Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über Beziehungen zwischen den Integralen linearer Differentialgleichungen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse ; 1910, 1

Im Anschluß an die Abhandlung 2 des Jahrganges 1909 der Heidelberger Akademie, welche zum Zwecke der Anwendung eines Satzes für Funktionalreihen die Existenz irreduktibler algebraischer Gleichungen mit vorgeschriebener Beziehung zwischen ihren Lösungen behandelte, wird nunmehr die analoge Untersuchung für homogene lineare Differentialgleichungen durchgeführt, und hierzu auf Grund früher aufgestellter Sätze über irreduktible Differentialgleichungen die Einteilung der Fundamentalintegrale in Gruppen kurz erörtert.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft Juni 1909 bis Juni 1910, S. XLV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1910. 1. Abhandlung.

Über Beziehungen zwischen den Integralen linearer Differentialgleichungen

von

Leo Koenigsberger
in Heidelberg

Eingegangen am 16. Januar 1910

Heidelberg 1910
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 399.

Im Anschluß an meine Untersuchung[1], wann zwei nicht rationale Größen α_1 und α_2, zwischen denen eine rationalzahlige Beziehung von der Form besteht

$$\alpha_2 = \rho_0 \alpha_1^{\kappa} + \rho_1 \alpha_1^{\kappa-1} + \ldots + \rho_{\kappa-1}\alpha_1 + \rho_\kappa,$$

in welcher κ eine positive ganze Zahl bedeutet, für willkürliche rationale Zahlen $\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_\kappa$ einer ganzzahligen irreduktibeln Gleichung genügen können, und wie, wenn dies nicht statthaben kann, die Bedingungen zwischen den Koeffizienten $\rho_0, \rho_1, \ldots$ ermittelt werden können, damit dies der Fall ist, will ich nunmehr — worauf schon in jener Arbeit hingewiesen worden — die analoge Untersuchung für homogene lineare Differentialgleichungen durchzuführen suchen.

Wenn zwei Integrale y_1 und y_2 einer linearen Differentialgleichung

$$(1) \quad y^{(n)} + r_1(x)\, y^{(n-1)} + r_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + r_{n-1}(x)\, y' + r_n(x)\, y = 0,$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, in der Beziehung zueinander stehen

$$(2) \qquad y_2 = \rho_0(x)\, y_1 + \rho_1(x)\, y_1' + \ldots + \rho_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1)} = \vartheta y_1,$$

worin $\rho_0(x), \rho_1(x), \ldots$ ebenfalls rational von x abhängen, aber auch zum Teil verschwinden können, so kann, wenn angenommen wird, daß y_1 nicht zugleich das Integral einer gleichartigen linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung mit rationalen Koeffizienten ist, auf einen der Beziehung (2) analogen Zusammenhang zwischen den anderen Integralen geschlossen werden. Denn da die Substitution von (2) in (1), weil y_1 ein Integral von (1) ist, einen linearen Ausdruck in y_1 und dessen Ableitungen nur bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung liefert, der nach der für y_1 gemachten Annahme

[1] Vgl. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1909. 2. Abhandlung.

identisch verschwinden muß, so wird auch die Substitution des Ausdruckes

$$(3) \quad y_3 = \rho_0(x)\, y_2 + \rho_1(x)\, y_2' + \ldots + \rho_{n-1}(x)\, y_2^{(n-1)} = \vartheta\, y_2 = \vartheta^2 y_1$$

die Gleichung (1) befriedigen, und somit y_3 auch ein Integral derselben sein, usw., so daß wir eine Reihe von Integralen der Differentialgleichung (1) in der Form erhalten

$$y_1,\ \vartheta\, y_1,\ \vartheta^2\, y_1,\ \vartheta^3\, y_1, \ldots\ldots,$$

von denen höchstens n linear voneinander unabhängig sein können.

Nehmen wir an, daß zwischen den Integralen

$$(4) \qquad y_1,\ \vartheta\, y_1,\ \vartheta^2\, y_1, \ldots .\ \vartheta^{\nu-1}\, y_1$$

keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht, sei dagegen

$$(5) \quad \vartheta^{\nu}\, y_1 = a_0\, y_1 + a_1\, \vartheta\, y_1 + a_2\, \vartheta^2\, y_1 + \ldots + a_{\nu-1}\, \vartheta^{\nu-1}\, y_1,$$

so werden sich alle folgenden iterierten ϑ-Funktionen, welche sämtlich Integrale der Differentialgleichung (1) sind, homogen linear aus den Elementen der Gruppe (4) ergeben, welche ebenfalls, so wie y_1, nicht einer gleichartigen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der n^{ten} angehören.

Sei nun ein von den Elementen dieser Gruppe linear unabhängiges Integral von (1) $y_1^{(1)}$, und bildet man

$$(6) \quad y_2^{(1)} = \rho_0(x)\, y_1^{(1)} + \rho_1(x)\, y_1^{(1)'} + \ldots + \rho_{\nu-1}(x)\, y_1^{(1)(\nu-1)} = \vartheta\, y_1^{(1)},$$

so wird offenbar $y_2^{(1)}$ wiederum ein Integral sein, und wir können zunächst wieder eine Gruppe bilden

$$y_1^{(1)},\ \vartheta\, y_1^{(1)},\ \vartheta^2\, y_1^{(1)}, \ldots\ \vartheta^{\nu-1} y_1^{(1)},$$

von deren Elementen nur nachzuweisen sein wird, daß diese weder unter sich noch mit den Elementen der ersten Gruppe in einer linearen Relation stehen, und daß $\vartheta^{\nu}\, y_1^{(1)}$ mit den Elementen der zweiten Gruppe durch die Beziehung (5) verbunden ist.

Um dies aber zeigen zu können, müssen wir die gegebene lineare Differentialgleichung einer weiteren Bedingung unterwerfen. Während wir bisher nur angenommen haben, daß das Integral y_1, von dem wir ausgingen, nicht einer gleichartigen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der n^{ten} genügt, was für das Integral $y_1^{(1)}$ keine ähnliche Beschränkung nach sich zieht[2], müssen wir jetzt jener Differentialgleichung den Charakter der Irreduktibilität in dem Sinne beilegen, daß keines ihrer Integrale einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung als der n^{ten} Genüge leistet.

Bestände dann nämlich eine lineare Relation unter den Elementen der zweiten Gruppe

$$\alpha_0 y_1^{(1)} + \alpha_1 \vartheta y_1^{(1)} + \alpha_2 \vartheta^2 y_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{\nu-1} \vartheta^{\nu-1} y_1^{(1)} = 0, \tag{7}$$

so würde der Voraussetzung der Irreduktibilität gemäß bekanntlich jedes Integral, also auch y_1 der Differentialgleichung (7) in $y_1^{(1)}$ genügen, was oben ausgeschlossen war, und aus demselben Grunde folgt aus (5) die Beziehung

$$\vartheta^\nu y_1^{(1)} = a_0 y_1^{(1)} + a_1 \vartheta y_1^{(1)} + a_2 \vartheta^2 y_1^{(1)} + \ldots + a_{\nu-1} \vartheta^{\nu-1} y_1^{(1)}$$

sowie die daraus sich ergebenden für die mehrfach iterierten Funktionen.

Gäbe es endlich eine lineare Relation zwischen den Elementen der beiden Gruppen,

$$\beta_0 y_1 + \beta_1 \vartheta y_1 + \ldots + \beta_{\nu-1} \vartheta^{\nu-1} y_1 = \gamma_0 y_1^{(1)} + \gamma_1 \vartheta y_1^{(1)} + \ldots + \gamma_{\nu-1} \vartheta^{\nu-1} y_1^{(1)},$$

so würden sich durch $\nu - 1$-fache Iterierung gegen die Voraussetzung die Elemente der zweiten Gruppe als lineare Funktionen mit konstanten Koeffizienten aus den Elementen der ersten Gruppe ergeben.

Wir finden somit, daß, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung (1) mit in x rationalen Koeffizienten in dem Sinne irreduktibel ist, daß kein Integral derselben schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, die Annahme, daß zwei Integrale in der Beziehung (6) zueinander stehen, die Einteilung eines Systems von Fundamentalintegralen in Gruppen von der Form

---

[2] Wenn $y_1^{(1)}$ einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, so kann man nur schließen, daß sämtliche Integrale der Differentialgleichung niedrigster Ordnung, von welcher $y_1^{(1)}$ ein Integral ist, auch Integrale der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung sein werden.

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & \vartheta y_1 & \vartheta^2 y_1 & \ldots & \vartheta^{\nu-1} y_1 \\ y_1^{(1)} & \vartheta y_1^{(1)} & \vartheta^2 y_1^{(1)} & \ldots & \vartheta^{\nu-1} y_1^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(\mu-1)} & \vartheta y_1^{(\mu-1)} & \vartheta^2 y_1^{(\mu-1)} & \ldots & \vartheta^{\nu-1} y_1^{(\mu-1)} \end{array}$$

nach sich zieht, worin $n = \nu \cdot \mu$ ist, und für $y = y_1, y_1^{(1)}, \ldots y_1^{(\mu-1)}$ die Beziehung besteht

$$\vartheta^\nu y = a_0 y + a_1 \vartheta y + a_2 \vartheta^2 y + \ldots + a_{\nu-1} \vartheta^{\nu-1} y.$$

Daß in dieser Beziehung a_0 von Null verschieden ist, geht daraus hervor, daß, wenn $a_0 = 0$ wäre, die Relation

$$\vartheta^\nu y_1 = a_1 \vartheta y_1 + a_2 \vartheta^2 y_1 + \ldots + a_{\nu-1} \vartheta^{\nu-1} y_1$$

oder

$$\vartheta^{\nu-1} (\vartheta y_1) = a_1 \vartheta y_1 + a_2 \vartheta (\vartheta y_1) + \ldots + a_{\nu-1} \vartheta^{\nu-2} (\vartheta y_1),$$

welche mit der Differentialgleichung (1) das Integral ϑy_1 gemein hat, wegen der Irreduktibilität derselben auch durch y_1 befriedigt würde, und somit gegen die Voraussetzung die Beziehung bestünde

$$\vartheta^{\nu-1} y_1 = a_1 y_1 + a_2 \vartheta y_1 + \ldots + a_{\nu-1} \vartheta^{\nu-2} y_1.$$

Dann läßt sich aber leicht einsehen, daß man von einem Integrale der Differentialgleichung ausgehen kann, auf welches die ν-fach iterierte Funktion ϑ angewendet unmittelbar auf ein Multiplum des Integrales zurückführt. Seien nämlich der Kürze halber für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die beiden Fundamentalintegrale y_1 und ϑy_1, so daß

$$\vartheta^2 y_1 = a_0 y_1 + a_1 \vartheta y_1$$

ist, so setze man mit noch weiter zu bestimmenden konstanten Koeffizienten κ_1 und κ_2

$$Y_1 = \kappa_1 y_1 + \kappa_2 \vartheta y_1,$$

also

$$\vartheta Y_1 = \kappa_2 a_0 y_1 + (\kappa_1 + a_1 \kappa_2) \vartheta y_1, \quad \vartheta^2 Y_1 = \kappa_2 a_0 \vartheta y_1 + (\kappa_1 + a_1 \kappa_2) (a_0 y_1 + a_1 \vartheta y_1),$$

und es ergibt sich, wenn κ_1 und κ_2 durch die quadratische Gleichung

$$a_1 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 + (a_1{}^2 - a_0) \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + a_0 (a_1 + 1) = 0$$

und A durch

$$A \kappa_1 = a_0 (\kappa_1 + a_1 \kappa_2),$$

worin a_0 von Null verschieden, bestimmt werden, die Beziehung

$$\vartheta^2 Y_1 = A Y_1.$$

Wir finden somit, daß die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen irreduktibeln Differentialgleichung, für welche zwei Integrale in der Beziehung (6) zueinander stehen, sich in die oben bezeichneten μ Gruppen von ν Elementen bringen lassen, in welchen für die Elemente je einer Gruppe die Beziehung besteht

$$\vartheta^\nu y = a y.$$

Wenden wir diese Auseinandersetzungen zunächst darauf an, eine lineare Differentialgleichung mit in x rationalen Koeffizienten von einer gegebenen Ordnung n aufzustellen, für welche zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems die Beziehung

$$y_2 = \rho_0 (x) y_1 = \vartheta y_1$$

besteht, und y_1 nicht einer linearen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der n^{ten} genügt, so wird sich aus

$$\vartheta^n y_1 = a_0 y_1 + a_1 \vartheta y_1 + \ldots + a_{n-1} \vartheta^{n-1} y_1$$

für $\rho_0 (x)$ als Lösung der Gleichung

$$\rho_0 (x)^n = a_0 + a_1 \rho_0 (x) + \ldots + a_{n-1} \rho_0 (x)^{n-1}$$

eine Konstante ergeben, und daher y_1 und y_2 nicht Elemente eines Fundamentalsystems sein, wie gefordert wurde.

Soll die Beziehung zwischen y_1 und y_2 die allgemeinere Form haben

$$y_2 = \rho_0 (x) y_1 + \rho_1 (x) y_1' = \vartheta y_1,$$

und y_1 wiederum nicht einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der n^{ten} genügen, so wird die Differentialgleichung offenbar lauten müssen

$$\text{(8)} \qquad \vartheta^n y = a_0 y + a_1 \vartheta y + a_2 \vartheta^2 y + \ldots + a_{n-1} \vartheta^{n-1} y,$$

und das Fundamentalsystem von Integralen

$$y_1,\ \vartheta y_1,\ \vartheta^2 y_1 \ldots\ldots \vartheta^{n-1} y_1$$

besitzen. Es ist somit die Existenz einer solchen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung nachgewiesen, zugleich aber auch ersichtlich, daß die Differentialgleichung (8) nicht irreduktibel ist. Denn bildet man die n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(9) \qquad \vartheta y = \alpha_\kappa y \quad (\kappa = 1, 2, \ldots n),$$

worin α_κ eine Lösung der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades darstellt

$$\alpha^n = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_{n-1} \alpha^{n-1},$$

so sieht man leicht, daß das Integral von (9) auch die Differentialgleichung (8) befriedigt, dieses Integral von (8) also gegen die Annahme der Irreduktibilität einer gleichartigen linearen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet.

Um die Untersuchung allgemein durchführen zu können, wollen wir zunächst eine lineare Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung aufzustellen suchen, in welcher die beiden Elemente eines Fundamentalsystems, von denen y_1 nicht einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen soll, in der Beziehung

$$(10) \qquad y_2 = \rho_0(x)\, y_1 + \rho_1(x)\, y_1' + \rho_2(x)\, y_1'' = \vartheta y_1$$

zueinander stehen.

Da jedenfalls, wie oben gezeigt,

$$\vartheta^2 y_1 = a_0 y_1 + a_1 \vartheta y_1$$

sein muß, so wird eine lineare Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung existieren

$$(11) \qquad \vartheta^2 y = a_0 y + a_1 \vartheta y,$$

welche die beiden Elemente y_1 und ϑy_1 eines Fundamentalsystems zu Integralen hat, und es würde zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage nur darauf ankommen, die beiden fremdartigen Integrale aus dieser Differentialgleichung herauszuschaffen.

Nun ist aber ohnedies leicht zu sehen, daß, wenn α_1 und α_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 - a_1 \alpha - a_0 = 0$$

sind, die Integrale der beiden Differentialgleichungen

$$(12) \quad \vartheta y - \alpha_1 y = 0 \quad \text{und} \quad (13) \quad \vartheta y - \alpha_2 y = 0,$$

wie durch Iterierung mit der Funktion ϑ hervorgeht, der Differentialgleichung (11) genügen, und daß ein Integral von (12) resp. (13) durch

$$(14) \quad y_1 + \frac{\alpha_1}{a_0} \vartheta y_1 \quad \text{resp.} \quad (15) \quad y_1 + \frac{\alpha_2}{a_0} \vartheta y_1$$

dargestellt wird. Da nun die gesuchte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(16) \qquad y'' + r_1(x)\, y' + r_2(x)\, y = 0$$

mit (12) das Integrpl (14) gemein hat, so kann durch Differentiation der letzteren und Verbindung mit (16) eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit in x rationalem Koeffizienten

$$(17) \qquad y' + R(x)\, y = 0$$

hergeleitet werden, welche das bezeichnete Integral besitzt, was unmöglich wäre, wenn von der gesuchten Differentialgleichung (13) die Irreduktibilität gefordert würde. Aber es ist auch leicht zu sehen, daß, wenn nur wie oben vorausgesetzt würde, daß das zugrunde gelegte Integral y_1 nicht einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der 2^{ten} genügen sollte, eine Relation von der Form (10) für beliebige rationale Funktionen $\rho_0(x)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ zwischen zwei Integralen nicht stattfinden könne, oder daß man für beliebige Koeffizienten der Beziehung (10) nicht immer eine dazugehörige Differentialgleichung zweiter Ordnung finden kann. Denn setzt man das Integral (14) in die Differentialgleichung (17), welche durch dasselbe befriedigt werden muß, ein, so erhält man, da vermöge (16)

$$\begin{aligned} \vartheta y_1 &= (\rho_0 - r_2 \rho_2)\, y_1 + (\rho_1 - r_1 \rho_2)\, y_1' \\ (\vartheta y_1)' &= (\rho_0' - r_2 \rho_2' - r_2' \rho_2 - r_2 \rho_1 + r_1 r_2 \rho_2)\, y_1 \\ &\quad + (\rho_0 - r_2 \rho_2 + \rho_1' - r_1' \rho_2 - r_1 \rho_2' - r_1 \rho_1 + r_1^2 \rho_2)\, y_1' \end{aligned}$$

ist, aus (17) oder

$$\left(y_1 + \frac{\alpha_1}{a_0} \vartheta y_1\right)' + R(x) \left(y_1 + \frac{\alpha_1}{a_0} \vartheta y_1\right) = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung in y_1, welche der Voraussetzung zufolge identisch sein muß. Die gleich Null gesetzten Koeffizienten von y_1 und y_1' liefern aber Differentialgleichungen in r_1 und r_2, welche für ρ_0, ρ_1, ρ_2 solche Beschränkungen erfordern, daß die Integrale dieser Differentialgleichungen rationale Funktionen von x sind.

Es ergibt sich somit, daß, wenn y_1 nicht das Integral einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung ist, sich nicht für **beliebig** gegebene rationale Funktionen $\rho_0(x)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in x rationalen Koeffizienten bilden läßt, für welche ein anderes Integral y_2 mit y_1 in der Beziehung steht

$$y_2 = \rho_0(x)\, y_1 + \rho_1(x)\, y_1' + \rho_2(x)\, y_1'',$$

und es sind zugleich die Bedingungen für die Substitutionskoeffizienten $\rho_0(x)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ aufgestellt, unter denen dies möglich ist.

Um nun die Frage allgemein zu beantworten, ob sich stets eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit in x rationalen Koeffizienten aufstellen läßt, in welcher zwei Integrale in einer Beziehung von der Form stehen

$$y_2 = \rho_0(x)\, y_1 + \rho_1(x)\, y_1' + \ldots + \rho_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1)},$$

worin $\rho_0(x)$, $\rho_1(x)$, ... rational von x abhängen, und y_1 nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der n^{ten} genügt, und wenn dies nicht der Fall ist, die Bedingungen zwischen den Substitutionskoeffizienten zu finden, welche dies ermöglichen, könnte man den Ausdruck für y_2 in die Differentialgleichung einsetzen und vermöge der Voraussetzung, daß y_1 dieser Differentialgleichung genügt, die linke Seite derselben in einen in $y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}$ linearen Ausdruck transformieren, dessen Koeffizienten der Voraussetzung für y_1 zufolge gleich Null zu setzen sind. Wir wollen jedoch die oben eingeschlagene Methode festhalten und das Verfahren an einer zu bildenden linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(18) \qquad y''' + r_1(x)\, y'' + r_2(x)\, y' + r_3(x)\, y = 0$$

erläutern, für welche zwei Integrale in der Beziehung

$$(19) \qquad y_2 = \rho_0(x)\, y_1 + \rho_1(x)\, y_1' + \rho_2(x)\, y_1'' = \vartheta\, y_1$$

zueinander stehen sollen, wobei y_1 nicht schon einer linearen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der 3^{ten} genügt.

Es ist aus den obigen Auseinandersetzungen ersichtlich, daß, wenn die Differentialgleichung (18) irreduktibel sein soll, ihre drei Fundamentalintegrale durch y_1, ϑy_1, $\vartheta^2 y_1$ dargestellt werden, so daß

$$(20) \qquad \vartheta^3 y_1 = a_0\, y_1 + a_1\, \vartheta\, y_1 + a_2\, \vartheta^2\, y_1$$

ist. Bemerkt man aber wie oben, daß die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(21) \qquad \vartheta y - \alpha y = 0,$$

worin α eine Lösung der algebraischen Gleichung

$$\alpha^3 = a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$$

ist, ein Integral von der Form besitzt

$$(22) \qquad y = y_1 + \frac{a_0 + a_1 \alpha}{a_0 \alpha} \vartheta y_1 + \frac{\alpha}{a_0} \vartheta^2 y_1,$$

welches zugleich der Differentialgleichung (18) genügt, so würde dies der Voraussetzung der Irreduktibilität widersprechen, da (21) nur von der zweiten Ordnung ist.

Lassen wir jedoch die Annahme der Irreduktibilität wieder fallen und setzen nur voraus, daß y_1 nicht einer gleichartigen linearen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der 3ten genügt, so würde wiederum, da (18) und (21) das Integral (22) gemein haben, dieses Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (17) genügen, in welche aber nicht wie oben außer den Koeffizienten der Gleichung (18) nur die Substitutionskoeffizienten $\rho_0(x)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ sondern auch deren erste Ableitungen eintreten, und es würde die Gleichung

$$\left(y_1 + \frac{a_0 + a_1 \alpha}{a_0 \alpha} \vartheta y_1 + \frac{\alpha}{a_0} \vartheta^2 y_1\right)' + R(x)\left(y_1 + \frac{a_0 + a_1 \alpha}{a_0 \alpha} \vartheta y_1 + \frac{\alpha}{a_0} \vartheta^2 y_1\right) = 0$$

nach Elimination der höheren Ableitungen von y_1 als der zweiten aus (18) und Identifizierung der Koeffizienten von y_1, y_1', y_1'', da y_1 nicht einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der dritten genügen sollte, Differentialgleichungen für r_1, r_2, r_3 liefern, welche für ρ_0, ρ_1, ρ_2 solche Beschränkungen erfordern, daß die Integrale dieser Differentialgleichungen rationale Funktionen von x sind.

Sind jedoch wieder unter der Annahme, daß y_1 nicht einer linearen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der 3ten genügt, y_1 und ϑy_1 nicht die Elemente einer Gruppe von drei Elementen, sondern

$$\vartheta^2 y_1 = a_0 y_1 + a_1 \vartheta y_1,$$

dann wird, wenn α eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 = a_1 \alpha + a_0$$

ist, die Differentialgleichung

$$\vartheta y - \alpha y = 0$$

mit (18) das Integral

$$y = y_1 + \frac{\alpha}{a_0} \vartheta y_1$$

gemein haben, während die weiteren Schlüsse dieselben bleiben wie bei der vorher gemachten Annahme.

Die Existenz einer Beziehung von der Form

$$y_2 = \rho_0 (x) y_1 + \rho_1 (x) y_1' + \rho_2 (x) y_1'' + \rho_3 (x) y_1''' + \ldots$$

für eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung führt durch Substitution der Werte von y_1''', y_1'''', ... aus dieser Differentialgleichung auf das frühere Problem zurück.

Ebenso einfach ergibt sich, daß eine irreduktible lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung nicht existiert, für welche zwei ihrer Integrale in der Beziehung zueinander stehen

$$(23) \qquad y_2 = \rho_0 (x) y_1 + \rho_1 (x) y_1' + \ldots + \rho_{n-1} (x) y_1^{(n-1)},$$

wenn $\rho_0 (x)$, $\rho_1 (x)$, ... beliebige rationale Funktionen darstellen, und welches die Bedingungen sind, denen diese Substitutionskoeffizienten unterliegen müssen, wenn eine solche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwar reduktibel sein darf, aber unter der Annahme, daß y_1 nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der n^{ten} genügt.

Ich will schließlich noch eine Bemerkung hinzufügen, welche sich zunächst nur auf binomische Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form beziehen soll

$$(24) \qquad y'' = R (x) y,$$

worin $R (x)$ eine rationale Funktion von x bedeutet.

Soll zwischen zwei Fundamentalintegralen y_1 und y_2 derselben eine Beziehung von der Form bestehen

$$(25) \qquad y_2 = \rho_0 (x) y_1 + \rho_1 (x) y_1',$$

und setzen wir nicht wie früher voraus, daß y_1 nicht einer gleichartigen Differentialgleichung erster Ordnung genügen soll, so finden wir leicht durch Substitution von y_2 in (24), daß die Gleichung ohne jene Voraussetzung erfüllt werden kann, wenn zwischen ρ_0, ρ_1 und R die beiden Gleichungen bestehen

$$(26) \qquad \rho_0'' (x) + 2 \rho_1' (x) R (x) + \rho_1 (x) R' (x) = 0$$

$$(27) \qquad 2\,\rho_0'(x) + \rho_1''(x) = 0,$$

woraus sich, wie leicht zu sehen, $\rho_0(x)$ und $R(x)$ aus dem willkürlich gegebenen $\rho_1(x)$ durch die Ausdrücke bestimmen

$$2\,\rho_0(x) = c_1 - \rho_1'(x)$$

$$R(x) = \frac{c_2}{\rho_1(x)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2 \log \rho_1(x)}{d\,x^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d \log \rho_1(x)}{d\,x}\right)^2,$$

wenn c_1 und c_2 willkürliche Konstanten bedeuten.

Man sieht aber unmittelbar, daß ein Integral der Differentialgleichung

$$(28) \qquad y'' = \left\{\frac{c_2}{\rho_1(x)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2 \log \rho_1(x)}{d\,x^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d \log \rho_1(x)}{d\,x}\right)^2\right\} y$$

sich für den Fall, daß $c_2 = 0$ gesetzt wird, in der Form ergibt

$$(29) \qquad y_1 = \rho_1(x)^{\frac{1}{2}},$$

während das zweite Integral nach (25) durch

$$(30) \qquad y_2 = \frac{c_1}{2}\,\rho_1(x)^{\frac{1}{2}}$$

dargestellt ist; y_1 und y_2 sind somit nicht Fundamentalintegrale, und y_1 selbst ist eine algebraische Funktion.

Die weitere Entwicklung der Beziehungen zwischen zwei Elementen eines Systems von Fundamentalintegralen binomischer Differentialgleichungen gestattet mit Hilfe der früher[3] von mir über die Beziehungen linearer Differentialgleichungen zu den binomischen gegebenen Sätze die Analogien weiter zu verfolgen, welche zwischen algebraischen Gleichungen und linearen Differentialgleichungen bestehen, und zunächst die Analogie mit dem Abelschen Satze, daß, wenn sich die Lösungen einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades in der Form

$$x_1 \quad \vartheta\,x_1 \quad \vartheta^2 x_1 \;\ldots\; \vartheta^{n-1} x_1$$

darstellen lassen, so daß $\vartheta^n x_1 = x_1$ ist, diese als ganze Funktionen der Wurzeln einer binomischen Gleichung ausgedrückt werden können.

[3] „Über die Beziehungen allgemeiner linearer Differentialgleichungen zu den binomischen." Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 18. Februar 1909.