Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über den Abelschen Fundamentalsatz der Integralrechnung II**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1915, 6

Der zweite Abelsche Fundamentalsatz über die durch Logarithmen algebraischer Funktionen ausdrückbaren Abelschen Integrale wird in dem Sinne verallgemeinert, daß die Frage nach der Form der algebraischen Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung behandelt, und die Bedingungen dafür aufgestellt werden, daß diese mit Wurzelzeichen darstellbar sind.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1915, S. XXXI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1915. 6. Abhandlung

Über den ABELschen Fundamentalsatz der Integralrechnung II.

von

LEO KOENIGSBERGER

Eingegangen am 12. April 1915

Heidelberg 1915
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1216

Der von ABEL aufgestellte Satz, daß jedes algebraisch ausdrückbare Integral einer algebraischen Funktion y von x sich als rationale Funktion von x und y darstellen läßt, konnte dahin verallgemeinert werden, daß, wenn eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{d x^n} + y_1 \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + y_n u = y \,,$$

in welcher $y_1, y_2, \ldots, y_n, y$ beliebige algebraische Funktionen von x bedeuten, ein algebraisches Integral besitzt, auch ein in $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y$ rational ausdrückbares Integral existiert, und daß ferner dieses Integral selbst in den bezeichneten Größen rational darstellbar ist, wenn angenommen wird, daß die reduzierte homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{d x^n} + y_1 \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + y_n u = 0$$

kein algebraisches Integral besitzt. Ich will hier noch bemerken, daß diese letztere Eigenschaft auch dann noch dem in $x, y_1, \ldots, y_n, y$ algebraischen Integrale zukommen wird, wenn die reduzierte homogene Differentialgleichung nur in diesen Größen rational ausdrückbare algebraische Integrale besitzt, da zwei Lösungen der mit Adjungierung von $x, y_1, \ldots, y_n, y$ als irreduktibel angenommenen algebraischen Gleichung der nicht homogenen Differentialgleichung, also ihre Differenz der reduzierten homogenen Differentialgleichung genügen würde, und somit der Voraussetzung nach in x und den y rational wäre, was dem Charakter der Irreduktibilität algebraischer Gleichungen widerspricht, wenn nicht der Grad derselben der erste ist.

Es folgt somit, daß, wenn die nicht homogene Differentialgleichung ein algebraisches Integral besitzt, dieses rational in x und den y ausdrückbar ist, wenn die reduzierte homogene Differentialgleichung entweder gar kein algebraisches Integral besitzt, oder diese sämtlich in $x, y_1, \ldots, y_n$, und y rational ausdrückbar sind.

Der zweite von ABEL bewiesene Fundamentalsatz, daß, wenn das Integral einer algebraischen Funktion y von x sich durch den Logarithmus einer algebraischen Funktion von x ausdrückt, sich ein ganzes Vielfaches jenes Integrales als Logarithmus einer in x und y rationalen Funktion darstellen läßt, wurde von ihm aus der Überlegung hergeleitet, daß, wenn

$$\int y\,dx = \log u_1$$

und u_1 die Lösung einer mit Adjungierung von x und y irreduktibeln algebraischen Gleichung ν^{ten} Grades ist, auch jede Lösung u_α derselben jener Gleichung genügt, und somit

$$\nu \int y\,dx = \sum \log u_\alpha = \log \Pi\, u_\alpha = \log v$$

ist, worin v als letztes Glied der algebraischen Gleichung in u rational in x und y ausgedrückt ist — und wie hier mit Hilfe des Funktionaltheorems der Logarithmen, leitet ABEL auf Grund des Additionstheorems der elliptischen und ABELschen Integrale die analogen Sätze allgemein für die Integrale algebraischer Funktionen her.

In etwas veränderter Form läßt sich der Beweis des ABELschen Satzes auch dadurch führen, daß sich alle Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} - \rho u = 0\,,$$

also auch alle Lösungen der mit Adjungierung von x und y irreduktibeln algebraischen Gleichung in u nur um multiplikatorische Konstanten unterscheiden können, diese Gleichung also eine binomische von der Form

$$u^\nu = R(x, y)$$

oder

$$u_1 = R(x, y)^{\frac{1}{\nu}}$$

sein muß, worin R eine rationale Funktion von x und y ist. Der ABELsche Satz sagt somit nichts anderes aus, als daß, wenn die obige Differentialgleichung ein in x algebraisches Integral besitzt, die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} - \nu \rho u = 0$$

für eine bestimmte positive ganze Zahl ν durch den in x und y rationalen Ausdruck

$$u = c R(x, y)$$

dargestellt sind, worin c die Integrationskonstante bedeutet.

Die Ausdehnung des Abelschen Satzes von der logarithmischen Integration algebraischer Funktionen würde sich somit auf die direkte Untersuchung der algebraischen Integrale linearer homogener Differentialgleichungen reduzieren, die wir im folgenden ohne Zuhilfenahme funktionentheoretischer Betrachtungen für lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf rein algebraischem Wege durchführen wollen. Es möge nur noch hervorgehoben werden, daß Abel sich nicht die Frage stellte, wie die algebraische Funktion beschaffen sein müsse, damit ihr Integral der Logarithmus einer algebraischen Funktion ist, sondern, wenn die Reduktion möglich ist, wie der Logarithmand beschaffen sein müsse — und so soll im folgenden nicht die Frage erörtert werden, wann die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ein oder zwei algebraische Integrale besitzt, sondern es soll die Natur der algebraischen Integrale untersucht werden, wenn deren Existenz vorausgesetzt wird.

Sei die lineare homogene Differentialgleichung gegeben

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \rho_1(x, y)\frac{du}{dx} + \rho_2(x, y)\, u = 0\,, \tag{1}$$

in welcher ρ_1 und ρ_2 rationale Funktionen von x und y sind, und y die Lösung einer mit Adjungierung von x irreduktibeln Gleichung ist,

$$y^\lambda + r_1(x)\, y^{\lambda-1} + \cdots + r_\lambda(x) = 0\,. \tag{2}$$

Besitzt diese Differentialgleichung zwei transzendente Fundamentalintegrale v_1 und v_2, so wird nur dann irgend ein anderes Integral eine algebraische Funktion V von x sein können, wenn eine Relation von der Form besteht

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = V\,,$$

worin a_1 und a_2 Konstanten bedeuten, in welchem Falle aber auch v_1 und V als Fundamentalintegrale betrachtet werden dürfen; wir werden also unmittelbar auf den sogleich zu behandelnden Fall geführt, in welchem eine transzendente und eine algebraische Funktion ein Fundamentalsystem von Integralen bilden.

Werde nunmehr angenommen, daß die Differentialgleichung (1) ein transzendentes Integral v und ein als Lösung der mit Adjungierung von x und y irreduktibeln Gleichung

$$(3) \qquad u^{\mu} + R_1(x,y)\,u^{\mu-1} + \cdots + R_{\mu}(x,y) = 0$$

definiertes, algebraisches Integral u_1 besitzt, so werden zunächst wieder, da die Ableitungen der Lösungen der Gleichung (3) rationale Funktionen der resp. Lösung u_1 sowie von x und y sind, alle Lösungen von (3) Integrale von (1) sein. Da aber zwei dieser Lösungen nicht ein Fundamentalsystem bilden können, weil sich sonst das als transzendent vorausgesetzte Integral v additiv mit konstanten Koeffizienten aus diesen beiden algebraischen Fundamentalintegralen zusammensetzen ließe, so werden sich alle Lösungen der Gleichung (3) nur durch multiplikatorische Konstanten unterscheiden dürfen, die Gleichung also vermöge der Voraussetzung der Irreduktibilität die Form haben

$$(4) \qquad u^{\mu} = R(x,y)$$

und somit das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) durch den Ausdruck gegeben sein

$$u = c_1 v + c_2 R(x,y)^{\frac{1}{\mu}},$$

worin R eine rationale Funktion von x und y bedeutet.

Hat dagegen die Differentialgleichung (1) zwei algebraische Fundamentalintegrale u_1 und v_1, so ist

$$u_1 v_1' - v_1 u_1' = e^{-\int \rho_1(x,y)\,dx} = w$$

eine algebraische Funktion von x, und weil

$$\frac{dw}{dx} = -\rho_1(x,y)\,w\,,$$

so ist, wie oben gezeigt worden,

$$w = R(x,y)^{\frac{1}{\nu}},$$

worin R eine rationale Funktion von x und y, und ν eine positive ganze Zahl ist; für $\nu=1$ ist w selbst in x und y rational.

Genügen nun u_1 und v_1 den beiden mit Adjungierung von x, y, w irreduktibeln Gleichungen

$$u^{\varkappa} + s_1(x,y,w)\,u^{\varkappa-1} + \cdots + s_{\varkappa}(x,y,w) = 0 \tag{5}$$

und

$$v^{\lambda} + \sigma_1(x,y,w)\,v^{\lambda-1} + \cdots + \sigma_{\lambda}(x,y,w) = 0\,, \tag{6}$$

in denen die s und σ rationale Funktionen von x, y, w sind, und nehmen wir zunächst an, daß keine der Lösungen der Gleichung (5) mit u_1, und keine der Lösungen der Gleichung (6) mit v_1 ein Fundamentalsystem von Integralen bilden, so werden sich sämtliche Lösungen je einer Gleichung nur um multiplikatorische Konstanten unterscheiden und die beiden Gleichungen somit die binomische Form haben

$$u^{\varkappa} = r_1(x,y,w)\,, \qquad v^{\lambda} = r_2(x,y,w)\,, \tag{7}$$

worin r_1 und r_2 rationale Funktionen von x, y, w sind.

Da nun für die beiden Fundamentalintegrale u_1 und v_1 die Beziehung besteht

$$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_1 \int \frac{w\,dx}{u_1^2}$$

oder

$$u_1 v_1' - v_1 u_1' = \beta w = \beta R(x,y)^{\frac{1}{\nu}}\,,$$

so folgt aus den binomischen Gleichungen (7)

$$r_1^{\frac{1}{\varkappa}} \cdot r_2^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{r_2'}{r_2} - \frac{1}{\varkappa} \frac{r_1'}{r_1} \right) = \beta w$$

oder

$$u_1 \cdot v_1 = \rho(x,y,w)\,, \tag{8}$$

worin ρ eine rationale Funktion von x, y, w ist.

Nun folgt aus (8), daß

$$v_1^{\varkappa} = \frac{\rho^{\varkappa}(x,y,w)}{r_1(x,y,w)}\,; \quad u_1^{\lambda} = \frac{\rho^{\lambda}(x,y,w)}{r_2(x,y,w)}\,,$$

und daher vermöge der Irreduktibilität der Gleichungen (7)

$$\varkappa = \lambda^{*)},$$

so daß die binomischen Gleichungen in

$$(9) \qquad u^{\varkappa} = r_1(x, y, w), \quad v^{\varkappa} = r_2(x, y, w)$$

übergehen, worin r_1 und r_2 rationale Funktionen von x, y, w sind.

Für $\nu = 1$, also für den Fall, daß w in x und y rational ist, wird das allgemeine Integral in der Form enthalten sein

$$u = c_1 \sqrt[\varkappa]{r_1(x, y)} + c_2 \sqrt[\varkappa]{r_2(x, y)},$$

worin die Irrationalitäten mit Adjungierung von x und y irreduktibel sind.

Anders gestaltet sich das Resultat, wenn w eine algebraische, nicht in x und y rationale Funktion ist.

Um die Natur der mit Adjungierung von x, y, w irreduktibeln binomischen Gleichungen zu bestimmen, bemerke man, daß, wenn u_2 die Lösung der binomischen Gleichung

$$u^{\varkappa} = r_1(x, y, \eta w)$$

ist, in welcher, wenn

$$w = R(x, y)^{\frac{1}{\nu}},$$

η eine ν^{te} Einheitswurzel bedeutet, auch u_2 ein Integral der Differentialgleichung (1) ist, wie durch Substitution in diese vermöge

$$\frac{u_2'}{u_2} = r_{11}(x, y, \eta w), \quad \frac{u_2''}{u_2} = r_{12}(x, y, \eta w),$$

worin r_{11}, r_{12} rationale Funktionen bedeuten, unmittelbar hervorgeht. Und zwar bildet u_2 mit u_1 im allgemeinen ein Fundamentalsystem von Integralen; denn wäre dies nicht der Fall, also

$$r_1(x, y, \eta w) = c\, r_1(x, y, w),$$

oder

$$g_0(x, y) + g_1(x, y)\eta w + g_2(x, y)\eta^2 w^2 + \cdots$$
$$= c\left(g_0(x, y) + g_1(x, y) w + g_2(x, y) w^2 + \cdots\right),$$

*) Die Gleichheit der Gradzahlen gilt allgemein für zwei mit Adjungierung bestimmter Elemente irreduktibler Gleichungen, wenn das Produkt einer Lösung der einen und einer Lösung der andern Gleichung eine rationale Funktion jener Elemente ist.

so würde, weil die Gleichung

$$w^\nu = R(x,y)$$

als irreduktibel vorausgesetzt werden durfte, $c = \eta^\mu$ oder

$$r_1(x,y,w) = g_\mu(x,y)\, w^\mu$$

sein, so daß sich

$$u_1 = \left(g_\mu(x,y)\, w^\mu\right)^{\frac{1}{\varkappa}} = \left(g_\mu(x,y)^\nu\, R(x,y)^\mu\right)^{\frac{1}{\varkappa\nu}}$$

ergibt, worin die Irrationalität mit Adjungierung von x, y, w irreduktibel ist.

Hat nun r_2 dieselbe Form wie r_1, so ergibt sich das allgemeine Integral der Differentialgleichung in der Form

$$u = c_1\left(g_\mu(x,y)\, w^\mu\right)^{\frac{1}{\varkappa}} + c_2\left(h_\rho(x,y)\, w^\rho\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

oder

$$u = c_1\left(g_\mu(x,y)^\nu\, R(x,y)^\mu\right)^{\frac{1}{\varkappa\nu}} + c_2\left(h_\rho(x,y)^\nu\, R(x,y)^\rho\right)^{\frac{1}{\varkappa\nu}},$$

worin die Radikanden rationale Funktionen von x, y und die Irrationalitäten mit Adjungierung von x, y, w irreduktibel sind.

Bilden jedoch — was sogleich als unstatthaft erwiesen werden soll — u_1 und u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, ist also

$$u_2 = C_1 u_1 + C_2 v_1,$$

so folgt hieraus

$$u_1 u_2 = u_1(C_1 u_1 + C_2 v_1) = P(x,y,w),$$

worin P eine rationale Funktion bedeutet, oder nach (8)

$$u_1^2 = P_1(x,y,w),$$

so daß die beiden binomischen Gleichungen (9) in

$$u^2 = P_1(x,y,w), \quad v^2 = P_2(x,y,w)$$

übergehen, in denen P_1 und P_2 rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten.

Aber es läßt sich auch leicht die Form der in x, y, w rationalen Funktion P daraus erkennen, daß, wie oben erwiesen, der durch Substitution von ηw statt w aus u_1 hervorgehende Ausdruck

$$u_2 = \sqrt{P(x, y, \eta w)}$$

mit u_1 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung bilden wird. Die hieraus sich ergebende Bedingung

$$c_1 \sqrt{P(x, y, w)} + c_2 \sqrt{P(x, y, \eta w)} = \sqrt{P(x, y, \eta^2 w)}$$

läßt nach Schlüssen, die den früheren völlig analog sind, leicht einsehen, daß

$$P(x, y, w) = g_\mu(x, y) w^\mu$$

sein muß, und daß somit

$$u_1 = \sqrt{g_\mu(x, y) w^\mu} = \left(g_\mu(x, y)^\nu R(x, y)^\mu\right)^{\frac{1}{2\nu}}$$

ist, und daher die oben gefundene Form des Integrales

$$u_1 = \left(g_\mu(x, y)^\nu R(x, y)^\mu\right)^{\frac{1}{\varkappa\nu}}$$

auch hier für $\varkappa = 2$ bestehen bleibt.

Es möge noch bemerkt werden, daß man die Form der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung unmittelbar aufstellen kann, welche ein Integral u_1 für $\varkappa = 2$ besitzt.

Da bekanntlich die Substitution

$$u = w^{\frac{1}{2}} U,$$

worin

$$w = e^{-\int \rho_1 dx} = R\left(x, y\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

die Transformation liefert

$$u'' + \rho_1 u' + \rho_2 u = w^{\frac{1}{2}} \left\{U'' - \left(\tfrac{1}{4}\rho_1^2 + \tfrac{1}{2}\rho_1' - \rho_2\right) U\right\},$$

und, wie leicht zu sehen, für eine beliebige rationale Funktion $g_\mu(x, y)$ die in der Normalform gegebene Differentialgleichung

$$U'' - \left(\tfrac{1}{4}\rho_1^2 + \tfrac{1}{2}\rho_1' - \rho_2\right) U = 0$$

das Integral

$$U = g_\mu(x, y) w^\mu$$

besitzen wird, wenn

$$\left(\tfrac{1}{4}\rho_1^2+\tfrac{1}{2}\rho_1'-\rho_2\right)g_\mu(x,y)$$
$$=g_\mu''(x,y)-\mu g_\mu'(x,y)\rho_1-\mu g_\mu(x,y)\rho_1'+\mu^2 g_\mu(x,y)\rho_1^2$$

ist, so folgt für die aufgestellte Bedingung des Integrales die Form der Differentialgleichung

$$u''+\rho_1 u'-\frac{1}{g_\mu}\left[g_\mu''-2\mu g_\mu'\rho_1-\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)g_\mu\rho_1'+\left(\mu^2-\tfrac{1}{4}\right)g_\mu\rho_1^2\right]u=0$$

mit dem Integrale

$$u_1=g_\mu(x,y)\,w^{\mu+\frac{1}{2}}=\sqrt[2\nu]{g_\mu\left(x,y\right)^{2\nu}R\left(x,y\right)^{2\mu+1}},$$

wofür die binomische Gleichung

$$u^2=g_\mu\left(x,y\right)^2 w^{2\mu+1}$$

lautet.

Es folgt somit, daß, wenn die beiden algebraischen Fundamentalintegrale u_1 und v_1 der Differentialgleichung zwei mit Adjungierung von x, y, w irreduktibeln Gleichungen genügen, in denen keine der Lösungen mit u_1 resp. v_1 ein Fundamentalsystem bilden, die Integrale u_1 und v_1 durch gleiche Wurzeln aus rationalen Funktionen von x und y dargestellt sind, für welche der Index der Wurzel $= \varkappa\nu$ ist, worin $\varkappa$ eine positive ganze Zahl und ν durch

$$w=R\left(x,y\right)^{\frac{1}{\nu}}=e^{-\int\rho_1(x,y)\,dx}$$

definiert ist.

Bildet jedoch eine Lösung u_2 der Gleichung (5) mit u_1 ein Fundamentalsystem von Integralen, ist diese Gleichung also keine binomische, so sei zunächst

I. $\qquad s_1(x,y,w)$ von Null verschieden.

In diesem Falle hat die Differentialgleichung das von Null verschiedene, in x, y, w rationale Integral

$$u_1+u_2+\cdots+u_\varkappa=-s_1(x,y,w),$$

und wir haben daher nur den Fall zu untersuchen, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei algebraische Fundamentalintegrale hat, von denen das eine in x, y, w rational ist.

Sei u_1 ein zu einem rationalen Integrale $r(x, y, w)$ gehöriges algebraisches Fundamentalintegral, so folgt aus

$$u_1 = \alpha r(x, y, w) + \beta r(x, y, w) \int \frac{w\, dx}{r(x, y, w)^2},$$

daß, weil auch die Quadratur eine algebraische Funktion von x sein soll und sich diese somit nach dem ersten Abelschen Fundamentalsatz als rationale Funktion von

$$x \text{ und } \frac{w}{r(x, y, w)^2}$$

darstellen läßt, u_1 selbst wieder und daher auch das allgemeine Integral in x, y, w rational sein wird; es folgt zugleich, daß die algebraische Gleichung in u_1 eine lineare sein muß, da sie mit Adjungierung von x, y, w als irreduktibel vorausgesetzt war.

Man kann aber die Form der in x, y, w rationalen Integrale genauer bestimmen. Sei nämlich

$$u = r_0(x, y) + r_1(x, y)\, w + \cdots + r_{\nu-1}(x, y)\, w^{\nu-1},$$

so werden auch alle hieraus hervorgehenden Ausdrücke, die man erhält, wenn ηw statt w substituiert wird, worin η eine ν^{te} Einheitswurzel ist, Integrale der Differentialgleichung sein und somit auch ein partikuläres Integral von der Form existieren

$$u_1 = r_\mu(x, y)\, w^\mu = \sqrt[\nu]{r_\mu(x, y)^\nu\, R(x, y)^\mu},$$

so daß für den Fall, daß die Differentialgleichung ein in x, y, w rationales Integral besitzt und die irreduktible Irrationalität

$$w = R(x, y)^{\frac{1}{\nu}}$$

gesetzt und bemerkt wird, daß die rechte Seite des oben aufgestellten Ausdruckes für u, der Differentialgleichung zweiter Ordnung wegen, nur aus einem oder zwei linear voneinander unabhängigen Posten bestehen kann, sich das allgemeine Integral in der Form ergibt

$$u = c_1 \sqrt[\nu]{P_1(x, y)} + c_2 \sqrt[\nu]{P_2(x, y)},$$

worin P_1 und P_2 rationale Funktionen bedeuten.

Ist dagegen in der Gleichung (5)

II. $$s_1(x,y,w) = 0\,,$$

so ist zunächst unmittelbar zu sehen, daß die Differentialgleichung kein in x, y, w rationales Integral haben kann, wenn die Gleichung (5) nicht wieder eine binomische ist. Denn besäße diese ein solches, das mit $r(x,y,w)$ bezeichnet werden möge, so würde jede andere Lösung u_2 der Gleichung (5), da sie auch ein Integral der Differentialgleichung ist, durch

$$u_2 = \alpha r(x,y,w) + \beta u_1$$

dargestellt sein, worin α und β Konstanten bedeuten, und daher zugleich mit der irreduktibeln Gleichung

$$u_1^\varkappa + s_2(x,y,w)\,u_1^{\varkappa-2} + \cdots + s_\varkappa(x,y,w) = 0$$

auch die Gleichung bestehen

$$\left(\alpha r(x,y,w)+\beta u_1\right)^\varkappa + s_2(x,y,w)\left(\alpha r(x,y,w)+\beta u_1\right)^{\varkappa-2} + \cdots + s_\varkappa(x,y,w) = 0\,,$$

aus denen sich die Beziehung ergibt

$$\varkappa\alpha r(x,y,w)\,\beta^{\varkappa-1}\,u_1^{\varkappa-1} + \cdots + s_\varkappa(x,y,w)\,(1-\beta^\varkappa) = 0\,,$$

und somit vermöge der Irreduktibilität von (5)

$$\varkappa\alpha r(x,y,w)\,\beta^{\varkappa-1} = 0.$$

Da nun für $\beta=0$ das Integral u_2 in x, y, w rational, also die Gleichung (5) nicht irreduktibel wäre, so muß $\alpha=0$, also $u_2=\beta u_1$ sein. Es wäre somit, da dies für alle Lösungen der Gleichung (5) gälte, die Existenz eines in x, y, w rationalen Integrales nur dann möglich, wenn die Gleichung (5) gegen unsere Annahme eine binomische wäre. Wir haben somit nur noch den Fall zu betrachten, in welchem die Differentialgleichung kein in x, y, w rationales Integral besitzt und somit zwei Lösungen u_1 und u_2 der mit Adjungierung von x, y, w irreduktibeln, nicht binomischen Gleichung

(10) $$u^\varkappa + s_2(x,y,w)\,u^{\varkappa-2} + \cdots + s_\varkappa(x,y,w) = 0$$

ein Fundamentalsystem algebraischer Integrale bilden.

Da nun nach dem ersten Abelschen Fundamentalsatz die in dem algebraischen Integrale

$$u_2 = \alpha u_1 + \beta u_1 \int \frac{w\,dx}{u_1^2}$$

enthaltene Quadratur eine rationale Funktion von x, y, w und u_1 ist, so kann man für einen bestimmten Wert von w bei fest gewählten α und β

$$\int_\xi \frac{w\,dx}{u_1^2} = r(x, y, w, u_1)$$

setzen, worin r eine rationale Funktion der eingeschlossenen Größen bedeutet und ξ ein Wert von x ist, für den

$$r(x, y, w, u_1)_\xi = 0$$

wird. Es wird daher

$$u_2 = \alpha u_1 + \beta u_1 r(x, y, w, u_1)$$

sein, worin, in Abkürzung geschrieben,

$$u_1^2 \frac{d\,r(u_1)}{dx} = w \tag{11}$$

ist.

Da aber die algebraische Gleichung (10) mit Adjungierung von x, y, w irreduktibel sein sollte, so folgt nach einem bekannten, von Abel in der Theorie der durch Wurzelzeichen auflösbaren algebraischen Gleichungen aufgestellten Satze, daß sämtliche Lösungen dieser Gleichung vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade sich in $\varkappa_2$ Gruppen von je $\varkappa_1$ Elementen, worin $\varkappa = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2$ ist, nach iterierten Funktionen der in x, y, w, u_1 rationalen Basis

$$\alpha u_1 + \beta u_1 r(u_1) = R(x, y, w, u_1)$$

ordnen lassen, worin für das Anfangselement einer jeden Gruppe

$$R^{\varkappa_1}(u) = u$$

ist, und $R^{\varkappa_1}$ die $\varkappa_1$ fach iterierte R-Funktion bedeutet.

Da nun die durch Iterierung entstehenden Lösungen der Gleichung (10) partikuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, also die Form haben

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \alpha u_1 + \beta u_1 r(u_1) = a_2 u_1 + b_2 u_1 r(u_1) \\
u_3 &= \alpha u_2 + \beta u_2 r(u_2) = a_3 u_1 + b_3 u_1 r(u_1) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_{\lambda+1} &= \alpha u_\lambda + \beta u_\lambda r(u_\lambda) = a_{\lambda+1} u_1 + b_{\lambda+1} u_1 r(u_1) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}
$$

ferner die in u_1 rationale Gleichung (11) wegen der Irreduktibilität von (10) durch alle Lösungen dieser befriedigt wird und sich durch Integration von

$$u_\lambda^2 \frac{d r(u_\lambda)}{d x} = w$$

die Gleichung

$$r(u_\lambda) - r(u_\lambda)_\xi = \int_\xi \frac{w\,dx}{u_\lambda^2}$$

ergibt, so folgt

$$r(u_\lambda) = \int_\xi \frac{w\,dx}{(a_\lambda u_1 + b_\lambda u_1 r(u_1))^2} + r(u_\lambda)_\xi$$

oder durch Ausführung der Integration

$$r(u_\lambda) = -\frac{1}{b_\lambda}\,\frac{1}{a_\lambda + b_\lambda r(u_1)} + \frac{1}{a_\lambda b_\lambda} + r(u_\lambda)_\xi ,$$

woraus sich nach

$$u_{\lambda+1} = a_{\lambda+1} u_1 + b_{\lambda+1} u_1 r(u_1)$$

die Beziehungen ergeben

$$\text{(12)} \qquad a_{\lambda+1} = \alpha a_\lambda + \beta a_\lambda r(u_\lambda)_\xi = a_\lambda\left(\alpha + \beta r(u_\lambda)_\xi\right),$$

$$\text{(13)} \qquad b_{\lambda+1} = \alpha b_\lambda + \frac{\beta}{a_\lambda} + \beta b_\lambda r(u_\lambda)_\xi = \frac{\beta}{a_\lambda} + b_\lambda\left(\alpha + \beta r(u_\lambda)_\xi\right),$$

aus denen

$$\text{(14)} \qquad a_\lambda b_{\lambda+1} - b_\lambda a_{\lambda+1} = \beta$$

folgt, worin

$$a_\lambda = \frac{u_\lambda(\xi)}{u_1(\xi)} \tag{15}$$

ist.

Die obigen Schlüsse werden, wie unmittelbar zu sehen, ungültig, wenn $\alpha = 0$ ist, also die beiden Fundamentalintegrale durch

$$u_1 \quad \text{und} \quad \beta u_1 r(u_1)$$

dargestellt sind, worin $r(u_1)_\xi = 0$ ist. Daß dieser Fall aber unmöglich ist, folgt daraus, daß, wenn

$$u_2 = \beta u_1 r(u_1), \quad u_3 = \beta u_2 r(u_2), \quad \ldots,$$

sich

$$u_2(\xi) = u_3(\xi) = \cdots = 0$$

und somit vermöge der Beziehung (15)

$$a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

ergibt, und somit keine der iterierten Funktionen wieder auf u_1 führen könnte, da zwischen den Fundamentalintegralen

$$u_1 \quad \text{und} \quad u_1 r(u_1)$$

keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten existiert.

Besteht nun die zu u_1 gehörige Gruppe aus den Elementen

$$u_1, \quad a_2 u_1 + b_2 u_1 r(u_1), \quad a_3 u_1 + b_3 u_1 r(u_1), \quad \ldots, \quad a_\lambda u_1 + b_\lambda u_1 r(u_1),$$

so wird aus dem soeben angegebenen Grunde

$$a_{\lambda+1} = 1, \quad b_{\lambda+1} = 0$$

sein müssen. Daraus folgt aber zunächst, daß die Gruppe nicht aus zwei Elementen bestehen kann, da sich aus der Relation (14) für $b_2 = \beta$, $b_3 = 0$ der Wert $a_3 = -1$ ergibt, so daß die erste Gruppe aus den vier Elementen

$$u_1, \quad \alpha u_1 + \beta u_1 r(u_1), \quad -u_1, \quad -\alpha u_1 - \beta u_1 r(u_1)$$

bestehen würde.

Um zu untersuchen, ob die Gruppe aus drei Elementen bestehen kann, bemerke man, daß aus der eben angeführten Beziehung für

$\mathfrak{b}_{\lambda+1} = 0$, $\mathfrak{a}_{\lambda+1} = 1$ der Wert $\mathfrak{b}_\lambda = -\beta$ folgt, und es müßte somit nach (12) und (13)

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_2\left(\alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(\mathrm{u}_2\right)_\xi\right) = \alpha\left(\alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(\alpha\,\mathrm{u}_1\right)_\xi\right)$$

$$\mathfrak{b}_3 = -\beta = \frac{\beta}{\mathfrak{a}_2} + \beta\left(\alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(\mathrm{u}_2\right)_\xi\right)$$

oder

$$\frac{1}{\alpha} + \alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(\alpha\,\mathrm{u}_1\right)_\xi = -1 \tag{16}$$

sein, so daß

$$\mathfrak{a}_3 = -\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

wird. Wenn somit α der Bedingung (16) genügt, so würden die Elemente der ersten Gruppe lauten

$$\mathrm{u}_1, \quad \alpha\,\mathrm{u}_1 + \beta\,\mathrm{u}_1\,\mathrm{r}(\mathrm{u}_1), \quad -\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{u}_1 - \beta\,\mathrm{u}_1\,\mathrm{r}(\mathrm{u}_1),$$

wenn

$$\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_3\left(\alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(\mathrm{u}_3\right)_\xi\right) = -\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(-\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{u}_1\right)_\xi\right) = 1$$

ist; es bilden somit, wenn α und β den Bedingungen unterliegen

$$\alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(\alpha\,\mathrm{u}_1\right)_\xi = -\frac{1+\alpha}{\alpha}$$

$$\alpha + \beta\,\mathrm{r}\left(-(1+\alpha)\,\mathrm{u}_1\right)_\xi = -\frac{1}{1+\alpha},$$

die drei Elemente

$$\mathrm{u}_1, \quad \alpha\,\mathrm{u}_1 + \beta\,\mathrm{u}_1\,\mathrm{r}(\mathrm{u}_1), \quad -(1+\alpha)\,\mathrm{u}_1 - \beta\,\mathrm{u}_1\,\mathrm{r}(\mathrm{u}_1)$$

eine Gruppe. Ist in diesem Falle die irreduktible Gleichung (10) vom dritten Grade, so würde sich, weil ihre sämtlichen Lösungen e i n e Gruppe bilden, wie unmittelbar zu sehen, das allgemeine Integral in der Form darstellen lassen

$$\mathrm{u} = \mathrm{c}_1\sqrt[3]{\mathrm{v}_1} + \mathrm{c}_2\sqrt[3]{\mathrm{v}_2},$$

worin v_1 und v_2 in x, y, w rational ausdrückbare Funktionen bedeuten.

Während hier bei einer Gruppe von drei Elementen die Summe dieser gleich Null ist, wäre dies schon bei einer Periode von vier Elementen im allgemeinen nicht mehr der Fall, da sonst die Summe der Koeffizienten von $u_1 r(u_1)$ verschwinden müßte, während der zweite β, der vierte $-\beta$, also der dritte Null sein müßte, was im allgemeinen nach (13) nicht der Fall ist.

Bilden allgemein die Lösungen der algebraischen Gleichung (10) nur eine Gruppe — was, wenn der Grad $\varkappa$ der Gleichung eine Primzahl ist, stets der Fall sein wird —, so ist bekanntlich nach einem Satze von Abel, wenn

$$\alpha u_1 + \beta u_1 r(u_1) = \vartheta(u_1)$$

gesetzt wird, mit Hilfe der iterierten Funktionen

$$u_1 + \varepsilon \vartheta(u_1) + \varepsilon^2 \vartheta^2(u_1) + \cdots + \varepsilon^{\varkappa-1} \vartheta^{\varkappa-1}(u_1) = \sqrt[\varkappa]{v},$$

worin ε eine primitive $\varkappa^{te}$ Einheitswurzel bedeutet, während

$$u_1 + \varepsilon^{\mu} \vartheta(u_1) + \varepsilon^{2\mu} \vartheta^2(u_1) + \cdots + \varepsilon^{(\varkappa-1)\mu} \vartheta^{\varkappa-1}(u_1) = V_\mu \left(\sqrt[\varkappa]{v}\right)^{\mu}$$

ist, worin V_μ und v rational von den Koeffizienten der Gleichung (10), also rational von x, y, w abhängen. Da aber die linken Seiten dieser Gleichungen zugleich Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, so wird, wie oben ausgeführt worden, die Differentialgleichung Integrale besitzen, welche zwei binomischen Gleichungen genügen, und daher das allgemeine Integral die Form haben

$$u = c_1 \left(g_\mu(x,y)\, R(x,y)^{\mu} \right)^{\frac{1}{\varkappa\nu}} + c_2 \left(h_\rho(x,y)\, R(x,y)^{\rho} \right)^{\frac{1}{\varkappa\nu}},$$

wenn

$$w = R(x,y)^{\frac{1}{\nu}}$$

ist, $\varkappa$ eine positive ganze Zahl und g_μ, h_ρ, R rationale Funktionen von x und y sind.

Bilden die Lösungen der algebraischen Gleichung jedoch $\varkappa_2$ Gruppen von je $\varkappa_1$ Elementen, worin $\varkappa = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2$ ist, und in denen

$$u_1, \quad u_1', \quad u_1'', \quad \ldots, \quad u_1^{(\varkappa_2 - 1)}$$

die Anfangselemente sein mögen, so untersuche man zunächst nach ABEL, um zu sehen, ob die algebraische Gleichung (10) wiederum durch Wurzelzeichen algebraisch auflösbar ist, die Gleichung

$$(u - u_1)\,(u - \vartheta(u_1))\,(u - \vartheta^2(u_1)) \ldots \left(u - \vartheta^{\varkappa_1 - 1}(u_1)\right) = 0\,,$$

dann wird nach der Theorie der ähnlichen Funktionen nur einer der Koeffizienten dieser Gleichung zu ermitteln sein, da alle andern sich rational durch diese und die Koeffizienten der Gleichung (10) ausdrücken lassen. Nehmen wir nun als zu bestimmenden Koeffizienten den Ausdruck

$$y_1 = u_1 + \vartheta(u_1) + \vartheta^2(u_1) + \cdots + \vartheta^{\varkappa - 1}(u_1)\,,$$

von dem wir zunächst annehmen wollen, daß er nicht identisch Null ist, so werden, wenn die dem y_1 analogen Größen der andern Gruppen mit

$$y_1', \quad y_1'', \quad \ldots, \quad y_1^{(\varkappa_2 - 1)}$$

bezeichnet werden, diese Größen als Lösungen der Gleichung

$$(y - y_1)\,(y - y_1') \ldots \left(y - y_1^{(\varkappa_2 - 1)}\right) = 0$$

zu betrachten sein, deren Koeffizienten als symmetrische Funktionen sämtlicher Lösungen der Gleichung (10) bekannte rationale Funktionen von x, y, w sind, um sodann y_1 durch Auflösung dieser Gleichung zu ermitteln.

Bemerkt man aber, daß $y_1, y_1', \ldots$ als lineare Zusammensetzungen von Integralen der Differentialgleichung wieder Integrale derselben sind, so wird die y-Gleichung wiederum den Charakter der u-Gleichung (10) haben, irreduktibel zu sein und von der Beschaffenheit, daß alle ihre Lösungen Integrale der Differentialgleichung sind, und daß ihr erster Koeffizient gleich Null ist, weil er die Summe aller Lösungen von (10) darstellt, in welcher $s_1(x, y, w) = 0$ war, so können wir diese Gleichung wieder wie oben behandeln. Bilden ihre Lösungen nur eine Gruppe — was wieder stets der Fall sein wird, wenn $\varkappa_2$ eine Primzahl ist —, so können wir dieselben durch Wurzelzeichen auflösen; bilden sie jedoch mehrere Gruppen und ist die Summe der Elemente einer, also jeder Gruppe, gleich Null, so können wir dieselbe Schlußweise nicht fortsetzen — ist dies jedoch nicht der Fall, so können wir mit der Summe der Elemente je einer Gruppe eine neue Gleichung bilden, auf die sich dieselbe Schlußweise anwenden läßt, bis wir zu einer Gleichung gelangen, deren Lösungen nur *eine* Gruppe bilden und die somit durch Wurzelzeichen auflösbar ist —, was jedoch im allgemeinen nicht stattzufinden braucht, wenn die Lösungen der Gleichung (10) mehrere Gruppen bilden und in einer der in der angegebenen Weise reduzierten Gruppen die Summe der Elemente gleich Null ist.

Wenn somit eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x und einer beliebigen algebraischen Funktion y von x sind, zwei algebraische Fundamentalintegrale besitzt, welche ein und derselben algebraischen Gleichung genügen, mit Adjungierung von

$$x,\ y,\ w = e^{-\int \rho_1(x,y)\,dx} = R\left(x,y\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

worin R (x, y) rational aus x und y zusammengesetzt ist, irreduktibel ist, so wird diese Gleichung im allgemeinen — abgesehen von den oben bezeichneten Fällen, in denen die Summe der Elemente in den reduzierten Gruppen verschwindet — durch Wurzelzeichen algebraisch auflösbar sein, und somit aus den vorher entwickelten Gründen das allgemeine Integral der Differentialgleichung in der Form enthalten sein,

$$u = c_1 \sqrt[\varkappa\nu]{S_1(x,y)} + c_2 \sqrt[\varkappa\nu]{S_2(x,y)},$$

worin $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$ und S_1, S_2 rationale Funktionen von x und y sind.

Es ist leicht ersichtlich, daß die oben ausgesprochene hinreichende Bedingung für die durch Wurzelzeichen mögliche algebraische Auflösung der Gleichung (10) auch so ausgesprochen werden kann, daß, wenn $d_1, d_2, d_3, \ldots$ sämtliche Divisoren der Zahl $\varkappa$ — von dieser selbst abgesehen — bedeuten, keine der Summen von je $d_1, d_2, d_3, \ldots$ Lösungen der Gleichung (10) verschwinden sollen.

Wir haben der Einfachheit der Darstellung und Schreibweise wegen in den obigen Auseinandersetzungen angenommen, daß die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung rational aus x und nur einer algebraischen Funktion y von x zusammengesetzt sind; es ist aber unmittelbar ersichtlich, daß alle Folgerungen ebenso wie die schließlichen Resultate bestehen bleiben, wenn wir eine lineare Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2u}{dx^2} + y_1 \frac{du}{dx} + y_2 u = 0,$$

worin y_1 und y_2 beliebige algebraische Funktionen von x sind, unseren Betrachtungen zugrunde legen, wenn man nur die Gleichungen (5) und (6) als irreduktibel mit Adjungierung von

$$x, y_1, y_2, w = e^{-\int y_1 dx} = R\left(x, y\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

voraussetzt.