Heidelberger Akademie der Wissenschaften

# Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Beiträge zur Kritik der Differentialgeometrie**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1914, 2



---

Bei der Erklärung einer Reihe wichtiger Begriffe pflegt man sich in der Differentialgeometrie auf die Umgebung eines Punktes zu beschränken, wobei geometrische Bedeutung und analytische Darstellung einander vollständig decken. Die Übereinstimmung kann jedoch aufhören, wenn man über die Umgebung hinausgeht, und man muß daher zwischen geometrischer und analytischer Fortsetzung unterscheiden. Die Vernachlässigung dieses Umstandes hat, wie an Beispielen nachgewiesen wird, zu Fehlschlüssen und scheinbaren Widersprüchen geführt, die noch keine hinreichende Aufklärung gefunden hatten.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1914, S. IX - X)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1914. 2. Abhandlung

# Beiträge zur Kritik der Differentialgeometrie

von
PAUL STÄCKEL     + L 1337?
in Heidelberg

Eingegangen am 12. Januar 1914

Heidelberg 1914
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-No. 1045.

## Einleitung.

Der Differentialgeometrie eignet eine Mittelstellung zwischen der Geometrie im engeren Sinne des Wortes und der Analysis. Jener entnimmt sie einen großen und bedeutsamen Teil ihrer Fragen, diese liefert ihr wirksame Mittel zu deren Beantwortung, und zwar erweist es sich in vielen Fällen als notwendig oder doch nützlich, über die Analysis der reellen Größen hinausgehend komplexe Größen mit zwei oder mehr Einheiten heranzuziehen. Die Verwendung des Komplexen bedingt zum Teil eine Erweiterung des Gebietes, auf dem man sich bewegt, insofern die ursprünglich für den reellen Bereich erklärten Begriffe auf den komplexen Bereich ausgedehnt werden, zum Teil aber eine Verengerung, insofern analytische Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen vorausgesetzt werden. Bei dieser verwickelten Sachlage ist es erklärlich, daß man es häufig unterlassen hat, bei der Fassung der Ergebnisse, zu denen man gelangte, die Bedingungen, unter denen sie hergeleitet wurden, und die Beschränkungen, unter denen sie gültig sind, genau auszusprechen, und daß solche Ergebnisse nicht selten in Fällen benützt worden sind, in denen sie gar nicht oder doch nur mit Vorsicht verwendet werden durften; auch ergeben sich bei der Einführung der komplexen Größen gewisse Schwierigkeiten, die man anfangs übersehen oder doch unterschätzt hat, weil man geneigt war, die reelle Geometrie als einen besonderen Fall, sozusagen als eine Projektion der komplexen Geometrie aufzufassen.

Es ist ein bleibendes Verdienst STUDYS, auf die hieraus hervorgegangenen Mißstände nachdrücklich hingewiesen und eine strenge Kritik nicht nur gefordert, sondern auch für wichtige Teile der Differentialgeometrie mit Erfolg durchgeführt zu haben. Auch die vorliegende Abhandlung soll einen Beitrag zur Kritik der Differentialgeometrie liefern, und zwar wird es sich dabei um eine Reihe von Begriffen handeln, die an der Spitze dieser Lehre stehen und von denen man anzunehmen pflegt, daß bei ihnen längst alles in Ordnung gebracht sei, wenigstens solange man sich auf analytische Gebilde beschränkt; Begriffe, wie etwa die zu einer analytischen Kurve gehörige Bogenlänge und die zugehörigen Flächenräume. In Wirklichkeit verhält es sich jedoch anders, und es sind bei den Grundlagen der Differentialgeometrie Unklarheiten vorhanden, die beseitigt werden müssen, wenn man darauf mit Sicherheit weiterbauen will; zum Beispiel gelten die zahlreichen Beweise, bei denen man die Bogenlänge zur unabhängigen Veränderlichen wählt, nur unter gewissen Einschränkungen, die, wie sich herausstellen wird, keineswegs unwesentlich sind. Wenn man übrigens die Literatur der Differentialgeometrie durchgeht, so stellt es sich heraus, daß seit der HUYGENSschen Evolutentheorie die Fälle gar nicht selten sind, in denen man bei der Verwendung jener Begriffe auf Schwierigkeiten gestoßen ist. Man ist jedoch darüber mit einem „il est clair" hinweggegangen oder hat sich mit Auskunftsmitteln begnügt, die den Kern der Sache nicht treffen. Jedenfalls fehlt es durchaus an einer grundsätzlichen Prüfung des Gegenstandes.

Damit man von vornherein die Bedeutung der hier aufgeworfenen Fragestellung für die Differentialgeometrie erkennt, schien es zweckmäßig, die folgenden Betrachtungen an bestimmte, geschichtlich gegebene Aufgaben anzuknüpfen, und zwar bildet den Ausgangspunkt (§ 1) ein merkwürdiges Beweisverfahren, mittels dessen NEWTON zu zeigen versucht hat, daß es unmöglich sei, ein Oval algebraisch zu rektifizieren, das heißt, die Bogenlänge einer geschlossenen Kurve, gezählt von einem bestimmten Anfangspunkt bis zu einem beliebigen Kurvenpunkt, durch eine algebraische Gleichung zu bestimmen. Daß NEWTONS Unmöglichkeitsbeweis in dieser Allgemeinheit nicht stichhaltig ist, hat man schon im 18. Jahrhundert bemerkt (§ 2), denn es stellte sich heraus, daß es algebraisch rektifizierbare geschlossene algebraische Kurven gibt; jedoch gelang es nicht, eine befriedigende Erklärung für das Auftreten solcher Ausnahmefälle zu finden, vielmehr wurde man zu Erscheinungen geführt, die sich als Paradoxien der Analysis darstellten. Es kommen hier besonders Untersuchungen von d'ALEMBERT und MASCHERONI in Betracht. MASCHERONIS seltene *Adnotationes ad calculum integralem Euleri* sind durch den Wiederabdruck im 12. Bande der ersten Reihe der *Opera omnia Leonhardi Euleri* in dankenswerter Weise bequem zugänglich gemacht worden; durch die *Adnotationes* ist der Verfasser erst auf die Stellen bei NEWTON und d'ALEMBERT geführt worden, die ihm bei früheren Untersuchungen über Rektifikationsprobleme entgangen waren. Auf ähnliche Schwierigkeiten wie bei NEWTONS Unmöglichkeitsbeweis stößt man auch bei einem Versuch EULERS, zu zeigen, daß bei einer geschlossenen algebraischen Kurve der Logarithmus der Bogenlänge sich nicht algebraisch bestimmen lasse, einem Versuch, der in seinem Grundgedanken mit NEWTONS Verfahren übereinstimmt.

Man wird sich nicht damit begnügen dürfen, die Beweisversuche der großen Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts für falsch zu erklären; Aufgabe einer positiven Kritik wird es vielmehr sein müssen, die Gründe aufzudecken, warum das Verfahren unter Umständen versagt, Bedingungen anzugeben, unter denen die Unmöglichkeit wirklich stattfindet, und Kennzeichen für die Ausnahmefälle zu ermitteln. Hierbei erweist es sich als zweckmäßig, die Fragestellung zu verallgemeinern. Die Widersprüche, die bei den genannten Rektifikationsproblemen auftreten, beruhen nämlich darauf, daß man, ohne es zu sagen, gleichzeitig zwei Erklärungen der Bogenlänge benutzt, eine geometrische und eine analytische, die zwar im kleinen Bereich übereinstimmen, jedoch bei dem Heraustreten aus dem kleinen Bereich, bei der Fortsetzung, wie man sagen kann, von einander abweichen können. Dieselbe Erscheinung zeigt sich aber auch bei einer ganzen Gattung von Größen, die analytischen Kurven als Funktionen des Ortes zugeordnet sind, und die darauf bezüglichen Untersuchungen der Differentialgeometrie können nur dann Anspruch auf Strenge machen, wenn die Begriffe der geometrischen und der analytischen Fortsetzung grundsätzlich klargestellt werden (§ 3). So wichtig diese Betrachtungen sind, so reichen sie doch nicht dazu aus, jene Paradoxien vollständig aufzulösen, hierzu bedarf es vielmehr noch einer genaueren Zergliederung des Begriffs einer geschlossenen analytischen Kurve (§ 4); die hierbei eingeführten Begriffe der analytischen Schleife und der analytischen Runde dürfen eine über die Zwecke der vorliegenden Untersuchung hinausgehende, selbständige Bedeutung beanspruchen.

---

## § 1.

## Ein Unmöglichkeitsbeweis NEWTONS über die algebraische Quadratur und Rektifikation geschlossener Kurven.

In den *Principia philosophiae naturalis mathematica*, Liber I, Sectio VI, Lemma XXVIII (London 1687) hat NEWTON folgenden Lehrsatz aufgestellt:

Nulla extat figura ovalis, cuius area, rectis pro lubitu abscissa, possit per aequationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Das heißt, wird im Inneren eines Ovals (Fig. 1) ein Punkt $P$ als Pol angenommen und beschreibt der Leitstrahl der Grenzkurve, $PQ$, den Sektor $APQ$, so soll, bei allgemeiner Lage von $Q$, der Inhalt des Sektors $APQ$ nicht durch eine algebraische Gleichung bestimmt werden können.

Der Sitte der Zeit folgend, gibt Newton den Beweis in geometrisch-mechanischer Einkleidung. Um den Pol $P$ möge von der Lage $PA$ aus eine Halbgerade gleichförmig gedreht und gleichzeitig auf ihr ein Punkt $R$ mit einer Geschwindigkeit bewegt werden, die dem Quadrate des zugehörigen Leitstrahles $PQ$ proportional ist. Dann wird der Leitstrahl $PR$ proportional dem Sektor $APQ$ sein. Nun wächst dieser Sektor beständig, wenn die Halbgerade um $P$ gedreht wird. Mithin beschreibt der Punkt $R$ eine Bahn, die, in unzähligen Windungen den Pol umkreisend, sich immer weiter von diesem entfernt, also eine Spirallinie. Jedem Punkte $Q$ der Grenzkurve werden auf diese Art unzählig viele Punkte $R$ der Spirale zugeordnet, nämlich die Schnittpunkte der Spirale mit der nötigenfalls verlängerten Geraden $PQ$, und die Leitstrahlen $PR$ sind den unzählig vielen Werten des dem Punkte $Q$ entsprechenden Sektorinhalts proportional. Wenn aber dieser Inhalt allgemein durch eine algebraische Gleichung gefunden werden könnte, so würde sich für den Punkt $Q$ nur eine endliche Anzahl solcher Werte ergeben. Mithin führt die Annahme, daß es eine algebraische Gleichung für den Sektor $APQ$ gibt, auf einen Widerspruch.

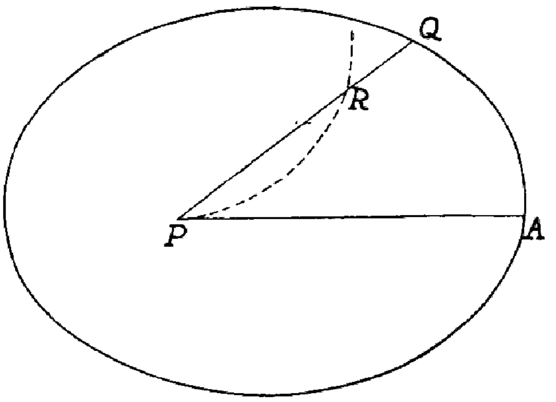

Fig. 1

Gegen diese Schlußweise wird man sofort den Einwand erheben, daß es unter den unzählig vielen Werten des Inhalts eine endliche Anzahl geben könnte, die gleichzeitig derselben algebraischen Gleichung genügen. Dasselbe könnte sich bei den übrigen Werten wiederholen, und so fort, sodaß es zwar keine algebraische Gleichung gibt, die sämtliche Werte des Inhalts liefert, wohl aber jeder einzelne Wert Wurzel einer algebraischen Gleichung ist. Die Aufgabe, den Inhalt des Sektors $APQ$ zu bestimmen, würde dann in eine Reihe von Teilaufgaben entfallen, die jede für sich algebraisch lösbar sind.

Newton hat diesen Einwand vorausgesehen und ihn durch den ausdrücklichen Nachweis zu widerlegen versucht, daß jene Spirale eine einfache Kurve sei, die nicht in mehrere Kurven zerfalle (curva simplex et in curvas plures irreducibilis). Er hat also versucht, den Begriff der Unzerlegbarkeit, der den Mathematikern seiner Zeit für algebraische Kurven geläufig war, auf nichtalgebraische Kurven auszudehnen, und hat damit ohne Zweifel einen ersten Schritt zu dem allgemeinen Begriff einer monogenen Funktion getan. Vielleicht noch bemerkenswerter ist es jedoch, daß Newton zum Nachweis der Unzerlegbarkeit eine Überlegung benutzt, die später in der Lehre von den algebraischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen grundlegende Bedeutung gewonnen hat. Nach Puiseux (Journ. de math., sér. 1, t. 16, 1851) gilt nämlich der Satz, daß man von jeder Wurzel $y_1$ einer unzerlegbaren algebraischen Gleichung $f(x, y) = 0$ durch passende Wahl des Weges zu jeder anderen, demselben Werte von $x$ zugehörigen Wurzel $y_2$ gelangen kann, und daß umgekehrt jede algebraische Gleichung $f(x,y) = 0$, bei der dies eintritt, unzerlegbar ist und $y$ als monogene Funktion von $x$ erklärt. Man vergleiche hiermit Newtons Ausführungen. „Wenn vom Pole auf eine [die Spirale] schneidende Gerade das Lot gefällt und jenes Lot zugleich mit der schneidenden Geraden um den Pol herumgedreht wird, so werden die Schnitte der Spirale ineinander übergehen, und der Schnitt, der der erste und nächste war, wird nach einer Umdrehung der zweite sein, nach zweien der dritte, und so fort. Inzwischen aber wird die Gleichung [für die Schnittpunkte] sich nicht ändern, außer nach Maßgabe der geänderten Werte der Größen, durch die die Lage der Schneidenden bestimmt wird. Mithin wird, weil jene Größen nach den einzelnen [vollen] Drehungen zu ihren ersten Werten zurückkehren, die Gleichung zu ihrer ersten Form zurückkehren, und deshalb wird ein und dieselbe [Gleichung] alle Schnitte liefern und daher unzählig viele Wurzeln haben, durch die alle [Schnitte] geliefert werden können."

Daß Newtons Schlußweise nicht zum Ziele führt, selbst wenn man sich auf algebraische Kurven beschränkt, wird bald ausführlich dargelegt werden.

Newton hat dem Lemma zwei wichtige Bemerkungen hinzugefügt. „*Eodem argumento*", sagt er zunächst, „*si intervallum poli et puncti, quo spiralis describitur, capiatur ovalis perimetro abscissae proportionale, probari potest, quod longitudo perimetri nequit per finitam aequationem generaliter exhiberi.*" Hiernach soll die Grenzkurve des Ovals deshalb nicht algebraisch rektifizierbar sein, weil einem Punkte der Kurve, deren Leitstrahl dem abgeschnittenen Stücke des Umfangs des Ovals proportional ist, wegen der unzählig vielen möglichen Umläufe unzählig viele Werte der Bogenlänge entsprechen, während bei einer algebraisch rektifizierbaren Kurve die Anzahl dieser Werte endlich ist. Man erkennt sofort, daß Newtons Verfahren, soweit es sich rechtfertigen läßt, immer dann anwendbar sein wird, wenn den Punkten einer geschlossenen Kurve eine veränderliche Größe $S$ zugeordnet wird, die beim Durchlaufen der Kurve beständig zunimmt, sodaß jedem Kurvenpunkte unzählig viele Werte von $S$ entsprechen.

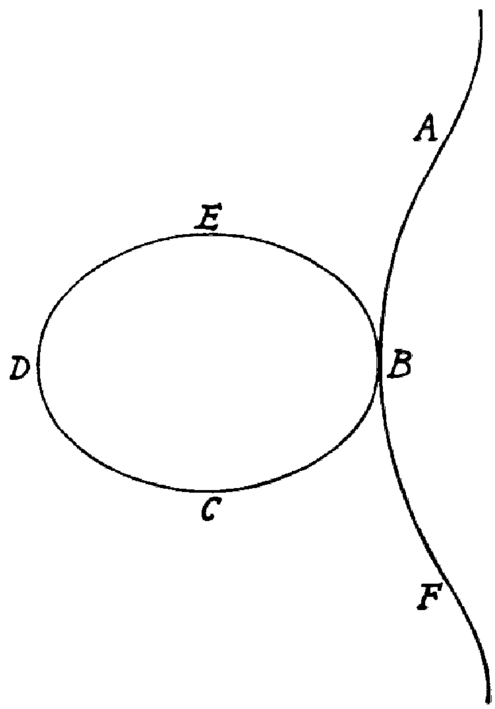

Fig. 2

Ferner heißt es: „*De ovalibus autem hic loquor, quae non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.*" Was Newton hiermit gemeint hat, zeigt die Figur 2, bei der die Kurve in $B$ einen Doppelpunkt mit vereinigten Tangenten besitzt. Das Kurvenstück BCDEB ist dann ein Oval, man erhält indessen, wenn die Punkte der Kurve in der Folge ABCDEBF durchlaufen werden, keine Spirale. Hieraus geht hervor, daß der Begriff des Ovals und allgemeiner der Begriff der geschlossenen Kurve einer genaueren Untersuchung bedarf, wenn man die Bedingungen angeben will, unter denen das Verfahren von Newton zulässig ist. Die Verallgemeinerung vom Oval auf die geschlossene Kurve hat darin ihren Grund, daß jenes Verfahren eine Spirale liefert, sobald die Kurve in sich zurückkehrt; diese Eigenschaft allein ist hierfür wesentlich.

## § 2.

## D'Alemberts und Mascheronis Paradoxien bei Rektifikationsproblemen; ein Unmöglichkeitsbeweis Eulers.

D'Alembert hat darauf hingewiesen, daß das Lemma Newtons seine Gültigkeit verliert, wenn man es auf die Rektifikation der regulären Astroide[1] anwendet, und zwar findet sich diese Bemerkung in einer Abhandlung, die für die Geschichte des Funktionsbegriffs von Wichtigkeit ist, nämlich in den bekannten *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration*, die 1749 in den Abhandlungen der Berliner Akademie erschienen ist[2].

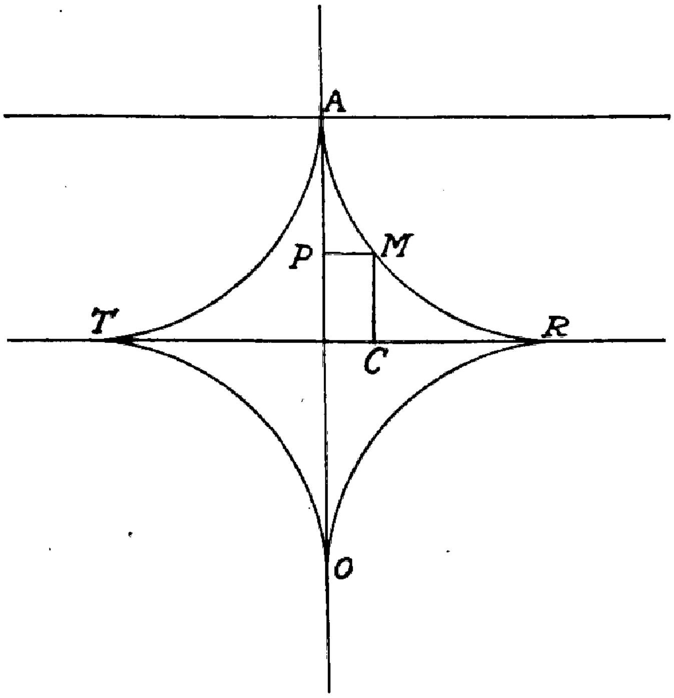

Fig. 3

Bei der Behandlung der Aufgabe, eine Kurve $y = \varphi(x)$ zu finden, deren Bogenlänge $s(x)$ der Ordinate einer gegebenen Kurve $u = f(x)$ proportional ist, stößt d'Alembert auf Schwierigkeiten. Wenn der Proportionalitätsfaktor mit $m$ bezeichnet wird, ergibt sich allerdings sofort die Gleichung:

$$(1) \qquad y = \int \sqrt{m^2 f'^2(x) - 1}\, dx,$$

---

[1] Die reguläre Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ wird bereits in einem Briefe von Hermann an Leibniz vom 22. November 1715 erwähnt. Siehe G. W. Leibniz, *Mathematische Werke*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Bd. 4, Halle 1858, S. 408; vgl. auch den Brief von Leibniz an Hermann vom 6. Jan. 1716, ebenda S. 410.

[2] Histoire de l'Académie Royale des sciences et belles lettres, Année 1747, Berlin 1749, Mémoires, S. 141—143.

diese Formel liefert jedoch, wenn $f'(a) = 0$ ist, einen imaginären Wert von $y$. Im besonderen betrachtet d'ALEMBERT das Beispiel:

$$(2) \qquad s(x) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}},$$

bei dem sich für $m = 1$ die Astroide (Fig. 3):

$$(3) \qquad (1-x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

ergibt. Ist $s_0$ die unmittelbar gemessene Länge des Kurvenbogens $AM$, so gehören zum Kurvenpunkte $M$ unzählig viele Werte der Bogenlänge $s$, die sich in der Form:

$$s_n = s_0 + n.AROT$$

darstellen lassen. Hieraus aber müsse man schließen, meint d'ALEMBERT, daß im Widerspruch mit der Gleichung (2) das Integral für den Bogen sich nicht algebraisch integrieren lasse. Auch scheine der Beweis NEWTONS, daß die Bogenlänge einer geschlossenen Kurve nicht allgemein durch eine algebraische Gleichung gefunden werden könne, hier nicht anwendbar zu sein.

Um das Paradoxon aufzuklären, sagt d'ALEMBERT, müsse man beachten, daß die Ordinaten der Kurve für $x > AO$ imaginär werden, während der Ausdruck (2) einen reellen Wert behält. „Cela vient de ce que cette quantité n'exprime pas véritablement et strictement l'arc de la courbe, elle exprime seulement l'intégrale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Or quoyque $dy$ soit imaginaire, cette quantité peut être réelle, tant que $dy^2$ ne sera pas plus petit que $dx^2$. Ainsi l'intégrale de $dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}}$ ne doit pas être une quantité en série indéfinie, parce qu'elle ne devient pas imaginaire ni quand $x > AO$ ni quand $x$ est négative."

Wenn diese Ausführungen auch der Ergänzung bedürfen, so hat d'ALEMBERT doch mit der Erkenntnis, daß zwischen der geometrisch erklärten Bogenlänge einer Kurve und dem analytischen Ausdruck $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ein grundsätzlicher Unterschied besteht, einen wesentlichen Beitrag zur Erledigung der hier vorliegenden Schwierigkeiten geliefert.

Zwanzig Jahre später ist d'ALEMBERT auf den Gegenstand zurückgekommen, in den *Extraits de plusieurs lettres de l'auteur sur différents sujets, écrites dans le courant de l'année 1767*, Opuscules math., T. IV, Paris 1768, S. 65—68, ohne daß man sagen könnte, daß er tiefer in die Frage eingedrungen wäre. Er begnügt sich vielmehr damit, den alten Paradoxien neue hinzuzufügen, die, wie er mit einer Lieblingswendung seiner späteren Jahre sagt, dartun, daß die Analysis in manchen Fällen versagt: „Voilà donc encore ici le calcul en défaut.“

Aus der Gleichung (2) folgt die Differentialgleichung:

$$(4) \quad dy = dx \sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}} - 1}.$$

Integriert man von $x = 1$ bis $x = 0$ mit dem Anfangswert $y = 1$ und negativem Vorzeichen der Quadratwurzel, so wächst $y$ während der Integration, und man erhält den Kurvenzweig $BC'$ (Fig. 4), der zu dem Zweige $BC$ in bezug auf die durch $B$ parallel zu $AC$ gezogene Gerade symmetrisch ist. Das steht jedoch in Widerspruch mit der endlichen Gleichung (3) für die Kurve.

Man nehme ferner auf den Zweigen $AB$ und $BC$ die Punkte $M$ und $M'$, die zu $BD$ symmetrisch liegen; ihre Abszissen seien $OP = OP' = z$. Dann folgt aus der Gleichung (2), daß

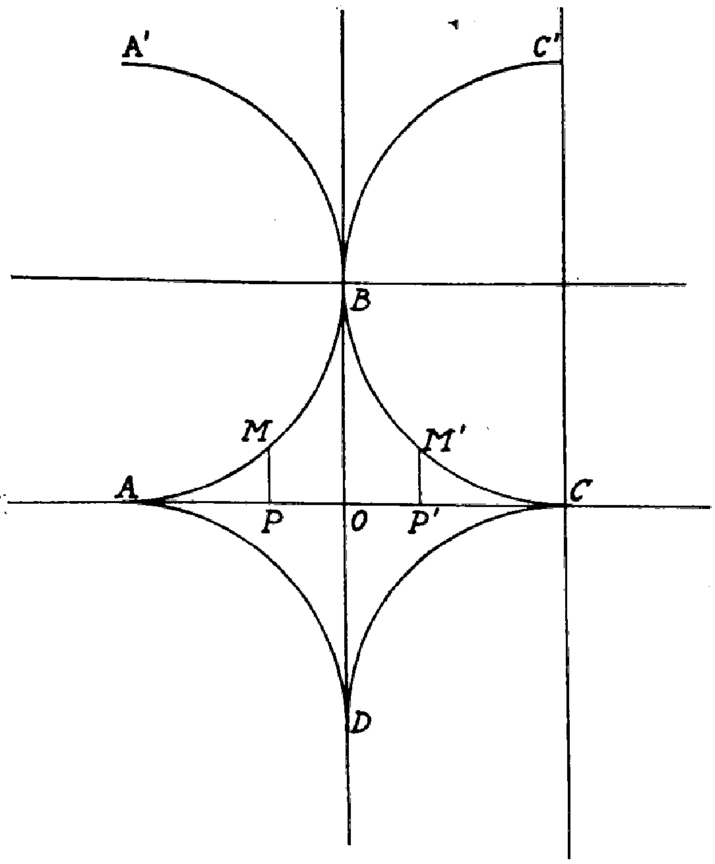

Fig. 4

$$\text{arc } AM = \text{arc } ABM' = \tfrac{3}{2}\left(1 - z^{\frac{2}{3}}\right) < \tfrac{3}{2}$$

ist, während arc $AB = \frac{3}{2}$ war. Hieraus folgt, daß die Bogenlänge der Kurve $AMBM'C$ vom Punkte $B$ aus beständig abnimmt, und das ist widersinnig.

Mascheroni hat in den *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, Pars I, Pavia 1790[3] die Analysis gegen d'Alemberts

[3] Die Stellen, auf die es hier ankommt, finden sich in dem Abschnitt: *Solutio cuiusdam paradoxi propositi ab Alembertio per signum $\pm$ rite adhi-*

Angriffe in Schutz genommen: „Injuria tamen accusatur calculus.“ Er bemüht sich zu beweisen, daß die der Differentialgleichung (4) genügende Kurve aus den vier Zweigen $AB, BC, BA', BC'$ bestehe und daß man, wenn der Bogen $AB$ als positiv angesehen wird, den Bogen $BC$ notwendig negativ zu nehmen habe. Wie SCHLESINGER[4] mit Recht bemerkt hat, scheitern MASCHERONIS Beweisversuche an dem Umstand, „daß für Funktionen einer realen Veränderlichen, selbst wenn sie analytisch, das heißt, nach dem TAYLORschen Satz in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind, kein in der Natur dieser Funktionen wurzelndes Prinzip angegeben werden kann, nach dem sich entscheiden läßt, ob man verschiedene eindeutige Funktionen zu einer mehrdeutigen Funktion zusammenfassen oder zwei in benachbarten Intervallen definierte Funktionen als Fortsetzungen von einander betrachten soll. Man wird ja im letzteren Falle wohl für die Werte der Funktion, vielleicht auch für die der ersten und höheren Derivierten, wenn solche vorhanden sind, stetigen Anschluß fordern können, es bleibt aber immer durchaus willkürlich, wie man verfahren will“. Auf die Frage der Fortsetzung im reellen Gebiete wird im folgenden Paragraphen ausführlich eingegangen werden.

In dem Kreise der italienischen Mathematiker, dessen Mittelpunkt MASCHERONI bildete, haben d'ALEMBERTS Paradoxien Anlaß zu weiteren Erörterungen gegeben; man vergleiche hierüber den Bericht von VIVANTI im vierten Bande von M. CANTORS *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig 1908, S. 485. VIVANTI schließt mit den Worten: „Daß alle diese Deutungen ungenügend sind, ist klar. Die hervorgehobenen Schwierigkeiten konnten nicht überwunden werden, solange man den Begriff des Veränderlichkeitsbereiches einer algebraischen Funktion nicht vollständig beherrschte. .... Die Bogenlänge [der Astroide] bildet eine auf der die Funktion $y$ von $x$ darstellenden RIEMANNschen Fläche reguläre Funktion; $x = 1$ ist ein Verzweigungspunkt dieser Fläche, und an diesem Punkt kann der Übergang von einem zu einem andern Funktionszweige sowohl von $y$ als von $s$ stattfinden. Dadurch kann man sich von allen Unregelmäßigkeiten Rechenschaft geben.“ So wertvoll indessen die Dienste sind,

---

*bendum in integratione*, wieder abgedruckt *Opera omnia Leonhardi Euleri*, Ser. I, vol. 12, Leipzig 1914, S. 444—451.

[4] SCHLESINGER, *Vorrede* zum zweiten Teile der *Institutiones calculi ntegralis, Opera omnia Leonhardi Euleri*, Ser. I, vol. 12, Leipzig 1914, S. X.

die hier, wie in andern Fällen, die RIEMANNsche Fläche leistet, so sind funktionentheoretische Betrachtungen allein zur vollständigen Beseitigung der Schwierigkeiten nicht ausreichend, denn es handelt sich nicht nur um analytische, sondern auch um geometrische Fragen, wie d'ALEMBERT bereits richtig erkannt hatte.

EULER hat in der Abhandlung: *Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur*, die er am 1. Mai 1775 der Petersburger Akademie vorlegte, die aber erst im Jahre 1785, also nach seinem Tode, im zweiten Bande der *Opuscula analytica*, S. 76—90 abgedruckt ist[5], die Frage untersucht, ob es geschlossene algebraische Kurven gibt, deren Bogenlänge $s$ durch einen Ausdruck der Form

$$s = a.\ ln\ v(x) \tag{5}$$

dargestellt wird, wo $a$ eine Konstante und $v(x)$ eine algebraische Funktion der Abszisse $x$ bedeutet. Die Schlußweise, die er anwendet, um darzutun, daß es keine Kurven der verlangten Beschaffenheit gibt, hat, soweit sie stichhaltig ist, eine allgemeinere Bedeutung; auf dieselbe Art läßt sich nämlich zeigen, daß es keine geschlossene algebraische Kurve gibt, bei der eine algebraische Funktion der Abszisse gleich einer im reellen Gebiete eindeutigen, monotonen Funktion $\varphi(s)$ der Bogenlänge $s$ ist, und ebenso wie bei dem Verfahren von NEWTON darf an die Stelle der Bogenlänge $s$ irgend eine Funktion des Ortes auf der Kurve, $S$, gesetzt werden, die beim Durchlaufen der Kurve beständig wächst, sodaß also zu jedem Punkte der geschlossenen Kurve unzählig viele Werte von $S$ gehören.

Der Beweis EULERS erscheint ähnlich wie bei NEWTON in geometrischem Gewande, er soll aber der Einfachheit wegen in analytischer Form, und zwar sogleich für den allgemeinen Fall vorgetragen werden, daß nach den geschlossenen algebraischen Kurven gefragt wird, bei denen eine Gleichung

$$v(x) = \varphi(S) \tag{6}$$

besteht, wo $v(x)$ eine algebraische Funktion der Abszisse $x$ und $\varphi(S)$ eine eindeutige, monotone Funktion der Größe $S$ bedeutet. Wenn nämlich dem Kurvenpunkte $P$ mit der Abszisse $x$ die un-

---

[5] Wiederabgedruckt *Opera omnia Leonhardi Euleri*, Ser. I, vol. 21, Leipzig 1913, S. 78—90; vgl. auch EULERS Abhandlung: *De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur*, *Opera postuma*, T. I, 1862, S. 439, wiederabgedruckt *Opera*, vol. 21, S. 274, sowie den Brief EULERS an LAGRANGE vom 23. März 1775, *Opera postuma*, T. I, S. 588.

zählig vielen Werte $S_n$ der Größe $S$ entsprechen, so gehören dazu auch unzählig viele Werte $\varphi(S_n)$ der Funktion $\varphi(S)$, weil diese Werte nach der Voraussetzung der Monotonie alle voneinander verschieden sind, und es sind daher dem Kurvenpunkte $P$ auch unzählig viele Werte von $\upsilon$ zugeordnet. Das ist aber ein Widerspruch, weil $\upsilon(x)$ algebraisch von $x$ abhängen, mithin für jeden Wert von $x$ nur eine endliche Anzahl von Werten besitzen sollte. Demnach gibt es keine Kurve der verlangten Beschaffenheit.

Daß die soeben dargelegte Schlußweise unzulänglich ist, zeigt das Beispiel $\varphi(S) = s$, denn es gibt geschlossene algebraische Kurven, die sich algebraisch rektifizieren lassen. Wie im nächsten Paragraphen genauer auseinandergesetzt werden wird, besteht die Lücke darin, daß bei dem Beweise das Wort Bogenlänge in doppelter Bedeutung gebraucht wird. Wenn man aussagt, daß zu einem Kurvenpunkte $P$ unzählig viele Werte der Bogenlänge gehören, so versteht man darunter die Länge des Weges, den man beim Durchlaufen der Kurve zurücklegt, eine Größe, die man als geometrische Bogenlänge $s(x)$ bezeichnen könnte. Wenn man dagegen verlangt, daß die Kurve algebraisch rektifizierbar sein soll, so versteht man unter der Bogenlänge den Wert des Integrals

$$\sigma(x) = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{7}$$

und fordert, daß dieses ABELsche Integral algebraisch integrierbar sein soll; man könnte $\sigma(x)$ als analytische Bogenlänge bezeichnen. Man erkennt, daß jene Schlußweise nur dann zulässig ist, wenn die geometrische und die analytische Bogenlänge beständig miteinander übereinstimmen, daß sie aber versagt, sobald beim Wandern auf der Kurve ein Punkt angetroffen wird, von dem ab die Übereinstimmung aufhört, in dem also die analytische Bogenlänge vom Zunehmen zum Abnehmen übergeht. Umgekehrt wird man aus der Tatsache, daß es geschlossene algebraische Kurven gibt, die sich algebraisch rektifizieren lassen, erschließen dürfen, daß die eben genannte Möglichkeit wirklich eintreten kann. Entsprechende Betrachtungen lassen sich für den Fall einer Größe $S(x)$ anstellen.

## § 3.

### Geometrische und analytische Fortsetzung.

Wenn es auch bei den Funktionen einer reellen Veränderlichen $x$, wie SCHLESINGER sich ausdrückt, „kein in der Natur dieser Funktionen wurzelndes Prinzip“ gibt, nach dem man eine solche Funktion, die für das Intervall $x = (a \ldots b)$ gegeben ist, über den Wert $x = b$ hinaus fortsetzen soll, so sind doch die Fälle gar nicht selten, in denen man sich zu einer solchen Extrapolation genötigt sieht, und diese kann durch eine von außen hinzutretende, in der Natur der behandelten Aufgabe wurzelnde Forderung eindeutig bestimmt sein. Die Fortsetzung erfolgt oft gemäß einer Funktionalgleichung, die es ermöglicht, aus den Werten der Funktion für das Intervall $x = (a \ldots b)$ die Werte für ein anschließendes Intervall $x = (b \ldots c)$ zu berechnen; man hat etwa. $f(b-u) = f(b+u)$, Symmetrieprinzip, oder $f(b-a+u) = f(u)$, Periodizitätsprinzip. Wenn man weiß, daß die Funktion für das ganze Intervall durch eine nach Potenzen von $x-c$ fortschreitende TAYLORsche Reihe dargestellt wird, so läßt sich *auch* das Prinzip der analytischen Fortsetzung anwenden[6]. Es gewährt den Vorteil, daß man bei der Untersuchung die gewaltigen Hilfsmittel der Lehre von den analytischen Funktionen anwenden darf. Man wird jedoch bei einer Aufgabe aus der Geometrie oder der Mechanik darauf zu achten haben, ob nicht etwa bei der ursprünglichen Erklärung der verwendeten reellen Funktionen ausdrücklich oder stillschweigend eine andere Art der Fortsetzung zugrunde gelegt worden ist; sonst kann es sich leicht ereignen, daß man zu scheinbaren Widersprüchen und Paradoxien kommt.

Im folgenden soll eine besondere Art von reellen Funktionen betrachtet werden, die in der Differentialgeometrie eine wichtige Rolle spielen, nämlich gewisse Funktionen des Ortes auf einer Kurve[7] oder genauer auf einer analytischen Kurve $f(x,y) = 0$.

---

[6] Bei der analytischen Fortsetzung wird man auch Funktionselemente der Form $x-c = P_1(t)$, $y-f(c) = P_2(t)$ zur Anwendung bringen dürfen, die dem analytischen Gebilde im Gebiete der *komplexen* Veränderlichen $x$, $y$ angehören, das durch die nach Potenzen von $x-c$ fortschreitende TAYLORsche Reihe bestimmt ist; vgl. die Bemerkungen am Anfang von § 4. Im übrigen bedarf der Begriff der analytischen Fortsetzung reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen noch einer genaueren Untersuchung, auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden kann.

[7] Unter einer Kurve soll in dieser Abhandlung stets ein reelles Gebilde verstanden werden, und es sollen überhaupt die in der Geometrie üblichen Benennungen immer in ihrer ursprünglichen, auf das reelle Gebiet beschränkten Bedeutung gelten; bei der Ausdehnung auf das komplexe Gebiet wird dann entweder ein entsprechender Zusatz nötig, oder es müssen neue Namen eingeführt werden. Dieses Verfahren scheint der Natur der Sache besser

Der Begriff der analytischen Kurve wird im nächsten Paragraphen genauer erörtert werden; an dieser Stelle genügt es vorauszusetzen, daß die Ordinate $y$ in der Nähe des Kurvenpunktes $A$ mit den Koordinaten $x=a$, $y=b$ durch eine nach ganzen, positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe mit reellen Koeffizienten dargestellt wird. Die Funktion des Ortes $S(x,y)$ soll nun erstens die Eigenschaft haben, daß

$$(8) \qquad S(a,b) = 0$$

ist, und sie soll zweitens einer algebraischen Differentialgleichung

$$(9) \qquad \Theta\left(\frac{dS}{dx}; x,y\right) = 0$$

genügen; hierbei bedeutet $\Theta$ ein Polynom in bezug auf die Ableitung von $S$ und eine solche analytische Funktion von $x$ und $y$, daß die Gleichung $\Theta = 0$ durch eine gewöhnliche Potenzreihe

$$(10) \qquad S(x,y) = c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

mit reellen Koeffizienten befriedigt wird. Die genannte Forderung ist zum Beispiel erfüllt, wenn $S(x,y)$ einen der bekannten, der Kurve zugeordneten Flächeninhalte oder die Bogenlänge der Kurve bedeutet; der Punkt $A$ ist dabei der Anfangspunkt der Zählung.

Die Funktion $S(x,y)$ ist zunächst nur für eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes $A$ erklärt. Für ihre Fortsetzung bieten sich zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten dar. Entweder kann man die geometrische Erklärung von $S(x,y)$ zugrunde legen und gewissermaßen die geometrische Fortsetzung dieser Funktion bilden, oder man kann die Potenzreihe (10) benutzen und das Verfahren der analytischen Fortsetzung zu Hilfe nehmen. Es wird einer besonderen Untersuchung bedürfen, in welcher Beziehung die durch die analytische Fortsetzung gewonnene Funktion $\Sigma(x,y)$ zu der durch die geometrische Fortsetzung gewonnenen Funktion $S(x,y)$ steht; es kann sich ereignen und es ereignet sich auch wirklich, daß die in der Umgebung des Punktes $A$ gültige Gleichung

$$(11) \qquad \Sigma(x,y) = S(x,y)$$

beim Wandern auf der Kurve ihre Gültigkeit verliert.

Es wird nützlich sein, die vorhergehenden allgemeinen Auseinandersetzungen an dem Beispiel der Bogenlänge einer analytischen Kurve zu erläutern.

---

zu entsprechen als das umgekehrte, die alten Bezeichnungen für die neuen, komplexen Gebilde zu verwenden und die alten, reellen Gebilde mit neuen Namen zu versehen.

Die geometrische Bogenlänge $s(x,y)$ ist eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen $x$, die beim Durchlaufen der Kurve beständig zunimmt; sie gibt die Länge des Weges an, den man auf der Kurve wandernd zurückgelegt hat. Es könnte scheinen, als ob diese Erklärung eine Tautologie wäre, weil Bogenlänge und Weg auf der Kurve dasselbe bedeuten. Daß dies nicht zutrifft, zeigt die folgende Überlegung.

Wenn man von einem Punkte $A$ der Kurve $f(x,y)=0$ ausgehend auf ihr wandert, so soll die Gesamtheit der Kurvenpunkte, die man erreichen kann, ein zum Punkte $A$ gehöriger Zweig der Kurve heißen; dabei soll es erlaubt sein, einen Kurvenpunkt beliebig oft zu überschreiten. Sobald man an einen Punkt gelangt, von dem aus man auf mehr als einem Wege fortschreiten kann, hat man sich für einen der möglichen Wege zu entscheiden; die einmal getroffene Entscheidung ist beizubehalten. Ist $B$ ein Punkt des betreffenden Zweiges von $A$, so kann man, auf der Kurve wanderd, von $B$ nach $A$ gelangen, mithin auch zu allen Punkten, die sich von $A$ aus erreichen ließen. In Verbindung mit der für die Wahl der Wege getroffenen Festsetzung folgt hieraus, daß zu jedem Punkte $B$ des betreffenden Zweiges von $A$ als Zweig genau dieser Zweig von $A$ gehört; ein solcher Zweig ist also ein in sich geschlossenes Ganzes.

Man beschränke sich jetzt auf einen Zweig der Kurve $f(x,y)=0$ und wandere von diesem von $A$ nach $B$. Dabei mögen auf der Kurve der Reihe nach Zwischenpunkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ angenommen werden, und zwar so, daß die geradlinigen Entfernungen $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nB$ sämtlich kleiner sind als eine beliebig kleine Strecke $\varepsilon$. Durch den bekannten, an der Summe der Entfernungen auszuführenden Grenzprozeß, der bei einer analytischen Kurve stets konvergiert, gelangt man dann zu dem Werte der geometrischen Bogenlänge $s(x,y)$, der dem Punkte $B$ bei dem Anfangspunkte $A$ der Zählung zugeordnet ist, oder genauer zu einem der Werte von $s(x,y)$; denn es kann vorkommen, daß man beim Durchlaufen des Zweiges den Punkt $B$ mehrmals überschreitet, und jedem Überschreiten wird dann ein neuer Wert von $s(x,y)$ entsprechen.

Bei der vorhergehenden Überlegung ist ein bestimmter Fortschreitungssinn auf der Kurve als positiver Sinn festgesetzt worden; es ist zweckmäßig, beim Durchlaufen der Kurve im entgegengesetzten Sinne die geometrische Bogenlänge negativ zu zählen.

Jedem Punkte eines in sich zurückkehrenden oder geschlossenen Kurvenzweiges werden auf die angegebene Art unzählig viele Werte der geometrischen Bogenlänge $s(x,y)$ zugeordnet, die alle aus einem kleinsten positiven Werte $s_0$ durch wiederholtes Hinzufügen oder Wegnehmen einer gewissen positiven Größe $p$ hervorgehen; die Größe $p$ soll der geometrische Umfang der geschlossenen Kurve genannt werden.

Die analytische Bogenlänge $\sigma(x, y)$ wird durch die Differentialgleichung

$$(12) \qquad \left(\frac{d\sigma(x,y)}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

erklärt, die auf dem analytischen Gebilde $f(x, y) = 0$ mit der Anfangsbedingung

$$(13) \qquad \sigma(a, b) = 0$$

zu integrieren ist. Um dies genauer auszuführen, möge auf der rechten Seite für $y$ die in der Nähe des Anfangspunktes $A$ gültige Potenzreihe eingesetzt werden. Dann wird $\sigma(x, y)$, abgesehen vom Vorzeichen, in der Nähe von $A$ selbst durch eine nach Potenzen von $x-a$ fortschreitende, für $x = a$ verschwindende Potenzreihe mit reellen Koeffizienten dargestellt werden. Das Vorzeichen wird dadurch bestimmt werden können, daß man etwa festsetzt, $\sigma(x, y)$ solle für kleine positive Werte von $x-a$ positiv sein; bei richtiger Wahl des Fortschreitungssinnes auf der Kurve wird dann in der Nähe von $A$ die analytische Bogenlänge mit der geometrischen Bogenlänge übereinstimmen.

Die für $\sigma(x, y)$ gewonnene Potenzreihe kann als Element einer monogenen analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen $x$ aufgefaßt werden, die aus der Potenzreihe durch das Verfahren der analytischen Fortsetzung hervorgeht, und es wird auf diese Art die analytische Bogenlänge über die Umgebung des Punktes $A$ im reellen Gebiet fortgesetzt werden können. Die so erklärte reelle Funktion $\sigma(x, y)$ braucht mit der reellen Funktion $s(x, y)$ nicht übereinzustimmen. Im besonderen kann es vorkommen, daß $s(x, y)$ gar nicht einer monogenen analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen $x$ als Wert für reelles $x$ angehört; zum Beispiel ist bei der früher betrachteten regulären Astroide die geometrische Bogenlänge eine stückweise analytische Funktion von $x$, das heißt aus Stücken von unzählig vielen analytischen Funktionen zusammengesetzt.

Man erkennt jetzt, warum die Unmöglichkeitsbeweise von NEWTON und EULER in gewissen Fällen versagen. Beide beruhen auf der Voraussetzung, daß unter der Bogenlänge der Kurve die geometrische Bogenlänge verstanden wird. Wenn man aber zum Beispiel nach Kurven fragt, die sich algebraisch rektifizieren lassen, bei denen also zwischen der Bogenlänge und der Abszisse eine algebraische Gleichung besteht, so wird damit stillschweigend gefordert, daß die Bogenlänge eine monogene analytische Funktion ist, das heißt, daß die analytische Bogenlänge zugrunde gelegt wird. Der Widerspruch, zu dem NEWTON und EULER gelangen, braucht daher nicht in der Forderung der algebraischen Rektifizierbarkeit zu liegen, er kann vielmehr auch darauf beruhen, daß die geometrische und die analytische Bogenlänge der Kurve voneinander verschieden sind. Wie sich dieser Unterschied geltend macht, soll für den EULERschen Unmöglichkeitsbeweis ausführlich dargelegt werden.

Bei Untersuchungen über geschlossene Kurven wird häufig von dem Umstand Gebrauch gemacht, daß die Koordinaten $x$, $y$ eines Kurvenpunktes $P$ als periodische Funktionen der Bogenlänge $s$ aufgefaßt werden dürfen. Dabei wird augenscheinlich die geometrische Erklärung der Bogenlänge vorausgesetzt, und die Periode $p$ der Funktionen $x$ und $y$ von $s$ ist gleich dem geometrischen Umfang der geschlossenen Kurve.

Wird nunmehr gefordert, daß für eine geschlossene Kurve die Gleichung

$$v(x) = \varphi(s) \tag{14}$$

besteht, in der $v$ eine algebraische Funktion von $x$ und $\varphi$ eine eindeutige, monotone Funktion von $s$ bedeutet, so läßt sich daraus der Widerspruch folgern, daß $x$ keine periodische Funktion von $s$ sein kann. Eine periodische Funktion hat nämlich die Eigenschaft, jeden Wert, den sie überhaupt annimmt, für unzählig viele Werte des Argumentes anzunehmen. Nach der Gleichung (14) besteht aber zwischen $x$ und $\varphi(s)$ eine algebraische Gleichung, mithin gehört zu jedem (zulässigen) Werte von $x$ nur eine endliche Anzahl von Werten der Funktion $\varphi(s)$, und weil $\varphi(s)$ eine monotone Funktion ist, also jedem Werte von $\varphi(s)$ nur ein einziger Wert von $s$ entspricht, so gehört zu jedem Werte von $x$ auch nur eine endliche Anzahl von Werten des Argumentes $s$. Folglich gibt es keine geschlossene Kurve der verlangten Eigenschaft.

Dieser Schluß ist richtig, solange mit der Bogenlänge die geometrische Bogenlänge gemeint ist, er ist jedoch unzulässig, wenn für die Bogenlänge eine Forderung gestellt wird, in der die Voraussetzung liegt, daß diese eine monogene analytische Funktion von $x$ sein soll, also zum Beispiel eine algebraische Funktion. Alsdann muß man mit der analytischen Bogenlänge $\sigma(x, y)$ arbeiten und die Koordinaten $x$, $y$ als Funktionen von $\sigma$ auffassen. Ergeben sich $x$ und $y$ als periodische Funktionen von $\sigma$, so ist die Unmöglichkeit der geforderten Rektifikation bewiesen. Es kann jedoch eintreten, daß die Koordinaten keine periodischen Funktionen von $\sigma$ sind, und zwar gilt dies, falls der im nächsten Paragraphen zu erklärende analytische Umfang der geschlossenen Kurve gleich Null ist.

Es möge noch eine Schwierigkeit berührt werden, die sich ergibt, wenn man die Funktionen $x$ und $y$ von $s$ und $\sigma$ miteinander vergleicht, die für hinreichend kleine Werte von $s$ und $\sigma$ identisch gleich sind, im weiteren Verlaufe aber verschieden ausfallen können. Handelt es sich zum Beispiel um eine algebraisch rektifizierbare geschlossene Kurve, so ist $x$ eine periodische Funktion von $s$, aber eine algebraische Funktion von $\sigma$. Wie ist es möglich, daß zwei Funktionen dieser Art in einem endlichen Stücke ihres Verlaufes zusammenfallen? Wenn man weiß, daß die periodische Funktion eine monogene analytische Funktion ist, so liegt hierin freilich ein Widerspruch. Wenn aber die periodische Funktion nur für reelle Werte des Argumentes erklärt ist, so verliert der Begriff der analytischen Fortsetzung seine unbedingte Geltung, und man erhält aus der algebraischen Funktion $x = \lambda(\sigma)$ eine periodische Funktion $l(s)$ mit der Periode $p$, wenn man festsetzt, daß für das Intervall $s = (0 \ldots p)$ die Gleichung $l(s) = \lambda(s)$ gelten und darüber hinaus die Funktion $l(s)$ gemäß der Funktionalgleichung $l(s+p) = l(s)$ fortgesetzt werden soll.

Man findet gelegentlich die Behauptung, zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks könnten deshalb keine algebraischen Beziehungen bestehen, weil die Winkelfunktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ periodische Funktionen sind. Wie die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, ist dieser Schluß nicht gestattet, vielmehr wird er erst dann bindend, wenn außerdem nachgewiesen ist, daß die Winkelfunktionen analytisch und monogen sind.

§ 4.

## Zur Lehre von den geschlossenen analytischen Kurven.

Ein monogenes analytisches Gebilde im Gebiet von zwei komplexen Veränderlichen $x$ und $y$ läßt sich bekanntlich als eine Gesamtheit von Funktionselementen der Form

$$x-a = P_1(t),\quad y-b = P_2(t) \tag{15}$$

auffassen, unter $P_1(t)$ und $P_2(t)$ gewöhnliche Potenzreihen von den $t$ verstanden, bei der je zwei Elemente durch eine analytisch zusammenhängende Reihe von lauter zum Gebilde gehörigen Funktionselementen miteinander verbunden sind, eine Gesamtheit, die sich auf keine Weise durch Hinzufügung von Funktionselementen so erweitern läßt, daß der erweiterten Gesamtheit dieselbe Eigenschaft zukommt[8].

Die Gesamtheit der reellen Wertsysteme $x$, $y$, die dem Gebilde angehören, soll als die darin enthaltene analytische Kurve bezeichnet werden. Ob man der Kurve die Grenzpunkte hinzurechnen will, die aus wesentlich singulären Punkten des Gebildes entspringen, oder nicht, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit; wenn man es tut, würde zum Beispiel die Kurve

$$x^2 + \left(1 + \frac{1}{\ln y}\right)^2 = 1 \tag{16}$$

als geschlossen anzusehen sein, sonst als offen. Planmäßige Untersuchungen über das Verhalten analytischer Kurven in der Umgebung solcher Grenzstellen scheinen bis jetzt noch nicht angestellt worden zu sein; die in der Lehre von den algebraischen Kurven entwickelten Hilfsmittel sind hierfür jedenfalls unzureichend. Im folgenden soll angenommen werden, daß der betrachtete Zweig der analytischen Kurve keine solche Grenzstellen besitzt; er wird dann durch eine abzählbar unendliche Reihe von Funktionselementen der Form (15) vollständig dargestellt werden können. Die Voraussetzung, daß keine Grenzstellen auftreten, wird sicher erfüllt sein, wenn es eine von Null verschiedene Konstante $c$ gibt, derart, daß in dem die reelle Achse der $x$-Ebene einschließenden Streifen zwischen den Geraden $x=+ic$ und $x=-ic$ keine wesentlich singuläre Stelle des Gebildes liegt.

---

[8] Weierstrass, *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten*, Werke, Bd. IV, S. 16—19; vgl. Study, *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie*, 1. Heft: *Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörende Abbildungen*, Leipzig 1911, S. 38—43, und Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Leipzig 1913, Kap. I, §§ 1—3.

Wenn man die Erklärung des Zweiges zugrunde legt, die in § 3 gegeben wurde, so brauchen die Funktionselemente, die ihn darstellen, nicht analytisch zusammenhängend zu sein. Zum Beispiel sind bei der Kurve vierter Ordnung:

$$(17) \qquad x = 2\cos 2\alpha - \cos\alpha, \quad y = 2\sin 2\alpha + \sin\alpha,$$

dem sogenannten Kleeblatt[9], die geschlossenen Kurven (Fig. 5) *AGCBA*, *CHEDC*, *EIAFE*, *ABCDEFA* Zweige in dem oben erklärten Sinne, ohne daß die zugehörigen Funktionselemente analytisch zusammenhängen. Wohl aber gilt das für die Zweige *AGCDEFA*, *ABCHEFA*, *ABCDEIA*, *AGCDEIABCHEFA*. Dabei besteht zwischen den Zweigen *AGCDEFA*, *ABCHEFA*, *ABCDEIA* einerseits und dem Zweige *AGCDEIABCHEFA* andererseits ein wesentlicher Unterschied. Bei jenem kehrt man nach dem Anfangspunkte *A* mit einem Funktionselement zurück, das von dem Anfangselement in *A* verschieden ist, bei diesem fallen Anfangs- und Endelement zusammen.

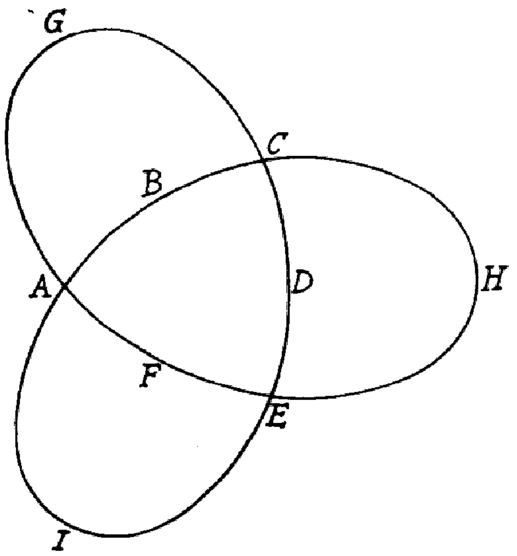

Fig. 5

Die bei dem Kleeblatt zu beobachtenden Unterschiedlichkeiten geben Veranlassung, bei den in sich zurückkehrenden Zweigen analytischer Kurven folgende Benennungen einzuführen. Jeder Zweig dieser Art soll als eine geschlossene analytische Kurve bezeichnet werden. Geschlossene analytische Kurven, bei denen die darstellenden Funktionselemente eine analytisch zusammenhängende Reihe bilden, mögen analytische Schleifen heißen. Ein besonderer Fall der analytischen Schleifen sind die analytischen Runden, bei denen man, die Kurve durchlaufend, nach dem Anfangspunkte *A* mit demselben Funktionselement zurückkehrt, mit dem man von *A* ausgegangen war.

Es möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß geschlossene analytische Kurven, wie das Beispiel des Kleeblatts zeigt, sehr wohl mehrfache Punkte aufweisen können; jedoch

[9] Vgl. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, deutsche Ausgabe von Schütte, Leipzig 1902, S. 155 und Tafel IV, Figur 30.

wird vermöge der Darstellung durch Funktionselemente der Fortgang auf der Kurve stets eindeutig festgelegt.

Die Funktionselemente sind entweder regulär oder irregulär. Für geschlossene analytische Kurven kommen nur solche irreguläre Elemente in Betracht, die das Gebilde in der Umgebung von Verzweigungspunkten darstellen. In einer analytisch zusammenhängenden Reihe von Funktionselementen gibt es nur eine endliche Anzahl verzweigter Elemente. Mithin liegen auf einer analytischen Schleife nur endlich viele Verzweigungspunkte, und dasselbe gilt von einer analytischen Runde. Wenn gar keine Verzweigungspunkte vorhanden sind, so sollen diese Gebilde als regulär bezeichnet werden. Im Allgemeinen sind die Verzweigungspunkte keine mehrfachen Punkte der Kurve; aber auch wenn sie mehrfache Punkte der Kurve sind, wird beim Wandern auf der Kurve der Fortgang vermöge der Funktionselemente stets eindeutig festgelegt.

Für die analytische Bogenlänge einer analytischen Schleife gilt der Lehrsatz, daß die analytische Fortsetzung stets eindeutig bestimmt ist, also auch in den Verzweigungspunkten der Kurve. Alle beim Durchlaufen der Schleife auftretenden Funktionselemente haben nämlich die Form, daß $x-a$ und $y-b$ durch gewöhnliche Potenzreihen von $t$ gegeben werden, die für $t = 0$ verschwinden, mag das Element regulär oder irregulär sein. Folglich ergibt sich auch für $\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$, zunächst abgesehen vom Vorzeichen, eine gewöhnliche Potenzreihe von $t$. Die Bestimmung des Vorzeichens aber erfolgt, nachdem dieses für den Anfangspunkt willkürlich gewählt ist, nach der Stetigkeit, die durch das Übereinandergreifen der aufeinanderfolgenden, analytisch zusammenhängenden Funktionselemente gesichert ist.

Die Potenzreihe für $\sigma'$ beginnt im allgemeinen mit einem von Null verschiedenen, konstanten Gliede, sodaß die analytische Bogenlänge in einer hinreichend kleinen Umgebung des Kurvenpunktes $A$ mit den Koordinaten $a$, $b$ entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt. Nur in den Verzweigungspunkten, bei denen die Potenzreihen für $x-a$ und $y-b$ mit einer höheren Potenz von $t$ als der ersten beginnen, verschwindet $\sigma'$ für $t = 0$, und wenn dies mit Vorzeichenwechsel geschieht, wenn also die Entwicklung von $\sigma'$ nach Potenzen von $t$ mit einer ungeraden Potenz beginnt, kann die analytische Bogenlänge in dem betreffenden Punkte vom Zunehmen zum Abnehmen übergehen oder umgekehrt.

Als Beispiel möge wieder die reguläre Astroide

$$(18) \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

dienen. Anfangspunkt der Zählung für die analytische Bogenlänge sei der Punkt $A$ (Fig. 4, S. 11) mit den Koordinaten $x=0$, $y=+1$. Wenn $x$ von 0 bis 1 wächst und gleichzeitig $y$ von 1 bis 0 abnimmt, so daß man zu dem Kurvenpunkt $B$ mit den Koordinaten $x=1$, $y=0$ gelangt, so ist die analytische Bogenlänge $\sigma$ von 0 auf $\frac{3}{2}$ gegangen. Im Punkte $B$ hat man die Darstellung:

$$(19) \qquad y = t^3, \quad x-1 = -\tfrac{3}{2}t^2 + \ldots.$$

Hieraus ergibt sich

$$(20) \qquad \sigma' = -3t + \ldots.$$

Das Vorzeichen ist richtig gewählt, denn man weiß, daß die analytische Bogenlänge zunimmt, wenn man sich auf dem Zweige $AB$ dem Punkte $B$ mit abnehmendem, positiven $t$ nähert. Beim Überschreiten des Punktes $B$ verschwindet $\sigma'$ mit Zeichenwechsel, folglich geht $\sigma$ vom Zunehmen zum Abnehmen über; in der Tat ist $\sigma = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t^2$. Wenn man auf der Kurve vom Punkte $B$ mit abnehmendem $x$ und abnehmendem $y$ zum Punkte $C$ mit den Koordinaten $x=0$, $y=-1$ wandert, so geht $\sigma$ ebenfalls beständig abnehmend von $\frac{3}{2}$ bis 0. In $C$ erleidet $\sigma'$ abermals einen Vorzeichenwechsel, und bei dem Fortgang auf der Kurve von $C$ zum Punkte $D$ mit den Koordinaten $x=-1$, $y=0$ wächst $\sigma$ von 0 auf $\frac{3}{2}$. Geht man endlich von $D$ nach $A$, so ist $\sigma$ zu dem alten Werte 0 zurückgekehrt.

Für die analytische Bogenlänge analytischer Schleifen erhält man nunmehr folgende Sätze. Ist die Schleife regulär, so herrscht beständig Übereinstimmung zwischen der geometrischen und der analytischen Bogenlänge. Gehören aber zur Schleife Verzweigungspunkte, so kann die Übereinstimmung aufhören, und zwar tritt das ein, sobald man, vom Anfangspunkte $A$ ausgehend, einen Verzweigungspunkt $B$ überschreitet, bei dem die Entwicklung von $\sigma'$ nach Potenzen der zugehörigen Hilfsgröße $t$ mit einer ungeraden Potenz beginnt. Entsprechende Sätze gelten für analytische Runden.

Bei einer analytischen Runde gelangt man auch dann zu einer analytisch zusammenhängenden Reihe von Funktionselementen, wenn man die Kurve mehr als einmal durchläuft, und es hat daher einen Sinn, von den Werten der analytischen Bogenlänge zu sprechen, die sich bei mehrfachen Umläufen um die Runde ergeben. Dieser Umstand ermöglicht es, für die analytischen Runden die Prüfung der Unmöglichkeitsbeweise von NEWTON und EULER genauer durchzuführen.

Bei dem EULERschen Problem ist zu ermitteln, für welche algebraischen Runden die analytische Bogenlänge einer Gleichung der Form

$$\nu(x) = \varphi(s) \tag{21}$$

genügt, wo $\nu$ eine algebraische Funktion der Abszisse $x$ und $\varphi(\sigma)$ eine eindeutige, monotone Funktion der analytischen Bogenlänge $\sigma$ bedeutet. Wie früher für die geometrische, so folgt jetzt für die analytische Bogenlänge, daß zu jedem Kurvenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$ nur eine endliche Anzahl von Werten der analytischen Bogenlänge $\sigma$ gehört, also auch im besonderen zum Anfangspunkte $A$. Jetzt durchlaufe man, von $A$ ausgehend, in wiederholten Umläufen die Runde. Bei der Rückkehr nach $A$ mögen sich der Reihe nach für $\sigma$ die Werte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ ergeben. Da jedoch zum Punkte $A$ nur eine endliche Anzahl von Werten der Größe $\sigma$ gehört, so muß der Anfangswert 0 nach einer endlichen Anzahl von Umläufen wiederkehren, oder die algebraische Runde muß, kurz ausgedrückt, den analytischen Umfang 0 haben[10]. Hieraus folgt im besonderen, daß die Gleichung (21) für reguläre algebraische Runden niemals erfüllt ist, und daß algebraische Runden, für die sie erfüllt ist, notwendig Verzweigungspunkte besitzen müssen.

Ähnliche Schlüsse gelten für das NEWTONsche Problem, falls als Funktion des Ortes die analytische Bogenlänge gewählt wird. Darüber hinaus lassen sich hier über die Anzahl der Umläufe, nach denen die analytische Bogenlänge zum Anfangswerte zurückkehrt, genauere Angaben machen, wenn man die Untersuchungen von HUMBERT und KOENIGSBERGER über algebraisch

[10] Für den besonderen Fall, daß $\varphi(\sigma) = \sigma$ ist, daß es sich also um algebraisch rektifizierbare algebraische Kurven handelt, habe ich diesen Satz schon früher bewiesen, vgl. meine Abhandlungen: *Ein Satz Leonhard Eulers über die Rektifikation algebraischer Kurven*, Annaes da Academia polytechnica do Porto, t. VII, 1912, und *Über die Rektifikation algebraischer Kurven*, Annali di mat., ser. 3, t. 20, 1913, S. 193.

rektifizierbare algebraische und analytische Kurven zu Hilfe nimmt[11].

Bei einer unzerlegbaren algebraischen Kurve $f(x, y) = 0$, wo $f(x, y)$ ein Polynom bezeichne, folgt aus einem grundlegenden Satze von ABEL, daß das ABELsche Integral

$$\sigma(x, y) = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{22}$$

dann und nur dann eine algebraische Funktion von $x$ ist, wenn es sich als rationale Funktion von $x$ und $\sqrt{1 + y'^2}$ darstellen läßt. Mithin wird:

$$\sigma(x, y) = R_1(x, y) + R_2(x, y) \sqrt{1 + y'^2}, \tag{23}$$

wo das Zeichen $R$ ein für allemal rationale Funktionen von $x$ und $y$ bezeichnet. Die Vergleichung der Ausdrücke für die Ableitungen von $\sigma$ nach $x$, die aus (22) und (23) folgen, läßt erkennen, daß $\sigma$ einer Gleichung zweiten Grades genügt:

$$(\sigma - c)^2 = R^2(x, y) \cdot (1 + y'^2), \tag{24}$$

in der $c$ eine von der Wahl des Anfangspunktes $A$ abhängige Konstante bedeutet; vermöge der Gleichung $f(x, y) = 0$ ist $1 + y'^2$ und damit die rechte Seite der Gleichung (24) eine rationale Funktion von $x$ und $y$; mithin ist jedem Kurvenpunkte $P$ nur ein einziger Wert von $(\sigma - c)^2$ und daher nur ein Paar von Werten der analytischen Bogenlänge $\sigma$ zugeordnet.

Nunmehr sei die algebraische Kurve eine Runde. Macht man, von $A$ ausgehend, einen Umlauf, so wird entweder $\sigma$ zum Anfangswerte 0 zurückkehren oder einen von 0 verschiedenen Wert $\sigma_1$ annehmen. Im ersten Fall hat die Runde, einmal durchlaufen, den analytischen Umfang 0. Im zweiten Fall mache man noch einen Umlauf. Dann ergibt sich bei der Rückkehr nach $A$ für $\sigma$ entweder der Wert 0 oder der Wert $\sigma_1$. Ergäbe sich aber der Wert $\sigma_1$, so bliebe $\sigma - \sigma_1$ bei einem einzigen Umlauf ungeändert, die Runde hätte also, einmal durchlaufen, den analytischen Umfang 0. Folglich muß im zweiten Fall der Wert 0 gelten, und die Runde hat, zweimal durchlaufen, den analytischen Umfang 0.

Ähnliche Betrachtungen gelten für algebraisch rektifizierbare analytische Kurven. Nach KOENIGSBERGER besteht auch hier

---

[11] HUMBERT, *Sur les courbes algébriques planes rectificables*, Journ. de math., sér. 4, t. 4, 1888, S. 133; KOENIGSBERGER, *Rektifizierbare Kurven*, Math. Annalen, Bd. 32, 1888, S. 589.

für die analytische Bogenlänge $\sigma(x, y)$ eine Gleichung zweiten Grades, und zwar hat diese die Form:

$$(25) \qquad (\sigma - c)^2 = R(x, y) : (1 + y'^2).$$

Dabei ist $y'$ notwendig eine algebraische Funktion von $x$ und $y$, das heißt, die Kurve genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, die etwa vom Grade $r$ sein möge. Mithin bleiben bei den analytischen Kurven, bei denen $r = 1$, also $y'$ eine rationale Funktion von $x$ und $y$ ist, die vorher bewiesenen Sätze ohne jede Änderung gültig. Ist aber der Grad $r$ größer als 1, so erkennt man leicht, daß die analytische Bogenlänge der betreffenden algebraisch rektifizierbaren analytischen Runde spätestens nach $2r$ Umläufen zum Werte 0 zurückkehrt, sodaß ihr analytischer Umfang, bezogen auf höchstens $2r$ Umläufe, gleich 0 ist.