Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Die Form algebraischer Integrale linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1915, 11

Mit Hilfe der in einer früheren Arbeit angestellten Untersuchung über die Form der algebraischen Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird hier gezeigt, in welcher Weise diese Untersuchungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung ausgedehnt werden können, wobei eine Reihe von Fragen, welche die Erweiterung der Abelschen Fundamentalsätze der Integralrechnung sowie die durch Wurzelzeichen darstellbaren Auflösungen algebraischer Gleichungen betreffen, zur Erörterung kommt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1915, S. XXXIX)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1915. 11. Abhandlung

Die Form algebraischer Integrale linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung

von

Leo Koenigsberger
in Heidelberg

Eingegangen am 18. September 1915

Heidelberg 1915
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1247

Sei die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung gegeben

$$(1)\qquad u''' + y_1 u'' + y_2 u' + y_3 u = 0\,,$$

in welcher y_1, y_2, y_3 beliebige algebraische Funktionen von x bedeuten, so soll die Untersuchung der Form ihrer algebraischen Integrale nach den vier Fällen gesondert werden, daß die Differentialgleichung drei transzendente oder zwei transzendente und ein algebraisches oder ein transzendentes und zwei algebraische, oder endlich drei algebraische Fundamentalintegrale besitzt.

Seien

1. t_1, t_2, t_3 drei transzendente Fundamentalintegrale, und besitze die Differentialgleichung (1) ein algebraisches Integral u_1, so werden zwei dieser transzendenten Integrale t_1, t_2 oder t_1, t_3 mit u_1 wiederum ein Fundamentalsystem bilden, da sonst aus den Beziehungen

$$(2)\qquad a_1 t_1 + a_2 t_2 = u_1 \qquad \text{und} \qquad b_1 t_1 + b_3 t_3 = u_1$$

sich die lineare Relation

$$(a_1 - b_1)\, t_1 + a_2 t_2 - b_3 t_3 = 0$$

ergeben würde, was der Voraussetzung der drei transzendenten Fundamentalintegrale widerspricht.

Wir werden somit, wenn für den Fall 1. ein algebraisches Integral existiert, auf den Fall

2. zurückgeführt, daß die Differentialgleichung zwei transzendente t_1, t_2 und ein algebraisches Fundamentalintegral u_1 besitzt. In diesem Falle werden, wenn u_1 die Lösung einer mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3 irreduktibeln Gleichung

$$(3)\qquad u^m + \rho_1(x, y_1, y_2, y_3)\, u^{m-1} + \cdots + \rho_m(x, y_1, y_2, y_3) = 0$$

ist, in welcher $\rho_1, \ldots \rho_m$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen darstellen, bekanntlich sämtliche Lösungen Integrale der Differentialgleichung (1) sein. Schließen wir den Fall aus, daß die Gleichung (3) eine binomische, daß also

$$u_1 = \sqrt[m]{-\rho_m(x, y_1, y_2, y_3)}$$

ist, so ist unmittelbar zu sehen, daß, wenn u_2 eine Lösung der Gleichung (3) ist, das transzendente Integral t_1 mit den beiden algebraischen Integralen u_1 und u_2 ein Fundamentalsystem bildet, da eine Gleichung von der Form

$$t_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 ,$$

in welcher m_1 und m_2 Konstanten sind, nicht bestehen kann.

Wir können somit die beiden ersten Fälle in den folgenden Satz zusammenfassen:

Hat eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung ein transzendentes Integral t_1, so bildet dieses entweder mit zwei anderen transzendenten Integralen t_2 und t_3 ein Fundamentalsystem, oder, wenn die Differentialgleichung ein algebraisches Integral u_1 besitzt, mit einem transzendenten Integrale t_2 und einem algebraischen Integrale von der Form

$$u_1 = \sqrt[m]{-\rho_m(x, y_1, y_2, y_3)} ,$$

oder endlich mit zwei algebraischen Integralen ein solches.

Es wird somit unter der Annahme eines algebraischen Integrales der Differentialgleichung (1) zur Erledigung der Fälle 1. und 2. nur der Fall

3. zu untersuchen sein, in welchem die Differentialgleichung (1) ein transzendentes und zwei algebraische Integrale t_1, u_1, v_1 besitzt.

Zunächst können wieder u_1 und v_1 Lösungen von zwei verschiedenen binomischen Gleichungen sein, so daß das allgemeine Integral die Form hat

$$(4) \qquad u = c_1 t_1 + c_2 \sqrt[\mu]{R_1(x, y_1, y_2, y_3)} + c_3 \sqrt[\nu]{R_2(x, y_1, y_2, y_3)} ,$$

worin R_1 und R_2 rationale Funktionen bedeuten. Schließen wir diesen Fall aus, und sei u_2 eine zu u_1 gehörige Lösung der u-Gleichung, so können zunächst u_1, u_2, v_1 nicht drei algebraische Fundamentalintegrale sein, da t_1 ein transzendentes Integral sein sollte, und es müßte daher eine Beziehung von der Form stattfinden

$$(5) \qquad v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 .$$

Nun kann die u-Gleichung entweder nur zwei, nicht durch multiplikatorische Konstanten verschiedene Lösungen besitzen, also u_1 und u_2 die Form haben

$$u_1 = \sqrt[p]{r_1 + \sqrt{r_2}}\,, \qquad u_2 = \sqrt[p]{r_1 - \sqrt{r_2}}\,,$$

worin r_1 und r_2 rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3 bedeuten, während nach (5) v_1 linear mit konstanten Koeffizienten aus u_1 und u_2 zusammengesetzt ist, oder es findet für jede andere Lösung u_3 der u-Gleichung, da u_1, u_3, v_1 wiederum aus dem oben angegebenen Grunde nicht Fundamentalintegrale sein können, eine lineare Beziehung statt

$$v_1 = \mu_1 u_1 + \mu_3 u_3\,, \tag{6}$$

welche in Verbindung mit (5) bei Ausschluß der eben behandelten Fälle für die algebraische Gleichung in u die Eigenschaft ergeben würde, daß alle ihre Lösungen homogene lineare Funktionen mit konstanten Koeffizienten von zwei derselben u_1 und u_2 sind, wobei dann v_1 in derselben Weise aus u_1 und u_2 zusammengesetzt ist.

Um nun die Natur der mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3 irreduktibeln algebraischen Gleichung in u zu untersuchen, welche die Eigenschaft hat, daß jede ihrer Lösungen eine lineare homogene Funktion mit konstanten Koeffizienten von zwei derselben u_1 und u_2 ist, bilde man die lineare homogene Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} u & u_1 & u_2 \\ u' & u_1' & u_2' \\ u'' & u_1'' & u_2'' \end{vmatrix} = 0\,, \tag{7}$$

von welcher u_1 und u_2 zwei algebraische Fundamentalintegrale sind, oder

$$u'' + Y_1 u' + Y_2 u = 0\,, \tag{8}$$

in welcher zunächst Y_1 und Y_2 algebraische Funktionen sein werden. Da aber aus der Gleichung (3) sich

$$\begin{aligned} u_1' &= \sigma_0 + \sigma_1 u_1 + \cdots + \sigma_{m-1} u_1^{m-1} \\ u_1'' &= \tau_0 + \tau_1 u_1 + \cdots + \tau_{m-1} u_1^{m-1} \end{aligned}$$

ergibt, worin die σ und τ rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3 sind, und durch Substitution in (8)

$$(\tau_0 + Y_1\sigma_0) + (\tau_1 + Y_1\sigma_1 + Y_2)u_1 + (\tau_2 + Y_1\sigma_2)u_1^2 + \cdots + (\tau_{m-1} + Y_1\sigma_{m-1})u_1^{m-1} = 0$$

folgt, so wird diese Gleichung auch bestehen, wenn u_1 durch u_2, $u_3, \ldots u_m$, die sämtlich wegen der linearen Beziehung aller zu u_1 und u_2 Integrale der Differentialgleichung 2ter Ordnung (8) sind, ersetzt wird, und daher, da die Gleichheit zweier Lösungen wegen der Irreduktibilität der Gleichung (3) ausgeschlossen ist,

$$\sigma_0 + Y_1\tau_0 = 0, \qquad \sigma_1 + Y_1\tau_1 + Y_2 = 0, \qquad \sigma_2 + Y_1\tau_2 = 0$$

usw. sein, woraus folgt, daß die Koeffizienten Y_1, Y_2 der Differentialgleichung 2ter Ordnung, sowie die ρ, σ, τ es waren, rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3 sind.

Wir finden somit, daß, wenn in einer mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3 irreduktibeln algebraischen Gleichung alle Lösungen lineare homogene Funktionen mit konstanten Koeffizienten von zweien derselben sind, die lineare homogene Differentialgleichung 2ter Ordnung, welche die beiden letzteren zu Fundamentalintegralen hat, Koeffizienten besitzt, welche, ebenso wie die Koeffizienten der algebraischen Gleichung rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3 sind[1]). Wenn daher im Falle 3. die lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung durch die Lösungen einer mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_2 irreduktibeln algebraischen Gleichung befriedigt wird, in welcher sämtliche Lösungen lineare homogene Funktionen von zweien derselben sind, so werden auch die sämtlichen Lösungen der algebraischen Gleichung in u einer homogenen linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$u'' + Y_1u' + Y_2u = 0$$

[1]) Wir können diese Bemerkung in folgender Weise verallgemeinern: Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung μter Ordnung, deren Koeffizienten algebraische Funktionen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ von x sind, ein algebraisches Integral besitzt welches die Lösung einer mit Adjungierung von $x, y_1, y_2, y_3, \ldots$ irreduktibeln algebraischen Gleichung ist, so sind bekanntlich sämtliche Lösungen dieser Gleichung Integrale jener Differentialgleichung μter Ordnung; aber es werden auch umgekehrt, wenn sämtliche Lösungen einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten von x und algebraischen Funktionen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ von x rational abhängen, einer linearen homogenen Differentialgleichung genügen, die Koeffizienten dieser rationale Funktionen von $x, y_1, y_2, y_3, \ldots$ sein — vorausgesetzt, daß die Ordnung der Differentialgleichung den Grad der algebraischen Gleichung in u nicht übersteigt.

genügen, in welcher Y_1 und Y_2 rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3 sind. Da aber dann für die zwei Lösungen u_1 und u_2, welche Fundamentalintegrale sind,

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' = c e^{-\int Y_1 dx} = w'$$

eine algebraische Funktion, also nach dem ABELschen Satze über die durch Logarithmen algebraischer Funktionen ausdrückbaren Integrale

$$\int Y_1 dx = R\left(x, y_1, y_2, y_3\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

ist, worin R eine rationale Funktion bedeutet, so können wir zunächst aus der u-Gleichung den mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3 und w' irreduktibeln Faktor absondern, der die Lösung u_1 hat, und es wird dann — da wir wieder den Fall der binomischen Gleichung, also auch den der rationalen Ausdrückbarkeit von u_1 durch die bezeichneten Größen ausschließen dürfen — mindestens noch eine Lösung des irreduktibeln Faktors existieren, welche mit u_1 ein Fundamentalsystem bildet, und die wir jetzt wieder u_2 nennen wollen. Wir erhalten somit u_1 und u_2 als Lösungen einer mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3, w' irreduktibeln Gleichung, deren sämtliche Lösungen die oben aufgestellte Differentialgleichung 2ter Ordnung befriedigen, und von welchen u_1 und u_2 als Fundamentalintegrale durch die Beziehung miteinander verbunden sind

$$u_2 = \alpha u_1 + \beta u_1 \int \frac{w'}{u_1^2} dx .$$

Es ist somit u_2 wiederum nach dem ABELschen Satze eine rationale Funktion von u_1, deren Koeffizienten rational aus x, y_1, y_2, y_3, w' zusammengesetzt sind, so daß die u-Gleichung den Charakter einer ABELschen Gleichung besitzt; die Untersuchung über die Form der Auflösung dieser Gleichung ist aber in meiner Arbeit über die algebraischen Integrale der linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung[2]) näher ausgeführt worden.

---

[2]) „Über den ABELschen Fundamentalsatz der Integralrechnung II." Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1915. 6. Abhandlung.

Wir haben somit nur noch den Fall

4. zu behandeln, in welchem die Differentialgleichung

$$u''' + y_1 u'' + y_2 u' + y_3 u = 0$$

drei algebraische Fundamentalintegrale besitzt, in welchen also, wenn diese u_1, v_1, w_1 sind,

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & u_1'' \\ v_1 & v_1' & v_1'' \\ w_1 & w_1' & w_1'' \end{vmatrix} = W = c\,e^{-\int y_1 dx}$$

als algebraische Funktion von x die Form hat

$$W = R\left(x, y_1\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

worin R eine rationale Funktion bedeutet.

Seien nun u_1, v_1, w_1 Lösungen der drei mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3, W irreduktibeln Gleichungen

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} u^m &+ \varrho_1\left(x, y_1, y_2, y_3, W\right) u^{m-1} + \cdots = 0 \\ v^n &+ \sigma_1\left(x, y_1, y_2, y_3, W\right) v^{n-1} + \cdots = 0 \\ w^p &+ \tau_1\left(x, y_1, y_2, y_3, W\right) w^{p-1} + \cdots = 0\,, \end{aligned} \right.$$

worin die ϱ, σ, τ rationale Zusammensetzungen der eingeschlossenen Größen bedeuten, so werden wieder sämtliche Lösungen dieser drei Gleichungen Integrale der Differentialgleichung 3ter Ordnung sein. Nehmen wir zunächst an, daß die Lösungen je einer der drei Gleichungen sich nur um multiplikatorische Konstanten unterscheiden, daß also u_1, v_1, w_1 Lösungen der binomischen Gleichungen sind

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} u^m &= \varrho\left(x, y_1, y_2, y_3, W\right) \\ v^n &= \sigma\left(x, y_1, y_2, y_3, W\right) \\ w^p &= \tau\left(x, y_1, y_2, y_3, W\right)\,, \end{aligned} \right.$$

die mit Adjungierung der angegebenen Größen irreduktibel sein sollten, so wird die Determinante (9) der Differentialgleichung 3ter Ordnung, wie durch Substitution unmittelbar zu ersehen, die Beziehung liefern

$$\rho^{\frac{1}{m}} \sigma^{\frac{1}{n}} \tau^{\frac{1}{p}} = u_1 v_1 w_1 = P(x, y_1, y_2, y_3, W), \tag{12}$$

worin P eine rationale Funktion bedeutet.

Da aber, wenn zwei binomische Gleichungen

$$z^{\varkappa} = r(x, y_1, y_2, y_3, W), \qquad z^{\lambda} = s(x, y_1, y_2, y_3, W),$$

in denen r und s rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen darstellen, eine gemeinsame Lösung z_1 besitzen, dann auch z_1 einer gleichartigen binomischen Gleichung

$$z^d = t(x, y_1, y_2, y_3, W)$$

genügt, worin d der größte gemeinschaftliche Teiler von $\varkappa$ und λ ist, so folgt, daß, weil die Gleichung λ^{ten} Grades irreduktibel sein sollte, unter der Annahme $\varkappa > \lambda$, $\varkappa$ durch λ teilbar sein muß, was auch so ausgesprochen werden kann: die binomische Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades ist stets mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3, W irreduktibel, wenn $\varkappa$ eine Primzahl ist, und für eine zusammengesetzte Zahl $\varkappa$ nur dann reduktibel, wenn sie mit einer gleichartigen binomischen Gleichung, deren Grad ein Teiler von $\varkappa$ ist, eine Lösung gemein hat. Und hieraus ergibt sich eine Beziehung zwischen den Gradzahlen der Gleichungen (11), welche als irreduktibel vorausgesetzt waren. Da nämlich aus (12) durch Potenzierung mit der Zahl m n nach (11)

$$w^{mn} = \frac{P^{mn}}{\rho^n \sigma^m}$$

folgt, so wird mn durch p, und ebenso mp durch n, und np durch m teilbar sein, welche Beziehung analog ist der in der oben erwähnten Arbeit für binomische Integrale linearer Differentialgleichungen 2ter Ordnung gefundenen, wonach diese zu gleichen Gradzahlen gehörten.

Da wir nun aus den oben angegebenen Gründen annehmen dürfen, daß

$$W = R\left(x, y_1\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3 irreduktibel ist, so werden, wenn man mit η eine primitive ν^{te} Einheitwurzel bezeichnet, auch die Lösungen der binomischen Gleichungen, in denen ηW statt

W substituiert wird, Integrale der Differentialgleichung liefern. Dieselben Schlüsse, wie die für eine Differentialgleichung 2ter Ordnung benutzten, führen dann zu dem Resultate, daß der Grad der binomischen Gleichungen im allgemeinen der dritte sein wird. Schließt man nämlich, wie dort, den Fall aus, daß die rechten Seiten der binomischen Gleichungen nur aus einem Posten der Form bestehen

$$g_\mu(x, y_1, y_2, y_3)\,W^\mu\,,$$

so folgt, wenn eine der Lösungen der binomischen Gleichung

$$w^p = \tau(x, y_1, y_2, y_3, \eta W)$$

mit w_2 bezeichnet wird, der Gleichung (12) analog

$$u_1 v_1 w_2 = P_1(x, y_1, y_2, y_3, W)\,,$$

oder, weil

$$w_2 = c_1 u_1 + c_2 v_1 + c_3 w_1$$

ist, vermöge (12), wie leicht zu sehen,

$$u_1^2 v_1,\ u_1^2 w_1,\ v_1^2 u_1,\ v_1^2 w_1,\ w_1^2 u_1,\ w_1^2 v_1$$

als rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3, W_1 und somit entsprechend aus

$$u_1(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1)(a u_1 + b v_1 + c w_1) = P_2(x, y_1, y_2, y_3, W)$$

u_1^3, v_1^3, w_1^3 als rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3, W. Der Grad der als irreduktibel vorausgesetzten binomischen Gleichungen ist somit im allgemeinen der dritte.

Unterscheiden sich jedoch die Lösungen der drei Gleichungen (10) nicht nur um multiplikatorische Konstanten, sind diese also nicht binomische, so können wir, wenn wir noch den Fall ausschließen, daß die drei algebraischen Fundamentalintegrale als Lösungen einer algebraischen Gleichung angehören, annehmen, daß zwei Integrale u_1 und u_2 der u-Gleichung genügen, während v_1 oder w_1 oder beide wieder die Lösungen binomischer Gleichungen sein können. In diesem Falle werden u_1, u_2, v_1 oder u_1, u_2, w_1 ein Fundamentalsystem algebraischer Integrale bilden, da sich sonst aus den Gleichungen

$$u_2 = \alpha u_1 + \beta v_1\,, \quad u_2 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 w_1$$

gegen die Voraussetzung die lineare Relation

$$(\alpha-\alpha_1)u_1+\beta v_1-\beta_1 w_1=0$$

ergeben würde. Da aber unter dieser Annahme alle andern Lösungen der u-Gleichung, da sie der oben gemachten Voraussetzung wegen mit u_1 und u_2 kein Fundamentalsystem bilden sollten, lineare Funktionen dieser beiden Integrale mit konstanten Koeffizienten sein müssen, so ist die Untersuchung auf den vorher behandelten Fall 3. zurückgeführt, für welchen die Form der u-Gleichung festgestellt wurde. Es bleibt somit zur Erledigung des Falles 4. nur noch die Annahme übrig, daß die drei algebraischen Fundamentalintegrale u_1, u_2, u_3 als Lösungen der mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3, W irreduktibeln Gleichung

$$(13)\qquad u^m+\rho_1(x,y_1,y_2,y_3,W)u^{m-1}+\cdots+\rho_m(x,y_1,y_2,y_3,W)=0$$

angehören.

Nehmen wir zunächst an, daß $\rho_1(x, y_1, y_2, y_3, W)$ von Null verschieden, und somit diese Funktion ein in den bezeichneten Größen rationales Integral der Differentialgleichung 3ter Ordnung ist, so wird diese Annahme sich allgemein dem Falle unterordnen, daß die Differentialgleichung 3ter Ordnung drei beliebige algebraische Fundamentalintegrale u_1, u_2, u_3 besitzt, von denen mindestens eines eine rationale Funktion von x, y_1, y_2, y_3, W ist.

Sei u_1 dieses rationale Integral, und macht man in der Differentialgleichung 3ter Ordnung die Substitution

$$(14)\qquad u=u_1\int z\,dx\,,$$

so geht dieselbe in die Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$(15)\qquad z''+\left(\frac{3u_1'}{u_1}+y_1\right)z'+\frac{3u_1''+2y_1u_1'+y_2u_1}{u_1}z=0$$

über, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3, W sind, und für welche die zugehörige Determinate W_1 definiert ist durch

$$(16)\qquad W_1=c\begin{vmatrix} z_1 & z_2\\ z_1' & z_2'\end{vmatrix}=c\,e^{-\int\left(\frac{3u_1'}{u_1}+y_1\right)dx}=\frac{c}{u_1^3}W\,;$$

den beiden algebraischen Integralen u_2 und u_3 entsprechend sind vermöge der Substitution (14)

$$(17) \qquad z_1 = \frac{d\left(\frac{u_2}{u_1}\right)}{dx}, \quad z_2 = \frac{d\left(\frac{u_3}{u_1}\right)}{dx}$$

zwei algebraische Fundamentalintegrale der Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung (15).

Genügen z_1 und z_2 zwei binomischen Gleichungen $\varkappa^{\text{ten}}$ und λ^{ten} Grades, so muß nach den in der oben bezeichneten Arbeit für die Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung ausgeführten Untersuchungen $\varkappa = \lambda$ sein; sind jedoch z_1 und z_2 Lösungen einer mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3 und von W_1, oder nach (16) von W irreduktibeln Gleichung

$$(18) \qquad z^{\varkappa} + s_1(x, y_1, y_2, y_3, W)\, z^{\varkappa-1} + \cdots + s_{\varkappa}(x, y_1, y_2, y_3, W) = 0\,,$$

so wird die Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung (15), wenn $s_1(x, y_1, y_2, y_3, W)$ von Null verschieden ist, ein in x, y_1, y_2, y_3, W rationales Integral z_0 besitzen, und es wird das zu diesem Integral gehörige Fundamentalintegral

$$z' = \alpha z_0 + \beta z_0 \int \frac{W_1}{z_0^2}\, dx = \alpha z_0 + \beta z_0 \int \frac{W}{u_1^3 z_0^2}\, dx$$

nach dem Abelschen Satze ebenfalls in x, y_1, y_2, y_3, W rational sein. Es würde sich daher, da das allgemeine Integral von (15) denselben Charakter hat, wegen der Irreduktibilität von (18) der frühere Fall der binomischen Gleichungen für $\varkappa = \lambda = 1$ ergeben, und somit nach (17) außer u_1 auch u_2 und u_3 in den bezeichneten Größen rational sein, so daß wir somit für u_1, u_2, u_3 auf den früher behandelten Fall von drei binomischen Gleichungen, hier vom 1^{ten} Grade, zurückgeführt werden. Ist jedoch in der Gleichung (18) $s_1(x, y_1, y_2, y_3, W) = 0$, so hat, wie in meiner früheren Arbeit gezeigt worden, die Differentialgleichung (15) überhaupt kein in den bezeichneten Größen rationales Integral. Es wird sich dann zwischen den beiden Integralen z_1 und z_2 der Differentialgleichung (15) vermöge der Beziehung

$$(19) \qquad z_2 = \varkappa z_1 + \beta z_1 \int \frac{W}{u_1^3 z_1^2}\, dx$$

z_2 als rationale Funktion von z_1 ergeben mit in x, y_1, y_2, y_3, W rationalen Koeffizienten, da u_1 in diesen Größen rational vorausgesetzt war, die Untersuchung der Gleichung (18) somit durch die in der bezeichneten Arbeit angestellten Betrachtungen erledigt sein — die Werte von u_2 und u_3 folgen dann aus der Gleichung (14).

Wir haben somit nur noch den Fall 4. unter der Annahme zu untersuchen, daß die drei algebraischen Fundamentalintegrale u_1, u_2, u_3 ein und derselben, mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3, W irreduktibeln algebraischen Gleichung (13) angehören, und die Differentialgleichung 3ter Ordnung kein in den bezeichneten Größen rationales Integral besitzt — es werden dann sämtliche Lösungen der Gleichung homogene lineare Funktionen von u_1, u_2, u_3 mit konstanten Koeffizienten sein müssen.

Setzt man wieder

$$u = u_1 \int z\,dx$$

in die Differentialgleichung 3ter Ordnung ein, so ergibt sich die Differentialgleichung 2ter Ordnung (15), für welche ein Fundamentalsystem algebraischer Integrale z_1 und z_2 durch die Gleichungen (17) dargestellt wird, in denen u_1 eine algebraische, nicht, wie dort, rationale Funktion von x, y_1, y_2, y_3, W ist. Sind nun z_1 und z_2, wie nach den obigen Auseinandersetzungen angenommen werden darf, zwei Lösungen der mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3, W, u_1 irreduktibeln algebraischen Gleichung — der Fall binomischer Gleichungen wiederum ausgeschlossen —

$$(20)\qquad z^\varkappa + s_1(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1)\, z^{\varkappa-1} + \cdots + s_\varkappa(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1) = 0\,,$$

so werden sämtliche Lösungen dieser Gleichung der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung (15) genügen, und wieder nach dem Abelschen Satze sich z_2 als rationale Funktion von z_1 ergeben mit Koeffizienten, welche rational aus x, y_1, y_2, y_3, W, u_1 zusammengesetzt sind.

Da sich nun aber zufolge der Beziehungen

$$u_2 = u_1 \int z_1\,dx, \quad u_3 = u_1 \int z_2\,dx$$

u_2 und u_3 als Funktionen von demselben Charakter in der Form

$$u_2 = R_2(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1, z_1), \qquad u_3 = R_3(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1, z_2)$$

darstellen, worin R_2 und R_3 rationale Funktionen bedeuten, ferner z_2 rational in z_1, und z_1 vermöge (17) rational in u_1 und u_2 ausdrückbar ist, so folgt, daß

$$u_3 = R(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1, u_2)$$

ist, worin R eine rationale Funktion der eingeschlossenen Größen darstellt.

Wir finden somit, daß, wenn u_1, u_2, u_3 drei algebraische Fundamentalintegrale der Differentialgleichung 3ter Ordnung sind, welche einer mit Adjungierung von x, y_1, y_2, y_3, W irreduktibeln algebraischen Gleichung genügen, dann eines dieser Integrale eine rationale Funktion der beiden andern ist mit Koeffizienten, welche in den bezeichneten Größen rational sind, während alle andern Lösungen der algebraischen Gleichung lineare homogene Funktionen mit konstanten Koeffizienten von u_1, u_2, u_3 sind — analog dem für Differentialgleichungen 2ter Ordnung früher gefundenen Satze, daß, wenn u_1 und u_2 Fundamentalintegrale dieser und zugleich Lösungen derselben algebraischen Gleichung sind, u_2 eine rationale Funktion von u_1 ist, während die übrigen Lösungen dieser irreduktibeln Gleichung lineare homogene Funktionen von u_1 und u_2 mit konstanten Koeffizienten sind.

Bevor wir die Natur dieser Gleichungen untersuchen, schicken wir zunächst einige Bemerkungen voraus:

Sei die algebraische Gleichung

$$f(u) = u^{\varkappa} + p_1 u^{\varkappa-1} + p_2 u^{\varkappa-2} + \cdots + p_{\varkappa} = 0 \tag{21}$$

gegeben, in welcher $p_1, p_2, \ldots p_{\varkappa}$ algebraische Funktionen von x bedeuten, und sei diese mit Adjungierung jener Größen reduktibel, so wird, wenn wir eine Lösung derselben mit u_1 bezeichnen, und die gleichartige Gleichung niedrigsten Grades, welche ebenfalls die Lösung u_1 hat,

$$u^{\lambda} + q_1 u^{\lambda-1} + q_2 u^{\lambda-2} + \cdots + q_{\lambda} = 0 \tag{22}$$

ist, diese mit Adjungierung jener algebraischen Funktionen von x irreduktibel, und daher alle ihre Lösungen auch Lösungen der Gleichung (21) sein. Es wird daher die identische Zerlegung gelten

$$u^{\varkappa} + p_1 u^{\varkappa-1} + \cdots + p_{\varkappa} = (u^{\lambda} + q_1 u^{\lambda-1} + \cdots + q_{\lambda})(u^{\varkappa-\lambda} + r_1 u^{\varkappa-\lambda} + \cdots + r_{\varkappa-\lambda}), \tag{23}$$

und somit durch Division mit $u - u_1$

$$\frac{f(u)}{u-u_1} = u^{\varkappa-1} + \left.\begin{array}{r} p_1 \\ + u_1 \end{array}\right| u^{\varkappa-2} + \cdots + \left.\begin{array}{r} p_{\varkappa-1} \\ + p_{\varkappa-2}u_1 \\ + \vdots \\ + u_1^{\varkappa-1} \end{array}\right| \tag{24}$$

$$= \left(u^{\lambda-1} + \left.\begin{array}{r} q_1 \\ + u_1 \end{array}\right| u^{\lambda-2} + \cdots + \left.\begin{array}{r} q_{\lambda-1} \\ + q_{\lambda-2}u_1 \\ + \vdots \\ + u_1^{\lambda-1} \end{array}\right| \right) \left(u^{\varkappa-\lambda} + r_1 u^{\varkappa-\lambda-1} + \cdots + r_{\varkappa-\lambda}\right)$$

sich ergeben; für den Fall der Reduktibilität von $f(u) = 0$ wird also auch die Gleichung

$$\frac{f(u)}{u-u_1} = 0 \tag{25}$$

mit Adjungierung von u_1 reduktibel sein, wenn u_1 eine Lösung der Gleichung $f(u) = 0$ ist, und zwar so, daß die Koeffizienten des einen Faktors außer den Größen $p_1, p_2, \ldots$ noch u_1 rational enthalten, während der zweite Faktor von u_1 unabhängig ist. Umgekehrt wird aber die Reduktibilität der Gleichung (25) nicht die von $f(u) = 0$ nach sich ziehen, oder es wird nicht aus der Irreduktibilität der letzteren Gleichung auf die von (25) geschlossen werden können, wie schon aus der Existenz irreduktibler Gleichungen ersichtlich ist, deren Lösungen rationale Funktionen e i n e r derselben sind — immer vorausgesetzt, daß u_1 der Bedingung unterliegt, eine Lösung der Gleichung $f(u) = 0$ zu sein.

Habe nun die Gleichung (13) die Eigenschaft, daß ihre Lösungen Integrale der Differentialgleichung 3ter Ordnung (1) sind, von denen u_1, u_2, u_3 ein Fundamentalsystem bilden, also, wie oben gezeigt worden, u_3 eine rationale Funktion von $x, y_1, y_2, y_3, W, u_1, u_2$ ist, so setze man, um die Natur dieser Gleichung festzustellen, wie dies schon oben geschehen, wieder

$$u = u_1 \int z\,dx\,,$$

so daß sich aus (1) die Differentialgleichung (15) ergibt, von welcher ein Fundamentalsystem algebraischer Integrale z_1 und z_2 durch die Ausdrücke (17) gegeben ist.

Da

$$z = \frac{d\left(\frac{u}{u_1}\right)}{dx}$$

eine rationale Funktion von u und u_1 ist, so ergibt sich die algebraische Gleichung in z, die oben allgemein in der Form (20) angedeutet war, und von welcher z_1 und z_2 Lösungen sind, durch Elimination von u aus der Gleichung (13) und

$$z = r_0(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1) + r_1(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1)\, u + \cdots$$
$$\cdots + r_{m-1}(x, y_1, y_2, y_3, W, u_1)\, u^{m-1},$$

worin die r rationale Funktionen bedeuten, wenn man von dem $u = u_1$ entsprechenden Werte $z = 0$ absieht, in der Form

$$z^{m-1} + s_1 z^{m-2} + \cdots + s_{m-1} = 0, \tag{26}$$

in welcher die Koeffizienten $s_1, \ldots s_{m-1}$ rationale Funktionen von x, y_1, y_2, y_3, W, u_1 sind. Da nun, wie früher gezeigt worden, z_2 eine rationale Funktion von z_1 ist, deren Koeffizienten rational aus eben diesen Größen zusammengesetzt sind, so werden sich, wie in den früheren Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen 2ter Ordnung näher ausgeführt worden, die Lösungen der algebraischen Gleichung (26) in z in Gruppen ordnen und unter den dort angegebenen Bedingungen rational durch μte Wurzeln aus Funktionen darstellen lassen, welche selbst rational aus x, y_1, y_2, y_3, W und u_1 zusammengesetzt sind. In allen diesen Fällen würde also die aus der algebraischen Gleichung (13) in u sich ergebende Gleichung

$$\frac{f(u)}{u - u_1} = u^{m-1} + (\rho_1 + u_1)\, u^{m-2} + \cdots + (\rho_{m-1} + \rho_{m-2} u_1 + \cdots + u_1^{m-1}) = 0$$

durch Wurzelzeichen algebraisch auflösbar sein, da aus

$$u_2 = u_1 \int z_1\, dx,$$

weil das Integral nach dem ABELschen Satze sich als rationale Funktion von x, y_1, y_2, y_3, W, u_1 und z_1 darstellen läßt, folgt, daß

$$u_2 = R\left(x, y_1, y_2, y_3, u_1, \sqrt[\mu]{P}\right) \tag{27}$$

ist, worin R eine rationale Funktion der eingeschlossenen Größen, und P rational aus x, y_1, y_2, y_3, W und u_1 zusammengesetzt ist, vorausgesetzt, daß u_1 eine Lösung der Gleichung (13) ist. Wir können nun aber unmittelbar die Natur der Gleichung (13) untersuchen.

Lassen wir nämlich in den Ausdrücken für die Lösungen der mit Adjungierung der Größen x, y_1, y_2, y_3, W irreduktibeln Gleichung (13) der Kürze halber in der Bezeichnung derselben diese Größen fort, nehmen also nach (27) an, daß zwischen u_1 und u_2 die Beziehung besteht

$$u_2 = R\left(u_1, \sqrt[\mu]{P(u_1)}\right), \tag{28}$$

so werden die Gleichungen erfüllt sein

$$f(u_1) = 0, \quad f\left(R\left(u_1, \sqrt[\mu]{P(u_1)}\right)\right) = 0,$$

oder, wenn η eine primitive μ^{te} Einheitswurzel bedeutet, statt der letzteren Gleichung

$$f\left(R\left(u_1, \sqrt[\mu]{P(u_1)}\right)\right) \cdots f\left(R\left(u_1, \eta \sqrt[\mu]{P(u_1)}\right)\right) \cdots f\left(R\left(u_1, \eta^{\mu-1} \sqrt[\mu]{P(u_1)}\right)\right)$$
$$= F(u_1) = 0,$$

worin F eine ganze Funktion darstellt.

Da nun aber wegen der Irreduktibilität von $f(u) = 0$ auch

$$F(u_2) = 0$$

sein muß, so wird wegen der für $\sqrt[\mu]{P(u_1)}$ vorausgesetzten Irreduktibilität auch

$$f\left(R\left(u_2, \sqrt[\mu]{P(u_2)}\right)\right) = 0$$

sein, und somit die Lösungen der Gleichung (13), wenn die irrationale Funktion

$$R\left(u, \sqrt[\mu]{P(u)}\right) = \vartheta(u)$$

gesetzt wird, durch die iterierten irrationalen Funktionen

$$u_1, \ \vartheta(u_1), \ \vartheta^2(u_1), \ \cdots, \ \vartheta^{m-1}(u_1)$$

dargestellt sein, wenn dieselben eine Gruppe bilden, also auch, wenn m eine Primzahl ist. Ist dies jedoch nicht der Fall, so wird die weitere Untersuchung der Form der Lösungen der Gleichung (13) sich genau so gestalten, wie sie für das analoge Problem für Differentialgleichungen 2ter Ordnung früher durchgeführt wurde.