Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über eine Eigenschaft unendlicher Funktionalreihen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse ; 1909, 2

Wenn eine nach rationalen und rationalzahligen Funktionen fortschreitende beständig konvergierende Reihe nur für solche Werte der Variabeln denselben Wert annimmt, von denen nicht zwei derselben einer mit Adjungierung rationaler Zahlen irreduktibeln Gleichung angehören können, so nimmt die Summe der endlichen Reihe von einem bestimmten Index ab stets einen irrationalen Wert an. Es ist daher zum Zwecke der Anwendung dieses Satzes die Frage zu erörtern, in welcher Weise zu entscheiden ist, wann sich stets irreduktible Gleichungen aufstellen lassen, in denen zwischen zweien ihrer Lösungen eine gegebene Relation stattfindet und wann nicht.

Diese Untersuchungen lassen sich unmittelbar, wie später gezeigt werden soll, auf irreduktible lineare homogene Differentialgleichungen ausdehnen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft Juni 1909 bis Juni 1910, S. XXXVI - XXVII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1909. 2. Abhandlung.

Über eine Eigenschaft unendlicher Funktionalreihen

von

Leo Koenigsberger
in Heidelberg

Eingegangen am 1. November 1909

SEMPER APERTUS

Heidelberg 1909
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 383.

Wenn eine beständig konvergierende, nach rationalen und rationalzahligen Funktionen von x fortschreitende Reihe

$$(1) \qquad r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) + \ldots .$$

die Eigenschaft hat, daß sich für eine beliebig groß gegebene Zahl η stets ein Wert des Index n angeben läßt, der größer als η, und für den ein algebraischer, nicht rationaler Wert α der Variabeln der Summe

$$(2) \qquad r_1(\alpha) + r_2(\alpha) + r_3(\alpha) + \ldots .$$

einen rationalen Wert erteilt, so wird für alle Lösungen der mit Adjungierung rationaler Zahlen irreduktibeln Gleichung, welcher α genügt, die Summe (2) mit immer größer werdenden Werten des Index n jedesmal stets denselben rationalen Wert annehmen, und somit die Reihe (1) für alle diese Lösungen ein und derselben Größe A beliebig nahe kommen.

Daraus geht unmittelbar hervor, daß, wenn eine Reihe von der Form (1) nur für solche Werte von x denselben Wert A annimmt, von denen nicht zwei derselben einer mit Adjungierung rationaler Zahlen irreduktibeln Gleichung angehören können, die Summe (2) von einem bestimmten n an stets einen irrationalen Wert annehmen wird, da, wenn die Werte des Index n, für welche diese Summe einen rationalen Wert hat, sich ins Unendliche erstreckten, alle Lösungen der irreduktibeln Gleichung, welcher α genügt, der gesamten Reihe denselben Wert A erteilen würden, was durch die Annahme ausgeschlossen ist.

Ist die Reihe (1) nur in einem beschränkten Gebiete konvergent, so würde der Satz noch seinem Wortlaute nach bestehen bleiben, wenn man von einer für $x = \beta$ divergierenden Reihe (1), welche die Eigenschaft hat, daß bei Annahme einer beliebig kleinen Größe δ und einer beliebig großen Zahl η stets eine ganze Zahl $n \geqq \eta$ gefunden werden kann, für welche die Summe

$$(3) \qquad r_1(\beta) + r_2(\beta) + r_3(\beta) + \ldots$$

sich von A um weniger als δ unterscheidet, sagen würde, daß für $x = \beta$ einer der Werte der Reihe (1) gleich A ist.

Für die Anwendung dieses Satzes, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Reihe (1) für $x = \alpha$ von einem bestimmten Werte des Stellenzeigers n an immer nur irrationale Werte annimmt, wird es somit darauf ankommen, zu entscheiden, wann zwei Größen α_1 und α_2, welche der Reihe (1) denselben Wert A erteilen, nicht Lösungen einer irreduktibeln Gleichung sein können, oder vielmehr, da man im allgemeinen die Zahlenwerte dieser Größen nicht kennt, sondern nur die Beziehungen, in denen sie zueinander stehen, wann sich stets irreduktible Gleichungen aufstellen lassen, in denen zwischen zweien ihrer Lösungen eine gegebene Relation stattfindet und wann nicht. So wird z. B. die Sinusreihe den Wert Null nur für $x = m\pi$ annehmen, worin m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, und es würde daher die obige Fragestellung nicht in dem Sinne aufzufassen sein, ob zwei der Zahlen $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ einer irreduktibeln Gleichung angehören können, sondern es würde die zur Anwendung kommende Untersuchung die Frage zu beantworten haben, ob zwei nicht rationale Größen α_1 und α_2, welche durch die Beziehung verknüpft sind

$$(4) \qquad \alpha_2 = \mu\,\alpha_1,$$

worin μ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, einer irreduktibeln Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten als Lösungen angehören können, ohne daß der Charakter derselben, ein Multiplum von π zu sein, dabei in Betracht kommt.

Da sich für den Fall einer algebraischen Beziehung zwischen zwei Lösungen einer irreduktibeln Gleichung die sämtlichen Lösungen dieser in Gruppen iterierter algebraischer Funktionen ordnen lassen, übrigens derartige Beziehungen stets auf rationale zurückgeführt werden können, und sich weiter jede rationale und rationalzahlige Funktion der Lösung einer rationalzahligen Gleichung auf eine ebensolche ganze Funktion dieser Lösung reduzieren läßt, so brauchen wir nur die Frage zu beantworten, ob sich für jede Wahl der rationalen Zahlen $\mu, \nu, \ldots \rho, \sigma$ stets eine irreduktible Gleichung irgendwelchen Grades aufstellen läßt, für welche zwei ihrer Lösungen in der Beziehung stehen

$$(5) \qquad \alpha_2 = \mu \alpha_1^{\lambda} + \nu \alpha_1^{\lambda - 1} + \ldots + \rho \alpha_1 + \sigma,$$

oder, wenn dies nicht der Fall ist, welches die Bedingungen sind, denen die rationalen Zahlenwerte $\mu, \nu, \ldots \rho, \sigma$ unterliegen, wenn eine solche irreduktible Gleichung mit den Lösungen α_1 und α_2 bestehen soll.

Gehen wir von der linearen Beziehung

$$(6) \qquad \alpha_2 = \mu \alpha_1 + \nu = \vartheta(\alpha_1)$$

aus, und fragen, ob es irreduktible Gleichungen irgendwelchen Grades gibt, in welchen zwei Lösungen in der Beziehung (6) zueinander stehen, was auch μ und ν für willkürlich gegebene rationale Zahlen sein mögen, so werden sich, wenn der Grad m der irreduktibeln Gleichung eine Primzahl ist, die Lösungen dieser Gleichung in eine Gruppe bringen lassen, so daß die m-fach iterierte Funktion

$$\vartheta^{(m)}(\alpha_1) = \alpha_1$$

wird, während für eine zusammengesetzte Zahl m die Lösungen eine oder mehrere Gruppen bilden, so daß, wenn $m = k \cdot m_1$ ist,

$$(7) \qquad \vartheta^{(\kappa)}(\alpha_1) = \alpha_1$$

wird. Da sich aber aus (6)

$$\vartheta^{(\kappa)}(\alpha) = \mu^{\kappa} \alpha_1 + \nu\left(\mu^{\kappa-1} + \mu^{\kappa-2} + \ldots + \mu + 1\right)$$

ergibt, so folgt aus (7), da α_1 nicht rational sein sollte,

$$\mu^{\kappa} - 1 = 0 \text{ und } \nu\left(\mu^{\kappa-1} + \mu^{\kappa-2} + \ldots + \mu + 1\right) = 0;$$

da nun die Annahme $\mu = 1, \nu = 0$ ausgeschlossen ist, so wird κ, also auch der Grad m der gegebenen Gleichung eine grade Zahl und daher $\mu = -1$ sein müssen, und daher keine irreduktible Gleichung existieren, in welcher zwei Lösungen in der linearen Relation (6) zueinander stehen, wenn μ von -1 verschieden ist oder die Summe der beiden Lösungen nicht rational ist.

Aus dieser Bemerkung würde schon als Anwendung des oben bewiesenen allgemeinen Reihensatzes folgen, daß die sinus- und kosinus-Reihen die Eigenschaft haben, für irgendein ganzes Vielfaches von π, resp. für irgendein ungrades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ von einem bestimmten Werte des Index n an stets irrationale Werte anzunehmen, wenn nur vorausgesetzt wird, daß π weder selbst rational noch die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl ist.

Es ist somit nur noch die Frage zu beantworten, ob es immer irreduktible Gleichungen paaren Grades gibt, für welche die Summe zweier ihrer Lösungen eine beliebig gegebene rationale Zahl ν ist, wenn rationale Werte der Lösungen selbstverständlich ausgeschlossen werden.

Daß zunächst stets irreduktible quadratische Gleichungen dieser Art existieren, ist einleuchtend, da

$$x^2 - \nu x + q = 0,$$

worin q eine rationale Zahl bedeutet, der Forderung genügt.

Es ist aber auch leicht zu sehen, daß sich irreduktible Gleichungen beliebigen paaren Grades aufstellen lassen, in welchen die Summe zweier ihrer Lösungen eine beliebig vorgelegte rationale Zahl ν ist, wobei der Fall $\nu = 0$ nicht in Betracht kommt, für den die Behauptung von selbst einleuchtet. Soll z. B. die Gleichung vom 4. Grade sein

$$x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0,$$

so erfordert die Irreduktibilität derselben, vermöge der Substitution $\alpha_2 = -\alpha_1 + \nu$ die Beziehungen

$$2\nu + p_1 = 0 \text{ und } \nu^3 + p_1 \nu^2 + p_2 \nu + p_3 = 0,$$

und es fragt sich umgekehrt, ob, wenn für ein beliebig gegebenes ν die Koeffizienten p_2 und p_3 der Gleichung genügen

$$\nu^3 - p_2 \nu - p_3 = 0,$$

und p_1 durch

$$p_1 = -2\nu$$

bestimmt wird, sich stets ein rationales p_4 finden läßt, so daß die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 2\nu x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0,$$

oder ob sich stets rationale Werte von p_2 und p_4 bestimmen lassen von der Art, daß für ein beliebig gegebenes rationales ν die Gleichung

$$x^4 - 2\nu x^3 + p_2 x^2 + \nu(\nu^2 - p_2) x + p_4 = 0$$

irreduktibel ist, von der unmittelbar ersichtlich, daß je zwei

Lösungen derselben die Summe ν haben. Daß dies aber möglich ist, geht daraus hervor, daß, wenn $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$, worin ν_1 und ν_2 irreduktible ganze Zahlen sind, die Gleichung

$$\nu_2^3 x^4 - 2 \nu_1 \nu_2^2 x^3 + p_2 \nu_2^3 x^2 + \nu_1 (\nu_1^2 - p_2 \nu_2^2) x + p_4 \nu_2^3 = 0,$$

wenn p eine in ν_1 enthaltene Primzahl und $p_2 = p_4 = p$ gesetzt wird, nach dem EISENSTEIN'schen Satze irreduktibel ist.

Wir finden somit, daß es stets eine irreduktible Gleichung vierten Grades gibt, in welcher die Summe zweier ihrer Lösungen eine willkürlich gegebene rationale Zahl ist.[1])

Dasselbe gilt für Gleichungen von beliebig hohem paaren Grade, und es folgt daher, daß es keine irreduktible Gleichung gibt, in der zwischen zwei Lösungen α_1 und α_2 eine lineare Relation

$$\alpha_2 = \mu \alpha_1 + \nu$$

besteht, wenn μ und ν beliebige rationale Zahlen sind; die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß irreduktible Gleichungen bestehen, für welche dies der Fall ist, sind die, daß der Grad der Gleichung ein paarer und $\mu = -1$, also die Summe der beiden Lösungen rational ist, während die rationale Zahl ν keiner Beschränkung unterworfen ist; man kann rationalzahlige Gleichungen beliebigen paaren Grades aufstellen, die irreduktibel

---

[1]) Zur Feststellung der Irreduktibilität der obigen biquadratischen Gleichung können wir diese auch als Resultierende der beiden Gleichungen

$$x^2 - \nu x + \rho = 0 \text{ und } \rho^2 + p\rho + q = 0$$

auffassen, in welchen ν, p, q rationale Zahlen bedeuten, und es wird die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 2 \nu x^3 + (\nu^2 - p) x^2 + p \nu x + q = 0,$$

wie man leicht sieht, dann und nur dann reduktibel sein, wenn für eine willkürliche Wahl der drei rationalen Zahlen ν, a, b die Größen p und q aus den Gleichungen bestimmt werden

$$p = 2b - a^2 - a\nu,\ q = a^4 + 4a^3\nu + a^2(5\nu^2 - 2p) + a(2\nu^3 - 6p\nu) + p^2 - 4p\nu^2,$$

sonst irreduktibel; es wird somit stets eine irreduktible biquadratische Gleichung existieren, für welche die Summe zweier ihrer Lösungen eine beliebig vorgelegte rationale Zahl ist.

So werden z. B. zwei Irrationalzahlen mit der Summe 6

$$\alpha_1 = -2 + \sqrt{2},\ \alpha_2 = 8 - \sqrt{2},$$

welche nicht schon die Lösungen einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind, der biquadratischen rationalzahligen Gleichung genügen

$$x^4 - 12 x^3 + 216 x + 124 = 0,$$

welche in die beiden rationalen Faktoren zerlegbar ist

$$(x^2 + 4x + 2)(x^2 - 16x + 62) = 0,$$

in welcher α_1 eine Lösung des einen, α_2 eine Lösung des andern Faktors ist.

sind, und für welche die Summe von zweien ihrer Lösungen gleich der willkürlich vorgelegten rationalen Zahl ν ist.

Werfen wir nunmehr die Frage auf, ob es stets irreduktible Gleichungen gibt, für welche zwei ihrer Lösungen in der Beziehung stehen

$$(8) \qquad \alpha_2 = \mu \alpha_1^2 + \nu \alpha_1 + \rho = \vartheta(\alpha_1),$$

worin μ, ν, ρ willkürlich gegebene rationale Zahlen bedeuten, so ist zunächst leicht ersichtlich, daß man stets eine rationalzahlige quadratische Gleichung

$$(9) \qquad x^2 + p x + q = 0$$

bilden kann, deren beide Lösungen, die als nicht rational vorausgesetzt werden, in der Beziehung (8) zueinander stehen. Denn da vermöge (9) die Beziehung (8) in die Form gesetzt werden kann

$$\alpha_2 = (\nu - \mu p)\alpha_1 + \rho - \mu q,$$

und eine lineare Beziehung zwischen zwei Lösungen einer irreduktibeln quadratischen Gleichung die Bedingungen erfordert

$$\nu - \mu p = -1 \qquad \rho - \mu q = -p,$$

so werden sich die rationalen Koeffizienten p, q der gesuchten quadratischen Gleichung in der Form ergeben

$$p = \frac{\nu + 1}{\mu}, \quad q = \frac{\nu + 1 + \mu\rho}{\mu^2},$$

und in der Tat stehen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \frac{\nu + 1}{\mu} x + \frac{\nu + 1 + \mu\rho}{\mu^2} = 0,$$

welche auch, wenn ϑ^2 die iterierte Funktion bedeutet, durch

$$\frac{\vartheta^2 x - x}{\vartheta x - x} = 0\,^{1)}$$

ersetzt werden kann, in der verlangten Beziehung (8). Die letztere Gleichung kann auch, wie leicht zu sehen, wenn

$$\frac{\vartheta^3 x - \vartheta x}{(\vartheta x - x)\left(\frac{\vartheta^2 x - x}{\vartheta x - x}\right)\left(\frac{\vartheta^2 x - \vartheta x}{\vartheta x - x}\right)} = \Theta(x)$$

gesetzt wird, in der Form dargestellt werden

$$\frac{\vartheta^3 x - \vartheta x}{(\vartheta x - x)\left(\frac{\vartheta^2 x - \vartheta x}{\vartheta x - x}\right)\Theta x} = 0;$$

[1]) Die Form rührt von Herrn Hilbert gelegentlich einer mündlichen Besprechung des obigen Reihentheorems her.

so wird z. B. für $\vartheta x = x^2 + 1$, $\Theta x = x^2 - x + 2$ sein, und es werden daher die beiden Lösungen des quadratischen Faktors

$$\frac{x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 7x^2 + 4}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2)} = x^2 + x + 2$$

in der geforderten Beziehung $\alpha_2 = \alpha_1^2 + 1$ stehen.

Um zu untersuchen, ob es für beliebige rationale Werte von μ, ν, ρ stets eine irreduktible Gleichung dritten Grades gibt, für welche zwei Lösungen in der Beziehung (8) zueinander stehen, bemerke man, daß die Lösungen einer solchen Gleichung eine Gruppe

$$\alpha_1, \ \vartheta\alpha_1, \ \vartheta^2\alpha_1,$$

bilden, so daß $\vartheta^3\alpha_1 = \alpha_1$ ist. Stellt man nun die Gleichung sechsten Grades

$$(10) \qquad \frac{\vartheta^3 x - x}{\vartheta x - x} = 0$$

auf, so ist unmittelbar ersichtlich, daß die Lösungen sich in zwei Gruppen

$$\alpha_1, \ \vartheta\alpha_1, \ \vartheta^2\alpha_1; \ \alpha'_1, \ \vartheta\alpha'_1, \ \vartheta^2\alpha'_1,$$

worin $\vartheta^3\alpha_1 = \alpha_1$, $\vartheta^3\alpha_1' = \alpha_1'$ ist.

bringen lassen. Daß aber die Gleichung sechsten Grades nicht für beliebige rationale μ, ν, ρ in zwei irreduktible Faktoren, die zu den Elementen je einer Gruppe gehören, zerfallen wird, geht daraus hervor, daß die Koeffizienten der Gleichung

$$(11) \qquad (x - \alpha_1)(x - \vartheta\alpha_1)(x - \vartheta^2\alpha_1) = 0$$

bekanntlich rational von den Lösungen einer rationalzahligen quadratischen Gleichung abhängen, die im allgemeinen selbst nicht rational sind, und wir erhalten daher zugleich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine rationalzahlige irreduktible kubische Gleichung existiert, in welcher zwei Lösungen in der Beziehung (8) zueinander stehen, die, daß die in den rationalen Zahlen μ, ν, ρ ausgedrückte Diskriminante dieser quadratischen Gleichung das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Daß dies nicht allgemein der Fall ist, geht aus dem einfachen Beispiele hervor, in welchem

$$\vartheta\alpha_1 = \alpha_1^2$$

ist, wofür die Gleichung (10) in

$$\frac{x^8 - x}{x^2 - x} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

übergeht, und die Gleichung (11) die Form hat

$$x^3 - (\alpha_1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_1{}^4)\, x^2 + (\alpha_1{}^3 + \alpha_1{}^5 + \alpha_1{}^6)\, x - \alpha_1{}^7 = 0,$$

deren erster Koeffizient y durch die quadratische Gleichung definiert ist

$$y^2 - y + 2 = 0.$$

Im allgemeinen wird also für den Fall der Zerlegung der Gleichung sechsten Grades in zwei Gruppen, ohne daß die Diskriminante jener quadratischen Gleichung das Quadrat einer rationalen Zahl ist, die Gleichung sechsten Grades selbst irreduktibel sein.

Sei z. B.

$$\vartheta\,\alpha_1 = \alpha_1{}^2 + 1,$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{\vartheta^3 x - x}{\vartheta x - x} = \frac{x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 - x + 5}{x^2 - x + 1}$$
$$= x^6 + x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 4x + 5 = 0,$$

deren Lösungen sich in die zwei Gruppen ordnen lassen

$$\alpha_1,\ \alpha_1{}^2 + 1,\ \alpha_1{}^4 + 2\alpha_1{}^2 + 2;\ \alpha',\ \alpha'^2 + 1,\ \alpha'^4 + 2\alpha'^2 + 2.$$

Genau dieselben Überlegungen lassen sich für irreduktible Gleichungen höheren Grades anstellen, und wir finden,

daß für beliebige rationale Zahlen μ, ν, ρ sich stets eine irreduktible rationalzahlige quadratische Gleichung, im allgemeinen jedoch nicht eine solche von höherem Grade als dem zweiten aufstellen läßt, in welcher zwei als nicht rational vorausgesetzte Lösungen in der Relation (8) zueinander stehen, und es ist die Methode vorgezeichnet, nach welcher die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten μ, ν, ρ der quadratischen Relation aufzustellen sind, wenn eine irreduktible rationalzahlige Gleichung von höherem als dem zweiten Grade die geforderte Eigenschaft besitzen soll.

Werfen wir weiter die Frage auf, ob es stets irreduktible quadratische Gleichungen gibt, deren nicht rationale Lösungen in der Beziehung

$$(12) \qquad \alpha_2 = \mu\,\alpha_1{}^3 + \nu\,\alpha_1{}^2 + \rho\,\alpha_1 + \sigma$$

stehen, wenn μ, ν, ρ, σ willkührliche rationale Zahlen bedeuten, so würde aus der gesuchten quadratischen Gleichung

$$(13) \qquad x^2 + p\,x + q = 0$$

die Beziehung (12) in der Form hervorgehen

$$(14)\qquad \alpha_2 = [\mu(p^2 - q) - p\nu + \rho]\,\alpha_1 + \mu p q - \nu q + \sigma,$$

und es müßten nach den oben für eine lineare Beziehung zwischen den Lösungen einer quadratischen Gleichung gefundenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen die Relationen bestehen.

$$\mu(p^2 - q) - p\nu + \rho = -1 \text{ und } \mu p q - \nu q + \sigma = -p,$$

oder es wären μ, ν, ρ, σ der Bedingung unterworfen, daß die kubische Gleichung in p

$$(15)\qquad \mu^2 p^3 - 2\mu\nu p^2 + (2\mu + \nu^2 + \mu\rho)\,p + (\mu\sigma - \rho\nu - \nu) = 0$$

eine rationale Lösung besitzt, während sich dann q rational in p vermöge der Beziehung

$$(16)\qquad q = \frac{p + \sigma}{\nu - \mu p}$$

ausdrückt.

Es gibt somit für allgemeine rationale Zahlen μ, ν, ρ, σ keine irreduktible quadratische Gleichung, deren nicht rationale Lösungen in der Beziehung (12) zueinander stehen; die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen einer solchen ist durch die Existenz einer rationalen Lösung der Gleichung (15) ausgedrückt.

Dasselbe Resultat erhielte man, wenn man die Bedingung für die Reduktibilität der Gleichung sechsten Grades

$$\frac{\vartheta^2 x - x}{\vartheta x - x} = 0$$

in drei irreduktible quadratische Faktoren suchte, worin

$$\vartheta x = \mu x^3 + \nu x^2 + \rho x + \sigma$$

ist.

Um zu sehen, ob eine irreduktible Gleichung dritten Grades existiert, für welche zwei nicht rationale Lösungen in der Beziehung (12) zueinander stehen, ersetze man letztere, wenn die gesuchte kubische Gleichung in der Form

$$(17)\qquad x^3 + p x^2 + q x + r = 0$$

gegeben ist, durch

$$(18)\qquad \alpha_2 = (-\mu p + \nu)\,\alpha_1^2 + (-\mu q + \rho)\,\alpha_1 + (-\mu r + \sigma).$$

Da nun oben gezeigt worden, daß, wenn eine quadratische Beziehung zwischen zwei Lösungen einer kubischen Gleichung existieren soll, eine Bedingung zwischen den Substitutionskoeffizienten bestehen mußte, vermöge deren die Diskriminante einer bestimmten quadratischen Gleichung das Quadrat einer rationalen Zahl war, so käme es hier nur darauf an zu sehen, ob nicht für eine beliebige Wahl der rationalen Zahlen μ, ν, ρ, σ stets p, q, r so rationalig bestimmt werden können, daß jener Bedingung genügt wird. Daß dies aber nicht der Fall ist, sieht man leicht aus dem speziellen Falle

$$\mu = -1, \nu = 0, \rho = 0, \sigma = 0,$$

für den die Beziehung (18) zwischen zwei Lösungen der kubischen Gleichung (17) in

$$\alpha_2 = p\,\alpha_1^{\,2} + q\,\alpha_1 + r$$

übergeht.

In ähnlicher Weise folgt, daß es keine irreduktible Gleichung irgendwelchen Grades gibt, für welche unter Voraussetzung allgemeiner rationaler Zahlen μ, ν, ... ρ, σ zwischen zwei Lösungen derselben eine Beziehung von der Form besteht

$$(19) \qquad \alpha_2 = \mu\,\alpha_1^{\,\kappa} + \nu\,\alpha_1^{\,\kappa-1} + \ldots + \rho\,\alpha_1 + \sigma;$$

nur für den Fall, daß $\kappa = 2$ ist, gibt es stets eine irreduktible quadratische Gleichung von der verlangten Eigenschaft.

Nachdem wir für den Fall quadratischer Gleichungen die Bedingungen zwischen den Koeffizienten einer linearen Relation zweier Lösungen; und ebenso für kubische Gleichungen eben diese Bedingungen für Relationen zweiten und dritten Grades aufgestellt haben, möge noch eine Bemerkung hinzugefügt werden, welche es ermöglicht, allgemein die Bedingungen zu ermitteln, welche zwischen den Koeffizienten μ, ν, ... ρ, σ der Substitution (19) stattfinden müssen, damit α_1 und α_2 zwei Lösungen einer rationalzahligen irreduktibeln Gleichung sein können.

Sei die gesuchte irreduktible Gleichung

$$(20) \qquad x^m + p_1\,x^{m-1} + p_2\,x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}\,x + p_m = 0,$$

und wendet man auf dieselbe die Tschirnhausen-Substitution an

$$(21) \qquad y = \mu\,x^\kappa + \nu\,x^{\kappa-1} + \ldots + \rho\,x + \sigma,$$

so wird die aus (20) und (21) resultierende ebenfalls rationalzahlige Gleichung m^{ten} Grades

$$(22) \qquad y^m + P_1\,y^{m-1} + P_2\,y^{m-2} + \ldots + P_{m-1}\,y + P_m = 0,$$

da α_1 und α_2 zwei Lösungen der Gleichung (20) sein sollen, vermöge der Beziehungen (19) und (21) die Lösung α_2 besitzen und somit, da die Gleichung (20) als irreduktibel vorausgesetzt worden, alle Lösungen mit (20) gemein haben, und daher mit dieser identisch sein. Es ergeben sich somit in bekannter Weise aus (21) die Beziehungen in den Potenzsummen

$$s_1 = \mu s_\kappa + \nu s_{\kappa-1} + \ldots + \rho s_1 + m\sigma$$

$$s_2 = \mu^2 s_{2\kappa} + \ldots\ldots\ldots\ldots + m\sigma^2$$

$$s_m = \mu^m s_{m\kappa} + \ldots\ldots\ldots + m^m \sigma^m,$$

aus denen $p_1, p_2, \ldots p_m$ rational durch $\mu, \nu, \ldots \rho, \sigma$ bestimmbar sein müssen.

Nimmt man z. B. für die quadratische Gleichung

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0$$

die lineare Relation zwischen ihren Lösungen

$$\alpha_2 = \mu \alpha_1 + \nu$$

an, so würden die beiden Beziehungen

$$s_1 = \mu s_1 + 2\nu \quad \text{und} \quad s_2 = \mu^2 s_2 + 2\mu\nu s_1 + 2\nu^2$$

oder

$$p_1 = \frac{2\nu}{\mu - 1} \quad \text{und} \quad -2p_2(\mu^2 - 1) + \frac{2\nu^2(\mu + 1)}{\mu - 1} = 0,$$

wenn die Annahme $\mu = -1$ ausgeschlossen wird, für die Koeffizienten der quadratischen Gleichung die Werte

$$p_1 = \frac{2\nu}{\mu - 1}, \quad p_2 = \frac{\nu^2}{(\mu - 1)^2}$$

liefern, und diese selbst somit in die nicht irreduktible

$$\left(x - \frac{\nu}{\mu - 1}\right)^2 = 0$$

übergehen. Soll die quadratische Gleichung also irreduktibel sein, so muß $\mu = -1$ gesetzt werden und die Beziehung zwischen den Lösungen $\alpha_2 = -\alpha_1 + \nu$ lauten, während in der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \nu x + p_2 = 0$$

der letzte Koeffizient unbestimmt bleibt und der Irreduktibilität wegen nur der Bedingung zu unterwerfen ist, daß $\nu^2 - 4p_2$ nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Für die kubische Gleichung

$$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$$

und die Beziehung zwischen den Lösungen

$$\alpha_2 = \mu \alpha^2_1 + \nu \alpha_1 + \rho$$

gehen die oben aufgestellten Beziehungen zwischen den Potenzsummen in

$$s_1 = \mu s_2 + \nu s_1 + 3 \rho$$

$$s_2 = \mu^2 s_4 + 2 \mu \nu s_3 + (\nu^2 + 2 \mu \rho) s_2 + 2 \nu \rho s_1 + 3 \rho^2$$

$$s_3 = \mu^3 s_6 + 3 \mu^2 \nu s_5 + (3 \mu \nu^2 + 3 \mu^2 \rho) s_4 + (6 \mu \nu \rho + \nu^3) s_3 + (3 \mu \rho^2 + 3 \nu^2 \rho) s_2 + 3 \rho^2 \nu s_1 + 3 \rho^3$$

über, von denen die beiden ersten p_2 und p_3 als rationale Funktionen von p_1 liefern, welche in die dritte eingesetzt die Substitutionskoeffizienten μ, ν, ρ der Bedingung unterwerfen, daß diese Gleichung für p_1 eine rationale Lösung liefert.

Aus den obigen Auseinandersetzungen folgt, daß, wenn ein Wert α_1 einer beständig konvergierenden Reihe von der Form (1) einen Wert A erteilt, und alle Werte von x, für welche die Reihe denselben Wert annimmt, durch

$$\alpha_\kappa = \mu_\kappa \alpha_1 + \nu_\kappa$$

dargestellt sind, worin μ_κ und ν_κ rationale Zahlen bedeuten, die Reihe (2) von einem endlichen Index n an stets irrationale Werte annimmt, wenn nicht α_1 entweder selbst rational, oder die Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist. Denn wenn sich stets für eine beliebig große ganze Zahl η ein Index $n \geqq \eta$ angeben ließe, für welchen die Reihe (2) einen rationalen Wert annähme, so würden alle Lösungen der zu α_1 gehörigen irreduktibeln rationalzahligen Gleichung der unendlichen Reihe (1) denselben Wert A erteilen, und es müßten also alle diese Lösungen in der obigen Form von α_κ enthalten sein. Von welchem, jedenfalls paaren, Grade aber die irreduktible Gleichung sein mag, welche zwei oder mehrere dieser α-Größen zu Lösungen hat, es muß, wie oben gezeigt worden, jedenfalls $\mu_\kappa = -1$ sein, und alle jene Lösungen somit in der Form enthalten sein

$$\alpha_\kappa = -\alpha_1 + \nu_\kappa .$$

Da sich aber dann zwei dieser Lösungen α_{κ_1} und α_{κ_2} vermöge der Beziehung

$$\alpha_{\kappa_1} - \alpha_{\kappa_2} = \nu_{\kappa_1} - \nu_{\kappa_2}$$

um eine rationale Zahl unterscheiden würden, so müßte die irreduktible Gleichung vom zweiten Grade mit den Lösungen α_1 und $-\alpha_1 + \nu$ von der Form sein

$$x^2 - \nu x + q = 0,$$

sowie ν und q rationale Zahlen bedeuten, was ebenso wie die Annahme, daß α_1 rational ist, oben ausgeschlossen wurde. Sind alle Werte, welche außer α_1 der Reihe (1) den Wert A geben, durch α_1 in der Form ausdrückbar

$$(23) \qquad \alpha_\kappa = \mu_\kappa \alpha^2_1 + \nu_\kappa \alpha_1 + \rho_\kappa,$$

worin μ_κ, ν_κ, ρ_κ rationale Zahlen bedeuten, so müßten wieder, wenn die Reihe (2) nicht von einem bestimmten Index n an stets irrationale Werte annehmen sollte, sämtliche Lösungen der irreduktibeln Gleichung mit der Lösung α_1 in der Form (23) darstellbar sein, wobei für willkürliche Werte von μ_κ, ν_κ, ρ_κ, wie oben gezeigt worden, die irreduktible Gleichung nur eine quadratische sein wird, wenn jedoch die Größen gewissen Bedingungen unterliegen, der Grad der irreduktibeln Gleichung auch ein höherer sein kann. Würde α_1 einer irreduktibeln quadratischen Gleichung genügen, so wäre zunächst dieser Fall, wie oben, auszuschließen, und es könnte dann α_1, wenn die früher aufgestellte Bedingung zwischen μ_2, ν_2, ρ_2 erfüllt ist, dem irreduktibeln Faktor 3. Grades der Gleichung 6. Grades

$$\frac{\vartheta^3 x - x}{\vartheta x - x} = 0$$

mit den Lösungen

$$\alpha_1, \ \vartheta\alpha_1, \ \vartheta^2\alpha_1$$

genügen, welche vermöge der Annahme

$$\alpha_2 = \mu_2 \alpha_1^2 + \nu_2 \alpha_1 + \rho_2$$
$$\alpha_3 = \mu_3 \alpha_1^2 + \nu_3 \alpha_1 + \rho_3$$

in einer linearen Relation stehen

$$M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3 = M,$$

worin M, M_1, M_2, M_3 ganze Zahlen bedeuten. Die Nichtexistenz einer solchen Relation würde, wenn α_1 wie angenommen wurde, einer irreduktibeln kubischen Gleichung genügt, auf die Irrationalität der Reihe (2) von einem bestimmten n an schließen lassen.

Genügt α_1 einer irreduktibeln Gleichung vierten Grades, so daß $\vartheta^4 \alpha_1 = \alpha_1$ ist, so wird die Gleichung zwölften Grades

$$(24) \qquad \frac{\vartheta^4 x - x}{\vartheta^2 x - x} = 0,$$

wenn die zu einer der drei Gruppen von vier Elementen gehörige kubische Hilfsgleichung eine rationale Lösung besitzt, einen irreduktibeln biquadratischen Faktor liefern, dessen Lösungen dann in einer ähnlichen rationalzahligen linearen Relation stehen müßten, und ähnliche Schlüsse gelten für Gleichungen höherer Grade unter Voraussetzung der Existenz der Relation (23).

Sei nunmehr allgemein zu untersuchen, ob und wann es irreduktible Gleichungen gibt, für welche zwischen zwei ihrer Lösungen α_1 und α_2 eine Relation von der Form besteht

$$(25) \qquad \alpha_2 = \mu \alpha_1^{\kappa} + \nu \alpha_1^{\kappa-1} + \ldots + \rho \alpha_1 + \sigma = \vartheta \alpha_1 ,$$

worin κ eine gegebene positive ganze Zahl, $\mu, \nu, \ldots \rho, \sigma$ rationale Zahlen bedeuten sollen, so bemerke man zunächst, daß, wenn der Grad der gesuchten irreduktibeln Gleichung der m^{te} ist, sämtliche Lösungen dieser Gleichung sich in Gruppen mit derselben iterierten Funktion ϑ bringen lassen, und daß jedenfalls

$$(26) \qquad \vartheta^{m} \alpha_1 = \alpha_1$$

ist. Es wird somit α_1 eine Lösung der Gleichung

$$(27) \qquad \vartheta^{m} x - x = 0$$

sein, und daher das gesuchte irreduktible Polynom, dessen Lösungen die Gruppen bilden

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \ \vartheta \alpha_1 \ \vartheta^2 \alpha_1 \ldots \vartheta^{m_1 - 1} \alpha_1 \\ \alpha'_1 \ \vartheta \alpha'_1 \ \vartheta^2 \alpha_1' \ldots \vartheta^{m_1 - 1} \alpha_1' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{(m_2 - 1)} \ \vartheta \alpha_1^{(m_2 - 1)} \ \vartheta^2 \alpha_1^{(m_2 - 1)} \ldots \vartheta^{(m_1 - 1)} \alpha_1^{(m_2 - 1)} , \end{array}$$

worin $m = m_1 \cdot m_2$, und

$$(28) \qquad \vartheta^{m_1} \alpha_1(\lambda) = \alpha_1(\lambda)$$

ist, ein rationaler Faktor der linken Seite der Gleichung (27) sein. Da aber die Nullwerte der Gleichung

$$(29) \qquad \vartheta x - x = 0$$

auch die Gleichung (27) befriedigen, für die Lösungen der irreduktibeln Gleichung aber $\vartheta \alpha_1(\lambda)$ von $\alpha_1(\lambda)$ verschieden ist, so wird das irreduktible Polynom auch ein Faktor der linken Seite der Gleichung

$$(30) \qquad \frac{\vartheta^{m} x - x}{\vartheta x - x} = 0$$

sein, und, wenn $m = p$ eine Primzahl ist, der Grad der Gleichung

$$(31)\qquad \frac{\vartheta^{p} x - x}{\vartheta x - x} = 0,$$

wie unmittelbar ersichtlich,

$$\kappa^{p} - \kappa \equiv 0 \mod p$$

sein. Ist

$$m = p^{\pi}$$

eine Primzahlpotenz, so wird die gesuchte irreduktible Funktion in der Gleichung

$$(32)\qquad \frac{\vartheta^{p^{\pi}} x - x}{\vartheta^{p^{\pi-1}} x - x} = 0$$

als Faktor enthalten sein und den Grad

$$\kappa^{p^{\pi}} - \kappa^{p^{\pi-1}} = \kappa^{p^{\pi-1}}\left(\kappa^{p^{\pi-1}(p-1)} - 1\right) \equiv 0 \mod p^{\pi}$$

haben. Sei ferner

$$m = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2},$$

so wird die Gleichung

$$(33)\qquad \frac{\vartheta^{p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2}} x - x}{\left(\vartheta^{p_1^{\pi_1-1} p_2^{\pi_2}} x - x\right)\left(\dfrac{\vartheta^{p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2-1}} x - x}{\vartheta^{p_1^{\pi_1-1} p_2^{\pi_2-1}} x - x}\right)} = 0$$

das irreduktible Polynom als Faktor enthalten, und der Grad der Gleichung wird

$$\kappa^{p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2}} + \kappa^{p_1^{\pi_1-1} p_2^{\pi_2-1}} - \kappa^{p_1^{\pi_1-1} p_2^{\pi_2}} - \kappa^{p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2-1}} \equiv 0$$

$$\mod p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2}$$

sein, da

$$\kappa^{p_1^{\pi_1-1}}\left(\kappa^{p_1^{\pi_1-1}(p_1-1)} - 1\right) \equiv 0 \mod p_1^{\pi_1}$$

und

$$\kappa^{p_2^{\pi_2-1}}\left(\kappa^{p_2^{\pi_2-1}(p_2-1)} - 1\right) \equiv 0 \mod p_2^{\pi_2}$$

ist, und ebenso allgemein für eine beliebige Gradzahl m der gesuchten irreduktibeln Gleichung. Da aber der Grad der Gleichungen (31), (32), (33) usw. stets durch m teilbar ist, so wird man nur zu untersuchen haben, ob und wann sich die

Lösungen dieser Gleichungen, welche eine Gruppe von m Elementen bilden, als die Wurzeln einer irreduktibeln Gleichung ergeben.

So wird z. B., wenn die Relation zwischen α_1 und α_2 die Form hat

$$(34) \qquad \alpha_2 = \mu_2 \alpha_1^3 + \nu_2 \alpha_1^2 + \rho_2 \alpha_1 + \sigma_2 = \vartheta\, \alpha_1$$

und die Bedingung für die Existenz einer irreduktibeln Gleichung fünften Grades gesucht wird, in welcher zwischen zwei ihrer Lösungen eine Relation von der Form (34) stattfindet, die Gleichung 240. Grades

$$\frac{\vartheta^5 x - x}{\vartheta x - x} = 0$$

einen irreduktibeln Faktor fünften Grades besitzen müssen, in welchem unter der Annahme, daß wieder alle seine Lösungen sich durch α_1 in der Form (34) ausdrücken lassen, zwischen je vier seiner Lösungen eine rationalzahlige lineare Relation stattfinden wird.

Analoge Untersuchungen lassen sich, wie ich zeigen werde, für irreduktible lineare homogene Differentialgleichungen durchführen.

So sieht man z. B. leicht, daß, wenn eine lineare binomische Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben ist

$$(35) \qquad y'' = r(x)\, y,$$

in welcher r(x) eine rationale Funktion bedeutet, und welche in dem Sinne irreduktibel ist, daß sie mit keiner gleichartigen linearen Differentialgleichung erster Ordnung ein Integral gemein hat, zwischen zwei Fundamentalintegralen derselben nur unter einer bestimmt angebbaren Bedingung eine Beziehung von der Form

$$(36) \qquad y_2 = \rho_0(x)\, y_1 + \rho_1(x)\, y_1'$$

bestehen kann, in welcher $\rho_0(x)$ und $\rho_1(x)$ ganze Funktionen von x sind. Da sich nämlich durch Substitution von (36) in (35) unter Voraussetzung der Irreduktibilität die beiden Beziehungen ergeben

$$\rho_0'' + 2 r \rho_1' + \rho_1 r' = 0 \text{ und } 2\rho_0' + \rho_1'' = 0,$$

so folgt leicht

$$r(x) = \frac{c}{\rho_1^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_1'}{\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_1'}{\rho_1}\right),$$

und nimmt man z. B.

$$\rho_1 = x^\kappa$$

— und ähnlich für jede ganze Funktion von x, wenn $c \neq 0$ —, so ergibt sich

$$r(x) = \frac{\kappa(\kappa - 2)}{4} x^{-2},$$

so daß die Differentialgleichung (35) die Form annehmen würde

$$x^2 y'' = \frac{\kappa(\kappa - 2)}{4} y,$$

deren Integrale durch

$$y_1 = x^{1 - \frac{\kappa}{2}} \quad \text{und} \quad y_2 = x^{\frac{\kappa}{2}}$$

dargestellt sind, was der Annahme der Irreduktibilität widerspricht.

Es mag endlich noch für die weitere Untersuchung der nachfolgende Hilfssatz vorausgeschickt werden.

Wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten ganzzahligen Koeffizienten

$$(37) \qquad r_0 y^{(n)} + r_1 y^{(n-1)} + r_2 y^{(n-2)} + \ldots + r_n y = 0$$

die algebraische Gleichung

$$(38) \qquad r_0 m^n + r_1 m^{n-1} + r_2 m^{n-2} + \ldots + r_n = 0$$

mit Adjungierung rationaler Zahlen irreduktibel ist, so läßt sich leicht zeigen, daß ein aus deren Integralen zusammengesetzter Ausdruck von der Form

$$(39) \qquad y_1 = g_1(x) e^{m_1 x} + g_2(x) e^{m_2 x} + \ldots + g_n(x) e^{m_n x},$$

worin $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ ganze und ganzzahlige Funktionen von x sind, nicht das Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung mit gleichartigen Koeffizienten

$$(40) \qquad \rho_0(x) y^{(\nu)} + \rho_1(x) y^{(\nu-1)} + \ldots + \rho_\nu(x) y = 0$$

sein kann, wenn $\nu < n$ ist.

Setzt man nämlich y_1 in diese Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$(41) \qquad R_1(x) e^{m_1 x} + R_2(x) e^{m_2 x} + \ldots + R_n(x) e^{m_n x} = 0,$$

worin $R_\rho(x)$ wiederum ganze Funktionen von x sind, in denen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x ganze Funktionen von m_ρ vom ν^{ten} Grade mit ganzzahligen Koeffizienten sein werden. Da aber wegen der Verschiedenheit der Größen $m_1, m_2, \ldots m_n$ sich aus (41) die identischen Beziehungen ergeben,

$$(42) \qquad R_1(x) = 0,\ R_2(x) = 0, \ldots R_n(x) = 0,$$

so werden in jeder dieser Gleichungen auch die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x verschwinden müssen, was, da $m_1, m_2, \ldots$ nur bis zur $\nu < n^{\text{ten}}$ Potenz vorkommen, wegen der Irreduktibilität von (38) unmöglich ist.

Als spezieller Fall dieses Satzes folgt, wenn $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ als Konstanten vorausgesetzt werden,

daß die Differentialgleichung (37) mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niederer Ordnung, dieselbe mag konstante rationale oder variable rationale und rationalzahlige Koeffizienten besitzen, ein Integral gemein haben kann, also mit Adjungierung dieser Größen in bekanntem Sinne irreduktibel ist.

Dies wird z. B. für die Differentialgleichung

$$y^{(p)} = y$$

der Fall sein, wenn p eine Primzahl bedeutet, nachdem man dieselbe vermöge der Substitution

$$y = e^x \int z\,dx$$

von dem Integrale e^x befreit hat, so daß die Differentialgleichung

$$z^{(p-1)} + p_1 z^{(p-2)} + p_2 z^{(p-3)} + \ldots + p_1 z = 0$$

die Fundamentalintegrale

$$e^{(\alpha - 1)x},\ e^{(\alpha^2 - 1)x}, \ldots e^{\left(\alpha^{p-1} - 1\right)x}$$

besitzt, wenn α eine p^{te} Einheitswurzel bedeutet. Die Differentialgleichung

$$y^{\left(p^\pi\right)} = y$$

wird ebenso von den zu den Lösungen der Gleichung

$$p^{\pi - 1} - 1 = 0$$

gehörigen Integralen zu befreien sein, und ähnlich für eine beliebig zusammengesetzte Zahl n.

Ist die Ordnung ν der Differentialgleichung (40) jedoch gleich oder größer als n, so können wir aus der Existenz der Gleichungen (42) zunächst nur folgern, daß vermöge (39) die einzelnen Funktionen

$$g_1(x)\, e^{m_1 x},\ g_2(x)\, e^{m_2 x},\ \ldots\ g_n(x)\, e^{m_n x}$$

Integrale der Differentialgleichung (40) sind, woraus sich aber weiter ergibt, daß auch

$$g_\alpha(x)\, e^{m_1 x},\ g_\alpha(x)\, e^{m_2 x},\ \ldots\ g_\alpha(x)\, e^{m_n x}\ (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

jener Differentialgleichung genügen werden, weil die einzelnen Koeffizienten der Potenzen von x in $R_\rho(x)$ ganze und ganzzahlige Funktionen von m_ρ sind, und daher wegen der Irreduktibilität von (38), da sie für m_ρ verschwinden, entweder identisch oder für jede Lösung von (38) Null sein müssen, wenn $\nu \geqq n$ ist.

Setzt man nun

$$y = g_1(x)\, z$$

in die Differentialgleichung (40) ein, so wird diese in z sämtliche Integrale der Differentialgleichung (37) besitzen und somit, wenn deren linke Seite und P bezeichnet wird, in der Form

$$\varphi_0(x) \frac{d^{\nu - n} P}{d x^{\nu - n}} + \varphi_1(x) \frac{d^{\nu - n - 1} P}{d x^{\nu - n - 1}} + \ldots + \varphi_{\nu - n}(x)\, P = 0$$

dargestellt werden können, wenn $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, .. $\varphi_{\nu - n}(x)$ ganze und ganzzahlige Funktionen von x bedeuten.