{-1} \in \frac{y_2}{x}(1 + \wp^{m-v(y_3)+v(1-x)})$$

ist. Der auftretende Exponent ist wegen Wahl von n_3 immer negativ. Somit lautet die Bedingung an a hier

$$-v(a) \geq m + v(y_2) - v(y_3) + v(1-x) - v(x).$$

Wegen (8.9.10) ist $v(a) = -v(y_2)$, also ist obige Bedingung immer erfüllt, denn $v(y_3) \geq m + v(1-x) - v(x)$.

Nun rechnet man mit (8.9.11):

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(s)\chi_1(x-1) = \chi_1^2(y_2)\chi_1(x-1).$$

Das Integral über a hat demnach die Gestalt

$$\int_{(y_2-z_4)^{-1}(1+\wp^{m-v(y_2)})} \chi_1^2(y_2)\chi_1(x-1)\ d^\times a = \chi_1^2(y_2)\chi_1(x-1)q^{v(y_2)}\,\mathrm{vol}^\times(1+\wp^m),$$

und das innere Integral ist von der Form

$$\text{const.} \cdot \chi_1^2(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_2}}(y_2).$$

Die zugehörigen Local Linking Numbers finden sich in Abschnitt 8.11.1.

Fall (ii): $v(y_3) < n_3$ **und** $v(y_2) \geq n_2$

Hier wähle man $n_3 := \min\{-m, -m - v(1-x), -m - 2v(z_4) + v(x) - v(1-x)\}$ und $n_2 := \min\{m, m + v(1-x)\}$.

Dann lautet (8.9.6) hier

$$-r \in y_3(1+\wp^m). \tag{8.9.14}$$

(8.9.14) und (8.9.5) liefern zusammen

$$-s \in y_3^{-1}(x-1)^{-1}(1+\wp^m). \tag{8.9.15}$$

Die Bedingungen (8.9.2) und (8.9.14) kombiniert ergeben

$$-r \in y_3(1+\wp^m) \cap (-y_2 + a^{-1}x)^{-1}(1+\wp^m). \tag{8.9.16}$$

Dieser Durchschnitt ist genau dann nicht leer, wenn

$$-y_2 + a^{-1}x \in y_3^{-1} + \wp^{m-v(y_3)},$$

also wenn

$$a^{-1} \in \frac{1+y_2y_3}{xy_3}(1+\wp^{m-v(1+y_2y_3)}). \tag{8.9.17}$$

Kombiniert man (8.9.1) mit (8.9.14), dann erhält man

$$y_3 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3^2 \in y_3 + \wp^m.$$

Aufgelöst nach a^{-1} gibt das

$$a^{-1} \in \frac{1+y_2y_3}{xy_3}(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}), \tag{8.9.18}$$

was eine stärkere Bedingung als (8.9.17) ist.
Man unterscheidet nach dem Exponenten:

Fall(α): $v(1+y_2y_3) < m - v(y_3)$**:**
Hier kann man (8.9.18) nach a auflösen:

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}). \tag{8.9.19}$$

Fall(β): $v(1+y_2y_3) \geq m - v(y_3)$**:**
(8.9.18) ist hier nur eine Bedingung an die Bewertung von a:

$$v(a) \leq -m + 2v(y_3) + v(x). \tag{8.9.20}$$

Nun setzt man (8.9.15) ein in (8.9.4):

$$1 - ay_2 \in -z_4y_3(x-1)(1+\wp^{m-v(z_4)}).$$

Nach a aufgelöst heißt das

$$a \in \frac{1+z_4y_3(x-1)}{y_2}(1+\wp^{m+v(y_3)+v(1-x)-v(1+z_4y_3(x-1))}).$$

Da $v(z_4y_3(x-1)) < 0$ nach Wahl von n_3 stets erfüllt ist, erhält man vereinfacht

$$a \in \frac{1+z_4y_3(x-1)}{y_2}(1+\wp^{m-v(z_4)}). \tag{8.9.21}$$

Setzt man (8.9.15) in (8.9.3) ein, so gibt das

$$y_3^{-1}(x-1)^{-1}(a(1+y_2y_3)-y_3) \in 1+\wp^m,$$

aufgelöst nach a also

$$a \in \frac{y_3x}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m+v(1-x)-v(x)}). \tag{8.9.22}$$

Eine Unterscheidung danach, ob der auftretende Exponent positiv ist oder nicht, ergibt zwei Fälle:

1. Fall: $v(x) < m$
Hier ist der Exponent positiv. (8.9.22) und (8.9.21) gleichzeitig zu erfüllen, heißt

$$\begin{aligned} a \quad \in \quad & \frac{y_3x}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m+v(1-x)-v(x)}) \\ & \cap \frac{1+z_4y_3(x-1)}{y_2}(1+\wp^{m+v(y_3)+v(1-x)-v(1+z_4y_3(x-1))}) \end{aligned}$$

zu wählen. Dieser Durchschnitt ist genau dann nicht leer, wenn

$$\frac{y_2y_3}{1+y_2y_3} \in x^{-1}(1+z_4y_3(x-1))(1+\wp^{\min}),$$

wobei min das Minimum der Exponenten bezeichnet. Dies ist, wie man mit einer kleinen Rechnung sieht, gleichbedeutend zu

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+\wp^{\min+v(x)-v(z_4y_3(x-1))}).$$

Also gibt es ein $y_2' \in \wp^{\min+v(x)-v(z_4y_3(x-1))}$ so, daß $y_2 = -y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+y_2')$. Damit folgt

$$1+y_2y_3 = \frac{x}{(x-1)(1-z_4y_3)} - y_2'(1+\frac{x}{(x-1)(1-z_4y_3)}).$$

Da min > 0, ist

$$v\left(\frac{x}{(x-1)(1-z_4y_3)}\right) < v\left(y_2'(1+\frac{x}{(x-1)(1-z_4y_3)})\right),$$

also ist

$$v(1+y_2y_3) = v(x) - v(1-x) - v(z_4) - v(y_3) > 0.$$

Da im 1. Fall $m-v(x)+v(1-x) > 0$ nach Voraussetzung, ist stets $v(1+y_2y_3) < m - v(y_3)$: Der Fall (β) tritt nicht auf. Der Fall (α) fordert für a zusätzlich zu (8.9.22) und (8.9.21) noch (8.9.19), also

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(x)+v(1-x)+v(z_4)}) \cap \frac{1+z_4y_3(x-1)}{y_2}(1+\wp^{m-v(z_4)}).$$

Nun spielt man das gerade benutzte Argument noch einmal durch und erhält:
Zusammenfassung 1. Fall:
Ist $v(x) \leq 2v(z_4)$, so ist der gültige Bereich der (y_2, y_3) gegeben durch

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+\wp^{m-2v(z_4)+v(x)-v(x-1)-v(y_3)}),$$

und der Bereich der möglichen a wird durch

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m+v(z_4)+v(1-x)-v(x)})$$

beschrieben.
Ist $2v(z_4) < v(x) < m$, so wird der gültige (y_2, y_3)-Bereich durch

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+\wp^{m-v(y_3)})$$

gegeben und der Bereich der möglichen a durch

$$a \in \frac{xy_3}{1+y_2y_3}(1+\wp^{m-v(z_4)}).$$

2. Fall: $v(x) \geq m$
Hier ist der Exponent nicht positiv, und somit heißt (8.9.22) lediglich

$$v(a) \geq m + v(1-x) + v(y_3) - v(1+y_2y_3). \tag{8.9.23}$$

Damit (8.9.23) und (8.9.21) gleichzeitig erfüllt sind, damit also

$$v(a) = v(z_4y_3(x-1)) - v(y_2) \geq m + v(1-x) + v(y_3) - v(1+y_2y_3),$$

muß $v(1+y_2y_3) \geq m - v(z_4) + v(y_2) > 0$ gelten. Das kann nur erfüllt werden, wenn $v(y_2) = -v(y_3)$, und dann heißt das auch $v(1+y_2y_3) \geq m - v(z_4) - v(y_3)$.

Man unterscheidet weiter nach den Fällen (α) und (β):
2. Fall (α):
Hier ist insbesondere $m - v(z_4) - v(y_3) < v(1+y_2y_3) < m - v(y_3)$ und $v(x) \geq m$. Vergleicht man die Exponenten $m - v(y_3) - v(1+y_2y_3)$ von (8.9.19) und $m - v(z_4)$ von (8.9.21), so gilt immer $m - v(y_3) - v(1+y_2y_3) < m - v(z_4)$. Kombination von (8.9.19) mit (8.9.21) ergibt somit wieder die Bedingung (8.9.21) für a, wenn

$$\frac{y_2y_3}{1+y_2y_3} \in x^{-1}(1+z_4y_3(x-1))(1+\wp^{m-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}),$$

oder äquivalent (wie man nach einer kleinen Rechnung sieht)

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+\wp^{m-2v(y_3)-v(1+y_2y_3)+v(x)-v(z_4)}). \quad (8.9.24)$$

Es gibt also ein $y_2' \in \wp^{m-2v(y_3)-v(1+y_2y_3)+v(x)-v(z_4)}$ so, daß $y_2 = -y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+y_2')$. Damit findet man

$$1+y_2y_3 = \frac{x}{(1-x)(-z_4y_3)} + y_2'(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)}).$$

Da $v(1+y_2y_3) < m - v(y_3)$, gilt immer

$$v\left(\frac{x}{(1-x)(-z_4y_3)}\right) < v\left(y_2'(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})\right).$$

Insbesondere ist $v(1+y_2y_3) = v(x) - v(z_4) - v(y_3)$. Das beschränkt den Bereich der möglichen x auf $m \leq v(x) < m + v(z_4)$. Der Exponent in (8.9.24) erhält nun die einfache Form $m - v(y_3)$.
Zusammenfassung 2. Fall (α): $m \leq v(x) < m + v(z_4)$
Der gültige Bereich für (y_2, y_3) ist gegeben durch

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+\wp^{m-v(y_3)}),$$

und der Integrationbereich von a durch

$$a \in \frac{1+z_4y_3(x-1)}{y_2}(1+\wp^{m-v(z_4)}).$$

2. Fall (β):

Hier ist $m-v(y_3) \leq v(1+y_2y_3)$ und $v(x) \geq m$. Insbesondere ist $v(y_2) = -v(y_3)$. Bedingung (8.9.21) legt fest: $v(a) = v(z_4) + 2v(y_3)$. Kombination von (8.9.23) und (8.9.20) ergibt

$$m + v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \leq v(z_4) + 2v(y_3) \leq -m + 2v(y_3) + v(x).$$

Das erste Ungleichheitszeichen ist immer erfüllt, weil $v(1 + y_2y_3) \geq m - v(y_3)$. Das zwei Ungleichheitszeichen ist genau dann erfüllt, wenn $v(x) \geq m + v(z_4)$ gilt. Das schränkt nur den Bereich der möglichen x ein.
Zusammenfassung 2. Fall (β): $v(x) \geq m + v(z_4)$
Der gültige Bereich für (y_2, y_3) ist gegeben durch $v(1 + y_2y_3) \geq m - v(y_3)$. Der Integrationsbereich von a ist gegeben durch

$$a \in \frac{1 + z_4y_3(x-1)}{y_2}(1 + \wp^{m-v(z_4)}).$$

Jetzt faßt man **alle Fälle von Abschnitt 8.9** zusammen, um die auftretenden inneren Integrale zusammen zu tragen:
Der Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$ wird hier zu

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(r)\chi_1^{-1}(x-1) = \chi_1^{-2}(y_3)\chi_1^{-1}(x-1).$$

Die Volumina aller auftretenden Bereiche für a sind unabhängig von (y_2, y_3), die Integrale nach a somit konstant. Also treten nur zwei Typen von inneren Integralen auf:

$$\text{const.} \cdot \chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{m-v(y_3)})}(y_2)$$

oder

$$\text{const.} \cdot \chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\frac{x}{(1-x)(1-z_4y_3)})(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2).$$

Dabei ist $n_3 = \min\{-m, -m - v(1-x), -m - 2v(z_4) + v(x) - v(1-x)\}$ und $n_2 \in \{m, m-2v(z_4)+v(x)-v(1-x)\}$. Die zugehörigen Local Linking Numbers findet man in Abschnitt 8.11.4.

8.10 Gleichung (II): $z_1 \neq 0$ und $z_4 \neq 0$

Hier wird zunächst untersucht, wann $(r, s) \in K^\times$ existiert so, daß die folgenden vier Relationen erfüllt sind:

$$-r(1 - (-y_2 + a^{-1}x)y_3) \in z_1 + \wp^m \tag{8.10.1}$$

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in -1 + z_1 z_4 + \wp^m \tag{8.10.2}$$

$$-s(a - (1 - ay_2)y_3) \in 1 + \wp^m \tag{8.10.3}$$

$$s(1 - ay_2) \in z_4 + \wp^m \tag{8.10.4}$$

Die Determinantenbedingung ist

$$rs(x - 1) \in 1 + \wp^m + z_1\wp^m. \tag{8.10.5}$$

Nimmt man an, daß (8.10.2) erfüllt ist, und setzt sie in (8.10.1) ein, so erhält man

$$-r \in y_3 + (1 - y_3 z_4)z_1 + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.10.6}$$

Ebenso erhält man aus (8.10.4) eingesetzt in (8.10.3)

$$-sa \in 1 - z_4 y_3 + \wp^m + \wp^{m+v(y_3)}. \tag{8.10.7}$$

Wegen Reduktion 8.1, kann man sich auf den Fall $v(z_4) > 0$ beschränken.
Aufgrund von Reduktion 8.4 reicht es wieder, die zwei Bereiche
(i) $v(y_3) \geq n_3$ und $v(y_2) < n_2$
und
(ii) $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) \geq n_2$
mit jeweils geeignet wählbaren Schranken n_2, n_3 zu betrachten.

Fall (i): $v(y_3) \geq n_3$ **und** $v(y_2) < n_2$

Man wähle $n_3 = \max\{m, m - v(z_1)\}$ und $n_2 = \min\{-m, -m - v(1 - x)\}$.
Somit schreibt man für (8.10.6) vereinfacht

$$-r \in z_1 + \wp^m \tag{8.10.8}$$

und für (8.10.7)

$$-s \in a^{-1}(1 + \wp^m). \tag{8.10.9}$$

Setzt man (8.10.9) ein in (8.10.4), so erhält man

$$-a^{-1}(1 - ay_2) \in z_4 + \wp^m,$$

also nach a aufgelöst

$$a \in (y_2 - z_4)^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}). \tag{8.10.10}$$

Setzt man (8.10.9) in (8.10.3) ein und löst nach a^{-1} auf, so gibt das

$$a^{-1} \in y_2(1 + \wp^{m-v(y_2y_3)}). \tag{8.10.11}$$

Man unterscheidet danach, ob der Exponent in (8.10.11) positiv ist oder nicht: Ist $v(y_2y_3) < m$, so lauten (8.10.11) und (8.10.10) kombiniert

$$a \in (y_2 - z_4)^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}) \cap y_2^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2y_3)}) = (y_2 - z_4)^{-1}(1 + \wp^{m-v(y_2)}),$$

falls der Durchschnitt nicht leer ist. Dazu muß $\frac{y_2}{y_2-z_4} \in 1 + \wp^{m-v(y_2y_3)}$ gelten, was wegen $v(y_3) \geq n_3 > m - v(z_4)$ immer erfüllt ist.
Ist $v(y_2y_3) \geq m$, so ist die Bewertung von a durch (8.10.10) festgelegt und (8.10.11) stellt noch die Bedingung

$$v(a) = -v(y_2) \leq -m + v(y_3),$$

die gleichbedeutend zu $v(y_2y_3) \geq m$ ist.
Also sind (8.10.3) und (8.10.4) in jedem Fall gleichbedeutend zu (8.10.10) und, wie man durch einsetzten von (8.10.10) in (8.10.9) sieht,

$$-s \in (y_2 - z_4)(1 + \wp^m). \tag{8.10.12}$$

Nun setzt man (8.10.12) ein in die Determinantenbedingung (8.10.5):

$$-r \in (y_2 - z_4)^{-1}(x - 1)^{-1}(1 + \wp^m).$$

Dies zusammen mit (8.10.8) ergibt

$$-r \in (y_2 - z_4)^{-1}(x - 1)^{-1}(1 + \wp^m) \cap z_1(1 + \wp^{m-v(z_1)}).$$

Damit dieser Duchschnitt nicht leer ist, es also ein r gibt, das alle Bedingungen erfüllt, muß insbesondere $v(y_2) = -v(z_1) - v(1-x)$ gelten. Nach Voraussetzung ist aber $v(y_2) < n_2 \leq -m - v(1 - x)$ und $|v(z_1)| < m$. Es gibt somit keinen zulässigen Bereich für (y_2, y_3), und der Fall (i) leistet keinen Beitrag zu den Local Linking Numbers.

Fall (ii): $v(y_3) < n_3$ **und** $v(y_2) \geq n_2$

Man setzt $v(y_2) \geq n_2 := m$. Die Schranke $v(y_3) < n_3$ wird später festgelegt, da in Betracht gezogen werden muß, ob $z_1z_4 = 1$. In jedem Fall ist aber $n_3 \leq -m$, so daß (8.10.6) zu

$$-r \in z_1 + y_3(1 - z_1z_4) + y_3\wp^m \tag{8.10.13}$$

wird und (8.10.7) zu

$$-s \in a^{-1}(1 - z_4 y_3)(1 + \wp^{m - v(z_4)}) \tag{8.10.14}$$

wird. Setzt man (8.10.14) ein in (8.10.4), so erhält man

$$y_2 - a^{-1} \in \frac{z_4}{1 - z_4 y_3} + \wp^{m - v(z_4) - v(y_3)},$$

also

$$a^{-1} \in \frac{y_2 - z_4(1 + y_2 y_3)}{1 - z_4 y_3}(1 + \wp^{m - v(y_2 - z_4(1 + y_2 y_3))}). \tag{8.10.15}$$

Setzt man (8.10.14) ein in (8.10.3) und nimmt an, daß man das s dort frei wählen kann (eine Annahme, die sich am Ende der Rechnung von selbst verifiziert), so erhält man

$$1 + y_2 y_3 - a^{-1} y_3 \in (1 - z_4 y_3)^{-1}(1 + \wp^{m - v(z_4)}).$$

Nach a^{-1} aufgelöst heißt das

$$a^{-1} \in \frac{y_2 - z_4(1 + y_2 y_3)}{1 - z_4 y_3}(1 + \wp^{m - v(z_4) - v(y_3) - v(y_2 - z_4(1 + y_2 y_3))}). \tag{8.10.16}$$

Verglichen mit (8.10.15) ist (8.10.16) die stärkere Bedingung. Um sie auszuwerten, unterscheidet man nach den Bewertungen von y_2 und y_3:

Falls $v(y_2) < -v(y_3)$:

Hier ist $v(z_4(1 + y_2 y_3)) = v(z_4) + v(y_2) + v(y_3) < v(y_2)$. Der Exponent in (8.10.16) ist $m - 2v(z_4) - 2v(y_3) - v(y_2) > 0$. Also kann man nach a auflösen und erhält

$$a \in \frac{1 - z_4 y_3}{y_2 - z_4(1 + y_2 y_3)}(1 + \wp^{m - 2v(z_4) - 2v(y_3) - v(y_2)}), \tag{8.10.17}$$

insbesondere ist $v(a) = -v(y_2)$.

Falls $v(y_2) > -v(y_3)$:

Hier ist $v(z_4(1 + y_2 y_3)) = v(z_4) < v(y_2)$. Das gibt den Exponenten $m - 2v(z_4) - v(y_3)$ in (8.10.16). Der Exponent ist stets größer als null, und aufgelöst nach a hat man

$$a \in \frac{1 - z_4 y_3}{y_2 - z_4(1 + y_2 y_3)}(1 + \wp^{m - 2v(z_4) - v(y_3)}), \tag{8.10.18}$$

insbesondere ist $v(a) = v(y_3)$.

Falls $v(y_2) = -v(y_3)$:

Hier muß man weiter unterscheiden:

- $v(1+y_2y_3) < -v(y_3)-v(z_4)$: Das ist gleichbedeutend zu $v(z_4(1+y_2y_3)) < v(y_2)$. Der Exponent in (8.10.16) ist dann $m-2v(z_4)-v(y_3)-v(1+y_2y_3)$. Er ist immer größer als null. Man erhält

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-2v(z_4)-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}), \tag{8.10.19}$$

  und $v(a) = v(y_3) - v(1+y_2y_3)$.

- $v(1+y_2y_3) > -v(y_3)-v(z_4)$: Das ist gleichbedeutend zu $v(z_4(1+y_2y_3)) > v(y_2)$. Der Exponent in (8.10.16) ist dann lediglich $m - v(z_4)$. Nach a aufgelöst lautet die Bedingung

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-v(z_4)}), \tag{8.10.20}$$

  insbesondere ist $v(a) = v(z_4) + 2v(y_3)$.

- $v(1+y_2y_3) = -v(y_3) - v(z_4)$, das heißt $v(z_4(1+y_2y_3)) = v(y_2)$. Der Exponent in (8.10.16) ist genau dann nicht positiv, wenn $v(y_2 - z_z(1+y_2y_3)) \geq m - v(z_4) - v(y_3)$. Aufgelöst nach y_2 lautet diese Bedingung

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1-\frac{1}{z_4y_3})^{-1}(1+\wp^{m-v(z_4)-v(y_3)}). \tag{8.10.21}$$

  In diesem Fall gibt (8.10.16) lediglich

$$v(a) \leq -m + 2v(z_4) + 2v(y_3). \tag{8.10.22}$$

  Falls $v(y_2 - z_z(1+y_2y_3)) < m - v(z_4) - v(y_3)$, also wenn

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1-\frac{1}{z_4y_3})^{-1}\left((1+\wp^{-v(z_4)-v(y_3)})\backslash(1+\wp^{m-v(z_4)-v(y_3)})\right), \tag{8.10.23}$$

  dann ist der Exponent in (8.10.16) positiv und man erhält

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-v(z_4)-v(y_3)-v(y_2-z_4(1+y_2y_3))}). \tag{8.10.24}$$

  Hier ist $v(a) = v(z_4) + v(y_3) - v(y_2 - z_4(1+y_2y_3))$.

Um auch die Bedingungen (8.10.1) und (8.10.2) auszuwerten, muß man nun betrachten, ob $z_1z_4 = 1$.

1. Fall: $z_1 z_4 = 1$

Man setzt

$$n_3 := \min\{-m - v(z_4), -m + v(x), -m - v(z_4) - v(1-x), -2m + v(z_4)\}.$$

Hier lautet (8.10.2)

$$r(-y_2 + a^{-1}x) \in \wp^m, \tag{8.10.25}$$

(8.10.13) wird zu

$$-r \in \wp^{m+v(y_3)} \tag{8.10.26}$$

und, da $v(z_1) = -v(z_4) < 0$, (8.10.5) wird zu

$$rs(x-1) \in 1 + \wp^{m-v(z_4)}. \tag{8.10.27}$$

Setzt man in dieses (8.10.27) die Bedingung (8.10.14) ein, so erhält man

$$-r \in a(1 - z_4 y_3)^{-1}(x-1)^{-1}(1 + \wp^{m-v(z_4)}). \tag{8.10.28}$$

Diese Bedingung für r setzt man nun in (8.10.25) ein:

$$-a(-y_2 + a^{-1}x) \in (1 - z_4 y_3)(x-1)\wp^m,$$

also, da $n_3 \leq -m - v(z_4) + v(x) - v(1-x)$,

$$v(a) \geq m + v(z_4) + v(1-x) + v(y_3) - v(y_2). \tag{8.10.29}$$

Ebenso setzt man (8.10.27) in die verbleibende Bedingung (8.10.1) ein und erhält

$$a(1 + y_2 y_3 - a^{-1}xy_3) \in z_1(1 - z_4 y_3)(x-1)(1 + \wp^{m-v(z_4)}),$$

oder nach a aufgelöst (beachte $n_3 \leq -m + v(1-x)$)

$$a \in \frac{y_3 + z_1(x-1)}{1 + y_2 y_3}(1 + \wp^{m-v(z_4)+v(1-x)}) \tag{8.10.30}$$

Falls $v(x) > -m + v(z_4)$, dann ist der Exponent in (8.10.30) positiv. Die Bewertung von a muß nun noch (8.10.29) erfüllen, also

$$v(a) = v(y_3) - v(1 + y_2 y_3) \leq m + v(z_4) + v(1-x) + v(y_3) - v(y_2).$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $v(y_2) \neq -v(y_3)$ oder wenn $v(y_2) = -v(y_3)$ mit $0 \leq v(1 + y_2 y_3) \leq -m - v(z_4) - v(1-x) - v(y_3)$.
Falls $v(x) \leq -m + v(z_4)$, dann ist der Exponent in (8.10.30) nicht mehr positiv und man erhält die Bedingung $v(a) \geq m - v(z_4) + v(1-x) + v(y_3) - v(1 + y_2 y_3)$. Kombiniert man das mit (8.10.29), so unterscheidet man am besten:

- $v(y_2) < -v(y_3)$: Da $v(z_4) + v(y_3) < -v(z_4)$, erhält man

$$v(a) \geq m - v(z_4) + v(x) - v(y_2). \tag{8.10.31}$$

- $v(y_2) > -v(y_3)$: Da $v(z_4) - v(y_2) < -v(z_4)$, erhält man

$$v(a) \geq m - v(z_4) + v(x) + v(y_3). \tag{8.10.32}$$

- $v(y_2) = -v(y_3)$: Ist $v(1 + y_2y_3) \leq -v(y_3) - 2v(z_4)$, so erhält man

$$v(a) \geq m - v(z_4) + v(x) + v(y_3) - v(1 + y_2y_3). \tag{8.10.33}$$

  Ist hingegen $v(1 + y_2y_3) > -v(y_3) - 2v(z_4)$, so hat man

$$v(a) \geq m + v(z_4) + v(x) + 2v(y_3). \tag{8.10.34}$$

Die gerade erhaltenen Bedingungen müssen jetzt mit (8.10.17)–(8.10.24), also den Bedingungen, die man aus (8.10.3) und (8.10.4) erhalten hat, kombiniert werden:

Falls $v(x) > -m + v(z_4)$:
Hier ist $v(y_2) \neq -v(y_3)$ oder $v(y_2) = -v(y_3)$ und $0 \leq v(1 + y_2y_3) \leq -m - v(z_4) - v(1 - x) - v(y_3)$. Für a hat man die Bedingung (8.10.30), die mit den übrigen Bedingungen kombiniert werden muß. Dazu vorweg eine allgemeine Rechnung:
Es sei die Bedingung

$$a \in \frac{y_3 + z_1(x-1)}{1 + y_2y_3}(1 + \wp^{m - v(z_4) + v(1-x)}) \cap \frac{1 - z_4y_3}{y_2 - z_4(1 + y_2y_3)}(1 + \wp^l)$$

gegeben, wobei $l \geq m - v(z_4) + v(1 - x)$. Dieser Durchschnitt ist genau dann nicht leer, wenn

$$\frac{y_2 - z_4(1 + y_2y_3)}{1 + y_2y_3} \in \frac{1 - z_4y_3}{y_3 + z_1(x-1)}(1 + \wp^{m - v(z_4) + v(1-x)})$$

erfüllt wird. Dies ist gleichbedeutend zu

$$\frac{y_2y_3}{1 + y_2y_3} \in \frac{y_3x}{y_3 + z_1(x-1)}(1 + \wp^{m + v(1-x) - x(x) + v(y_3)}).$$

Der letzte Exponent ist nach Wahl der Schranke n_3 nicht positiv, also erhält man die Bedingung

$$v(1 + y_2y_3) \leq v(y_2) - m - v(1 - x). \tag{8.10.35}$$

Nun kann man kombinieren:

- $v(y_2) < -v(y_3)$: Es müssen (8.10.30) und (8.10.17) erfüllt werden. Für die dort auftretenden Exponenten gilt $m - 2v(z_4) - 2v(y_3) - v(y_2) \geq m - v(z_4) + v(1-x)$, wegen Wahl von n_3. Der Bereich für a wird, wie man unter Benutzung der obigen allgemeinen Rechnung sieht, gegeben durch (8.10.17), wenn (8.10.35) erfüllt ist. Diese Bedingung ist hier gleichbedeutend zu $v(y_3) \leq -m - v(1-x)$, was wegen Wahl von n_3 immer erfüllt ist.

- $v(y_2) > -v(y_3)$: Hier müssen (8.10.30) und (8.10.18) erfüllt werden. Vergleicht man deren Exponenten, so erhält man $m - 2v(z_4) - v(y_3) \geq m - v(z_4) + v(1-x)$, wieder wegen Wahl von n_3. Also ist der Bereich für a gegeben durch (8.10.18), wenn (8.10.35) gilt, also wenn $v(y_2) \geq m + v(1-x)$. Da hier $v(y_2) > -v(y_3)$ gegeben ist, wird das wiederum durch n_3 gewährleistet.

- $v(y_2) = -v(y_3)$: Da $v(1 + y_2y_3) \leq -m - v(z_4) - v(1-x) - v(y_3) < -v(y_3) - v(z_4)$, müssen hier die Bedingungen (8.10.30) und (8.10.19) erfüllt werden. Vergleich von deren Exponenten ergibt $m - 2v(z_4) - v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \geq m - v(z_4) + v(1-x)$. Wie in den vorigen Fällen sieht man, daß a durch (8.10.19) gegeben wird, wenn (8.10.35) erfüllt ist. Diese Bedingung ist hier äquivalent zu $v(1 + y_2y_3) \leq -m - v(1-x) - v(y_3)$, was nach Voraussetzung gegeben ist.

Falls $v(x) \leq -m + v(z_4)$:
Man unterscheidet wieder nach den Bewertungen von y_2 und y_3:

- $v(y_2) < -v(y_3)$: Es müssen die Bedingungen (8.10.31) und (8.10.17) erfüllt werden. Das heißt $v(a) = -v(y_2) \geq m - v(z_4) + v(x) - v(y_2)$. Nach Voraussetzung ist $m - v(z_4) + v(x) \leq 0$. Also sind alle Bedingungen erfüllt, und der Bereich für a wird durch (8.10.17) gegeben.

- $v(y_2) > -v(y_3)$: Hier müssen (8.10.32) und (8.10.18) erfüllt werden, also $v(a) = v(y_3) \geq m - v(z_4) + v(x) + v(y_3)$. Das ist nach Voraussetzung erfüllt, und a wird durch (8.10.18) festgelegt.

- $v(y_2) = -v(y_3)$:

  - $v(1 + y_2y_3) \leq -v(y_3 - 2v(z_4) < -v(y_3) - v(z_4)$: Dann müssen (8.10.33) und (8.10.19) erfüllt werden, also $v(a) = v(y_3) - v(1 + y_2y_3) \geq m - v(z_4) + v(x) + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$. Wiederum ist dies immer gegeben, und der Bereich für a wird druch (8.10.19) beschrieben.

- $-v(y_3) - 2v(z_4) < v(1 + y_2y_3) < -v(y_3) - v(z_4)$: Hier müssen (8.10.34) und (8.10.19) erfüllt werden, das heißt $v(a) = v(y_3) - v(1+y_2y_3) \geq m + v(z_4) + v(x) + 2v(y_3)$. Das ist gleichbedeutend zu $v(1 + y_2y_3) \leq -m - v(z_4) - v(x) - v(y_3)$. Da $-m - v(z_4) - v(x) \leq -2v(z_4)$, gibt dies einen Widerspruch zur Voraussetzung. Hier gibt es keinen gültigen Bereich für a.
- $-v(y_3)-v(z_4) < v(1+y_2y_3)$: Es muß (8.10.34) sowie (8.10.20) erfüllt werden. Also muß $v(a) = v(z_4)+2v(y_3) \geq m+v(z_4)+v(x)+2v(y_3)$ gelten. Das erzwingt $v(x) \leq -m$. Dann ist der Bereich für a durch (8.10.20) festgelegt.
- $v(1+y_2y_3) = -v(y_3) - v(z_4)$ und y_2 durch (8.10.21) gegeben: Dann müssen (8.10.34) und (8.10.22) gelten, also

  $$m+v(z_4)+v(x)+2v(y_3) \leq v(a) \leq -m+2v(z_4)+2v(y_3). \quad (8.10.36)$$

  Damit dieser Bereich nicht leer ist, muß sogar $v(x) \leq -2m + v(z_4)$ gelten.
- $v(1 + y_2y_3) = -v(y_3) - v(z_4)$ und y_2 durch (8.10.23) gegeben: Es müssen (8.10.34) und (8.10.24) erfüllt werden, also $v(a) = v(z_4) + v(y_3) - v(y_2 - z_4(1 + y_2y_3)) \geq m + v(z_4) + v(x) + 2v(y_3)$. Für $v(x) < -2m + v(z_4)$ ist dies immer erfüllt, sonst hat man die zusätzliche Einschränkung $v(y_2 - z_4(1 + y_2y_3)) \leq -m - v(x) - v(y_3)$.

Zusammenfassung:

Der Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$ wird gegeben durch

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(a)\chi_1^2(1 - z_4y_3)\chi_1(x - 1) = \chi_1^{-2}(a)\chi_1^2(z_4y_3)\chi_1(x - 1).$$

Es ist $n_3 := \min\{-m - v(z_4), -m + v(x), -m - v(z_4) - v(1 - x)\}$. Die inneren Integrale ergeben sich wie folgt:

- $v(y_2) < -v(y_3)$: Dann ist der Bereich für a durch (8.10.17) gegeben, also

  $$a \in \frac{1 - z_4y_3}{y_2 - z_4(1 + y_2y_3)}(1 + \wp^{m-2v(z_4)-2v(y_3)-v(y_2)}).$$

  Es ist $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(z_4)\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1)$ und somit unabhängig von a. Das Integral nach a ist deshalb im wesentlichen

  $$\int_{\frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-2v(z_4)-2v(y_3)-v(y_2)})} d^\times a = \text{const.} \cdot q^{2v(y_3)+v(y_2)}.$$

Daher ergibt sich das innere Integral

$$\text{const.} \cdot \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{2v(y_3)+v(y_2)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2).$$

Die zugehörigen Local Linking Numbers entnimmt man Abschnitt 8.11.3.

- $v(y_2) > -v(y_3)$: Der Bereich der gültigen a ist durch (8.10.18) gegeben, das heißt durch

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-2v(z_4)-v(y_3)}).$$

Wiederum ist $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(z_4)\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1)$. Das führt zum inneren Integral der Form

$$\text{const.} \cdot \chi_1(1+y_2y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2).$$

Die Local Linking Numbers hierzu findet man in Abschnitt 8.11.2.

- $v(y_2) = -v(y_3)$ und $0 \leq v(1+y_2y_3) < n_2 - v(y_3)$: Dabei ist $n_2 \in \{-m-v(z_4-v(1-x)+1, -2v(z_4)+1\}$. Hier ist a gegeben durch (8.10.19), also durch

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-2v(z_4)-v(y_3)-v(1+y_2y_3)}).$$

Somit ist $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(z_4)\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1)$ und das inneren Integral hat die Form

$$\text{const.} \cdot \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2).$$

Die Local Linking Numbers, die sich daraus ergeben können, setzt man aus denen in Abschnitt 8.11.4 zusammen.

- $v(y_2) = -v(y_3)$ und $-v(z_4) - v(y_3) < v(1+y_2y_3)$: Hier ist a durch (8.10.20) gegeben, das heißt durch

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-v(z_4)}).$$

Das ergibt wieder $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(z_4)\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1)$ und das innere Integral

$$\text{const.} \cdot \chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{-v(z_4)+1-v(y_3)})}(y_2).$$

Die zugehörigen Local Linking Numbers finden sich in Abschnitt 8.11.4.

- $v(y_2) = -v(y_3)$ und $v(1+y_2y_3) = -v(z_4) - v(y_3)$ und y_2 durch (8.10.21) gegeben: Dann ist a durch (8.10.36) beschränkt, also

$$m + v(z_4) + v(x) + 2v(y_3) \leq v(a) \leq -m + 2v(z_4) + 2v(y_3).$$

Das Integral nach a lautet nun

$$\int_{\text{zul. } a} \chi_1^{-2}(a)\chi_1^2(z_4y_3)\ d^\times a = \delta(c(\chi_1^2) = 0)\,\mathrm{vol}^\times(\mathbf{o}_F^\times)(-2m + v(z_4) - v(x)).$$

Das innere Integral hat somit die Gestalt

$$\text{const.} \cdot \delta(c(\chi_1^2) = 0)\chi_1^2(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1-\frac{1}{z_4y_3})^{-1}(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2),$$

mit $n_2 := m - 2v(z_4)$. Auch die hierzu gehörenden Local Linking Numbers finden sich in Abschnitt 8.11.4.

- $v(y_2) = -v(y_3)$ und $v(1+y_2y_3) = -v(z_4) - v(y_3)$ und y_2 durch (8.10.23) oder durch die Einschränkung wie oben gegeben: Hier ist a im Bereich (8.10.24), das meint

$$a \in \frac{1 - z_4y_3}{y_2 - z_4(1+y_2y_3)}(1 + \wp^{m - v(z_4) - v(y_3) - v(y_2 - z_4(1+y_2y_3))}).$$

Wieder findet man $\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^2(z_4)\chi_1^2(1+y_2y_3)\chi_1(x-1) = \chi_1^{-2}(z_4y_3)$. Das innere Integral ist schließlich von der Form

$$\begin{aligned}\text{const.} \cdot \chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3(1-\frac{1}{z_4y_3}))}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\\ \cdot\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1-\frac{1}{z_4y_3})^{-1}((1+\wp^{n_1-v(y_3)})\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2).\end{aligned}$$

Die Local Linking Numbers, die sich daraus ergeben, stehen ebenfalls Abschnitt 8.11.4.

2. Fall: $z_1z_4 \neq 1$

Man setzt

$$n_3 := \min\{-m - v(z_4), -m - v(z_4) + v(x) - v(1-x), -m - v(z_4) - v(1-x)\}$$

Setzt man (8.10.14) ein in (8.10.5), dann hat man

$$a \in (z_1 + y_3(1 - z_1z_4))(1 - y_3z_4)(x-1)(1 + \wp^{\min}), \tag{8.10.37}$$

wobei $\min := \min\{m - v(z_4), m + v(z_1), m - v(1 - z_1 z_4)\}$ das Minimum der Exponenten ist. Kombiniert man (8.10.13) mit (8.10.2), so erhält man

$$\begin{aligned} -r \quad \in \quad & (-y_2 + a^{-1}x)^{-1}(1 - z_1 z_4)(1 + \wp^{m - v(1 - z_1 z_4)}) \\ & \bigcap (z_1 + y_3(1 - z_1 z_4))(1 + \wp^{m - v(1 - z_2 z_4)}). \end{aligned}$$

Dieser Durchschnitt liefert genau dann einen gültigen Bereich für r, wenn er nicht leer ist, also wenn

$$-y_2 + a^{-1}x \in \frac{1 - z_1 z_4}{z_1 + y_3(1 - z_1 z_4)}(1 + \wp^{m - v(1 - z_1 z_4)}).$$

Nach a^{-1} aufgelöst heißt das

$$a^{-1} \in \frac{z_1 y_2 + (1 - z_1 z_4)(1 + y_2 y_3)}{x(z_1 + y_3(1 - z_1 z_4))}(1 + \wp^{m - v(z_1 y_2 + (1 - z_1 z_4)(1 + y_2 y_3))}). \quad (8.10.38)$$

Auf die gleiche Weise kombiniert man (8.10.13) mit (8.10.1):

$$-r \in (1 + y_2 y_3 - a^{-1} x y_3)^{-1} z_1 (1 + \wp^{m - v(z_1)}) \cap (z_1 + y_3(1 - z_1 z_4))(1 + \wp^{m - v(1 - z_2 z_4)}).$$

Dieser Durchschnitt ist genau dann nicht leer, wenn

$$1 + y_2 y_3 - a^{-1} x y_3 \in \frac{z_1}{z_1 + y_3(1 - z_1 z_4)}(1 + \wp^{\min_1}),$$

wobei $\min_1 := \min\{m - v(z_1), m - v(1 - z_2 z_4)\}$. Nach a^{-1} aufgelöst gibt das

$$a^{-1} \in \frac{z_1 y_2 + (1 - z_1 z_4)(1 + y_2 y_3)}{x(z_1 + y_3(1 - z_1 z_4))}(1 + \wp^{\min_1 + v(z_1) - v(y_3) - v(z_1 y_2 + (1 - z_1 z_4)(1 + y_2 y_3))}). \quad (8.10.39)$$

Da $v(z_1) - v(y_3) > m$, ist diese Bedingung stärker als (8.10.38). Man unterscheidet nach den Bewertungen von y_2 und y_3:
Sei zunächst $v(y_2) < -v(y_3)$: Dann ist $v(z_1 y_2 + (1 - z_1 z_4)(1 + y_2 y_3)) = v(y_2 y_3) + v(1 - z_1 z_4)$. Der Exponent in (8.10.39) ist somit $\min_1 + v(z_1) - v(1 - z_1 z_4) - 2v(y_3) - v(y_2)$. Dank der Voraussetzung $v(y_2) < -v(y_3)$ ist dies immer positiv. Der Bereich für a ist

$$a \in \frac{x(z_1 + y_3(1 - z_1 z_4))}{z_1 y_2 + (1 - z_1 z_4)(1 + y_2 y_3)}(1 + \wp^{\min_1 + v(z_1) - v(1 - z_1 z_4) - 2v(y_3) - v(y_2)}).$$

Vergleicht man dies mit (8.10.37), so muß insbesondere $v(a) = v(x) - v(y_2) = 2v(y_3) + v(1 - z_1 z_4) + v(1 - x) + v(z_4)$ gelten, also $v(y_2) = -2v(y_3) + v(x) - v(1 - x) - v(1 - z_1 z_4) - v(z_4)$. Nach Wahl der oberen Schranke n_3 für $v(y_3)$, ist dieser letzte Term aber größer als $-v(y_3)$ im Widerspruch zur Annahme.

Sei nun $v(y_2) > -v(y_3)$: Hier ist $v(z_1y_2 + (1 - z_1z_4)(1 + y_2y_3)) = v(1 - z_1z_4)$. Der Exponent in (8.10.39) hat die Gestalt $\min_1 + v(z_1) - v(1 - z_1z_4) - v(y_3)$. Da dies positiv ist, erhält man aus (8.10.39)

$$a \in \frac{x(z_1 + y_3(1 - z_1z_4))}{z_1y_2 + (1 - z_1z_4)(1 + y_2y_3)}(1 + \wp^{\min_1 + v(z_1) - v(1 - z_1z_4) - v(y_3)}).$$

Diese Bedingung verglichen mit (8.10.37) ergibt die Forderung $v(a) = v(x) + v(y_3) = 2v(y_3) + v(1 - z_1z_4) + v(x) + v(z_4)$, also $v(y_3) = v(x) - v(1 - x) - v(1 - z_1z_4) - v(z_4) > -m + v(x) - v(1 - x)$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von n_3.

Beiträge zum inneren Integral können somit nur für $v(y_2) = -v(y_3)$ entstehen. Man unterscheidet weiter

- $v(1 + y_2y_3) < -v(y_3) + v(z_1) - v(1 - z_1z_4)$: Dies ist gleichbedeutend zu $v(1 + y_2y_3) + v(1 - z_1z - 4) \geq v(y_2) + v(z_1)$. Der Exponent aus (8.10.39) ist $\min_1 + v(z_1) - v(y_3) - v(1 - z_1z_4) - v(1 + y_2y_3))$. Nach Voraussetzung ist das größer als null, somit ist

$$a \in \frac{xy_3(1 - z_1z_4 + \frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2 + (1 - z_1z_4)(1 + y_2y_3)}(1 + \wp^{\min_1 + v(z_1) - v(1 - z_1z_4) - v(y_3) - v(1 + y_2y_3)}). \tag{8.10.40}$$

  Insbesondere ist $v(a) = v(x) + v(y_3) - v(1 + y_2y_3)$.

- $v(1 + y_2y_3) > -v(y_3) + v(z_1) - v(1 - z_1z_4)$: Hier ist der Exponent aus (8.10.39) gleich $\min_1 > 0$. Somit ist der Bereich für a gegeben durch

$$a \in \frac{xy_3(1 - z_1z_4 + \frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2 + (1 - z_1z_4)(1 + y_2y_3)}(1 + \wp^{\min_1}). \tag{8.10.41}$$

  Insbesondere ist $v(a) = v(x) + 2v(y_3) + v(1 - z_1z_4) - v(z_1)$.

- $v(1 + y_2y_3) = -v(y_3) + v(z_1) - v(1 - z_1z_4)$: Der Exponent von (8.10.39) lautet hier $\min_1 + v(z_1z_4) - v(1 - z_1z_4 + \frac{z_1y_2}{1 + y_2y_3})$. Er ist genau dann nicht positiv, wenn $v(1 - z_1z_4 + \frac{z_1y_2}{1 + y_2y_3}) \geq \min_1 + v(z_1z_4)$, also wenn

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1 - \frac{1}{z_4y_3})^{-1}(1 - \frac{1}{(1 - z_4y_3)(1 - z_1z_4)})^{-1} \cdot (1 + \wp^{\min_1 + v(z_1) - v(1 - z_1z_4) - v(y_3)}). \tag{8.10.42}$$

$$\tag{8.10.43}$$

  Dann wird aus (8.10.39) die Bedingung

$$v(a) \leq -\min_1 - v(z_1) + v(1 - z_1z_4) + 2v(y_3). \tag{8.10.44}$$

Der Exponent ist positiv, wenn

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1+\frac{1}{z_4y_3})^{-1}(1-\frac{1}{(1-z_4y_3)(1-z_1z_4)})^{-1} \tag{8.10.45}$$
$$\cdot\left((1+\wp^{v(z_1)-v(1-z_1z_4)-v(y_3)})\backslash(1+\wp^{\min_1+v(z_1)-v(1-z_1z_4)-v(y_3)})\right).$$

Dann ist der Bereich für a gegeben durch

$$a \in \frac{xy_3(1-z_1z_4+\frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2+(1-z_1z_4)(1+y_2y_3)}(1+\wp^{\min_1+v(z_1)-v(y_3)-v(z_1y_2+(1-z_1z_4)(1+y_2y_3))}). \tag{8.10.46}$$

Die gerade erhaltenen Bedingungen müssen jetzt mit denen, die aus den Bedingungen (8.10.2) und (8.10.3) resultieren, kombiniert werden. Letztere sind die Bedingungen (8.10.19)–(8.10.24). Dazu erst die folgende allgemeine Rechnung: Damit die Bedingung

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m_1}) \cap \frac{xy_3(1-z_1z_4+\frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2+(1-z_1z_4)(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m_2})$$

erfüllt werden kann, darf dieser Durchschnitt nicht leer sein. Es muß also gelten

$$\frac{z_1y_2+(1-z_1z_4)(1+y_2y_3)}{y_2-z_4(1+y_2y_3)} \in \frac{xy_3(1-z_1z_4+\frac{z_1}{y_3})}{1-z_4y_3}(1+\wp^{m_3}),$$

wobei $m_3 := \min\{m_1, m_2\}$. Löst man diese Bedingung nach y_2 auf, dann erhält man

$$y_2 \in -y_3^{-1}\left(1-\frac{1}{z_4y_3}\right)^{-1}(1+A)\,(1+\wp^{m_3-v(z_4)+v(x)-v(1-x)+v(y_2-z_4(1+y_2y_3))}), \tag{8.10.47}$$

wobei

$$A := \frac{1}{(x-1)1(1-z_4y_3)(1-z_1z_4+\frac{z_1}{y_3})}. \tag{8.10.48}$$

Es ist $v(A) = -v(1-x) - v(z_1) - 2v(z_4) - v(y_3)$.
Mit dieser Rechnung kann man nun alle Bedingungen leicht kombinieren. Es empfiehlt sich eine Unterscheidung nach dem Wert $v(z_1)+v(z_4)$. Hier wird nur der Fall

$$v(z_1) + v(z_4) < 0$$

betrachtet. Die anderen Fälle behandelt man analog und erhält keine wesentliche Änderung in den Ergebnissen.
Ist $v(z_1)+v(z_4) < 0$, so ist $v(1-z_1z_4) = v(z_1)+v(z_4)$ und $\min_1 = m - v(z_1) - v(z_4)$. Damit erhält man:

- $v(1+y_2y_3) < -v(y_3) + v(z_1) - v(1-z_1z_4) = -v(z_4) - v(y_3)$: Für a hat man die beiden Bedingungen (8.10.19) und (8.10.40) zu erfüllen. In obiger allgemeiner Rechnung ist somit $m_1 = m - 2v(z_4) - v(y_3) - v(1+y_2y_3)$ und $m_2 = m - v(z_4) - v(y_3) - v(1+y_2y_3)$. Das ergibt ein Minimum $m_3 = m_1$, und a ist durch (8.10.40) festgelegt, falls y_2 Bedingung (8.10.47) erfüllt. Der Exponent dort ist $m - 2v(z_4) - v(y_3) - v(1-x)$. Es muß also nur noch $v(A) < -v(z_4) - v(y_3)$ gewährleistet werden, das heißt $v(1-x) > -v(z_1) - v(z_4)$. Ist dies erfüllt, so findet man

$$v(1+y_2y_3) = -v(z_1) - 2v(z_4) - v(1-x) - v(y_3),$$

also $m_2 = m + v(z_1) + v(z_4) + v(1-x)$. Somit ist der Bereich für y_2 gegeben durch

$$y_2 \in -y_3^{-1}\left(1 - \frac{1}{z_4y_3}\right)^{-1}(1+A)\,(1+\wp^{m-2v(z_4)-v(1-x)+v(y_3)})$$

und der für a durch

$$a \in \frac{xy_3(1 - z_1z_4 + \frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2 + (1-z_1z_4)(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m+v(z_1)+v(z_4)+v(1-x)}).$$

- $v(1+y_2y_3) > -v(z_4) - v(y_3)$: Hier muß a den Bedingungen (8.10.20) und (8.10.41) genügen. Das gibt die Exponenten $m_1 = m - v(z_4)$ und $m_2 = m - v(z_1) - v(z_4)$. Deren Minimum ist $m_3 = m_1$. Die Bedingung an a ist (8.10.41), falls y_2 durch (8.10.47) beschrieben wird. Dafür muß $1 - x \in (1-z_1z_4)^{-1}(1+\wp)$ gelten. Man hat also

$$y_2 \in -y_3^{-1}\left(1 - \frac{1}{z_4y_3}\right)^{-1}(1+A)\,(1+\wp^{m-2v(z_4)+v(x)-v(1-x)+v(y_3)})$$

und

$$a \in \frac{xy_3(1 - z_1z_4 + \frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2 + (1-z_1z_4)(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m-v(z_4)}).$$

- $v(1+y_2y_3) = -v(z_4) - v(y_3)$: Man unterscheidet weiter:

  - y_2 sei durch (8.10.23) und (8.10.45) gegeben, also durch

    $$y_2 \in -y_3^{-1}(1 - \frac{1}{z_4y_3})^{-1}\left((1+\wp^{-v(z_4)-v(y_3)})\backslash(1+\wp^{m-v(z_4)-v(y_3)})\right).$$

    Dann muß a sowohl (8.10.24) also auch (8.10.46) genügen. Damit y_2 auch noch (8.10.47) erfüllt, muß $v(1-x) < -v(z_1) - v(z_4)$ oder

$1-x \in (1-z_1z_4)^{-1}(\mathbf{o}_F^\times \backslash (1+\wp))$ gelten. Damit findet man $m_1 = m+v(z_1)+v(1-x)$ und $m_2 \in \{m-v(z_1), m-v(z_1)+v(1-x), m-2v(z_1)-v(z_4)\}$, je nach Bewertung von $1-x$. Das Minimum der Exponenten ist somit m_1 und a durch (8.10.46) gegeben:

$$y_2 \in -y_3^{-1}\left(1-\frac{1}{z_4y_3}\right)^{-1}(1+A)\,(1+\wp^{m-2v(z_4)+v(x)-v(1-x)-v(y_3)})$$

und

$$a \in \frac{xy_3(1-z_1z_4+\frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2+(1-z_1z_4)(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m_2}).$$

– Es sei y_2 durch (8.10.23) und (8.10.42) gegeben, also

$$\begin{aligned} y_2 \quad \in \quad & -y_3^{-1}(1-\frac{1}{z_4y_3})^{-1}(1-\frac{1}{(1-z_4y_3)(1-z_1z-4)})^{-1} \\ & \cdot(1+\wp^{m-2v(z_4)-v(z_1)-v(y_3)}), \end{aligned}$$

denn $-v((1-z_4y_3)(1-z_1z_4)) = -2v(z_4)-v(z_1)-v(y_3) < m-v(z_4)-v(y_3)$. Für solche y_2 findet man $v(y_2-z_4(1+y_2y_3)) = -v(z_4)-v(z_1)-v(y_3)$. Die Bedingungen für a sind (8.10.24) und (8.10.44). Das heißt, a wird durch (8.10.24) gegeben, denn für solche a ist $v(a) = 2v(z_4)+v(z_1)+2v(y_3) \leq -m+2v(z_4)+v(z_1)+2v(y_3)$, das heißt (8.10.44) ist erfüllt. Zur Übersicht:

$$a \in \frac{1-z_4y_3}{y_2-z_4(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m+v(z_1)}).$$

– Es sei y_2 durch (8.10.21) und (8.10.45) gegeben, das heißt, da $m-v(z_4)-v(y_3) < -2v(z_4)-v(z_1)-v(y_3)$, daß y_2 durch (8.10.21) gegeben wird. Dann muß a sowohl (8.10.22) als auch (8.10.46) genügen. Für y_2 wie in (8.10.21) findet man $v(y_2z_1+(1+y_2y_3)(1-z_1z_4)) = -v(z_4)-v(y_3)$. Ein a aus (8.10.46) hat somit die Bewertung $v(a) = v(x)+2v(z_4)+v(z_1)+2v(y_3)$. Bedingung (8.10.22) heißt $v(a) \leq -m+2v(z_4)+2v(y_3)$, ist also genau dann erfüllt, wenn $v(x) \leq -m-v(z_1)$. Für solche x hat man also

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1-\frac{1}{z_4y_3})^{-1}(1+\wp^{m-v(z_4)-v(y_3)})$$

und

$$a \in \frac{xy_3(1-z_1z_4+\frac{z_1}{y_3})}{z_1y_2+(1-z_1z_4)(1+y_2y_3)}(1+\wp^{m}).$$

– y_2 sei durch (8.10.21) und (8.10.42) gegeben. Da diese beiden Bedingungen unvereinbar sind, gibt es hier keinen Beitrag.

Zusammenfassung: Innere Integrale für $v(z_1) + v(z_4) < 0$
Der Faktor $\chi_1(r^{-1}s)$ wird wegen (8.10.13) gegeben durch

$$\chi_1(r^{-1}s) = \chi_1^{-2}(r)\chi_1^{-1}(x-1) = \chi_1^{-2}(y_3)\chi_1^{-1}(x-1).$$

Betrachtet man die obige Fallunterscheidung, so sieht man, daß die Exponenten aller möglichen Bereiche für a nicht von (y_2, y_3) abhängen. Daher hat man

$$\mathrm{vol} \times (\text{zulässige } a) = \text{const.}.$$

Alle Bereiche für y_2 haben die Form

$$y_2 \in -y_3^{-1}(1+z)(1+\wp^{n_2 - v(y_3)}),$$

wobei $z \in \wp^m$, $n_3 = \min\{-m - v(z_4), -m - v(z_4) + v(x) - v(1-x), -m - v(z_4) - v(1-x)\}$ und $n_2 - n_3 \geq 2m$. Man erhält also nur innere Integrale der Form

$$\text{const.}\, \chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+z)(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2).$$

Die zugehörigen Local Linking Numbers liest man aus Abschnitt 8.11.4 ab.

8.11 Auftretende Local Linking Numbers

In diesem Abschnitt werden die Local Linking Numbers zu den inneren Integralen, die in den Rechnungen der Abschnitte 8.3–8.10 auftreten, berechnet. In allen Fällen liest man ab: Es gibt einen ganze Zahl n so, daß diese Local Linking Numbers von der Form

$$\chi_1^{-1}(b)\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|(a_{+,1}v(b)+a_{+,2})+A(b)+\mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1})|b|^{-1}(a_{-,1}v(b)+a_{-,2})\Big)$$
$$+\chi_1(b)\Big(\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|(c_{+,1}v(b)+c_{+,2})+C(b)+\mathbf{1}_{\wp^n}(b^{-1})|b|^{-1}(c_{-,1}v(b)+c_{-,2})\Big),$$

sind, mit geeigneten Konstanten $a_{\pm,i}, c_{\pm,i}$ und lokal konstanten Funktionen A, C mit kompaktem Träger in $F^\times$.
Da jede Local Linking Number eine Linearkombination solcher Local Linking Numbers und solcher, die durch die Reduktionen 8.2–8.4 abgehandelt werden, ist, ist Vermutung 5.4 bewiesen.

8.11.1 Integrale mit der Bedingung $v(y_2) < n_2$, $v(y_3) \geq n_3$ aus dem inneren Integral

Das innere Integral habe bis auf Konstanten die Form

$$\chi_1^2(y_2)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_2}}(y_2)\mathbf{1}_{\wp^{n_3}}(y_3)q^{v(y_2)},$$

wobei $n_2 \leq -m$ und $n_3 \geq m$.
Dies deckt auch den Fall mit Vorfaktor $\chi_1^2(1-y_2(z_3-y_3))$ ab, denn dieser Faktor ist für (y_2, y_3) aus dem Träger des inneren Integrals gleich $\chi_1^2(y_2)\chi_1^2(z_3)$.
Die gesuchten Local Linking Numbers haben die Form

$$\chi_1^{-1}(b)\int\int \chi_1^2(y_2)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_2}}(y_2)\mathbf{1}_{\wp^{n_3}}(y_3)q^{v(y_2)}\bar{\psi}(b^{-1}y_2, by_3)\ dy_3\ dy_2,$$

wobei ψ die elementaren Schwartzfunktionen durchläuft. Die Integrale nach y_2 und y_3 lassen sich trennen. Zuerst führt man die Integration nach y_3 aus und erhält

$$\int \mathbf{1}_{\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}\wp^m}(y_3)\ dy_3 = \mathbf{1}_{F\setminus\wp^{m-n_3}}(b)|b|^{-1}\operatorname{vol}(\wp^m) + \mathbf{1}_{\wp^{m-n_3}}(b)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)q^{-n_3}$$

und

$$\int \mathbf{1}_{\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\ dy_3 = \mathbf{1}_{F\setminus\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|^{-1}\operatorname{vol}(\wp^m).$$

Sei nun zunächst $\chi_1^2 = 1$:
Die möglichen Integrale nach y_2 lauten dann

$$\int \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2}}(y_2) q^{v(y_2)} \mathbf{1}_{b\wp^m}(y_2)\ dy_2 = \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2-m}}(b) \sum_{j=m+v(b)}^{n_2-1} q^j \operatorname{vol}(\wp^j \backslash \wp^{j+1})$$
$$= \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2-m}}(b)(-v(b) - m + n_2) \operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)(1 - q^{-1})$$

und

$$\int \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2}}(y_2) q^{v(y_2)} \mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2 = \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2-v(a_2)}}(b) \operatorname{vol}(\wp^m) q^{v(a_2)}.$$

Aus diesen Integralen setzt man mit geeigneten Konstanten c_1, c_2 sowie einer Funktion A von kompaktem Träger in $F^\times$ die Local Linking Numbers zusammen:

$$A(b) + \chi_1^{-1}(b) \mathbf{1}_{F\backslash(\wp^{n_2-m} \cup \wp^{-m-n_3})}(b) |b|^{-1} \big(c_1 v(b) + c_2\big)$$

Sei nun $\chi_1^2 \neq 1$:
Die gesuchten Local Linking Numbers haben nun die Form

$$\chi_1^{-1}(b) \int \int \chi_1^2(y_2) \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2}}(y_2) \mathbf{1}_{\wp^{n_3}}(y_3) q^{v(y_2)} \bar{\psi}(b^{-1}y_2, by_3)\ dy_3\ dy_2,$$

wobei ψ die elementaren Schwartzfunktionen durchläuft.
Betrachtet man die Integrale für die möglichen Funktionen in y_2, so erhält man:

$$\int \chi_1^2(y_2)) q^{v(y_2)} \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2}}(y_2) \mathbf{1}_{b\wp^m}(y_2)\ dy_2$$
$$= \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2-m}}(b) \int_{\wp^{m+v(b)}\backslash\wp^{n_2}} q^{v(y_2)} \chi_1^2(y_2)\ dy_2$$
$$= \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2-m}}(b) \sum_{j=m+v(b)}^{n_2-1} q^j \int_{\wp^j\backslash\wp^{j+1}} \chi_1^2(y_2)\ dy_2$$
$$= \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2-m}}(b) \frac{\chi_1^2(\pi^{n_2}) - \chi_1^2(b\pi^m)}{\chi_1^2(\pi) - 1} \delta(c(\chi_1^2) = 0) \operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)(1 - q^{-1})$$

und

$$\int \chi_1^2(y_2) q^{v(y_2)} \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2}}(y_2) \mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2$$
$$= \mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_2-m}}(b) q^{v(b)+v(a_2)} \chi_1^2(ba_2) q^{-v(b)-v(a_2)} \int_{\wp^{m-v(a_2)}} \chi_1^2(1 - y_2)\ dy_2$$
$$= 1_{F\backslash\wp^{n_2-m}}(b) \chi_1^2(ba_2) \operatorname{vol}(\wp^m) q^{v(a_2)} \delta(c(\chi_1^2) \leq m - v(a_2)).$$

Setzt man die Integrale nach y_3 von vorne und y_2 zusammen, so erhält man also mit einer lokal konstanten Funktion A von kompaktem Träger in $F^\times$, einer Zahl $n < -m$ und Konstanten c_1, c_2, die geeignet gewählt werden, für die Local Linking Number

$$A(b) + \mathbf{1}_{F\setminus\wp^n}(b)|b|^{-1}\Big(c_1\chi_1(b) + c_2\chi_1^{-1}(b)\delta(c(\chi_1^2) = 0)\Big).$$

8.11.2 Integrale mit den Bedingungen $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) > -v(y_3)$ aus dem inneren Integral

1. Fall:

Das innere Integral laute bis auf Konstanten

$$\chi_1^2(1 + y_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)}.$$

Das Verhalten der Local Linking Numbers wird bestimmt durch das der Local Linking Numbers

$$\chi_1(b)^{-1}\int\int \chi_1^2(1 + y_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)}\bar{\psi}(b^{-1}y_2, by_3)\ dy_2\ dy_3,$$

wobei ψ die elementaren Schwartzfunktionen durchläuft. Dabei ergibt die Integration nach y_2 mit der Schwartzfunktion $\mathbf{1}_{b\wp^m}(y_2)$:

$$\begin{aligned}
&\int \chi_1^2(1 + y_2y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)\mathbf{1}_{b\wp^m}(y_2)\ dy_2\\
&= \mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)\int_{\wp^{-v(y_3)+1}} \chi_1^2(1 + y_2y_3)\ dy_2\\
&\quad +\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)\int_{\wp^{m+v(b)}} \chi_1^2(1 + y_2y_3)\ dy_2\\
&= \delta(c(\chi_1^2) \le 1)\operatorname{vol}(\wp)\Big(\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)q^{v(y_3)} + \mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)q^{-v(b)-m+1}\Big)\\
&\quad +\delta(c(\chi_1^2) \ge 1)\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-m+c(\chi_1^2)}}(y_3)q^{-v(b)}\operatorname{vol}(\wp^m).
\end{aligned}$$

Integration nach y_2 mit der Schwartzfunktion $\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
&\int \chi_1^2(1 + y_2y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}\ dy_2\\
&= \mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-v(a_2)+1}}(y_3)\int_{b(a_2+\wp^m)} \chi_1^2(1 + y_2y_3)\ dy_2 =
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-v(a_2)+1}}(y_3)\chi_1^2(1+ba_2y_3)q^{v(y_3)}\int_{\wp^{m+v(b)+v(y_3)}}\chi_1^2(1+y_2)\ dy_2$$
$$= \mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-v(a_2)+1}\cap\wp^{-v(b)-m-c(\chi_1^2)}}(y_3)\chi_1^2(1+ba_2y_3)q^{-v(b)}\operatorname{vol}(\wp^m)$$

.

Betrachtet man weiter die Integration nach y_3, so erhält man für den Term der Form $\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)$ keinen Beitrag, denn: Kombiniert mit der Schwartzfunktion $\mathbf{1}_{b^{-1}\wp^m}(y_3)$ entsteht die Bedingung $-v(b)+m \leq v(y_3) < -v(b)-m+1$, also der Widerspruch $m < -m+1$. Kombiniert man mit $\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)$, so erhält man $-v(b)+v(a_3) = v(y_3) < -v(b)-m+1$, also $v(a_3) \leq -m$, was ausgeschlossen wurde.
Aus der Integration nach y_2 liefern also nur Terme mit $v(y_3) \geq -v(b)-m_3$ einen Beitrag, und zwar: Integration gegen die Funktion $\mathbf{1}_{b^{-1}\wp^m}(y_3)$:

$$\int \chi_1^2(1+ba_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-m_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{m-v(b)}}(y_3)q^{-v(b)}\ dy_3$$
$$= \mathbf{1}_{\wp^{\min-n_3}}(b)|b|\sum_{j=\min-v(b)}^{n_3-1} q^j\int_{\wp^j\setminus\wp^{j+1}}\chi_1^2(1+ba_2y_3)$$
$$= \mathbf{1}_{\wp^{\min-n_3}}(b)|b|\Big(\delta(c(\chi_1^2)\leq \min -v(a_2))(v(b)-\min+n_3)(1-q^{-1})\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)$$
$$+\delta(\min -v(a_2) < c(\chi_1^2)\leq n_3)\cdot \text{const.}\Big)$$
$$= \mathbf{1}_{\wp^{\min-n_3}}(b)|b|(c_1v(b)+c_2)$$

wobei $\min := \min\{m, -m_3\}$ gesetzt wurde und c_1, c_2 zwei Konstanten sind, die vom Exponenten $c(\chi_1^2)$ des Führers von χ_1^2 abhängen.
Integration gegen die Funktion $\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)$:

$$\int \chi_1^2(1+ba_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-m_3}}(y_3)q^{-v(b)}\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\ dy_3$$
$$= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|q^{-v(b)+v(a_3)}\int_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}\chi_1^2(1+ba_2y_3)\ dy_3$$
$$= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|q^{-v(b)+v(a_3)}$$
$$\cdot q^{v(b)}\chi_1^2(1+a_2a-3)\delta(c(\chi_1^2)\leq v(a_2)-v(1+a_2a_3)+m)$$
$$= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\cdot \text{const.}.$$

Dabei wurde angenommen, daß $v(a_3) \geq -m_3$, denn sonst verschwindet dieses Integral sowieso.

Zusammenfassung 1. Fall:
Local Linking Numbers von diesem Typ haben die Gestalt

$$\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|\Big(C_1 v(b) + C_2\Big).$$

2. Fall:

Das innere Integral habe bis auf Konstanten die Form

$$\chi_1^2(1 - y_2(z_3 - y_3))\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)},$$

wobei $n_3 \leq -m$. Diesen Fall führt man durch die Substitution

$$y_3 \mapsto y_3' := y_3 - z_3$$

zurück auf den 1. Fall. Bei dieser Substitution ist $v(y_3') = v(y_3)$, denn das innere Integral fordert $v(y_3) < -m$, und für z_3 hat man die Grenzen $-m < v(z_3) < m$. Daher liefern die Integrale nach y_2 dieselben Ergebnisse wie im 1. Fall. Wie dort gibt der Term der Form $\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)$ keinen Beitrag. Die Schwartzfunktion $\mathbf{1}_{\wp^{m-v(b)}}(y_3)$, gegen die man die übrigen Terme aufintegrieren muß, ist ebenfalls nur eine Funktion der Bewertung und daher stabil unter der Substitution. Für die Schwartzfunktion $\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)$ bemerkt man: Ist $v(b) \geq m - v(z_3)$, so ist $y_3' \in b^{-1}a_3 + \wp^{m-v(b)}$ gleichbedeutend zu

$$y_3 \in b^{-1}a_3 + z_3 + \wp^{m-v(b)} = b^{-1}a_3 + \wp^{m-v(b)}.$$

Somit erhält man für solche b die Local Linking Number wie im 1. Fall. Die übrigen b befinden sich im kompakten Bereich $v(a_3) - n_3 + 1 \leq v(b) < m - v(z_3)$. Die Integrale hierzu liefern keinen Beitrag zur Asymptotik $v(b) \to \pm\infty$, brauchen also nicht weiter betrachtet zu werden.

3. Fall:

Das innere Integral laute bis auf Konstanten

$$\chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)q^{v(y_3)}.$$

Man kann annehmen, daß $\chi_1^2 \neq 1$, denn sonst kann man die Linking Numbers schon aus dem 1. Fall ablesen. Integriert man den von y_2 abhängigen Term gegen die Schwartzfunktionen von y_2 auf, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\int \mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)\mathbf{1}_{b\wp^m}(y_2)\ dy_2 \\
&= \mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)\int_{\wp^{-v(y_3)+1}} dy_2 + \mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)\int_{\wp^{m+v(b)}} dy_2 \\
&= \mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)q^{v(y_3)}\operatorname{vol}(\wp) + \mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)q^{-v(b)}\operatorname{vol}(\wp^m),
\end{aligned}$$

und

$$\int \mathbf{1}_{\wp^{-v(y_3)+1}}(y_2)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2 = \mathbf{1}_{\wp^{-v(b)-v(a_2)+1}}(y_3)q^{-v(b)}\operatorname{vol}(\wp^m).$$

Wie im 1. Fall liefert der Term mit $\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-m+1}}(y_3)$ keinen Beitrag bei der Integration nach y_3. Es bleiben insgesamt somit Terme der Form

$$\chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)+n}\setminus\wp^{n_3}}(y_3)q^{-v(b)+v(y_3)},$$

mit $n = -m+1$ oder $n = -v(a_2)+1$. Integration nach y_3 ergibt

$$\begin{aligned}
&\int \chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)+n}\setminus\wp^{n_3}}(y_3)q^{-v(b)+v(y_3)}\mathbf{1}_{\wp^{m-v(b)}}(y_3)\ dy_3\\
&= \int \chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)+m}\setminus\wp^{n_3}}(y_3)q^{-v(b)+v(y_3)}\ dy_3\\
&= \mathbf{1}_{\wp^{m-n_3+1}}(b)|b|\int_{\wp^{-v(b)+m}\setminus\wp^{n_3}} \chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)}\ dy_3\\
&= \mathbf{1}_{\wp^{m-n_3+1}}(b)|b|\frac{\chi_1^{-2}(\pi^{n_3})-\chi_1^{-2}(b^{-1}\pi^m)}{\chi_1^{-2}(\pi)-1}\delta(c(\chi_1^2)=0)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)(1-q^{-1}),
\end{aligned}$$

falls $\chi_1^2 \neq 1$, beziehungsweise falls $\chi_1^2 = 1$

$$\mathbf{1}_{\wp^{m-n_3+1}}(b)|b|\big(n_3 - m + v(b)\big)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)(1-q^{-1}),$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\int \chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^{-v(b)+n}\setminus\wp^{n_3}}(y_3)q^{-v(b)+v(y_3)}\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\ dy_3\\
&= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\chi_1^2(ba_3^{-1})q^{v(a_3)}\delta(c(\chi_1^2)\leq m - v(a_3))\operatorname{vol}(\wp^m),
\end{aligned}$$

falls $n \leq v(a_3)$. Sonst verschwindet dieses Integral. Dann haben die Local Linking Numbers in diesem Fall für $\chi_1^2 \neq 1$ die Gestalt

$$\mathbf{1}_{\wp^{n'}}(b)|b|\big(c_1\chi_1(b) + c_2\chi_1^{-1}(b)\delta(c(\chi_1^2)=0)\big),$$

beziehungsweise für $\chi_1^2 = 1$

$$\mathbf{1}_{\wp^{n'}}(b)|b|\chi_1(b)c_1\big(v(b)+c_2\big),$$

mit geeigneten Konstanten n' und c_1, c_2.

8.11.3 Integrale mit der Bedingung $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) < -v(y_3)$ aus dem inneren Integral

Hier gilt $v(y_2) < -v(y_3)$ und Reduktion 8.5 besagt, daß nur die Local Linking Number zur Schwartzfunktion

$$\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)$$

berechnet werden muß.

1.Fall:

Das innere Integral laute

$$\chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2)q^{2v(y_3)+v(y_2)}.$$

Aus dem Integranden zieht man die Bedingungen $v(b) > v(a_3) - n_3$, $v(b) \geq m - v(a_2)$ und $v(a_2) < -v(a_3)$. Es sei nun n_3 sogar so klein, daß $v(a_3) - n_3 \geq m - v(a_2)$. Die übrigen y_3, die man dabei außer acht läßt, erfüllen $-m+v(a_2)+v(a_3) < v(y_3) < -m$ und implizieren $m \leq v(y_2) < m - v(a_2) - v(a_3)$. Dieser Bereich für (y_2, y_3) ist kompakt und darf wegen Reduktion 8.2 unbeachtet bleiben.
Für die Local Linking Number findet man nun

$$\begin{aligned}
&\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+2v(a_3)+v(a_2)}\\
&\qquad\cdot\int_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}\int_{b(a_2+\wp^m)}\chi_1^2(1+y_2y_3)\ dy_2\ dy_3\\
&=\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|q^{2v(a_3)+v(a_2)}\\
&\qquad\cdot\int_{a_3+\wp^m}\chi_1^2(1+a_2y_3)\int_{\wp^{m-v(a_2)}}\chi_1^2(1+\frac{a_2y_3y_2}{1+a_2y_3})\ dy_2\ dy_3\\
&=\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|q^{2v(a_3)+v(a_2)}\\
&\qquad\cdot\int_{\wp^{m-v(a_3)}}\chi_1^2(1+y_3)\ dy_3\ \ \mathrm{vol}(\wp^m)\delta(c(\chi_1^2)\leq m-v(a_2))\\
&=\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|q^{2v(a_3)+2v(a_2)}\chi_1^2(1+a_2a_3)\\
&\qquad\cdot\delta(c(\chi_1^2)\leq m-v(a_2))\delta(c(\chi_1^2)\leq m-v(a_3))\,\mathrm{vol}(\wp^m)^2.
\end{aligned}$$

2. Fall:

Das innere Integral laute

$$\chi_1^2(1+y_2(y_3-z_3))\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2)q^{2v(y_3)+v(y_2)},$$

mit $n_3 \leq -m$. Die Rechnungen führt man auf den 1. Fall zurück: Man substituiert

$$y_3 \mapsto y_3' := y_3 - z_3.$$

Da das innere Integral $v(y_3) < -m$ fordert, ist $v(y_3') = v(y_3)$. Nimmt man zusätzlich $v(b) \geq m - v(z_3)$, so ist $y_3' \in b^{-1}(a_3 + \wp^m)$ äquivalent zu $y_3 \in b^{-1}(a_3 + \wp^m)$. Für solche b erhält man die Local Linking Number wie im 1. Fall. Für die übrigen b gilt (siehe 1. Fall) $v(a_3) - n_3 + 1 \leq v(b) < m - v(z_3)$. Dieser Bereich ist kompakt und daher uninteressant, wird also nicht berechnet.

3.Fall:

Das innere Integral laute

$$\chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2)q^{2v(y_3)+v(y_2)},$$

mit $n_3 \leq -m$. Integration der von y_2 abhängigen Terme gegen die zugehörige Schwartzfunktion ergibt

$$\int \mathbf{1}_{\wp^m\setminus\wp^{-v(y_3)}}(y_2)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2 = \mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-v(a_2)}}(y_3)q^{v(a_2)}\operatorname{vol}(\wp^m).$$

Integriert man weiter nach y_3, so gibt das

$$\begin{aligned}\int \chi_1^{-2}(y_3)q^{2v(y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{-v(b)-v(a_2)}}(y_3)q^{v(a_2)}\operatorname{vol}(\wp^m)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\ dy_3 \\ = \chi_1^2(ba_3^{-1})\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3}}(b)|b|\delta(c(\chi_1^2) \leq m - v(a_3))q^{2v(a_3)+v(a_2)}\operatorname{vol}(\wp^m)^2.\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Vorfaktor $\chi_1^{-1}(b)$ liest man daraus ab, daß die Local Linking Number hier die Form

$$\chi_1(b)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b| \cdot \text{const.}$$

hat, für eine passende ganze Zahl n.

8.11.4 Integrale mit der Bedingung $v(y_3) < n_3$ und $v(y_2) = -v(y_3)$ aus dem inneren Integral

Wegen Reduktion 8.5 genügt es, die Local Linking Numbers zu äußeren Funktionen der Form

$$\psi(b^{-1}y_2, by_3) = \mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(by_3),$$

wobei $v(a_2) = -v(a_3)$ erfüllt sein muß, zu berechnen.

In den Abschnitten 8.3–8.10 treten häufig innere Integrale auf, die keine reinen Funktionen von y_3 sind , sondern Terme in $y_3' := y_3(1+z)$ mit $v(z) \geq m$ beinhalten. Die Local Linking Numbers solcher innerer Integrale können leicht aus den untenstehenden Fällen abgeleitet werden: Zunächst bemerkt man, daß immer $v(y_3) < n_3 \leq -m$ gilt. Die obige äußere Funktion impliziert also $v(b) > v(a_3) - n_3$. Fordert man zusätzlich $v(b) \geq m - v(z) + n_3$, so sind $y_3' \in b^{-1}(a_3 + \wp^m)$ und $y_3 \in b^{-1}(a_3 + \wp^m)$ gleichbedeutend. Außerdem gilt natürlich $v(y_3') = v(y_3)$. Substituiert man also

$$y_3 \mapsto y_3' = y_3(1+z),$$

so ergibt sich für b mit $v(b) \geq m - v(z) + n_3$ eine Local Linking Number mit Termen in y_3' durch die analoge mit y_3. Die Menge der b, die man bisher außer acht gelassen hat, ist kompakt, denn es gilt für sie $v(a_3) - n_3 < v(b) < m - v(z) + n_3$. Die Linking Numbers für solche b sind uninteressant für die Asymptotik $v(b) \to \pm\infty$. Man kann sie also beiseite lassen.

1.Fall

Das innere Integral der Local Linking Numbers laute bis auf Konstanten

$$\chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2),$$

wobei $n_3 \leq -m$ und $n_2 - n_3 \geq 2m$. Integration nach y_2 liefert

$$\begin{aligned}
&\int \mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2)\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)\ dy_2 \\
&= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\mathbf{1}_{(-ba_2)^{-1}(1+\wp^{m-v(a_2)})}(y_3)q^{2v(y_3)}\operatorname{vol}(\wp^{n_2}).
\end{aligned}$$

Damit erhält man für die Linking Number:

$$\begin{aligned}
&\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\operatorname{vol}(\wp^{n_2}) \\
&\qquad \cdot \int \mathbf{1}_{(-ba_2)^{-1}(1+\wp^{m-v(a_2)})}(y_3)q^{2v(y_3)}\chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\ dy_3 \\
&= \chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\operatorname{vol}(\wp^{n_2})q^{-2v(b)+2v(a_3)}\chi_1^{-2}(b^{-1}a_3a') \\
&\qquad \cdot \operatorname{vol}\big(b^{-1}a_3a'(1+\wp^{m+|v(a_3)|})\big)\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2) \\
&= \chi_1(b)1_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|q^{-2|v(a_3)|}\chi_1^{-2}(a_3a')\operatorname{vol}(\wp^m)\operatorname{vol}(\wp^{n_2}) \\
&\qquad \cdot\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2),
\end{aligned}$$

wo $a' = 1$, wenn $v(a_3) \leq 0$ und $a' = a_2a_3^{-1}$, wenn $v(a_3) > 0$.

2. Fall

Das innere Integral der Local Linking Numbers laute bis auf Konstanten

$$\chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2),$$

wobei $n_3 \leq -m$ und $n_2 - n_3 \geq 2m$. Integration nach y_2 liefert

$$\begin{aligned}
&\int \chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(1+\wp^{n_2-v(y_3)})}(y_2)\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(b^{-1}y_2)\ dy_2 \\
&= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\mathbf{1}_{(-ba_2)^{-1}(1+\wp^{m-v(a_2)})}(y_3)q^{v(y_3)}\int_{\wp^{n_2+v(b)-v(a_3)}}\chi_1^2(y_2)\ dy_2 \\
&= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\mathbf{1}_{(-ba_2)^{-1}(1+\wp^{m-v(a_2)})}(y_3)q^{-v(b)+v(a_3)} \\
&\qquad \cdot \sum_{j=n_2+v(b)-v(a_3)}^{\infty} \chi_1^2(\pi)^j q^{-j}\delta(c(\chi_1^2)=0)\cdot \text{const.} \\
&= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\mathbf{1}_{(-ba_2)^{-1}(1+\wp^{m-v(a_2)})}(y_3)\chi_1^2(b)\cdot \text{const.}
\end{aligned}$$

Damit findet man für die Local Linking Number

$$\begin{aligned}
&\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\chi_1^2(b)\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2)\int_{ba_3a'(1+\wp^{m+|v(a_3)|})} dy_3 \\
&= \chi_1(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\cdot \text{const.}.
\end{aligned}$$

3. Fall

Das innere Integral laute

$$\chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp))}(y_2)q^{v(y_3)}$$

mit $n_2 \leq -m$. Das gibt die Local Linking Number

$$\begin{aligned}
&\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+v(a_3)} \\
&\qquad \cdot \int \chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o_F}^\times\setminus(1+\wp))\cap b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2\ dy_3 \\
&= \chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|q^{v(a_3)}\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(\mathbf{o_F}^\times\setminus(1+\wp))}(a_2) \\
&\qquad \cdot \int \chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(y_3)\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(y_2)\ dy_2\ dy_3.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist unabhängig von b, die Linking Number hat somit für passendes n die Gestalt

$$\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|\cdot \text{const.}.$$

Der Vollständigkeit halber sei dieses letzte Integral hier noch angegeben:

$$\begin{aligned}&\int \chi_1^2(1+y_2y_3)\mathbf{1}_{a_3+\wp^m}(y_3)\mathbf{1}_{a_2+\wp^m}(y_2)\ dy_2\ dy_3\\ &= \delta\big(c(\chi_1^2) \leq m - |v(a_3)| - v(1+a_2a_3)\big)\operatorname{vol}(\wp^m)^2.\end{aligned}$$

4. Fall:

Das innere Integral laute

$$\chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp))}(y_2)$$

mit $n_2 \leq -m$. Integration nach y_2 der davon abhängigen Terme ergibt

$$\int \mathbf{1}_{-y_3^{-1}(\mathbf{o_F}^\times\setminus(1+\wp))}(y_2)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2 = \mathbf{1}_{(-ba_2)^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp))}(y_3)q^{-v(b)}\operatorname{vol}(\wp^m).$$

Integration nach y_3 liefert somit

$$\begin{aligned}&\int \chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{(-ba_2)^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp))}(y_3)q^{-v(b)}\operatorname{vol}(\wp^m)\\ &\qquad\cdot\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3)\ dy_3\\ &= \mathbf{1}_{v(a_3)-n_3+1}(b)|b|\chi_1^2(ba_3^{-1})\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(\mathbf{o}_F^\times\setminus(1+\wp))}(a_2)q^{v(a_3)}\\ &\qquad\cdot\delta(c(\chi_1^2) \leq m - v(a_3))\operatorname{vol}(\wp^m)^2.\end{aligned}$$

Die Local Linking Numbers haben also in diesem Fall die Gestalt

$$\chi_1(b)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b| \cdot \text{const.},$$

für eine passende natürliche Zahl n.

5. Fall:

Das innere Integral laute

$$\chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)$$

mit $n_3 \leq -m$ und $n_3 < n_2 \leq m$.
Man kann hier annehmen, daß n_3 auch so klein ist, daß $n_2 - n_3 \geq m - v(a_3)$ gilt. Der Bereich der y_3 aus dem Träger des inneren Integrals, die man dabei nicht beachtet, erfüllen $n_{3\text{neu}} < v(y_3) < n_{3\text{alt}}$. Dies impliziert für die zulässigen y_2 die Schranken $-n_{3\text{alt}} < v(y_2) < -n_{3\text{neu}}$. Der Bereich der (y_2, y_3) ist also kompakt und braucht wegen Reduktion 8.2 nicht weiter untersucht werden.

Man spalte die Linking Number auf in die Summe der zwei Linking Numbers, die man erhält, wenn man

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\backslash(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))} &= \mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\backslash(1+\wp^{m+v(a_3)}))} \\ &\quad +\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp^{m+v(a_3)})\backslash(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}\end{aligned}$$

zerlegt.
Die Local Linking Number

$$\begin{aligned}\chi_1^{-1}(b)\int\int \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\backslash\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3) \\ \cdot\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp^{m+v(a_3)})\backslash(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2\ dy_3\end{aligned}$$

erhält man dann wie folgt: Damit $y_3 \in b^{-1}(a_3+\wp^m)$ erfüllt werden kann, muß $v(b) > v(a_3) - n_3$ gelten. Für y_2 hat man die Forderung

$$\begin{aligned}y_2 &\in b(a_2+\wp^m)\cap -y_3^{-1}((1+\wp^{m+v(a_3)})\backslash(1+\wp^{n_2-v(y_3)})) \\ &= -y_3^{-1}((1+\wp^{m+v(a_3)})\backslash(1+\wp^{n_2-v(y_3)})),\end{aligned}$$

wenn $y_3 \in (-ba_2)^{-1}(1+\wp^{m+v(a_3)})$ erfüllt ist. Sonst gibt es keinen gültigen Bereich für y_2.
Also muß $y_3 \in b^{-1}a_3a'(1+\wp^{m+|v(a_3)|})$ und $a_2 \in -a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})$ gelten, wobei $a'=1$, wenn $v(a_3)\le 0$ und $a'=(-a_2a_3)^{-1}$, wenn $v(a_3)>0$. Substituiert man noch $y_3 \mapsto by_3$ und $y_2 \mapsto b^{-1}y_2$, so erhält man die Local Linking Number

$$\begin{aligned}&\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+v(a_3)}\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2) \\ &\quad\cdot\int\int \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{a_3a'(1+\wp^{m+|v(a_3)|})}(y_3) \\ &\qquad\qquad\cdot\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp^{m+v(a_3)})\backslash(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)\ dy_2\ dy_3 \\ &= \chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+v(a_3)}\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2)\,\mathrm{vol}(\wp^m) \\ &\quad\cdot q^{-v(a_3)-|v(a_3)|-v(a_3)}\int_{\wp^{m+v(a_3)}\backslash\wp^{n_2+v(b)-v(a_3)}}\chi_1^2(y_2)q^{v(y_2)}\ dy_2 \\ &= \chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2)q^{-v(a_3)-|v(a_3)|} \\ &\quad\cdot\mathrm{vol}(\wp^m)\sum_{j=m+v(a_3)}^{n_2+v(b)-v(a_3)+1}\chi_1^2(\pi^j)q^{j-j}\int_{\mathbf{o}_F^\times}\chi_1^2(y_2)\ dy_2 =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2)q^{-v(a_3)-|v(a_3)|} \\
&\quad \cdot \operatorname{vol}(\wp^m)\operatorname{vol}(\mathbf{o}_F)(1-q^{-1})\delta(c(\chi_1^2)=0) \\
&\quad \cdot \begin{cases} \frac{\chi_1^2(\pi)^{m+v(a_3)}}{\chi_1^2(\pi)-1}(\chi_1(b)\chi_1^2(\pi)^{n_2-2v(a_3)-m}-\chi_1^{-1}(b)), & \text{falls } \chi_1^2 \neq 1 \\ \chi_1^{-1}(b)(v(b)-2v(a_3)+n_2-m), & \text{falls } \chi_1^2 = 1 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Die andere Local Linking Number ist

$$
\begin{aligned}
\chi_1^{-1}(b)\int\int \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3) \\
\cdot\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)}))}(y_2)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2\ dy_3.
\end{aligned}
$$

Hier gilt

$$
y_2 \in ba_2(1+\wp^{m+v(a_3)}) \cap -y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)})) = ba_2(1+\wp^{m+v(a_3)}),
$$

falls $y_3 \in (-ba_2)^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)})$. Sonst gibt es keinen gültigen Bereich für y_2. Zusammen mit $y_3 \in b^{-1}a_3(1+\wp^{m-v(a_3)})$ erhält man:
Falls $v(a_3) \leq 0$:

$$
y_3 \in b^{-1}a_3(1+\wp^{m-v(a_3)}),
$$

wenn $a_2 \in -a_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)}))$. Man erhält die Local Linking Number

$$
\begin{aligned}
&\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+v(a_3)}\mathbf{1}_{-a_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)}))}(a_2) \\
&\cdot\int\int \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{b^{-1}a_3(1+\wp^{m-v(a_3)})}(y_3)\mathbf{1}_{ba_2(1+\wp^{m+v(a_3)})}(y_2)\ dy_2\ dy_3 \\
&= \chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+v(a_3)}\mathbf{1}_{-a_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)}))}(a_2) \\
&\quad\cdot\int\int \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{a_3(1+\wp^{m-v(a_3)})}(y_3)\mathbf{1}_{a_2(1+\wp^{m+v(a_3)})}(y_2)\ dy_2\ dy_3 \\
&= \chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\,\text{const.}.
\end{aligned}
$$

Falls $v(a_3) > 0$:

$$
y_3 \in b^{-1}a_3(1+\wp^{m-v(a_3)})\setminus(-ba_2)^{-1}(1+\wp^{m+v(a_3)}),
$$

wenn $a_2 \in -a_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m-v(a_3)}))$. Das gibt die Local Linking Number:

$$
\begin{aligned}
&\chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+v(a_3)}\mathbf{1}_{-a_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m-v(a_3)}))}(a_2) \\
&\quad\cdot\int\int \chi_1^2(1+y_2y_3)q^{v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3(1+\wp^{m-v(a_3)})\setminus -a_2^{-1}(1+\wp^{m+v(a_3)}))}(y_3) \\
&\qquad\cdot\mathbf{1}_{ba_2(1+\wp^{m+v(a_3)})}(y_2)\ dy_2\ dy_3 \\
&= \chi_1^{-1}(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\,\text{const.}.
\end{aligned}
$$

6. Fall:

Das innere Integral laute

$$\chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)$$

mit $n_3 \leq -m$ und $n_3 < n_2 \leq m$.
Die Berechnungen hier laufen analog zum 5. Fall:
Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß n_3 sogar so klein ist, daß auch $n_2 - n_3 \geq m - v(a_3)$ erfüllt ist. Man spaltet das Integral auf, indem man die charakteristische Funktion in y_2 zerlegt,

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))} &= \mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)}))} \\ &\quad +\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp^{m+v(a_3)})\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}.\end{aligned}$$

Die Local Linking Number

$$\begin{aligned}\chi_1^{-1}(b)\int\int \chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3) \\ \cdot\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp^{m+v(a_3)})\setminus(1+\wp^{n_2-v(y_3)}))}(y_2)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2\ dy_3\end{aligned}$$

erhält man dann zu

$$\begin{aligned}&\chi_1^{-1}(b)\chi_1^{-2}(b^{-1}a_3a')q^{-v(b)+v(a_3)}\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)\mathbf{1}_{-a_3^{-1}(1+\wp^{m-|v(a_3)|})}(a_2) \\ &\qquad\cdot\int \mathbf{1}_{1+\wp^{m+|v(a_3)|}}(y_3)\chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_2)}\mathbf{1}_{\wp^{m+v(a_2)}\setminus\wp^{n_2+v(b)-v(a_3)}}(y_2)\ dy_2\ dy_3 \\ &= \chi_1(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|\cdot\text{const.} \\ &\qquad\cdot\delta(c(\chi_1^2)\leq m+|v(a_3)|)\sum_{j=m+v(a_3)}^{n_2+v(b)-v(a_3)}\text{vol}(\mathbf{o}_F)(1-q^{-1}) \\ &= \chi_1(b)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)|b|(v(b)+c)\cdot\text{const.}.\end{aligned}$$

Die andere Local Linking Number ist

$$\begin{aligned}\chi_1^{-1}(b)\int\int \chi_1^{-2}(y_3)q^{v(y_3)+v(1+y_2y_3)}\mathbf{1}_{F\setminus\wp^{n_3}}(y_3)\mathbf{1}_{b^{-1}(a_3+\wp^m)}(y_3) \\ \cdot\mathbf{1}_{-y_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)}))}(y_2)\mathbf{1}_{b(a_2+\wp^m)}(y_2)\ dy_2\ dy_3.\end{aligned}$$

Für $v(a_3) \leq 0$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
&\chi_1^{-1}(b)\chi_1^{-2}(b^{-1}a_3)\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b)q^{-v(b)+v(a_3)}\mathbf{1}_{-a_3^{-1}((1+\wp)\setminus(1+\wp^{m+v(a_3)}))} \\
&\qquad \cdot \int \chi_1^{-2}(y_3)\mathbf{1}_{1+\wp^{m-v(a_3)}}(y_3)q^{v(1+a_1a_2)}\mathbf{1}_{\wp^{m+v(a_3)}}(y_2)\ dy_2\ dy_3 \\
&= \chi_1(b)|b|\mathbf{1}_{\wp^{v(a_3)-n_3+1}}(b) \cdot \text{const.}.
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhält man eine Local Linking Number der Form

$$\chi_1(b)\mathbf{1}_{\wp^n}(b)|b|(c_1v(b)+c_2).$$

8.12 Ein Korollar

Aus dem nun vollendeten Beweis von Vermutung 5.4 kann man eine Eigenschaft der translatierten Local Linking Numbers als Funktion von b und x zugleich ablesen. Wenn man die Abschnitte 8.3 bis 8.10 durchblättert, so fällt auf, daß die Schranken der gültigen Bereiche von y_2 und y_3 auf die folgende Weise von x abhängen: Die Schranken $n_{2/3}$ sind gegeben durch

$$n_{2/3} = c_1v(x) + c_2v(1-x) + c_3,$$

wobei $c_1, c_2 \in \{0, \pm 1\}$ und $c_3 \in \mathbb{Z}$. In Abschnitt 8.11 übertragen sich diese Schranken auf die Schranken des asymptotischen Verhaltens der translatierten Local Linking Numbers (LLN) in b: Für $|v(b)| \geq n_{2/3}$ gilt $LLN(b) = |b|^{\operatorname{sing} v(b)}(a_1v(b)+a_2)$ mit Konstanten $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Man bemerke, daß sich diese Bedingungen auch umdrehen lassen: Die Größe $v(b)$ gibt Schranken für $v(x)$ und $v(1-x)$ an. Insbesondere schließt man aus dem Auftreten von $c_2 \neq 0$ in $n_{2/3}$: Je größer $|v(b)|$ ist, desto größer kann auch $v(1-x)$ werden. Der Träger in x einer translatieren Local Linking Number kommt somit 1 beliebig nahe, obwohl er (siehe Satz 2.7) für festes b natürlich von 1 weg beschränkt ist.

Literaturverzeichnis

[Bu] Daniel Bump: *Automorphic Forms and Representations,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55, Cambridge UK, 1996

[Dar] Henri Darmon et.al. (Ed.): *Heegner points and Rankin L-series,* Cambridge University Press, Cambridge u.a., 2004, (Mathematical Sciences Research Institute publications ; 49)

[Ge] Stephen S. Gelbart: *Automorphic Forms on Adele Groups,* Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton New Jersey, 1975

[GJ] Stephen Gelbart, Hervé Jacquet: *Forms of GL(2) from the analytic point of view,* 213-251, in [PrSym1]

[Go] Roger Godement: *Notes on Jacquet-Langlands' Theory,* The Institute for Advanced Study, 1970

[Gr1] Benedict H. Gross: *Heights and special values of L-series,* CMS Proceedings, Vol. 7, AMS (1986), 115-187

[Gr2] Benedict H. Gross: *Heights and L-series,* Proceedings of ICM Berkeley (1986), 445-533

[GrZ] Benedict H. Gross, Don B. Zagier: *Heegner points and derivatives of L-series,* Invent. Math. 84 (1986), no. 2, 225-320.

[GrKZ] Benedict H. Gross, Winfried Kohnen Don B. Zagier: *Heegner points and derivatives of L-series. II,* Math. Ann. 278 (1987), no. 1-4, 497-562.

[Ja1] Hervé Jacquet: *Sur un résultat de Waldspurger,* Ann.scient. Ec.Norm.Sup., 4e serie, t. 19, 1986, 185-229

[Ja2] Hervé Jacquet: *Automorphic Forms on GL(2), Part II,* Springer Lecture Notes 278, Springer, Berlin u. a., 1972

[Ja3] Hervé Jacquet: *Sur un résultat de Waldspurger II,* Compositio Mathematica, 63 no. 3 (1987), 315-389

[JaLai] Hervé Jacquet, K. F. Lai: *A relative trace formula,* Compositio Mathematica, 54 no. 2 (1985), 243-310

[JL] Hervé Jacquet, Robert P. Langlands: *Automorphic Forms on GL(2),* Springer Lecture Notes 114, Springer, Berlin u. a., 1970

[LauNg] Gerard Laumon, Ngô Bao Chu: *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires,* 2004, erscheint in Annals of Math.

[Lan] Robert P. Langlands, *Les débuts d'une formule des traces stable,* Publicacions mathématiques de l'Université Paris VII, 1979

[LaSh1] Robert. P. Langlands, Diana Shelstad: *On the definition of transfer factors,* Mathematischen Annalen 278 (1987), 219-271

[LaSh2] Robert P. Langlands, Diana Shelstad: *Descent for transfer factors,* in *The Grothendieck Festschrift*, Birkhäuser, 486-563, 1990

[Vi82] Marie-France Vignéras: *Charactérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique,* Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, Sect IA, Vol. 28, No. 3, 945-961, 1982

[Zh1] Shou-Wu Zhang: *Gross-Zagier Formula for GL_2,* Asian Journal Math., Vol. 5, No. 2, 2001

[Zh2] Shou-Wu Zhang: *Gross-Zagier Formula for GL_2, II,* in [Dar]

[Zh3] Shou-Wu Zhang, Xinyi Yuan, Wei Zhang: *The Gross–Kohnen–Zagier Theorem over Totally Real Fields,* Preprint

[PrSym1] *Automorphic Forms, Representations, and L-functions,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Corvallis 1977), Vol. 33, Part 1, AMS, 1979

[PrSym2] *Automorphic Forms, Representations, and L-functions,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Corvallis 1977), Vol. 33, Part 2, AMS, 1979