Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Die begleitenden Grenzkugeln krummer Flächen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1915, 3

Den Kurvennetzen auf krummen Flächen werden die Kugeln zugeordnet, die jeweils durch die vier Eckpunkte einer Masche des Netzes bestimmt sind. Wenn man die Maschen in der Grenze zu Punkten zusammenschrumpfen läßt, so ergeben sich im allgemeinen bestimmte Grenzkugeln, deren Halbmesser wesentlich durch die Natur des Kurvennetzes bestimmt sind. Eine Ausnahme bilden gewisse Netze, aus deren Grenzkugeln sich Eigenschaften der Fläche selbst erschließen lassen, und zwar gelangt man auf diese Art zu den Krümmungslinien und den Hauptkrümmungshalbmessern der klassischen Flächentheorie, die so mit eine neue und zu neuen Fragestellungen führende Begründung erhält.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1915, S. XXIX - XXX)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1915. 3. Abhandlung

Die begleitenden Grenzkugeln krummer Flächen

von

PAUL STÄCKEL
Heidelberg

Eingegangen am 8. Februar 1915

Heidelberg 1915
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1187.

§ 1

Grenzübergänge, die mit den Maschen eines Kurvennetzes auf einer krummen Fläche verknüpft sind

Bei den Untersuchungen über die Krümmung der Flächen hat man zuerst die Eigenschaften der räumlichen Gebilde auf Eigenschaften ebener Gebilde zurückzuführen versucht und zu diesem Zwecke die Krümmung ebener, schiefer und normaler, Schnitte der Fläche betrachtet. Auf dieser Grundlage weiterbauend gelangte man schließlich zu dem Strahlenbündel, das die Normalen der Fläche in der Umgebung eines Punktes bilden, und so ist es gekommen, daß in der klassischen Krümmungslehre die gerade Linie die Rolle des Grundelementes im Raume spielt.

Daß man mit gleichem Recht auch den Punkt oder, in dualistischer Auffassung, die Ebene zugrunde legen kann, scheint bisher nirgends mit voller Deutlichkeit ausgesprochen und in voller Allgemeinheit durchgeführt worden zu sein, vielleicht, weil dieser Weg umständliche Rechnungen erfordert. Wenn man jedoch die analytischen Schwierigkeiten überwindet, so ergeben sich überraschend einfache Sätze; man gelangt zu bemerkenswerten neuen Erklärungen der Krümmungslinien und der Hauptkrümmungshalbmesser und findet Gattungen krummer Flächen, die an Schönheit ihrer Eigenschaften wohl mit den aus der klassischen Krümmungslehre entsprungenen Flächenklassen wetteifern können.

Um die Fragestellung genau festzulegen, mögen einige Bemerkungen allgemeinerer Art vorausgeschickt werden.

Wenn man sich bei der Darstellung einer krummen Fläche mittels GAUSS*scher Koordinaten* u, v auf die Umgebung eines Punktes beschränkt, der in Bezug auf die Fläche und die gewählten Koordinaten regulär ist, so hat die *Doppelschar* der Koordinatenlinien die Eigenschaft, das betrachtete Flächenstück zweifach zu bedecken; durch jeden seiner Punkte geht je eine Kurve der ersten und eine der zweiten Schar.

Wird ein Punkt $P(u, v)$ im Innern des Flächenstückes zum Ausgangspunkt genommen, so bilden die Kurven, auf denen die Gaussschen Koordinaten einerseits die konstanten Werte

$$u,\ u \pm h,\ u \pm 2h,\ u \pm 3h, \cdots, u \pm mh,$$

andererseits die konstanten Werte

$$v,\ v \pm k,\ v \pm 2k,\ v \pm 3k, \cdots, v \pm nk$$

besitzen, ein die Umgebung des Punktes P bedeckendes *Kurvennetz*, vorausgesetzt, daß die von Null verschiedenen Größen h, k und die positiven ganzen Zahlen m, n hinreichend klein gewählt sind, das heißt so klein, daß man in der Umgebung des Punktes P bleibt.

Man kann den Begriff des Kurvennetzes verallgemeinern, indem man monotone Folgen von Werten $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ benutzt, jedoch ist dies für die folgende Untersuchung nicht nötig. Von wesentlicher Bedeutung ist dagegen, daß scharf unterschieden wird zwischen dem Begriff der Doppelschar (u, v), welche die Gesamtheit der Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ umfaßt, und den zu einer solchen Doppelschar gehörenden Kurvennetzen, bei denen aus dem Wertevorrat der Veränderlichen u, v monotone Folgen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ herausgegriffen werden; denn zahlreiche Sätze aus der Lehre von den krummen Flächen lassen sich ohne diese Unterscheidung nicht auf eine befriedigende Form bringen.

Durch ein Kurvennetz wird das Flächenstück in viereckige *Maschen* geteilt, zu deren Grenzkurven Werte von u und v gehören, die sich je um den Betrag h und k unterscheiden. Von den vier im Punkte P zusammenstoßenden Maschen soll die Masche $PP_1P_2P_3$ bevorzugt werden, deren Eckpunkte P, P_1, P_2, P_3 der Reihe nach die Koordinaten

$$u, v;\ u + h, v;\ u, v + k;\ u + h, v + k$$

aufweisen.

Je nach der Wahl der Größen h und k erhält man verschiedene aus der Doppelschar (u, v) entspringende Kurvennetze. In vielen Fällen ist es nützlich, h und k geradezu als veränderliche Größen anzusehen. Zu diesem Zwecke setze man etwa

$$h = h't,\quad k = k't; \tag{1}$$

h' und k' bedeuten von Null verschiedene Konstanten, t ist eine veränderliche Größe, die hinreichend klein bleiben muß. Die auf diese Art entstehenden Kurvennetze werden jeweils durch den Wert des Verhältnisses

$$h' : k' = \lambda \tag{2}$$

gekennzeichnet.

Läßt man im besonderen die Veränderliche t gegen Null gehen, so ergibt sich eine Folge von Netzen, bei denen die Maschen $PP_1P_2P_3$ immer kleiner werden und den Punkt P zur Grenze haben. Bei dem Grenzübergang zum Werte Null von t wird aus der Ebene PP_1P_2 die berührende Ebene der Fläche im Punkte P und aus der Geraden PP_3 eine berührende Gerade, deren Richtung durch den Wert von λ bestimmt wird. Wenn λ alle endlichen, von Null verschiedenen Werte durchläuft, so ergeben sich alle Tangenten der Fläche im Punkte P, abgesehen von den Tangenten an die Koordinatenlinien. Um diese Ausnahme zu beseitigen, empfiehlt es sich nicht selten, auch die Werte Null und Unendlich von λ zuzulassen; man darf jedoch nicht vergessen, daß ihnen keine Maschen eines Kurvennetzes entsprechen.

Der *Grenzübergang* zu dem Werte Null von t ist nur der erste Schritt, der von der *Geometrie der Maschen* zur sogenannten *Differentialgeometrie der krummen Flächen* führt. Der zweite, wichtigere Schritt besteht darin, daß man von dem vorgelegten krummen Gebilde absieht, also an Stelle der Masche das *System der vier Punkte* P, P_1, P_2, P_3 betrachtet. Indem man die geometrischen Gebilde und Größen, die durch ein solches System von vier Punkten bestimmt werden, dem Grenzübergang unterwirft, der von der Masche zum Punkte führt, gewinnt man Grenzgebilde und Grenzwerte, die geeignet sind, das Verhalten der krummen Fläche im Punkte P zu beschreiben.

In der Verkennung des soeben dargelegten Sachverhalts liegt eine Quelle für zahlreiche Mängel, mit denen die Differentialgeometrie der krummen Flächen behaftet ist; solange man noch mit „unendlichkleinen" Kurven- und Flächenelementen arbeitet, wird niemals man aus den Unklarheiten herauskommen.

Bei der Auswahl der zu einem System von vier Punkten gehörigen geometrischen Gebilde und Größen läßt sich eine gewisse Willkür nicht vermeiden. Jedenfalls wird man gut tun, zunächst solche Gebilde und Größen zu untersuchen, die in möglichst einfacher Weise erklärt sind.

Eine solche Größe ist der Rauminhalt des zu einem System von vier Punkten gehörigen Vierflachs. Mit diesem Rauminhalt hat sich bereits A. Voss[1] beschäftigt und ist zu wichtigen Ergebnissen gelangt.

Wird der Rauminhalt des Vierflachs $PP_1P_2P_3$ durch die zweite Potenz der Fläche des Parallelogramms geteilt, das durch die Punkte P, P_1, P_2 bestimmt ist, so hat, wie Voss zeigt, der Quotient im allgemeinen einen bestimmten, von λ unabhängigen Grenzwert, der wesentlich von der Beschaffenheit der gewählten Doppelschar (u, v) abhängt und über das Verhalten der Fläche für den Punkt P keinen unmittelbaren Aufschluß gewährt. Sind jedoch die beiden Scharen der Koordinatenlinien zu einander *konjugiert*, so ist der Grenzwert jenes Quotienten beständig gleich Null. Wenn man aber den Quotienten durch das Quadrat der Länge der Strecke PP_3 teilt, so ergibt sich ein neuer Grenzwert, der nun im allgemeinen von λ abhängt. Je nach der Wahl der konjugierten Doppelschar wird der Wert der so erklärten *Parameterkrümmung der Fläche* für eine Tangente im Punkte P verschieden ausfallen. Es gibt aber ausgezeichnete konjugierte Doppelscharen, bei denen die zu einer Flächentangente gehörige Parameterkrümmung, bis auf einen von den Koordinaten u, v abhängigen Faktor, mit der entsprechenden Normalkrümmung übereinstimmt. Eine besondere Untersuchung erfordern die Flächen des Krümmungsmaßes Null und die Flächen, bei denen eine von zwei gewissen Invarianten verschwindet oder beide gleich Null sind. Von besonderer Bedeutung ist der letzte Fall. Er tritt dann und nur dann ein, wenn bei einer P-Fläche als Doppelschar das System der beiden Scharen der erzeugenden konjugierten konischen Kurven gewählt wird; Kurven auf einer Fläche heißen nach K. Peterson, dem man die Einführung der P-Flächen verdankt, konisch, wenn die zugehörigen Tangentialebenen der Fläche einen Kegelmantel umhüllen[2]. Bei den P-Flächen ist der Rauminhalt der Vierflache, die zu den Maschen irgend eines Netzes der erzeugenden Doppelschar gehören, stets gleich Null, und die vier Eckpunkte jeder solchen Masche liegen in einer Ebene.

[1] A. Voss, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen*, Mathematische Annalen, Bd. 39, 1891, S. 179—256.

[2] K. Peterson, *Über Kurven und Flächen*, Moskau u. Leipzig 1868, S. 17.

Die inhaltsreichen und anregenden Untersuchungen von Voss ermutigen dazu, auch noch andere geometrische Größen zu betrachten, die mit einem System von vier Punkten im Raume verknüpft sind. Um eine Wahl zu treffen, sollen zwei Forderungen gestellt werden, deren Berechtigung wohl nicht erörtert zu werden braucht:

1. Der geometrischen Größe soll eine einfache, anschauliche Bedeutung zukommen.

2. Sie soll sogleich in der Form eines Quotienten erscheinen, sodaß es der mehr oder weniger willkürlichen Hinzufügung von Nennern nicht bedarf.

Beiden Forderungen genügt, wie sich zeigen wird, *der Halbmesser der Kugel, die sich durch vier Punkte im Raume legen läßt;* dabei darf und soll die Ebene als Grenzfall der Kugel angesehen und ihr der Halbmesser Unendlich beigelegt werden.

Zu jeder Masche $PP_1P_2P_3$ des Kurvennetzes gehört bei dieser Fragestellung eine *begleitende Kugel*, die durch deren vier Eckpunkte P, P_1, P_2, P_3 hindurchgeht. Vermöge des Grenzüberganges, der von der Masche zum Eckpunkt P führt, entspringt aus diesen begleitenden Kugeln im Allgemeinen eine einzige *begleitende Grenzkugel*, die dem Punkte P in Bezug auf die betrachtete Doppelschar (u, v) zugeordnet ist. Einer besonderen Untersuchung bedarf dagegen der Fall, daß die Doppelschar von den *Krümmungslinien* der Fläche gebildet wird.

Zum Schluß dieser einleitenden Bemerkungen möge noch hervorgehoben werden, daß die folgenden Betrachtungen sich durchaus im Gebiet der reellen Gebilde und der reellen Größen bewegen; inwieweit sie giltig bleiben oder einer Abänderung bedürfen, falls komplexe Gebilde und komplexe Größen zugelassen werden, soll hier nicht untersucht werden.

§ 2

Die begleitenden Kugeln der Maschen eines Kurvennetzes

Einfache geometrische Überlegungen zeigen, daß die Aufgabe, durch vier getrennte Punkte des Raumes eine Kugel zu legen, im allgemeinen eine, aber auch nur eine Lösung hat. Eine Ausnahme kann nur eintreten, wenn die vier Punkte in einer Ebene liegen. Dann ist zu unterscheiden, ob durch sie ein Kreis oder eine Gerade geht oder ob keines von beiden gilt. Im letzten Fall tritt an die Stelle der Kugel die betreffende Ebene, und die Aufgabe hat wiederum eine, aber auch nur eine Lösung, sobald das Kontinuum der Kugeln durch Hinzunahme der Ebenen abgeschlossen wird. Liegen die vier Punkte in einem Kreise oder sind sie, kurz gesagt, *kreisig*, so gehen durch sie unzählig viele Kugeln, nämlich alle Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Senkrechten liegen, die im Mittelpunkt des Kreises auf dessen Ebene errichtet ist, diese Ebene eingeschlossen. Gehören endlich die vier getrennten Punkte einer Geraden an, so erhält man als Lösungen die Ebenen des Büschels, das die Gerade zur Achse hat.

Wenn es sich um die vier Eckpunkte einer Masche $PP_1P_2P_3$ eines Kurvennetzes handelt, so ist es ausgeschlossen, daß diese in einer Geraden liegen. Man hat daher nur zwei Möglichkeiten. Entweder geht durch die Punkte P, P_1, P_2, P_3 eine einzige Kugel (oder Ebene) oder die Punkte sind kreisig, und dann gibt es unzählig viele Kugeln der verlangten Art.

Um zum analytischen Ansatz zu gelangen, seien x, y, z die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten des Punktes P, ebenso x_i, y_i, z_i die Koordinaten der Punkte P_i $(i=1, 2, 3)$. Man setze:

$$x_i = x + \xi_i, \quad y_i = y + \eta_i, \quad z_i = z + \zeta_i, \tag{3}$$

sodaß die Punkte P_i, bezogen auf das durch Parallelverschiebung hervorgehende System der ξ, η, ζ mit dem Anfangspunkt P, die Koordinaten ξ_i, η_i, ζ_i haben.

Soll die Kugel (oder Ebene)

$$D(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - D_1\xi - D_2\eta - D_3\zeta = 0, \tag{4}$$

die durch den Punkt P hindurchgeht, auch durch die Punkte P_1, P_2, P_3 gehen, so müssen die Koeffizienten D, D_1, D_2, D_3 den Gleichungen genügen:

$$D(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - D_1\xi_i - D_2\eta_i - D_3\zeta_i = 0. \tag{5}$$

Hieraus folgt, wenn noch zur Abkürzung

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 = \rho_i^2 \tag{6}$$

gesetzt wird:

$$D = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

und

$$(8)\qquad D_1 = \begin{vmatrix} \rho_1^2 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \rho_2^2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \rho_3^2 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \rho_1^2 & \zeta_1 & \xi_1 \\ \rho_2^2 & \zeta_2 & \xi_2 \\ \rho_3^2 & \zeta_3 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \rho_1^2 & \xi_1 & \eta_1 \\ \rho_2^2 & \xi_2 & \eta_2 \\ \rho_3^2 & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Wenn die Determinante D von Null verschieden ist, so hat die Aufgabe, durch die Punkte P, P_1, P_2, P_3 eine Kugel zu legen, eine und nur eine Lösung. Der Mittelpunkt der Kugel hat in dem System der ξ, η, ζ die Koordinaten

$$(9)\qquad \xi_0 = \tfrac{1}{2}\frac{D_1}{D}, \quad \eta_0 = \tfrac{1}{2}\frac{D_2}{D}, \quad \zeta_0 = \tfrac{1}{2}\frac{D_3}{D},$$

und ihr Halbmesser R wird durch die Gleichung gegeben:

$$(10)\qquad R^2 = \tfrac{1}{4}\,\frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}{D^2}.$$

Die Gleichung $D = 0$ besagt, daß die vier Punkte P, P_1, P_2, P_3 in einer Ebene liegen[1]; in der Tat bedeutet die Determinante D den mit einem Vorzeichen versehenen sechsfachen Rauminhalt des aus ihnen gebildeten Vierflachs. Durch die Gleichung (5) wird, wenn D verschwindet, eine Ebene dargestellt, die durch die vier Punkte geht und an die Stelle der Kugel tritt, ausgenommen den Fall, daß nicht nur D verschwindet, sondern zugleich auch die drei Determinanten D_1, D_2, D_3 gleich Null sind. Mithin bedeutet das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$(11)\qquad D=0, \quad D_1=0, \quad D_2=0, \quad D_3=0,$$

daß die betrachtete Masche kreisig ist.

Daß man als Bedingung für eine kreisige Masche neben der Gleichung $D=0$ die *drei* Gleichungen $D_i=0$ gefunden hat, muß

[1] Die Aussage, daß vier Punkte in einer Ebene liegen, ist in dieser Abhandlung stets im strengen Sinne des Wortes zu verstehen. Es ist ein Mißbrauch des Wortes *eben*, wenn z. B. Peterson in dem erwähnten Buche (S. 18) sagt, bei einem konjugierten Netze seien „die kleinen Vierecke, welche von je zwei benachbarten Kurven des einen und zwei benachbarten Kurven des anderen Systems gebildet werden, eben“. In Wirklichkeit ist gemeint, daß der Abstand eines der vier Eckpunkte der betreffenden Masche von der durch die drei anderen bestimmten Ebene als eine Größe zweiter Ordnung anzusehen ist, wenn die Abstände der Eckpunkte von einander als Größen erster Ordnung angesehen werden.

überraschen; denn wenn vier Punkte in einer Ebene liegen, was $D=0$ aussagt, so kann die weitere Forderung, daß sie in einem Kreise liegen sollen, nur eine Bedingungsgleichung nach sich ziehen. In der Tat zeigt die genauere Untersuchung, daß jene drei Gleichungen immer durch eine einzige ersetzt werden können. Da indessen bei einer solchen Zurückführung die Unterscheidung verschiedener Fälle nicht zu umgehen ist, so tut man bei den folgenden Betrachtungen besser, die drei Gleichungen $D_i=0$ beizubehalten.

§ 3

Entwicklung der Determinante D

Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

bedeutet, wie schon bemerkt wurde, den mit einem Vorzeichen behaftete sechsfache Rauminhalt des Vierflachs $PP_1P_2P_3$. Die Durchführung des Grenzüberganges, der von dem System der Masche $PP_1P_2P_3$ zum Punkte P führt, erfordert, daß D nach positiven, steigenden Potenzen der Größen h und k entwickelt wird. Die hierfür nötigen Formeln lassen sich zwar der in § 1 angeführten Abhandlung von Voss entnehmen, es schien aber angebracht, eine der vorliegenden Untersuchung angepaßte, einfache und unmittelbare Herleitung zu geben.

Wie es vielfach geschieht, mögen die partiellen Differentiationen nach u und v durch die Zeiger u und v bezeichnet werden. Dann ist zunächst:

$$(12)\quad \begin{cases} \xi_1 = x_u h + \frac{1}{2} x_{uu} h^2 + \frac{1}{6} x_{uuu} h^3 + \frac{1}{24} x_{uuuu} h^4 + \cdots, \\ \xi_2 = x_v k + \frac{1}{2} x_{vv} k^2 + \frac{1}{6} x_{vvv} k^3 + \frac{1}{24} x_{vvvv} k^4 + \cdots, \\ \xi_3 = x_u h + x_v k + \frac{1}{2} x_{uu} h^2 + x_{uv} hk + \frac{1}{2} x_{vv} k^2 + \frac{1}{6} x_{uuu} h^3 + \frac{1}{2} x_{uuv} h^2 k \\ \qquad + \frac{1}{2} x_{uvv} hk^2 + \frac{1}{6} x_{vvv} k^3 + \frac{1}{24} x_{uuuu} h^4 + \frac{1}{6} x_{uuuv} h^3 k + \frac{1}{4} x_{uuvv} h^2 k^2 \\ \qquad + \frac{1}{6} x_{uvvv} hk^3 + \frac{1}{24} x_{vvvv} k^4 + \cdots, \end{cases}$$

und entsprechende Gleichungen gelten für die η_i und ζ_i.

Um die Determinante D zu vereinfachen, werde von der dritten Zeile die erste und die zweite Zeile abgezogen; ferner ziehe man aus der ersten Zeile den Faktor h heraus, aus der zweiten den Faktor k, aus der umgeformten dritten Zeile den Faktor hk. Dann wird D gleich dem Produkt von h^2k^2 mit einer Determinante D', deren erste Spalte aus den drei Elementen besteht:

$$x_u + \frac{1}{2} x_{uu} h + \frac{1}{6} x_{uuu} h^2 + \frac{1}{24} x_{uuuu} h^3 + \cdots,$$
$$x_v + \frac{1}{2} x_{vv} k + \frac{1}{6} x_{vvv} k^2 + \frac{1}{24} x_{vvvv} k^3 + \cdots,$$
$$x_{uv} + \frac{1}{2} x_{uuv} h + \frac{1}{2} x_{uvv} k + \frac{1}{6} x_{uuuv} h^2 + \frac{1}{4} x_{uuvv} hk + \frac{1}{6} x_{uvvv} k^2 + \cdots;$$

die beiden anderen Spalten ergeben sich aus der ersten durch Vertauschung von x mit y und mit z.

Um die Glieder niedrigster Ordnung von D zu erhalten, braucht man nur in der Determinante D' $h = 0$ und $k = 0$ zu setzen. Wenn, wie es üblich ist, die Fundamentalgrößen erster Ordnung mit E, F, G, die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung mit L, M, N bezeichnet werden, findet man

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} = M \sqrt{EG - F^2}.$$

Mithin beginnt die Entwicklung der Determinante D nach Potenzen von h und k mit dem Gliede

$$(13) \qquad M \sqrt{EG - F^2} \cdot h^2 k^2,$$

ausgenommen den Fall, daß $M = 0$ ist.

Das Verschwinden von M kann als Bedingung für u und v aufgefaßt werden; man erhält dann singuläre Punkte der Fläche in Bezug auf die betrachtete Doppelschar (u, v). Die Gleichung $M = 0$ kann aber auch als eine Forderung für die Doppelschar (u, v) aufgefaßt werden; dann muß sie identisch in u und v bestehen und sagt aus, daß die Kurven der beiden Scharen zu einander *konjugiert* sind.

Für die *konjugierten Doppelscharen* muß die Entwicklung von D weiter getrieben werden. Die Rechnungen werden erleichtert, wenn man beachtet, daß in diesem Falle die Koordinaten

x, y, z als Funktionen von u und v der partiellen Differentialgleichung

$$(14) \qquad \Theta_{uv} = A\Theta_u + B\Theta_v$$

genügen; die Koeffizienten A und B lassen sich in einfacher Weise durch die Fundamentalgrößen erster Ordnung und deren partielle Ableitungen ausdrücken, jedoch ist es vorläufig noch nicht nötig, diese Audrücke zu benutzen.

Die Gleichung (14) gibt dazu Anlaß, in der Determinante D' von der dritten Zeile die mit A multiplizierte erste und die mit B multiplizierte zweite Zeile abzuziehen. Man findet als Elemente der neuen ersten Spalte:

$$\begin{aligned} & x_u + \tfrac{1}{2} x_{uu} h + \tfrac{1}{6} x_{uuu} h^2 + \cdots, \\ & x_v + \tfrac{1}{2} x_{vv} k + \tfrac{1}{6} x_{vvv} k^2 + \cdots, \\ & \tfrac{1}{2} \alpha h + \tfrac{1}{2} \beta k + \tfrac{1}{6} \gamma h^2 + \tfrac{1}{4} \delta h k + \tfrac{1}{6} \varepsilon k^2 + \cdots; \end{aligned}$$

dabei ist

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha = x_{uuv} - A x_{uu}, \quad \beta = x_{uvv} - B x_{vv}, \\ & \gamma = x_{uuuv} - A x_{uuu}, \quad \delta = x_{uuvv}, \quad \varepsilon = x_{uvvv} - B x_{vvv}. \end{aligned} \right.$$

Nun lassen sich aber die Ableitungen

$$x_{uuv}, \quad x_{uvv}, \quad x_{uuuv}, \quad x_{uuvv}, \quad x_{uvvv}$$

vermöge der Gleichung (14) und der durch partielle Differentiation daraus folgenden Gleichungen durch die Ableitungen erster und zweiter Ordnung

$$x_u, \quad x_v, \quad x_{uu}, \quad x_{vv}$$

ausdrücken, und zwar als lineare homogene Funktionen dieser Größen. Die Koeffizienten sind in den folgenden Formeln nur insoweit ausgerechnet worden, als sie für die späteren Rechnungen nötig sind; ein Teil von ihnen hebt sich nämlich weg. Man erhält:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha = (A_u + AB) x_u + (B_u + B^2) x_v, \\ & \beta = (A_v + A^2) x_u + (B_v + BA) x_v, \\ & \gamma = \gamma_1 x_u + \gamma_2 x_v + (2A_u + AB) x_{uu}, \\ & \delta = \delta_1 x_u + \delta_2 x_v + (A_v + A^2) x_{uu} + (B_u + B^2) x_{vv}, \\ & \varepsilon = \varepsilon_1 x_u + \varepsilon_2 x_v + (2B_v + BA) x_{vv}. \end{aligned} \right.$$

Die Formeln für α und β zeigen, daß es vorteilhaft ist, von der dritten Zeile der Determinante D' die mit

$$\tfrac{1}{2}\left(A_u + AB\right) h + \tfrac{1}{2}\left(A_v + A^2\right) k$$

multiplizierte erste Zeile und die mit

$$\tfrac{1}{2}\left(B_u + B^2\right) h + \tfrac{1}{2}\left(B_v + BA\right) k$$

multiplizierte zweite Zeile abzuziehen, denn auf diese Art kommen in der dritten Zeile die linearen Glieder $\frac{1}{2}\alpha h + \frac{1}{2}\beta k$ in Wegfall, und es bleiben nur noch Glieder zweiter und höherer Ordnung übrig. Hieraus folgt, daß unter der Annahme $M=0$ die Entwicklung von D erst mit Gliedern *sechster* Ordnung beginnt.

In der umgeformten Determinante D' hat das dritte Element der ersten Spalte die Gestalt:

$$\tfrac{1}{6}\gamma' h^2 + \tfrac{1}{4}\delta' hk + \tfrac{1}{6}\varepsilon' k^2 + \cdots,$$

und zwar ist:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma' &= \gamma - \tfrac{1}{2}\left(A_u + AB\right) x_{uu} = \gamma_1 x_u + \gamma_2 x_v + \tfrac{1}{2}\left(A_u - AB\right) x_{uu},\\ \delta' &= \delta - \tfrac{1}{2}\left(A_v + A^2\right) x_{uu} - \tfrac{1}{2}\left(B_u + B^2\right) x_{vv} = \delta_1 x_u + \delta_2 x_v,\\ \varepsilon' &= \varepsilon - \tfrac{1}{2}\left(B_v + BA\right) x_{vv} = \varepsilon_1 x_u + \varepsilon_2 x_v + \tfrac{1}{2}\left(B_v - BA\right) x_{vv}. \end{aligned}\right.$$

Die Glieder sechster Ordnung von D entstehen, wenn man $h^2 k^2$ mit der Determinante multipliziert, deren erste Spalte von den Elementen

$$x_u,\ x_v,\ \tfrac{1}{6}\gamma' h^2 + \tfrac{1}{4}\delta' hk + \tfrac{1}{6}\varepsilon' k^2$$

gebildet wird, während die beiden anderen Spalten daraus durch Vertauschung von x mit y und mit z hervorgehen. Demnach sind die Koeffizienten von h^4k^2, h^3k^3, h^2k^4, die allein in Betracht kommen, gleich den Determinanten, deren erste Spalte der Reihe nach von den Elementen

$$x_u,\ x_v,\ \tfrac{1}{6}\gamma'; \qquad x_u,\ x_v,\ \tfrac{1}{4}\delta'; \qquad x_u,\ x_v,\ \tfrac{1}{6}\varepsilon'$$

gebildet wird. Indem man in ihnen von der dritten Zeile geeignete Vielfache der ersten und zweiten abzieht, gelingt es, die mit x_u und x_v behafteten Glieder zu entfernen und zu bewirken, daß die dritten Elemente ihrer ersten Spalte der Reihe nach gleich

$$\tfrac{1}{2}\left(A_u - AB\right) x_{uu},\ 0,\ \tfrac{1}{2}\left(B_v - BA\right) x_{vv}$$

werden. Nunmehr ergibt sich für die Glieder sechster Ordnung von D der einfache Ausdruck:

$$(18)\quad \tfrac{1}{12}(A_u - AB)\,L\sqrt{EG-F^2}\cdot h^4k^2 + \tfrac{1}{12}(B_v - BA)\,N\sqrt{EG-F^2}\cdot h^2k^4.$$

Die darin auftretenden Verbindungen

$$(19)\qquad A_u - AB = \sigma,\quad B_v - BA = \tau$$

sind die aus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung $\Theta_{uv} = A\Theta_u + B\Theta_v$ wohlbekannten *Invarianten.*

§ 4

Die begleitenden Kugeln bei erzeugenden Netzen der P-Flächen

Bei einem konjugierten Netze beginnt die Entwicklung der Determinante D im allgemeinen mit dem Gliede sechster Ordnung

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{EG-F^2}\left(\sigma L h^4k^2 + \tau N h^2k^4\right),$$

in besonderen Fällen kann aber auch dieses Glied verschwinden. Man wird hierbei verschiedene Arten der Fragestellung zu unterscheiden haben.

Betrachtet man *erstens* einen bestimmten Punkt P der Fläche, so kommen die zu ihm gehörigen Tangenten der Fläche in Frage. Setzt man also

$$h = h't,\quad k = k't,$$

so beginnt, wenn das Verhältnis $\lambda = h' : k'$ aus der Gleichung

$$(20)\qquad \sigma L\lambda^2 + \tau N = 0$$

bestimmt wird, die Entwicklung von D nach Potenzen von t erst mit einem Gliede siebenter oder höherer Ordnung; es gibt, sobald das Produkt $\sigma\tau LN$ negativ ist, zwei ausgezeichnete Richtungen dieser Art. Für ein Flächenstück, bei dem $\sigma\tau LN$ überall negativ ist, ergibt sich vermöge der ausgezeichneten Richtungen eine Doppelschar; ist im Besonderen $\sigma=\tau$, so besteht es aus den *asymptotischen Linien* der Fläche[1].

[1] Wie Voss (a. a. O. S. 207) gezeigt hat, gibt es auf jeder Fläche konjugierte Doppelscharen, bei denen $\sigma=\tau$ ist; für einige Flächengattungen hat Voss deren Bestimmung durchgeführt.

Die Gleichung (20) versagt, wenn gleichzeitig

$$\sigma L = 0\,, \quad \tau N = 0 \tag{21}$$

ist. Man kann daher *zweitens* nach den singulären Punkten einer Fläche fragen, bei denen das Glied sechster Ordnung für jeden Wert von λ wegfällt, und hieran schließt sich *drittens* die Frage nach den besonderen Flächen, bei denen für jeden Punkt die Entwicklung von D frühestens mit einem Gliede siebenter Ordnung beginnt. Wenn aber die Gleichungen (21) identisch in u und v bestehen sollen, so muß entweder eine der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L und N verschwinden oder, wenn das nicht der Fall ist, gleichzeitig

$$\sigma = 0\,, \quad \tau = 0 \tag{22}$$

sein. Die erste Möglichkeit führt wegen der Gleichung $M=0$ zu den Flächen vom Krümmungsmaß Null, auf die hier nicht eingegangen werden soll, die zweite leitet, wie Voss gezeigt hat[1], zu den PETERSONschen P-Flächen mit der Darstellung:

$$x = \frac{\varphi_1(u) + \psi_1(v)}{\varphi(u) + \psi(v)}\,, \quad y = \frac{\varphi_2(u) + \psi_2(v)}{\varphi(u) + \psi(v)}\,, \quad z = \frac{\varphi_3(u) + \psi_3(v)}{\varphi(u) + \psi(v)}\,. \tag{23}$$

Die Kurven $u=\text{const.}$ und $v=\text{const.}$ bilden eine konjugierte Doppelschar, die aus *konischen Kurven* besteht, und umgekehrt lassen sich, nach PETERSON, die P-Flächen durch die Eigenschaft kennzeichnen, daß sie eine aus konischen Kurven bestehende konjugierte Doppelschar besitzen.

Der Beweis für den Satz von Voss läßt sich so führen. Aus den Gleichungen

$$A_u - AB = 0\,, \qquad B_v - BA = 0 \tag{22'}$$

folgt zunächst, daß $A_u = B_v$ ist, mithin gibt es eine Funktion $C(u,v)$, sodaß $A = C_v$, $B = C_u$ wird. Zur Bestimmung von C hat man die partielle Differentialgleichung

$$C_{uv} = C_u C_v\,,$$

deren allgemeine Lösung

$$C = -\ln\bigl(\varphi(u) + \psi(v)\bigr)$$

[1] A. Voss, a. a. O. S. 204.

ist. Demnach wird

$$A = -\frac{\psi'(v)}{\varphi(u) + \psi(v)}, \quad B = -\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) + \psi(v)},$$

und die partielle Differentialgleichung (14), der x, y, z genügen, nimmt die Gestalt an:

$$\big(\varphi(u) + \psi(v)\big)\Theta_{uv} + \psi'(v)\Theta_u + \varphi'(u)\Theta_v = 0.$$

Folglich gibt es eine Funktion $\Gamma(u,v)$, sodaß

$$\varphi(u)\Theta_v = \Gamma_v,$$
$$\psi(v)\Theta_u = \Gamma_u$$

wird. Durch Integration erhält man:

$$\varphi(u)\Theta = +\Gamma + \varphi_1(u),$$
$$\psi(v)\Theta = -\Gamma + \psi_1(v),$$

woraus durch Addition

$$\Theta = \frac{\varphi_1(u) + \psi_1(v)}{\varphi(u) + \psi(v)}$$

hervorgeht.

Wie Voss bemerkt hat[1], besitzen die P-Flächen die merkwürdige Eigenschaft, daß in der Entwicklung der Determinante D nach Potenzen von h und k nicht nur die Glieder sechster Ordnung, sondern überhaupt alle Glieder wegfallen, das heißt, daß die Gleichung $D=0$ identisch in u, v, h, k erfüllt ist. Betrachtet man also bei einer Fläche mit der Darstellung (23) irgend eine Masche irgend eines Netzes, das von Kurven $u=$const. und $v=$const. gebildet wird, so liegen die vier Eckpunkte der Masche stets in einer Ebene[2]. Hieraus folgt, daß eine solche Masche im allgemeinen diese Ebene zur begleitenden Kugel hat. Ausgenommen ist nur der Fall, daß die Masche kreisig ist; dann ist jede Kugel, die die Fläche im Punkte P berührt, begleitende Kugel.

[1] A. Voss, a. a. O. S. 206.

[2] Es gibt Flächen, die mehr als eine Darstellung der Form (23) gestatten, die sich also in mehrfacher Weise als P-Flächen auffassen lassen. Ihre Bestimmung ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe von Sophus Lie, die Flächen zu ermitteln, die auf mehr als zwei Arten durch Schiebungen erzeugt werden.

Zum Beweise hat man zu zeigen, daß die Determinate identisch verschwindet, deren erste Spalte aus den Elementen besteht:

$$\frac{\varphi_1(u+h)+\psi_1(v)}{\varphi(u+h)+\psi(v)}-\frac{\varphi_1(u)+\psi_1(v)}{\varphi(u)+\psi(v)},$$

$$\frac{\varphi_1(u)+\psi_1(v+k)}{\varphi(u)+\psi(v+k)}-\frac{\varphi_1(u)+\psi_1(v)}{\varphi(u)+\psi(v)},$$

$$\frac{\varphi_1(u+h)+\psi_1(v+k)}{\varphi(u+h)+\psi(v+k)}-\frac{\varphi_1(u)+\psi_1(v)}{\varphi(u)+\psi(v)},$$

während die zweite und dritte Spalte aus der ersten hervorgeht, indem der Zeiger 1 durch den Zeiger 2 und den Zeiger 3 ersetzt wird. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich, wenn jede der drei Zeilen mit dem Produkt der darin auftretenden beiden Nenner multipliziert und in der umgeformten Determinante die erste und die zweite Zeile von der dritten abgezogen wird; die neue dritte Zeile enthält dann die Elemente 0, 0, 0.

§ 5

Entwicklung der Größen ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2

Um die Determinanten D_1, D_2, D_3 nach Potenzen von h und k zu entwickeln, hat man zunächst die entsprechenden Entwicklungen der Größen ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2 herzustellen, die durch die Gleichungen (6) erklärt sind.

Bei den Rechnungen erhält man Summen von drei Gliedern der Art, daß das zweite und das dritte Glied aus dem ersten durch Vertauschung von x mit y und mit z hervorgeht. Summen dieser Art sollen abkürzend bezeichnet werden, indem hinter das Zeichen **S** das erste Glied gesetzt wird.

Beispiele solcher Summen sind die Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$E=\mathbf{S}\,x_u^2,\quad F=\mathbf{S}\,x_u x_v,\quad G=\mathbf{S}\,x_v^2\,. \tag{24}$$

Aus den Gleichungen (24) entspringen ferner durch partielle Differentiation nach u und v sechs Gleichungen, mit deren Hilfe man die Werte der folgenden sechs Summen berechnen kann:

$$(25)\quad \begin{cases} \mathsf{S}\, x_u x_{uu} = \frac{1}{2} E_u\,, & \mathsf{S}\, x_v x_{uu} = F_u - \frac{1}{2} E_v\,, \\ \mathsf{S}\, x_u x_{uv} = \frac{1}{2} E_v\,, & \mathsf{S}\, x_v x_{uv} = \frac{1}{2} G_u\,, \\ \mathsf{S}\, x_u x_{vv} = F_v - \frac{1}{2} G_u\,, & \mathsf{S}\, x_v x_{vv} = \frac{1}{2} G_v\,. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen findet man aus den Gleichungen (12):

$$(26)\begin{cases} \rho_1^2 = Eh^2 + \frac{1}{2} E_u h^3 + \cdots\,, \\ \rho_2^2 = Gk^2 + \frac{1}{2} G_v k^3 + \cdots\,, \\ \rho_3^2 = Eh^2 + 2Fhk + Gk^2 \\ \qquad + \frac{1}{2} E_u h^3 + \left(\frac{1}{2} E_v + F_u\right) h^2 k + \left(\frac{1}{2} G_u + F_v\right) hk^2 + \frac{1}{2} G_v k^3 + \cdots\,. \end{cases}$$

Während es genügt, die Größen ρ_1^2 und ρ_2^2 bis zu den Gliedern dritter Ordnung zu kennen, wird bei der Größe ρ_3^2 auch die Kenntnis der Glieder vierter Ordnung oder wenigstens der Koeffizienten von h^3k, h^2k^2, hk^3 notwendig.

Wie die Gleichungen (12) zeigen, sind die Glieder vierter Ordnung von ρ_3^2:

$$\begin{aligned} &\mathsf{S} \Big\{ \left(\tfrac{1}{2} x_{uu} h^2 + x_{uv} hk + \tfrac{1}{2} x_{vv} k^2\right)^2 \\ &\qquad + (x_u h + x_v k)\left(\tfrac{1}{3} x_{uuu} h^3 + x_{uuv} h^2 k + x_{uvv} hk^2 + \tfrac{1}{3} x_{vvv} k^3\right) \Big\} \\ &= \mathsf{S}\left(\tfrac{1}{4} x_{uu}^2 + \tfrac{1}{3} x_u x_{uuu}\right) \cdot h^4 + \mathsf{S}\left(x_{uu} x_{uv} + x_u x_{uuv} + \tfrac{1}{3} x_v x_{uuu}\right) \cdot h^3 k \\ &\qquad + \mathsf{S}\left(x_{uv}^2 + \tfrac{1}{2} x_{uu} x_{vv} + x_u x_{uvv} + x_v x_{uuv}\right) \cdot h^2 k^2 \\ &+ \mathsf{S}\left(x_{uv} x_{vv} + x_v x_{uvv} + \tfrac{1}{3} x_u x_{vvv}\right) \cdot hk^3 + \mathsf{S}\left(\tfrac{1}{4} x_{vv}^2 + \tfrac{1}{3} x_v x_{vvv}\right) \cdot k^4\,. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von h^3k, h^2k^2, h^3k mögen der Reihe nach mit

$$\tfrac{1}{3} a,\quad \tfrac{1}{2} b,\quad \tfrac{1}{3} c$$

bezeichnet werden. Mittels der Gleichungen

$$(27)\quad \begin{cases} F_{uu} = \mathsf{S}\left(x_u x_{uuv} + 2\, x_{uu} x_{uv} + x_v x_{uuu}\right), \\ F_{uv} = \mathsf{S}\left(x_{uv}^2 + x_{uu} x_{vv} + x_u x_{uvv} + x_v x_{uuv}\right), \\ F_{vv} = \mathsf{S}\left(x_u x_{vvv} + 2\, x_{uv} x_{vv} + x_v x_{uvv}\right) \end{cases}$$

lassen sich aus a, b, c die Summen

$$\mathsf{S}\, x_v x_{uuu}\,,\quad \mathsf{S}\, x_{uu} x_{vv}\,,\quad \mathsf{S}\, x_u x_{vvv}$$

herausschaffen, und es ergeben sich die Formeln

$$
(28)\begin{cases}
a = F_{uu} + \mathsf{S}\left(x_{uu}x_{uv} + 2\,x_u x_{uuv}\right), \\
b = F_{uv} + \mathsf{S}\left(x_{uv}^2 + x_u x_{uvv} + x_v x_{uuv}\right), \\
c = F_{vv} + \mathsf{S}\left(x_{uv}x_{vv} + 2\,x_v x_{uvv}\right).
\end{cases}
$$

Damit der Gang der späteren Rechnungen nicht unterbrochen wird, sollen noch die Ausdrücke für a, b, c ermittelt werden, die sich ergeben, wenn die Doppelschar konjugiert ist, wenn also x, y, z der partiellen Differentialgleichung:

$$
(29) \qquad \Theta_{uv} = A\Theta_u + B\Theta_v
$$

genügen. Dann wird nach einer früheren Bemerkung:

$$
(30)\begin{cases}
\Theta_{uuv} = \left(A_u + AB\right)\Theta_u + \left(B_u + B^2\right)\Theta_v + A\Theta_{uu}, \\
\Theta_{uvv} = \left(A_v + A^2\right)\Theta_u + \left(B_v + BA\right)\Theta_v + B\Theta_{vv}.
\end{cases}
$$

Vermöge der Gleichung (29) wird:

$$
(31)\begin{cases}
\mathsf{S}\,x_{uu}x_{uv} = A\,\mathsf{S}x_u x_{uu} + B\,\mathsf{S}x_v x_{uu} = \tfrac{1}{2}AE_u + B\left(F_u - \tfrac{1}{2}E_v\right), \\
\mathsf{S}\,x_{uv}^2 \quad = A^2\,\mathsf{S}\,x_u^2 + 2AB\,\mathsf{S}x_u x_v + B^2\,\mathsf{S}x_v^2 = A^2E + 2ABF + B^2G, \\
\mathsf{S}\,x_{uv}x_{vv} = A\,\mathsf{S}x_u x_{vv} + B\,\mathsf{S}x_v x_{vv} = A\left(F_v - \tfrac{1}{2}G_u\right) + \tfrac{1}{2}BG_v.
\end{cases}
$$

Ferner wird vermöge der Gleichungen (30):

$$
(32)\begin{cases}
\mathsf{S}\,x_u x_{uuv} = \left(A_u + AB\right)\mathsf{S}x_u^2 + \left(B_u + B^2\right)\mathsf{S}x_u x_v + A\,\mathsf{S}x_u x_{uu} \\
\qquad = \left(A_u + AB\right)E + \left(B_u + B^2\right)F + \tfrac{1}{2}AE_u, \\
\mathsf{S}\,x_u x_{uvv} = \left(A_v + A^2\right)\mathsf{S}x_u^2 + \left(B_v + BA\right)\mathsf{S}x_u x_v + B\,\mathsf{S}x_u x_{vv} \\
\qquad = \left(A_v + A^2\right)E + \left(B_v + BA\right)F + B\left(F_v - \tfrac{1}{2}G_u\right), \\
\mathsf{S}\,x_v x_{uuv} = \left(A_u + AB\right)\mathsf{S}x_u x_v + \left(B_u + B^2\right)\mathsf{S}x_v^2 + A\,\mathsf{S}x_v x_{uu} \\
\qquad = \left(A_u + AB\right)F + \left(B_u + B^2\right)G + A\left(F_u - \tfrac{1}{2}E_v\right), \\
\mathsf{S}\,x_v x_{uvv} = \left(A_v + A^2\right)\mathsf{S}x_u x_v + \left(B_v + BA\right)\mathsf{S}x_v^2 + B\,\mathsf{S}x_v x_{vv} \\
\qquad = \left(A_v + A^2\right)F + \left(B_v + BA\right)G + \tfrac{1}{2}BG_v.
\end{cases}
$$

Bei Benutzung der Gleichungen (31) und (32) wird endlich:

$$
(33)\begin{cases}
a = F_{uu} + 2\left(A_u + AB\right)E + 2\left(B_u + B^2\right)F + \tfrac{3}{2}AE_u + B\left(F_u - \tfrac{1}{2}E_v\right), \\
b = F_{uv} + \left(A_v + 2A^2\right)E + \left(A_u + B_v + 4AB\right)F + \left(B_u + 2B^2\right)G \\
\qquad\qquad + A\left(F_u - \tfrac{1}{2}E_v\right) + B\left(F_v - \tfrac{1}{2}G_u\right), \\
c = F_{vv} + 2\left(A_v + A^2\right)F + 2\left(B_v + BA\right)G + A\left(F_v - \tfrac{1}{2}G_u\right) + \tfrac{3}{2}BG_v.
\end{cases}
$$

Mittels der Gleichungen (33) werden die Koeffizienten **a, b, c** durch die Größen $A, B; E, F, G$ und deren partielle Ableitungen dargestellt. Um Ausdrücke zu erhalten, in denen nur die Fundamentalgrößen erster Ordnung und deren partielle Ableitungen vorkommen, müßte man die Formeln heranziehen:

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{GE_v - FG_u}{EG - F^2}\,, \quad B = \frac{1}{2}\,\frac{EG_u - FE_v}{EG - F^2}\;; \tag{34}$$

für die vorliegenden Zwecke ist es jedoch nicht nötig, die Einsetzung vorzunehmen.

§ 6

Entwicklung der Determinanten D_1, D_2, D_3

Es genügt, die Determinante D_1 nach Potenzen von h und k zu entwickeln, weil die Ausdrücke für D_2 und D_3 daraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervorgehen.

Der Gang der Rechnung bei der Determinante D (§ 3) zeigt, daß es sich empfiehlt, auch in der Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} \rho_1^2 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \rho_2^2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \rho_3^2 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

die erste und die zweite Zeile von der dritten abzuziehen. Mit Hilfe der Gleichungen (12) und (26) erhält man auf diese Art für D_1 das Produkt von h^2k^2 mit der Determinante D_1':

$$\begin{vmatrix} Eh + \frac{1}{2}E_u h^2 + \cdots & y_u + \frac{1}{2}y_{uu}h + \cdots & z_u + \frac{1}{2}z_{uu}h + \cdots \\ Gk + \frac{1}{2}G_v k^2 + \cdots & y_v + \frac{1}{2}y_{vv}k + \cdots & z_v + \frac{1}{2}z_{vv}k + \cdots \\ 2F + \left(\frac{1}{2}E_v + F_u\right)h + \left(\frac{1}{2}G_u + F_v\right)k + \cdots & y_{uv} + \frac{1}{2}y_{uuv}h + \frac{1}{2}y_{uvv}k + \cdots & z_{uv} + \frac{1}{2}z_{uvv}h + \frac{1}{2}z_{uvv}k + \cdots \end{vmatrix}.$$

Die Glieder niedrigster Ordnung von D_1' ergeben sich, wenn man darin $h = 0$, $k = 0$ setzt. Mithin wird in der Entwicklung von D_1 der Koeffizient von h^2k^2 gleich

$$2F\,(y_u z_v - y_v z_u)$$

oder, wenn man die Richtungscosinusse X, Y, Z der Normale der Fläche im Punkte P einführt, gleich

$$2F\sqrt{EG - F^2}\cdot X\,. \tag{35}$$

Die Glieder niedrigster Ordnung von D_2 und D_3 sind dem entsprechend:

$$(35') \qquad 2F\sqrt{EG-F^2}\cdot Y\cdot h^2k^2 \quad \text{und} \quad 2F\sqrt{EG-F^2}\cdot Z\cdot h^2k^2.$$

Die Gleichungen (35) und (35′) versagen, wenn $F=0$ ist. Die Berechnung der Glieder fünfter und sechster Ordnung, die sich in diesem Fall ergeben, ist jedoch nur dann notwendig, wenn gleichzeitig $M=0$ wird, und es sollen daher die folgenden Entwicklungen sogleich unter der Annahme durchgeführt werden, daß $F=0$, $M=0$ ist. Für die Koordinaten x, y, z gilt dann die partielle Differentialgleichung

$$\Theta_{uv} = A\Theta_u + B\Theta_v .$$

Man wird daher, wie bei der Determinante D', bei D'_1 von der dritten Zeile die mit A multiplizierte erste und die mit B multiplizierte zweite Zeile abziehen. Auf diese Art ergibt sich eine Determinante, bei der die drei Spalten der Reihe nach von den folgenden Elementen gebildet werden:

$$(\mathrm{I})\left|\begin{array}{l} Eh+\frac{1}{2}E_u h^2+\cdots \\ Gk+\frac{1}{2}G_v k^2+\cdots \\ \left(\frac{1}{2}E_v-AE\right)h+\left(\frac{1}{2}G_u-BG\right)k+\cdots \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{II})\left|\begin{array}{l} y_u+\frac{1}{2}y_{uu}h+\cdots \\ y_v+\frac{1}{2}y_{vv}k+\cdots \\ \frac{1}{2}\left(y_{uuv}-Ay_{uu}\right)h+\frac{1}{2}\left(y_{uvv}-By_{vv}\right)k+\cdots \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{III})\left|\begin{array}{l} z_u+\frac{1}{2}z_{uu}h+\cdots \\ z_v+\frac{1}{2}z_{vv}k+\cdots \\ \frac{1}{2}\left(z_{uuv}-Az_{uu}\right)h+\frac{1}{2}\left(z_{uvv}-Bz_{vv}\right)k+\cdots . \end{array}\right.$$

Nach den Gleichungen (34) wird aber für $F=0$:

$$(34') \qquad A=\frac{1}{2}\,\frac{E_v}{E}, \qquad B=\frac{1}{2}\,\frac{G_u}{G},$$

mithin verschwinden die Koeffizienten von h und k im ersten Element der dritten Zeile. Da gleichzeitig die Ausdrücke in den beiden anderen Elemente der dritten Zeile sogleich mit linearen

Gliedern beginnen, so können, wie die Entwicklung von D_1' nach den Elementen der ersten Spalte erkennen läßt, in der Potenzreihe für D_1' keine linearen Glieder vorkommen, das heißt, *die Glieder fünfter Ordnung von D_1 fallen weg, wenn $F=0$ und $M=0$ ist.*

Um die Glieder sechster Ordnung zu gewinnen, müssen bei dem dritten Element der ersten Spalte die Glieder zweiter Ordnung hinzugenommen werden. Diese sind in dem vorhergehenden Paragraphen hergestellt worden. Wenn also a, b, c die durch die Gleichungen (33) erklärten Ausdrücke bedeuten, so wird das erste Element der dritten Zeile von D_1':

$$\left(\tfrac{1}{3} a - \tfrac{1}{2} AE_u\right) h^2 + \tfrac{1}{2} bhk + \left(\tfrac{1}{3} c - \tfrac{1}{2} BG_v\right) k^2 + \cdots ;$$

man darf nämlich nicht vergessen, daß vorher von der dritten Zeile die mit A multiplizierte erste und die mit B multiplizierte zweite Zeile abgezogen wurde. Ferner ergeben sich vermöge der Gleichungen (30) für die beiden anderen Elemente der dritten Zeile die Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(A_u + AB\right) y_u + \left(B_u + B^2\right) y_v\right] h + \tfrac{1}{2}\left[\left(A_v + A^2\right) y_u + \left(B_v + BA\right) y_v\right] k + \cdots ,$$
$$\tfrac{1}{2}\left[\left(A_u + AB\right) z_u + \left(B_u + B^2\right) z_v\right] h + \tfrac{1}{2}\left[\left(A_v + A^2\right) z_u + \left(B_v + BA\right) z_v\right] k + \cdots .$$

Wenn man daher die erste Zeile von D_1' mit

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(A_u + AB\right) h + \left(A_v + A^2\right) k\right]$$

und die zweite Zeile mit

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(B_v + B^2\right) h + \left(B_v + BA\right) k\right]$$

multipliziert und von der dritten Zeile abzieht, so enthält das zweite und das dritte Element der dritten Zeile nur noch Glieder zweiter und höherer Ordnung, und infolgedessen liefern bei Entwicklung der Determinante D_1' nach den Elementen der ersten Spalte die beiden ersten Elemente dieser Spalte nur Glieder dritter und höherer Ordnung, aus denen in der Determinante D_1 Glieder siebenter und höherer Ordnung hervorgehen. Man erhält daher die Glieder zweiter Ordnung von D_1' und damit die Glieder sechster Ordnung von D_1, wenn man das dritte Element der ersten Spalte von D_1' mit der zugehörigen Unterdeterminante multipliziert und sich jeweils auf die Glieder niedrigster Ordnung beschränkt. Die Unterdeterminante liefert den Faktor $\sqrt{EG}\cdot X$, das dritte Element der ersten Spalte den Faktor

$$\tfrac{1}{3}\,a'h^2+\tfrac{1}{2}\,b'hk+\tfrac{1}{3}\,c'k^2\,,$$

und zwar ist:

$$\begin{aligned} a' &= a-\tfrac{3}{2}\,AE_u-\tfrac{3}{2}\,(A_u+AB)E\,,\\ b' &= b-(A_v+A^2)E-(B_u+B^2)G\,,\\ c' &= c-\tfrac{3}{2}\,BG_v-\tfrac{3}{2}\,(B_v+BA)G\,. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (33) folgt aber für $F=0$:

$$\begin{aligned} a &= 2(A_u+AB)E+\tfrac{3}{2}\,AE_u-\tfrac{1}{2}\,BE_v\,,\\ b &= (A_v+2A^2)E+(B_u+2B^2)G-\tfrac{1}{2}\,AE_v-\tfrac{1}{2}\,BG_u\,,\\ c &= 2(B_v+BA)G-\tfrac{1}{2}\,AG_u+\tfrac{3}{2}\,BG_v\,, \end{aligned}$$

oder da nach den Gleichungen (34′)

$$\tfrac{1}{2}\,E_v=AE\,,\qquad \tfrac{1}{2}\,G_u=BG$$

ist:

$$\begin{aligned} a &= (2A_u+AB)E+\tfrac{3}{2}\,AE_u\,,\\ b &= (A_v+A^2)E+(B_u+B^2)G\,,\\ c &= (2B_v+BA)G+\tfrac{3}{2}\,BG_v\,. \end{aligned}$$

Mithin wird

$$\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}\,(A_u-AB)E=\tfrac{1}{2}\,\sigma E\,,\\ b' &= 0\,,\\ c' &= \tfrac{1}{2}\,(B_v-BA)G=\tfrac{1}{2}\,\tau G\,, \end{aligned}$$

und man erhält schließlich die Glieder zweiter Ordnung von D_1' in der einfachen Form:

(36) $$\tfrac{1}{6}\sqrt{EG}\,(\sigma Eh^2+\tau Gk^2)\cdot X\,.$$

In ähnlicher Bildung lauten die Glieder zweiter Ordnung von D_2' und D_3':

(36′) $$\tfrac{1}{6}\sqrt{EG}\,(\sigma Eh^2+\tau Gk^2)\cdot Y,\qquad \tfrac{1}{6}\sqrt{EG}\,(\sigma Eh^2+\tau Gk^2)\cdot Z,$$

und das Anfangsglied der Entwicklung der Quadratsumme

$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2,$$

die in dem Ausdruck für R^2 (Gleichung 10) auftritt, wird:

$$\frac{1}{36} EG (\sigma E h^2 + \tau G k^2)^2 h^4 k^4. \tag{37}$$

§ 7

Die begleitenden Grenzkugeln krummer Flächen

Die vorhergehenden Entwicklungen geben die Mittel, von den begleitenden Kugeln der zu einer Doppelschar gehörenden Kurvennetze zu den *begleitenden Grenzkugeln einer krummen Fläche* in Bezug auf die Doppelschar überzugehen.

Nach den Formeln (13) und (35) gelten die Gleichungen:

$$\tag{38} \left\{ \begin{aligned} D &= M\sqrt{EG - F^2} \cdot h^2 k^2 + \cdots, \\ D_1 &= 2F\sqrt{EG - F^2} \cdot X \cdot h^2 k^2 + \cdots, \\ D_2 &= 2F\sqrt{EG - F^2} \cdot Y \cdot h^2 k^2 + \cdots, \\ D_3 &= 2F\sqrt{EG - F^2} \cdot Z \cdot h^2 k^2 + \cdots. \end{aligned} \right.$$

Aus ihnen folgen für die Koordinaten des Mittelpunktes der begleitenden Grenzkugel die Werte

$$\xi_0 = \frac{F}{M} X, \qquad \eta_0 = \frac{F}{M} Y, \qquad \zeta_0 = \frac{F}{M} Z; \tag{39}$$

der Halbmesser R ist aus der Gleichung

$$R^2 = \frac{F^2}{M^2} \tag{40}$$

zu entnehmen. Die Gleichungen (39) und (40) verlieren ihre Gültigkeit nur, wenn gleichzeitig $F = 0$ und $M = 0$ ist, das heißt, wenn die betrachtete Doppelschar von den Krümmungslinien der Fläche gebildet wird. Man hat daher den folgenden

Lehrsatz I. *Wird ein reguläres Flächenstück von einer regulären Doppelschar überdeckt, die nicht aus den Krümmungslinien der Fläche besteht, so gibt es im Bezug auf die Doppelschar für jeden Punkt des Flächenstückes eine bestimmte begleitende Grenzkugel.*

Ihr Mittelpunkt liegt auf der betreffenden Flächennormale, ihr Halbmesser R wird durch die Gleichung

$$R^2 = \frac{F^2}{M^2}$$

gegeben. Ist die Doppelschar orthogonal, aber nicht konjugiert, so schrumpfen die Kugeln in Punkte zusammen. Ist die Doppelschar konjugiert, aber nicht orthogonal, so arten die Grenzkugeln in die berührenden Ebenen aus.

Der Lehrsatz I enthält zugleich eine neue Erklärung der Krümmungslinien einer Fläche als derjenigen Doppelschar, bei der die Bestimmung der begleitenden Grenzkugeln die Heranziehung von Gliedern höherer Ordnung erfordert.

Es verdient auch Beachtung, daß in der Lehre von den begleitenden Grenzkugeln die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung E, F, G und L, M, N gleichmäßig berücksichtigt werden; es ist das ein Umstand, der bei den folgenden Betrachtungen noch deutlicher hervortreten wird.

Wenn die Doppelschar von den Krümmungslinien gebildet wird, also F und M verschwinden, so erhält man für die zugehörigen Netze nach den Formeln (18) und (36) die Gleichungen:

$$(41)\quad \begin{cases} D = \frac{1}{12}\sqrt{EG}\left[(A_u - AB)Lh^2 + (B_v - BA)Nk^2\right]h^2k^2 + \cdots\,, \\ D_1 = \frac{1}{6}\sqrt{EG}\left[(A_u - AB)Eh^2 + (B_v - BA)Gk^2\right]X\cdot h^2k^2 + \cdots\,, \\ D_2 = \frac{1}{6}\sqrt{EG}\left[(A_u - AB)Eh^2 + (B_v - BA)Gk^2\right]Y\cdot h^2k^2 + \cdots\,, \\ D_3 = \frac{1}{6}\sqrt{EG}\left[(A_u - AB)Eh^2 + (B_v - BA)Gk^2\right]Z\cdot h^2k^2 + \cdots\,. \end{cases}$$

Um den Grenzübergang auszuführen hat man $h = h't$, $k = k't$ zu setzen und t gegen Null gehen zu lassen. Dann wird nach der Gleichung (10) der mit einem Vorzeichen behaftete Halbmesser R der Grenzkugel, die der Flächentangente im Punkte P mit dem Richtungskoeffizienten $\lambda = h' : k'$ zugeordnet ist:

$$(42)\qquad R = \frac{(A_u - AB)Eh'^2 + (B_v - BA)Gk'^2}{(A_u - AB)Lh'^2 + (B_v - BA)Nk'^2}\,;$$

als Koordinaten des Mittelpunktes findet man

$$(43)\qquad \xi_0 = RX\,, \qquad \eta_0 = RY\,, \qquad \zeta_0 = RZ\,.$$

Die Gleichungen (42) und (43) versagen nur, wenn gleichzeitig

$$(44)\quad \begin{cases} (A_u - AB)E = 0\,, & (B_v - BA)G = 0\,, \\ (A_u - AB)L = 0\,, & (B_v - BA)N = 0 \end{cases}$$

ist. Sieht man die Gleichungen (44) als Bestimmungsgleichungen für u und v an, so ergeben sich daraus singuläre Punkte der Fläche. Verlangt man aber, daß sie identisch in u und v bestehen, also für jeden Punkt des betrachteten Flächenstückes erfüllt sind, so erhält man eine besondere Flächengattung, bei der die Frage der Grenzkugeln eine eigene Untersuchung erfordert. Nun können im reellen Gebiete E und G nicht identisch verschwinden, mithin können die Gleichungen (44) nur dann identisch bestehen, wenn gleichzeitig die beiden Invarianten

$$(19)\qquad \sigma = A_u - AB\,, \qquad \tau = B_v - BA$$

identisch verschwinden. Das ist aber die charakteristische Eigenschaft der P-Flächen, und zwar kommen hier nur die besonderen P-Flächen in Betracht, bei denen *die erzeugenden konischen Kurven zugleich Krümmungslinien sind*[1].

Hiermit ist folgender Lehrsatz bewiesen:

Lehrsatz II. *Wenn diejenigen P-Flächen ausgeschlossen werden, deren erzeugende konische Kurven zugleich Krümmungslinien sind, so gehören zur Doppelschar der Krümmungslinien als begleitende Grenzkugeln die Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Flächennormale des betreffenden Punktes liegen und deren Halbmesser R durch die Gleichung*

$$R = \frac{\sigma E h'^2 + \tau G k'^2}{\sigma L h'^2 + \tau N k'^2}$$

gegeben werden.

Der Ausdruck für den Halbmesser R soll jetzt einer genaueren Untersuchung unterzogen werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß die beiden Invarianten σ und τ nicht gleichzeitig verschwinden; der Fall der P-Flächen wird später betrachtet werden.

[1] Nach K. Peterson, a. a. O. S. 17, ist eine konische Krümmungslinie zugleich eine sphärische Kurve, deren Kugel die Fläche unter rechtem Winkel schneidet. Man vergleiche auch die Bemerkungen S. 57 und S. 97—102.

Im allgemeinen ist der Halbmesser R eine Funktion des Verhältnisses $\lambda = h' : k'$. Soll er von λ unabhängig sein, so ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante

$$\sigma\tau(EN - GL) = 0 \tag{45}$$

ist. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem eine der Invarianten σ und τ oder der Faktor $EN - GL$ verschwindet.

Ist *erstens* etwa $\tau = 0$ und σ von Null verschieden, so darf man durch σ kürzen und erhält aus der Gleichung (42):

$$R = \frac{E}{L} = R_1\,,$$

wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche bezeichnen. Es gilt demnach der

Lehrsatz III. *Wenn in einem Punkte einer krummen Fläche die eine der auf die Doppelschar der Krümmungslinien bezüglichen Invarianten σ und τ verschwindet, während die andere von Null verschieden ist, so gehört zu diesem Punkte in Bezug auf die Doppelschar der Krümmungslinien eine einzige Grenzkugel, deren Mittelpunkt auf der Flächennormale liegt und deren Halbmesser gleich einem der beiden Hauptkrümmungshalbmesser ist.*

Es kann auch eintreten, daß die Bedingungen $\tau = 0$, $\sigma \gtrless 0$ für jeden Punkt eines ganzen Flächenstückes erfüllt sind. Nach der Gleichung (34′) ist dann identisch

$$\frac{\partial^2 \ln G}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{E_v G_u}{EG}\,.$$

Diese partielle Differentialgleichung soll hier nicht genauer untersucht werden. Es genüge die Bemerkung, daß sie erfüllt ist, wenn allein von v abhängt. Dann kann man statt v eine Funktion von v als GAUSSsche Koordinate einführen, wobei die Koordinatenlinien unverändert bleiben, und erreichen, daß $G = 1$ wird. Man gelangt so zu Flächen, bei denen die eine Schar der Krümmungslinien aus *geodätischen Linien* besteht.

Zweitens konnte $EN - GL = 0$ sein. Ist dann $L = 0$, so verschwindet auch N (und umgekehrt) und, weil nach Voraussetzung $M = 0$ ist, muß die Fläche eine Ebene sein. Sind aber L und N von Null verschieden, so wird

$$\frac{E}{L} = \frac{G}{N},$$

also ist $R_1 = R_2$ und die Fläche eine Kugel.

Jede orthogonale Doppelschar in der Ebene und auf der Kugel hat bekanntlich die Eigenschaft, daß nicht nur $F = 0$, sondern auch $M = 0$ ist, sie läßt sich also als eine Doppelschar von Krümmungslinien ansehen. Hat man eine solche Doppelschar, so kommt es darauf an, ob die zugehörigen Invarianten σ und τ von Null verschieden sind, oder nicht. Ist gleichzeitig $\sigma = 0$ und $\tau = 0$, so hat man die Ebene oder die Kugel als P-Fläche zu werten. Verschwindet etwa τ, während σ von Null verschieden ist, so wird $R = R_1$, also gleich dem Halbmesser der Kugel; bei der Ebene wird R unendlich groß. Sind σ und τ von Null verschieden, so wird gleichfalls $R = R_1 = R_2$. Demnach gilt schließlich der folgende einfache Lehrsatz:

Lehrsatz IV. *Bei jeder orthogonalen Doppelschar der Ebene und der Kugel, für die nicht die beiden Invarianten σ und τ verschwinden, sind die begleitenden Grenzkugeln die Ebene und die Kugel selbst.*

Was eintritt, wenn σ und τ gleichzeitig verschwinden, wird später bei der Untersuchung der P-Flächen erörtert werden; es möge aber schon an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß der Lehrsatz IV in diesem Falle seine Giltigkeit verlieren kann.

Nachdem die Ausnahmefälle erledigt sind, läßt sich für den allgemeinen Fall folgender Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz V. *Betrachtet man auf einer krummen Fläche, die keine Ebene und keine Kugel ist, die Doppelschar der Krümmungslinien und stellt sich heraus, daß die beiden zugehörigen Invarianten σ und τ nicht identisch verschwinden, so gibt es in Bezug auf die Krümmungslinien für jeden Punkt, in dem nicht etwa σ oder τ verschwindet, eine Schar begleitender Grenzkugeln. Die Mittelpunkte aller dieser Kugeln liegen auf der betreffenden Flächennormale. Der Flächentangente mit dem Richtungskoeffizienten $\lambda = h' : k'$ ist die Grenzkugel mit dem Halbmesser*

$$R = \frac{\sigma E \lambda^2 + \tau G}{\sigma L \lambda^2 + \tau N}$$

zugeordnet.

Nach der Erklärung der Maschen darf λ jeden endlichen, von Null verschiedenen Wert annehmen. Man wird aber in Erweiterung der ursprünglichen Erklärung auch den Tangenten an die Krümmungslinien, für die λ gleich Null und oder Unendlich ist, je eine Grenzkugel zuordnen dürfen. Die Formel für R behält auch für diese Werte von λ einen Sinn; es ergibt sich nämlich der zu der betreffenden Tangente gehörige Hauptkrümmungshalbmesser.

Der Ausdruck für die Halbmesser der Grenzkugeln gibt zu ähnlichen Untersuchungen Anlaß, wie sie für den Halbmesser der Normalschnitte

$$\rho = \frac{Eh'^2 + Gk'^2}{Lh'^2 + Nk'^2} = \frac{E\lambda^2 + G}{L\lambda^2 + N} \tag{46}$$

angestellt werden. Man erkennt, daß ebenso wie ρ auch R für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ extreme Werte hat, und zwar sind diese Extrema in beiden Fällen die Hauptkrümmungshalbmesser R_1 und R_2. Hieraus ergibt sich zugleich eine **neue Erklärung der Hauptkrümmungshalbmesser**, die unabhängig ist von der Betrachtung der Normalschnitte oder der Normalen der Fläche in der Umgebung des betreffenden Flächenpunktes. Die Hauptkrümmungshalbmesser sind nämlich die extremen Werte der Halbmesser der begleitenden Grenzkugeln, die zur Doppelschar der Krümmungslinien gehören; dabei sind die Krümmungslinien im Anschluß an den Lehrsatz I ebenfalls vermöge der begleitenden Grenzkugeln zu erklären.

Für das Verhalten von R als Funktion von λ sind die Vorzeichen der Produkte $\sigma \cdot \tau$ und $L \cdot N$ maßgebend, und man hat daher vier Fälle zu unterscheiden.

1. *Die Produkte $\sigma \cdot \tau$ und $L \cdot N$ sind beide positiv.* In diesem Falle geht R, wenn die Flächentangente sich um den Punkt P dreht, zwischen den extremen Werten R_1 und R_2, die gleiches Vorzeichen haben, jedesmal entweder beständig wachsend oder beständig abnehmend, hin und her; die Werte Null und Unendlich sind ausgeschlossen.

2. *Das Produkt $\sigma \cdot \tau$ ist negativ, das Produkt $L \cdot N$ positiv.* Wiederum haben R_1 und R_2, die extremen Werte von R, gleiches Vorzeichen. Der Übergang von dem einen dieser Werte zu dem andern erfolgt aber durch das Unendliche, und es gibt daher ein Paar von Flächentangenten, für die R unendlich, und ein zweites Paar, für die R Null wird. Diese ausgezeichneten Flächen-

tangenten sind die Tangenten der Kurven der beiden Doppelscharen, die durch die Differentialgleichungen

$$\sigma L du^2 + \tau G dv^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \sigma E du^2 + \tau G dv^2 = 0$$

erklärt werden.

3. *Das Produkt $\sigma \cdot \tau$ ist positiv, das Produkt $L \cdot N$ negativ.* Die extremen Werte R_1 und R_2 haben entgegengesetztes Vorzeichen. Der Übergang von dem einen Wert zu dem andern erfolgt durch das Unendliche, und zwar gibt es ein Tangentenpaar, für das R unendlich wird; der Wert Null ist ausgeschlossen. Die ausgezeichneten Flächentangenten sind die Tangenten an die Kurven der Doppelschar, die durch die Differentialgleichung

$$\sigma L du^2 + \tau N dv^2 = 0$$

definiert wird.

4. *Die Produkte $\sigma \cdot \tau$ und $L \cdot N$ sind beide negativ.* Die extremen Werte R_1 und R_2 haben wiederum entgegengesetztes Vorzeichen, aber der Übergang von dem einen Werte zu dem andern erfolgt durch Null, und zwar gibt es ein Tangentenpaar, für das $R = 0$ wird; der Wert Unendlich ist ausgeschlossen. Die ausgezeichneten Tangenten sind die Tangenten an die Kurven der Doppelschar, die der Differentialgleichung

$$\sigma E du^2 + \tau G dv^2 = 0$$

genügt.

Die Ausdrücke für R (Gleichung 42) und für ρ (Gleichung 46) stimmen dann und nur dann überein, wenn $\sigma = \tau$, also $A_u = B_v$ ist. Nun war aber für $F = 0$ nach (34'):

$$A = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \qquad B = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G},$$

mithin muß

$$\frac{\partial^2 \ln E}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \ln G}{\partial u \partial v}$$

sein. Hieraus folgt sofort:

$$E \cdot \mu(u) = G \cdot \nu(v).$$

Dadurch, daß man an Stelle von u eine geeignete Funktion von u, an Stelle von v eine geeignete Funktion von v einführt, wodurch die Koordinatenlinien nicht geändert werden, läßt sich erreichen, daß

$$E = G$$

wird, und da umgekehrt die Gleichungen $E=G$, $F=0$ die Beziehung $\sigma=\tau$ zur Folge haben, so ergibt sich hieraus der

Lehrsatz VI. *Ist bei einer krummen Fläche, die weder eine Ebene noch eine Kugel noch eine P-Fläche mit orthogonalen erzeugenden Kurven ist, die Doppelschar der Krümmungslinien isotherm, so sind die Halbmesser der begleitenden Grenzkugeln, die in Bezug auf diese Doppelschar den Tangenten eines Punktes der Fläche zugeordnet sind, genau gleich den Krümmungshalbmessern der zu diesen Tangenten gehörigen Normalschnitte.*

Unter den Flächen, die den Bedingungen des Lehrsatzes VI genügen, befinden sich auch die Minimalflächen, und es gilt daher als Korollar des Lehrsatzes VI der

Lehrsatz VII. *Bei einer Minimalfläche, die weder eine Ebene noch eine P-Fläche mit orthogonalen erzeugenden Kurven ist, sind die Halbmesser der begleitenden Grenzkugeln, die in Bezug auf die Doppelschar der Krümmungslinien den Tangenten eines Punktes der Fläche zugeordnet sind, gleich den Krümmungshalbmessern der zu denselben Tangenten gehörigen Normalschnitte.*

§ 8

Die begleitenden Grenzkugeln der P-Flächen, die von orthogonalen konischen Kurven erzeugt werden

Die P-Flächen, bei denen die beiden Scharen der erzeugenden konischen Kurven zu einander orthogonal sind, bedürfen einer besonderen Untersuchung. Da alle Maschen, die zu der Doppelschar der erzeugenden Kurven gehören, die Eigenschaft besitzen, daß ihre vier Eckpunkte in einer Ebene liegen, so ist für jeden Punkt einer solchen Fläche die berührende Ebene Grenzkugel, und es fragt sich nur noch, ob es bezüglich der Doppelschar der Krümmungslinien noch andere Grenzkugeln gibt. Wenn aber die vier Eckpunkte einer Masche $PP_1P_2P_3$ so beschaffen sind, daß sich durch sie erstens eine Ebene und zweitens eine eigentliche Kugel legen läßt, so sind die Punkte P, P_1, P_2, P_3 *kreisig*, und alle

Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Flächenormale liegen, sind begleitende Grenzkugeln bezüglich der betrachteten Doppelschar.

Wenn man noch des kürzeren Ausdrucks halber festsetzt, daß eine Masche, deren vier Eckpunkte kreisig sind, selbst kreisig genannt werden soll, so gilt nach dem Vorhergehenden der

Lehrsatz VIII. *Wenn die Krümmungslinien einer Fläche konische Kurven sind, so hat man zu unterscheiden, ob die Maschen der von ihnen gebildeten Netze kreisig sind oder nicht. Sind sie nicht kreisig, so gehört bezüglich der Krümmungslinien zu jedem Punkte der Fläche als begleitende Grenzkugel allein die berührende Ebene. Sind die Maschen kreisig, so ist jede Kugel, deren Mittelpunkt auf der Flächennormale liegt, als Grenzkugel anzusehen.*

Die P-Flächen mit orthogonalen erzeugenden Kurven, aus denen Netze von kreisigen Maschen entspringen, besitzen eine geometrische Eigenschaft, die Erwähnung verdient. Wenn eine Masche kreisig ist, so verschwinden nach § 2 die Determinanten D_1, D_2, D_3. Die Determinante D_1 wird im vorliegenden Falle:

$$\begin{vmatrix} \rho_1^2 & \dfrac{\varphi_2(u+h)+\psi_2(v)}{\varphi(u+h)+\psi(v)} - \dfrac{\varphi_2(u)+\psi_2+v)}{\varphi(u)+\psi(v)} & \dfrac{\varphi_3(u+h)+\psi_3(v)}{\varphi(u+h)+\psi(v)} - \dfrac{\varphi_3(u)+\psi_3(v)}{\varphi(u)+\psi(v)} \\ \rho_2^2 & \dfrac{\varphi_2(u)+\psi_2(v+k)}{\varphi(u)+\psi(v+k)} - \dfrac{\varphi_2(u)+\psi_2(v)}{\varphi(u)+\psi(v)} & \dfrac{\varphi_3(u)+\psi_3(v+k)}{\varphi(u)+\psi(v+k)} - \dfrac{\varphi_3(u)+\psi_3(v)}{\varphi(u)+\psi(v)} \\ \rho_3^2 & \dfrac{\varphi_2(u+h)+\psi_2(v+k)}{\varphi(u+h)+\psi(v+k)} - \dfrac{\varphi_2(u)+\psi_2(v)}{\varphi(u)+\psi(v)} & \dfrac{\varphi_3(u+h)+\psi_3(v+k)}{\varphi(u+h)+\psi(v+k)} - \dfrac{\varphi_3(u)+\psi_3(v)}{\varphi(u)+\psi(v)} \end{vmatrix}.$$

Wenn jede der drei Zeilen mit dem Produkt der darin auftretenden beiden Nenner multipliziert und in der umgeformten Determinante die erste und die zweite Zeile von der dritten abgezogen wird, so erhält man dort (nach einer Bemerkung in § 4) in der zweiten und in der dritten Spalte das Element 0. Hieraus folgt, daß die Gleichung $D_1 = 0$ gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$\{[\varphi(u+h)+\psi(v)]\rho_1^2 + [\varphi(u)+\psi(v+k)]\rho_2^2 - [\varphi(u+k)+\psi(v+k)]\rho_3^2\} \cdot (\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1) = 0.$$

Nun verschwinden auch D_2 und D_3, folglich bleibt die soeben abgeleitete Gleichung richtig, wenn darin die Größen ξ, η, ζ zyklisch vertauscht werden. Hierbei erfährt der erste Faktor keine Änderung, während der zweite der Reihe nach in $\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1$ und $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ übergeht. Die Gleichungen

$$\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1=0\,,\qquad \zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1=0\,,\qquad \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1=0$$

bedeuten aber, daß das Dreieck PP_1P_2 den Inhalt Null hat, daß also die Punkte P, P_1, P_2 in gerader Linie liegen, und das ist bei einer regulären Masche ausgeschlossen. Mithin muß der erste Faktor verschwinden.

Um aus der Gleichung

$$(47)\quad \left[\varphi(u+h)+\psi(v)\right]\rho_1^2+\left[\varphi(u)+\psi(v+k)\right]\rho_2^2-\left[\varphi(u+h)+\psi(v+k)\right]\rho_3^2=0$$

Folgerungen zu ziehen, soll die linke Seite nach Potenzen von h und k entwickelt werden. Unter Beachtung des Umstandes, daß $F=0$ ist, erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}0&=\left[\varphi(u)+\psi(v)+\varphi'(u)h+\cdots\right]\cdot\left(Eh^2+\tfrac{1}{2}E_uh^3+\cdots\right)\\&\quad+\left[\varphi(u)+\psi(v)+\psi'(v)k+\cdots\right]\cdot\left(Gk^2+\tfrac{1}{2}G_vk^3+\cdots\right)\\&\quad-\left[\varphi(u)+\psi(v)+\varphi'(u)h+\psi'(v)k+\cdots\right]\\&\qquad\qquad\cdot\left(Eh^2+Gk^2+\tfrac{1}{2}E_uh^3+\tfrac{1}{2}E_vh^2k+\tfrac{1}{2}G_uhk^2+\tfrac{1}{2}G_vk^3+\cdots\right).\end{aligned}$$

Die Glieder zweiter Ordnung heben sich weg. Von den Gliedern dritter Ordnung bleibt übrig:

$$-\left[\psi'(v)E+\tfrac{1}{2}\left(\varphi(u)+\psi(u)\right)E_v\right]h^2k-\left[\varphi'(u)G+\tfrac{1}{2}\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)G_u\right]hk^2.$$

Soll also die Gleichung (47) identisch in $u, v; h, k$ bestehen, so müssen die Koeffizienten von h^2k und hk^2 verschwinden. Man gelangt auf diese Art zu den Gleichungen:

$$\frac{2\psi'(v)}{\varphi(u)+\psi(v)}+\frac{E_v}{E}=0\,,\qquad \frac{2\varphi'(u)}{\varphi(u)+\psi(v)}+\frac{G_u}{G}=0\,,$$

aus denen folgt, daß

$$E=\frac{\mu^2(u)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)^2}\,,\qquad G=\frac{\nu^2(v)}{\left(\varphi(u)+\psi(v)\right)^2}$$

ist. Indem man jetzt an Stelle von u eine geeignete Funktion von u, an Stelle von v eine geeignete Funktion von v einführt, wobei die Koordinatenlinien erhalten bleiben, läßt sich erreichen, daß

$$E=G$$

wird. Hiermit ist folgender Lehrsatz bewiesen:

Lehrsatz IX. *Damit bei einer Fläche, deren Krümmungslinien konische Kurven sind, jede Masche irgend eines von diesen Kurven erzeugten Netzes kreisig ist, muß die Doppelschar der Krümmungslinien isotherm sein.*

Bei der Kugel läßt sich die Frage nach den Netzen mit lauter kreisigen Maschen noch auf eine andere Art behandeln. Bei dieser Fläche ist nämlich jede Masche, deren vier Eckpunkte in einer Ebene liegen, von selbst kreisig. Nimmt man hinzu, daß eine Doppelschar, bei der die Eckpunkte jeder Masche irgend eines zugehörigen Netzes in einer Ebene liegen, stets aus konischen Kurven besteht, so darf man den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz X. *Damit auf einer Kugel sämtliche zu einer Doppelschar gehörigen Kurvennetze lauter kreisige Maschen haben, ist notwendig und hinreichend, daß die Doppelschar orthogonal ist und aus konischen Kurven besteht.*

Ein einfaches Beispiel für eine Doppelschar, wie sie der Lehrsatz X fordert, bilden die Meridiane und Parallelkreise der Kugel.