Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Neue Beiträge zur Flächentheorie**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1916, 1

Im ersten Teil der Abhandlung wird nachgewiesen, daß das übliche Verfahren, das Verhalten einer krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes zu untersuchen, mangelhaft ist, und gezeigt, daß erst bei Heranziehung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes eine strenge Herleitung gelingt; gleichzeitig wird auf dieser Grundlage der bisher unvollständig erforschte Fall des parabolischen Punktes in abschließender Weise erledigt. — Im Anschluß daran bringt der zweite Teil eine neue Ableitung der Gleichungen für die Haupttangenten und die Hauptkrümmungshalbmesser einer krummen Fläche, bei der weder eine Maximal- und Minimalbetrachtung, noch die Benutzung der benachbarten Flächennormalen erforderlich ist.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1916 , S. IX)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1916. 1. Abhandlung

Neue Beiträge zur Flächentheorie

I.
Die Bedeutung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes für die Lehre von den krummen Flächen

II.
Haupttangenten und Hauptkrümmungshalbmesser krummer Flächen

Von
PAUL STÄCKEL
Heidelberg

Eingegangen am 14. Januar 1916

Heidelberg 1916
Carl Winters Universitätsbuchhandlung
Verlags-Nr. 1279

I.

Die Bedeutung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes für die Lehre von den krummen Flächen

Am 31. Oktober 1915 waren hundert Jahre seit der Geburt von Karl Weierstrass vergangen. Seinem Gedächtnis sei die folgende Abhandlung gewidmet, in der ein wichtiger Ansatz aus der Lehre von den krummen Flächen auf Grund von Hilfsmitteln, die der große Forscher geschaffen, und in dem Sinn der Strenge, die er gelehrt hat, sichergestellt und vollständig durchgeführt wird.

§ 1
Ein Ansatz zur Untersuchung des Verhaltens einer krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes

Um das Verhalten einer reellen analytischen krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes zu untersuchen, pflegt man ein System rechtwinkliger kartesischer Koordinaten x, y, z zu benutzen, dessen Anfangspunkt der betrachtete Punkt ist. Zur xy-Ebene wählt man die berührende Ebene, zur z-Achse die Normale der Fläche in dem Punkte und erhält für die Koordinate z eine gewöhnliche Potenzreihe von x und y, die mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt. Es sei etwa

$$z = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} y^{\lambda} \quad (\varkappa + \lambda \geqq 2);$$

die Reihe möge für den Bereich $|x| \leqq \sigma, |y| \leqq \tau$ der reellen Veränderlichen x und y unbedingt konvergent sein.

Bis weit ins neunzehnte Jahrhundert hinein hat man in naiver Weise angenommen, für das Verhalten der durch die Potenzreihe von x und y dargestellten Funktion z in der Umgebung des Anfangspunktes sei der Inbegriff der Glieder niedrigster, also zweiter

Dimension maßgebend. Zum Beispiel heißt es in einem verbreiteten Werke von F. JOACHIMSTHAL: „So erhalten wir für z eine Reihe, beginnend mit

$$\frac{1}{2}\left(r_0 x^2 + 2 s_0 x y + t_0 y^2\right),$$

einem Gliede, das wegen der beliebigen Kleinheit von x und y in bezug auf das Vorzeichen bestimmend wird für die ganze Reihe, deren nachfolgende Glieder in Beziehung auf x und y von der dritten und höherer Ordnung sind. Die Fläche wird von der Tangentialebene berührt oder geschnitten, je nachdem $r_0 t_0 - s_0^2$ größer als Null oder kleiner ist. Der Grenzfall, daß diese Differenz gleich Null ist, gehört zum ersten."[1]

Daß hier nicht alles in Ordnung ist, zeigt das Beispiel

$$z = \alpha y^2 + \beta x^3,$$

in dem α und β von Null verschiedene Konstanten bezeichnen; denn diese Fläche wird von der Tangentialebene des Anfangspunktes in einer Neilschen Parabel geschnitten und liegt zu beiden Seiten der Tangentialebene[2].

§ 2

Ein Lehrsatz über reelle Potenzreihen von zwei Veränderlichen

Bei einer analytischen Fläche ist z eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen x und y. Indessen beziehen sich die geometrischen Fragestellungen, die in der allgemeinen Lehre von den reellen krummen Flächen vorliegen, durchaus auf reelle Werte der Veränderlichen x, y und z, und es ist daher von grundsätzlicher Bedeutung festzustellen, inwieweit die analytischen Untersuchungen auch unter Beschränkung auf das reelle Gebiet durchgeführt werden können. Im vorliegenden Falle wird

[1] F. JOACHIMSTHAL, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung*, 1. Aufl. Leipzig 1872, 2. Aufl. 1881, S. 56, 3. Aufl. 1890, S. 101. Ähnlich äußert sich J. KNOBLAUCH, *Einführung in die allgemeine Theorie der Flächen*, Leipzig 1888, S. 50.

[2] Vgl. die Ausführungen in meiner Abhandlung: *Über ein Modell einer Fläche dritter Ordnung, die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt*, Zeitschrift für Math. u. Physik, **51**, 1904, S. 96.

sich dies ermöglichen lassen. Der Bereich der Lehrsätze, die für *reelle Potenzreihen*, das heißt für Potenzreihen mit reellen Koeffizienten und reellen Veränderlichen, gelten, ist nämlich erheblich größer, als man früher annahm; zum Beispiel lassen sich, im Gegensatz zu einer vielfach vertretenen Ansicht, die Aufgaben, den Rest einer reellen Potenzreihe abzuschätzen und ihren wahren Konvergenzradius zu bestimmen, unter Beschränkung auf das reelle Gebiet lösen[1].

Einen ersten Aufschluß über die Beziehung zwischen dem Anfangsglied

$$z_2 = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2$$

der Potenzreihe z und der ganzen Reihe gibt der folgende Lehrsatz.

Lehrsatz I. *Die reelle Potenzreihe*

$$z = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} y^{\lambda} \quad (\varkappa + \lambda \geqq 2)$$

sei für $|x| \leqq \sigma$, $|y| \leqq \tau$ *unbedingt konvergent. Man setze, unter* ρ *eine positive Größe verstehend, die kleiner als* σ *und* τ *gewählt ist:*

$$x = \rho \cos\varphi\,, \qquad y = \rho \sin\varphi$$

und beschränke die Veränderliche φ *auf ein solches Intervall*

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2\,,$$

daß darin

$$|\, a_{20}\cos^2\varphi + 2a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{02}\sin^2\varphi \,| \geqq h$$

ist, wo h *eine positive Konstante bedeutet. Dann gibt es eine positive Größe* ρ_0*, kleiner als* σ *und* τ*, so daß für den Bereich der reellen Veränderlichen* x *und* y*, in dem*

$$0 \leqq \rho \leqq \rho_0\,, \qquad \varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$$

ist, die Gleichung besteht

$$z = z_2\left[1 + \vartheta(x,y)\, C \sqrt{|\,z_2\,|}\right];$$

hierin bedeutet C *eine Konstante, und es ist* $|\vartheta(x,y)| \leqq 1$.

---

[1] Vgl. meine Abhandlung: *Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **15**, 1906, S. 577.

Aus dem Lehrsatze I folgt, daß für hinreichend kleine Werte von ρ unter der Bedingung $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ das Vorzeichen von z mit dem Vorzeichen von z_2 übereinstimmt. Ja noch mehr: *unter denselben Voraussetzungen konvergiert das Verhältnis* $z : z_2$, *wenn* ρ *der Grenze Null zustrebt, gleichmäßig gegen die Grenze Eins.* Mithin gibt der Inbegriff der Glieder zweiter Dimension für den betrachteten Bereich wirklich eine Näherung an den Verlauf der Funktion z von x und y. Im allgemeinen umfaßt jedoch der angegebene Bereich kein Gebiet, das den Anfangspunkt in seinem Innern enthält, und der Lehrsatz I ermöglicht es daher nur, bei besonderen Annahmen für die Koeffizienten a_{20}, a_{11}, a_{02} Aussagen über das Verhalten der krummen Fläche in der gesamten Umgebung des Anfangspunktes zu machen. Wie er zu ergänzen ist, damit man die gesamte Umgebung beherrscht, wird später gezeigt werden.

§ 3
Zwei Hilfssätze über reelle Potenzreihen

Dem Beweise des Lehrsatzes I sollen zwei Hilfssätze über reellen Potenzreihen vorausgeschickt werden, die auch für andere Zwecke nützlich sind.

Hilfssatz 1. *Wenn die reelle Potenzreihe*

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa x^\varkappa$$

für $x = \sigma > 0$ *konvergiert, so gibt es eine positive Konstante* g *von der Beschaffenheit, daß für alle Werte des Zeigers* $\varkappa$ *die Ungleichheiten*

$$|c_\varkappa| \leqq g \cdot \sigma^{-\varkappa}$$

erfüllt sind.

Beweis. Aus der Voraussetzung der Konvergenz folgt, daß es, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe ε, eine positive ganze Zahl K gibt, sodaß für $\varkappa \geqq K$ die Ungleichheiten

$$|c_\varkappa \sigma^\varkappa| \leqq \varepsilon$$

gelten. Erklärt man also die positive Größe g als die größten unter den K+1-Größen ε, $|c_0|$, $|c_1\sigma|$, $|c_2\sigma^2|$, ..., $|c_{K-1}\sigma^{K-1}|$, so ergeben sich die zu beweisenden Ungleichheiten.

Hilfssatz 2. *Die mit Gliedern m-ter Dimension beginnende reelle Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} y^{\lambda} \qquad (\varkappa + \lambda \geqq m)$$

sei für $|x| \leqq \sigma$, $|y| \leqq \tau$ *unbedingt konvergent. Setzt man, unter* ω *eine positive Größe kleiner als* σ *und* τ *verstehend,*

$$x = \omega \cos\varphi, \qquad y = \omega \sin\varphi,$$

so geht $\mathfrak{P}(x, y)$ *in eine nach Potenzen von* ω *fortschreitende Reihe über:*

$$\mathfrak{P}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}(\varphi)\,\omega^{\mu};$$

dabei ist

$$A_{\mu}(\varphi) = \sum_{\varkappa+\lambda=\mu} a_{\varkappa\lambda} \cos^{\varkappa}\varphi \sin^{\lambda}\varphi.$$

Dann gibt es eine Konstante g *von der Beschaffenheit, daß für alle reellen Werte von* φ *die Ungleichheiten*

$$|A_{\mu}(\varphi)| \leqq g \cdot \omega^{-\mu} \qquad (\mu = m, m+1, \ldots)$$

erfüllt sind.

Beweis. Da die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x,y)$ für $x = \omega$, $y = \omega$ unbedingt konvergiert, so konvergiert auch die Potenzreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa+\lambda=\mu} |a_{\varkappa\lambda}| \Big) \omega^{\mu},$$

und es gibt nach dem Hilfssatze 1 eine Konstante g, sodaß für alle Werte von μ die Ungleichheiten

$$\sum_{\varkappa+\lambda=\mu} |a_{\varkappa\lambda}| \leqq g \cdot \omega^{-\mu}$$

erfüllt sind. Nun hat man aber, weil für reelle Werte von φ die Funktionen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ dem Betrage nach $\leqq 1$ sind:

$$|A_{\mu}(\varphi)| \leqq \sum_{\varkappa+\lambda=\mu} |a_{\varkappa\lambda}|,$$

mithin wird um so mehr

$$|A_{\mu}(\varphi)| \leqq g \cdot \omega^{-\mu}$$

sein.

§ 4

Beweis des Lehrsatzes über reelle Potenzreihen

Nachdem man eine positive Größe ρ_0 so angenommen hat, daß sie kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ und $\frac{1}{2}\tau$ ist, beschränke man die reelle Veränderliche ρ auf das Gebiet

$$0 < \rho < \rho_0 .$$

Wird jetzt in dem Hilfssatze 2 der Größe ω der zulässige Wert $2\rho_0$ erteilt, so erhält man die Ungleichheiten

$$|A_\mu(\varphi)| < g \cdot (2\rho_0)^{-\mu},$$

und es ist daher

$$\left|\sum_{\mu=3}^{\infty} A_\mu(\varphi)\rho^\mu\right| < g \cdot \sum_{\mu=3}^{\infty}\left(\frac{\rho}{2\rho_0}\right)^\mu$$

$$< g \cdot \left(\frac{\rho}{2\rho_0}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-\dfrac{\rho}{2\rho_0}}$$

$$< \frac{1}{4}\, g \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3 .$$

Folglich wird

$$z = z_2 + \Theta(\rho, \varphi) \cdot \frac{1}{4}\, g \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3,$$

wo $|\Theta(\rho, \varphi)| \leqq 1$ ist.

Aus der Voraussetzung, daß

$$|A_2(\varphi)| > h$$

sein soll, folgt, daß

$$|z_2| > h \cdot \rho^2$$

ist, sodaß man umgekehrt

$$\rho = \Theta_1(\rho, \varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{|z_2|}$$

setzen darf, wo $|\Theta_1(\rho, \varphi)| \leqq 1$ ist. Wird dieser Wert von ρ_0 in die Formel für z eingesetzt, so erhält man die zu beweisende Gleichung

$$z = z_2 \left[1 + \vartheta(x,y)\, C \sqrt{|z_2|}\right];$$

denn man braucht nur, je nach dem Vorzeichen von z_2:

$$\pm\, \Theta(\rho,\varphi) \cdot \Theta_1^3(\rho,\varphi) = \vartheta(x,y)$$

und

$$\frac{1}{4}\, g \cdot \left(\frac{1}{\rho_0 \sqrt{h}}\right)^3 = C$$

zu setzen.

Der Beweis läßt sich leicht so umgestalten, daß man die Gültigkeit des Lehrsatzes I für jeden Wert ρ_0 erkennt, der gleichzeitig kleiner als σ und τ ist. Auch bleibt das Verfahren wirksam, wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x,y)$ erst mit Gliedern m-ter Dimension beginnt. Bezeichnet man den Inbegriff der Glieder m-ter Dimension mit z_m, so ergibt sich die Gleichung

$$z = z_m \left[1 + \vartheta_m(x,y)\, C_m \sqrt[m]{|z_m|}\right],$$

in der wiederum C_m eine Konstante bezeichnet, während $|\vartheta_m(x,y)| < 1$ ist.

§ 5

Anwendung auf einen elliptischen Punkt

Bei der Anwendung des Lehrsatzes I auf die Untersuchung des Verhaltens einer krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes hat man vor allem zu ermitteln, ob es reelle Werte von φ gibt, für die der Ausdruck $A_2(\varphi)$ verschwindet. Um die Rechnungen zu vereinfachen, empfiehlt es sich, die Koordinatenachsen der x und y von vornherein so zu wählen, daß $a_{11} = 0$ wird; die Allgemeinheit wird hierdurch nicht beschränkt. Dann hat man bekanntlich zu ermitteln, ob das Produkt $a_{20} a_{02}$ positiv, negativ oder gleich Null ist, und unterscheidet danach die Fälle eines *elliptischen*, *hyperbolischen* und *parabolischen Punktes.*

Bei einem *elliptischen Punkt* darf man annehmen, daß

$$0 < a_{20} \leq a_{02}$$

ist. Für jeden reellen Wert von φ gilt dann die Ungleichheit $A_2(\varphi) \geq a_{20}$. Demnach besteht der Lehrsatz I zu Recht für alle Punkte im Innern eines Kreises, der in der xy-Ebene mit dem

Halbmesser ρ_0 um den Anfangspunkt beschrieben ist, und es gilt der

Lehrsatz II. *Wird eine krumme Fläche für hinreichend kleine Werte von x und y durch eine Gleichung*

$$z = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}x^{\varkappa}y^{\lambda} \quad (\varkappa+\lambda \geqq 3)$$

dargestellt, in der $a_{20}a_{02} > 0$ ist, so bildet das elliptische Paraboloid

$$z_2 = a_{20}x^2 + a_{02}y^2$$

für die gesamte Umgebung des Anfangspunktes $x^2 + y^2 \leqq \rho_0^2$ eine wahre Näherungsfläche, das heißt, für die gesamte Umgebung konvergiert das Verhältnis $z:z_2$ bei Annäherung an den Anfangspunkt gleichmäßig gegen Eins, und zwar nach Maßgabe der Gleichung

$$z = z_2\left[1 + \vartheta(x,y)\, C\sqrt{|z_2|}\,\right],$$

in der C eine Konstante bedeutet und $|\vartheta(x,y)| \leqq 1$ ist.

§ 6

Anwendung auf einen hyperbolischen Punkt

Bei einem *hyperbolischen Punkt* hat die Gleichung $A_2(\varphi) = 0$ im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ vier Wurzeln, die sich, φ_0 zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ angenommen, in der Form

$$\varphi_0, \quad \pi - \varphi_0, \quad \pi + \varphi_0, \quad 2\pi - \varphi_0$$

darstellen lassen. Mithin besteht der Lehrsatz I zu Recht für alle Punkte x, y, die einem der vier Gebiete angehören:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 0 \leqq \rho \leqq \rho_0, \quad 2\pi - \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_0 - \varepsilon,\\
&(2) \quad 0 \leqq \rho \leqq \rho_0, \quad \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varphi_0 - \varepsilon,\\
&(3) \quad 0 \leqq \rho \leqq \rho_0, \quad \pi - \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi + \varphi_0 - \varepsilon,\\
&(4) \quad 0 \leqq \rho \leqq \rho_0, \quad \pi + \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0 - \varepsilon;
\end{aligned}$$

ε bedeutet eine beliebig kleine positive Größe. Man gelangt daher zu dem

Lehrsatz III. *Wird eine krumme Fläche für hinreichend kleine Werte von x und y durch eine Gleichung*

$$z = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}x^{\varkappa}y^{\lambda} \quad (\varkappa+\lambda \geqq 3)$$

dargestellt, in der $a_{20}a_{02} < 0$ ist, so bildet das hyperbolische Paraboloid

$$z_2 = a_{20}x^2 + a_{02}y^2$$

für denjenigen Teil der Umgebung des Anfangspunktes $x^2+y^2 \leqq \rho_0^2$ eine wahre Näherungsfläche, in dem, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ gesetzt, je eine der Ungleichheiten

$$\begin{aligned} &(1) \quad 2\pi - \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_0 - \varepsilon,\\ &(2) \quad \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varphi_0 - \varepsilon,\\ &(3) \quad \pi - \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi + \varphi_0 - \varepsilon,\\ &(4) \quad \pi + \varphi_0 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0 - \varepsilon \end{aligned}$$

erfüllt ist; dabei ist φ_0 die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$a_{20}\cos^2\varphi + a_{02}\sin^2\varphi = 0$$

und ε eine beliebig kleine positive Größe. In dem durch die Ungleichheiten (1) bis (4) bestimmten Teile der Umgebung konvergiert das Verhältnis $z:z_2$ bei Annäherung an den Anfangspunkt gleichmäßig gegen Eins, und zwar nach Maßgabe der Gleichung

$$z = z_2\left[1 + \vartheta(x,y)\,C\sqrt{|z_2|}\right],$$

in der C eine Konstante bedeutet und $|\vartheta(x,y)| \leqq 1$ ist.

Wandert man mit wachsendem Azimut φ auf einem Kreise, der in der xy-Ebene um den Anfangspunkt mit dem Halbmesser $\rho \leqq \rho_0$ beschrieben ist, so gehören zu den Punkten mit den Werten des Azimutes

$$\begin{array}{ccc} \varphi_0 - \varepsilon & \text{und} & \varphi_0 + \varepsilon,\\ \pi - \varphi_0 - \varepsilon & \text{und} & \pi - \varphi_0 + \varepsilon,\\ \pi + \varphi_0 - \varepsilon & \text{und} & \pi + \varphi_0 + \varepsilon,\\ 2\pi - \varphi_0 - \varepsilon & \text{und} & 2\pi - \varphi_0 + \varepsilon \end{array}$$

je zwei Werte von z mit entgegengesetzten Vorzeichen. Weil z

eine stetige Funktion von φ ist, folgt hieraus, daß es innerhalb jedes der vier Kreisbogen

$$
\begin{array}{rl}
\text{(I)} & \varphi_0-\varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_0+\varepsilon\,, \\
\text{(II)} & \pi-\varphi_0-\varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi-\varphi_0+\varepsilon\,, \\
\text{(III)} & \pi+\varphi_0-\varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi+\varphi_0+\varepsilon\,, \\
\text{(IV)} & 2\pi-\varphi_0-\varepsilon \leqq \varphi \leqq 2\pi-\varphi_0+\varepsilon
\end{array}
$$

mindestens einmal mit Zeichenwechsel verschwindet. Wenn man jedoch von der Funktion z lediglich aussagen kann, daß sie stetig ist, so bleibt die Möglichkeit offen, daß außer der einen Nullstelle mit Zeichenwechsel in dem betreffenden Intervall noch eine weitere grade Anzahl von Nullstellen mit Zeichenwechsel und außerdem eine beliebige Anzahl von Nullstellen ohne Zeichenwechsel vorhanden ist. Es gilt jedoch der

Ergänzungssatz zum Lehrsatz III. *Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes III hat z als Funktion von φ angesehen in dem Intervall $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ genau vier Nullstellen mit Zeichenwechsel.*

Hierin liegt, daß die krumme Fläche sich auch in bezug auf ihre Schnittkurve mit der berührenden Ebene des Anfangspunktes genau so verhält wie das ihr zugeordnete hyperbolische Paraboloid; die Schnittkurve besteht aus zwei sich im Anfangspunkte schneidenden Zweigen, deren Tangenten im Schnittpunkte mit den Schnittgraden des Paraboloids zusammenfallen. *Erst hiermit ist klargestellt, in welchem Sinn man das hyperbolische Paraboloid als Näherungsfläche für die gesamte Umgebung $x^2+y^2 \leqq \rho_0^2$ des Anfangspunktes bezeichnen darf.* Es wird sich jedoch zeigen, daß der Beweis für den Ergänzungssatz nicht lediglich auf Grund der Tatsache erbracht werden kann, daß ε eine beliebig kleine positive Größe ist, sondern daß dazu höhere Hilfsmittel unentbehrlich sind. Ihrer Entwicklung ist ein erheblicher Teil der folgenden Untersuchungen gewidmet.

§ 7
Anwendung auf einen parabolischen Punkt

Verschwindet das Produkt $a_{20}a_{02}$, ist also etwa a_{20} gleich Null, aber a_{02} von Null verschieden, hat man es also mit einem *para-*

bolischen Punkt zu tun, so besteht der Lehrsatz I zu Recht für alle Punkte x, y, die einem der beiden Gebiete angehören

$$(1) \quad +\varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi-\varepsilon,$$
$$(2) \quad \pi+\varepsilon \leqq \varphi \leqq -\varepsilon,$$

und man hat daher den

Lehrsatz IV. *Wird eine krumme Fläche für hinreichend kleine Werte von x und y durch eine Gleichung*

$$z = a_{02}y^2 + \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda}x^{\varkappa}y^{\lambda} \quad (\varkappa+\lambda \geqq 3)$$

dargestellt, in der a_{20} von Null verschieden ist, so bildet der parabolische Zylinder

$$z_2 = a_{20}y^2$$

für denjenigen Teil der Umgebung des Anfangspunktes $x^2+y^2 \leqq \rho_0^2$ eine wahre Näherungsfläche, in dem, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ gesetzt, je eine der Ungleichheiten

$$(1) \quad +\varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi-\varepsilon,$$
$$(2) \quad \pi+\varepsilon \leqq \varphi \leqq -\varepsilon$$

besteht; dabei ist ε eine beliebig kleine positive Größe. In dem erklärten Teile der Umgebung konvergiert das Verhältnis $z:z_2$ bei Annäherung an den Anfangspunkt gleichmäßig gegen Eins, und zwar nach Maßgabe der Gleichung

$$z = z_2\left[1+\vartheta(x,y)\, C\sqrt{z_2}\right],$$

in der C eine Konstante bedeutet und $|\vartheta(x,y)| \leqq 1$ ist.

Wandert man mit wachsendem Azimut φ auf einem Kreise, der in der xy-Ebene um den Anfangspunkt mit dem Halbmesser $\rho \leqq \rho_0$ beschrieben ist, so gehören zu den Punkten mit den Werten des Azimutes

$$-\varepsilon \quad \text{und} \quad +\varepsilon,$$
$$\pi-\varepsilon \quad \text{und} \quad \pi+\varepsilon$$

je zwei Werte von z mit gleichem Vorzeichen. Weil z eine stetige Funktion von φ ist, so folgt hieraus, daß z innerhalb der beiden Kreisbogen

$$\text{(I)} \quad -\varepsilon \leqq \varphi \leqq +\varepsilon,$$
$$\text{(II)} \quad \pi-\varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi+\varepsilon,$$

wenn es überhaupt verschwindet, nur eine grade Anzahl von Nullstellen mit Zeichenwechsel und außerdem eine beliebige Anzahl von Nullstellen ohne Zeichenwechsel besitzen kann; mehr läßt sich aus der Stetigkeit von z nicht erschließen. Es gilt jedoch der

Ergänzungssatz zum Lehrsatz IV. *Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes IV hat z als Funktion von φ angesehen in jedem der beiden Intervalle $-\varepsilon \leqq \varphi \leqq +\varepsilon$ und $\pi-\varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi+\varepsilon$ entweder keine Nullstelle oder eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel oder zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, und zwar können von den sechs logisch möglichen Verbindungen dieser Möglichkeiten zu zweien nur die vier folgenden wirklich stattfinden:*

1. *In beiden Intervallen ist keine Nullstelle vorhanden.*
2. *In beiden Intervallen ist je eine Nullstelle ohne Zwischenwechsel vorhanden.*
3. *In beiden Intervallen sind je zwei Nullstellen mit Zeichenwechsel vorhanden.*
4. *In dem einen Intervall gibt es keine Nullstelle, in dem andern zwei Nullstellen mit Zeichenwechsel.*

Aus den analytischen Tatsachen, die durch den Ergänzungssatz ausgedrückt werden, ergibt sich für das Verhalten der krummen Fläche in der Umgebung eines parabolischen Punktes, daß nur vier wesentlich verschiedene Unterfälle eintreten können:

1. Die Fläche liegt ganz auf der einen Seite der berührenden Ebene des Anfangspunktes und hat mit dieser nur einen Punkt gemeinsam.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Fläche

$$z = y^2 + x^4.$$

2. Die Fläche liegt ganz auf der einen Seite der berührenden Ebene des Anfangspunktes und hat mit dieser eine Kurve gemeinsam.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Fläche

$$z = (y-x^2)^2.$$

3. Die Fläche durchsetzt die berührende Ebene des Anfangspunktes in einer Kurve. Diese besteht aus zwei Zweigen, die sich im Anfangspunkt berühren.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Fläche

$$z = y^2 - x^4.$$

4. Die Fläche durchsetzt die berührende Ebene des Anfangspunktes in einer Kurve, die im Anfangspunkt eine Spitze (erster oder zweiter Art) hat.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Fläche

$$z = y^2 - x^3.$$

§ 8
Kritische Bemerkungen zur Lehre von den parabolischen Punkten

Der *Ergänzungssatz zum Lehrsatz III* ist nur eine andere Fassung der bekannten Aussage, daß bei einem *hyperbolischen Punkte* die krumme Fläche von der zugehörigen Tangentialebene in einer Kurve durchsetzt wird, die den Berührungspunkt zum Doppelpunkt mit getrennten Tangenten hat; freilich geben die Lehrbücher der Flächentheorie keinen strengen Beweis dieser Aussage.

Dagegen darf der *Ergänzungssatz zum Lehrsatz IV* als neu bezeichnet werden. Damit man erkennt, was bis jetzt für den *parabolischen Punkt* bekannt war, mögen die betreffenden Ausführungen aus dem jüngst erschienenen Lehrbuche von J. Knoblauch — nur mit einer leichten Abänderung der Bezeichnungen — wiedergegeben werden[1].

Hier heißt es: „Die Gleichung der Fläche sei

$$z = a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \cdots,$$

wo a_{02} von Null verschieden sein soll. Die beiden Glieder dritter Dimension $a_{03}y^3$ und $a_{12}xy^2$ können gegen $a_{02}y^2$ vernachlässigt werden, aber nicht mehr die Glieder $a_{30}x^3$ und $a_{21}x^2y$. Nur darf $a_{21}x^2y$, wenn a_{30} von Null verschieden ist, weggelassen werden.

[1] J. Knoblauch, *Grundlagen der Differentialgeometrie*, Leipzig 1913, S. 109.

Denn unterwirft man die unendlich kleinen, von einander unabhängigen Größen $[x$ und $y]$ den Bedingungen

$$|x^3| < \delta, \quad y^2 < \delta,$$

so wird

$$|x^2 y| = |x^4 y^2|^{\frac{1}{2}} = |x^3|^{\frac{1}{2}} \cdot |x|^{\frac{1}{2}} \cdot |y^2|^{\frac{1}{2}} < \delta^{\frac{1}{2}} \cdot |x|^{\frac{1}{2}} \cdot \delta^{\frac{1}{2}},$$

also $|x^2 y|$ unendlich klein gegen δ. Wenn demnach zu $a_{20} = 0$ keine weiteren Bedingungen hinzutreten, so kann man die Fläche in der Nähe des Nullpunktes durch die spezielle Fläche dritter Ordnung

$$z = a_{02} y^2 + a_{30} x^3$$

ersetzen."

Das im Vorstehenden auseinandergesetzte Verfahren läuft darauf hinaus, daß zur Ermittelung der Wertepaare x, y, für die z in der Nähe der Stelle $x = 0,\ y = 0$ verschwindet, der Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten gemacht wird:

$$y = t^3, \quad x = \alpha t^2 + \beta t^3 + \cdots .$$

In der Tat geht auf diese Art die Gleichung $z = 0$ über in die Gleichung

$$0 = a_{02} t^6 + a_{30} \alpha^3 t^6 + \cdots + a_{21} \alpha^2 t^7 + \cdots + a_{12} \alpha t^8 + \cdots + a_{03} t^9 + \cdots,$$

und man gelangt, wenn a_{30} von Null verschieden ist, zur Bestimmung der Koeffizienten, $\alpha, \beta, \ldots$, indem man der Reihe nach die Koeffizienten der rechts stehenden Potenzreihe von t gleich Null setzt.

Die strenge Durchführung des Ansatzes würde erfordern, daß die Konvergenz der Potenzreihe für x nachgewiesen wird. Aber auch dann bliebe der Ansatz mit dem Mangel behaftet, daß er zwar eine Lösung der Gleichung $z = 0$ liefert, daß es aber unentschieden bleibt, ob diese Gleichung nicht noch andere, in der Nähe der Stelle $x = 0, y = 0$ gültige Lösungen besitzt[1]. Dazu kommt, daß das Verfahren versagt, wenn der Koeffizient a_{30}

---

[1] Vgl. A. BRILL, *Über das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle*, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. d. Wiss., 21, 1891, S. 207, sowie die Ausführungen von L. BERZOLARI, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III, Teil 2, Heft 3, Leipzig 1906, S. 367—370.

verschwindet, während man doch einen alle möglichen Fälle umfassenden Satz über das Verhalten einer krummen Fläche in der Umgebung eines parabolischen Punktes zu haben wünscht.

Wenn nun auch die Ergänzungssätze zu den Lehrsätzen III und IV unter Anwendung bekannter Hilfsmittel aus der Funktionentheorie in einfacher Weise bewiesen werden können, so bleibt doch die Tatsache bestehen, daß man in der Lehre von den krummen Flächen bis jetzt eine solche Anwendung nicht gemacht, sondern sich mit minderwertigen Ersatzmitteln und unvollkommener Erkenntnis des Sachverhalts begnügt hat. Sicherlich ist der Standpunkt berechtigt, daß man es vermeidet, bei einer elementaren Darstellung der Flächentheorie Sätze aus der Funktionentheorie heranzuziehen. Dann aber fordert die Würde der Wissenschaft, die Lücken in der Beweisführung offen zuzugestehen; dies wird um so weniger Bedenken haben, als auch andere in der elementaren Kurven- und Flächentheorie unentbehrliche Sätze Schwierigkeiten bieten, die die Kräfte des Anfängers in der Regel übersteigen[1].

§ 9
Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz für reelle Potenzreihen von zwei Veränderlichen

Für die Untersuchung des Verhaltens einer analytischen Funktion von mehreren, im besonderen von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle gewährt der WEIERSTRASSsche *Vorbereitungssatz* eine sichere Grundlage[2]. Wenn man ihn auf die Untersuchung des Verhaltens einer krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes anwenden will, so tritt allerdings noch die Rücksicht auf die *Realitätsverhältnisse* hinzu; denn es ist hier von entscheidender Wichtigkeit, ob die bei dem Satze auftretende Zerlegung einer Potenzreihe in zwei Faktoren auf reelle Art bewerkstelligt werden kann, oder nicht. Aus diesem Grunde soll der folgende Lehrsatz bewiesen werden.

---

[1] Vergl. meine Abhandlung: *Beiträge zur Kritik der Differentialgeometrie*, diese Abhandlungen, Jahrgang 1914, 2. Abhandlung.

[2] K. WEIERSTRASS, *Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*, Abhandlungen aus der Funktionslehre, Berlin 1886, S. 107: Mathematische Werke, Bd. II, Berlin 1895, S. 135.

Lehrsatz V (Weierstraßscher Vorbereitungssatz für reelle Potenzreihen von zwei Veränderlichen). *Beginnt eine für* $|x| \leq \sigma$, $|y| \leq \tau$ *unbedingt konvergente reelle Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} y^{\lambda}$$

mit Gliedern m-ter Dimension und ist im besondern der Koeffizient a_{0m} *von Null verschieden, so gilt für eine gewisse Umgebung* $|x| \leq \sigma_1$, $|y| \leq \tau_1$ *der Stelle* $x = 0$, $y = 0$ *eine eindeutig bestimmte, reelle Zerlegung der Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x,y)$ *in zwei Faktoren:*

$$\mathfrak{P}(x,y) = [y^m + \mathfrak{P}_1(x) y_1^{m-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{m-1}(x) y + \mathfrak{P}_m(x)]\,[a_{0m} + \mathfrak{Q}(x,y)];$$

hierin sind $\mathfrak{P}_1(x), \ldots, \mathfrak{P}_m(x)$ *gewöhnliche reelle Potenzreihen von* x, *die für* $x = 0$ *verschwinden, und* $\mathfrak{Q}(x,y)$ *ist eine gewöhnliche reelle Potenzreihe von* x *und* y, *die für* $x = 0$, $y = 0$ *verschwindet.*

Auf Grund der Überlegungen, mittels deren G. DUMAS den Vorbereitungssatz hergeleitet hat[1], gelingt es, den Beweis, ebenso wie es bei dem Lehrsatz I geschehen ist, *unter Beschränkung auf das reelle Gebiet* durchzuführen.

§ 10

Noch zwei Hilfssätze über reelle Potenzreihen

Es ist zweckmäßig, dem Beweise des Lehrsatzes V zwei Hilfssätze vorauszuschicken, die sich wiederum auf reelle Potenzreihen beziehen.

Hilfssatz 3. *Wenn die reelle Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(x) = 1 - \sum_{\varkappa=1}^{\infty} c_{\varkappa} x^{\varkappa}$$

für $|x| \leq \sigma$ *konvergiert und die Ungleichheiten*

$$|c_{\varkappa}| \leq g \cdot \sigma^{-\varkappa}$$

gelten, so gibt es eine eindeutig bestimmte, reelle Potenzreihe

[1] G. DUMAS, *Elementare Herleitung des Weierstraßchen Vorbereitungssatzes*, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrgang 1909, 18. Abhandlung, München 1910.

$$\mathfrak{Q}(x) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} d_\lambda x^\lambda,$$

sodaß die Gleichung

$$\mathfrak{P}(x) \cdot \mathfrak{Q}(x) = 1$$

identisch erfüllt ist; die Potenzreihe $\mathfrak{Q}(x)$ konvergiert sicher, wenn

$$|x| \leqq \frac{\sigma}{g+1}$$

gewählt wird.

Beweis. Damit die Gleichung $\mathfrak{P}(x) \cdot \mathfrak{Q}(x) = 1$ identisch erfüllt wird, müssen die Koeffizienten d_μ den Gleichungen

$$d_\mu = c_\mu + \sum_{\varkappa+\lambda=\mu} c_\varkappa d_\lambda \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

genügen. Aus ihnen ergibt sich zunächst

$$d_1 = c_1$$

und dann wird

$$d_2 = c_2 + c_1 d_1 = c_2 + c_1^2,$$
$$d_3 = c_3 + c_2 d_1 + c_1 d_2 = c_3 + 2 c_2 c_1 + c_1^3$$

usw. Man erkennt, daß allgemein

$$d_\mu = G_\mu(c_1, c_2, \ldots, c_\mu)$$

ist, wo G_μ eine ganze Funktion mit ganzzahligen, positiven Koeffizienten bedeutet. Wenn man darin überall die Koeffizienten der gegebenen Potenzreihe $c_\varkappa$ durch die positiven Größen $g \cdot \sigma^{-\varkappa}$ ersetzt, so erhält man eine positive Größe g_μ von der Beschaffenheit, daß

$$|d_\mu| \leqq g_\mu$$

ist. Die Größen g_μ lassen sich aber unmittelbar herstellen, weil

$$\left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_\lambda x^\lambda\right) \cdot \left(1 - \sum_{\varkappa=1}^{\infty} g \sigma^{-\varkappa} x^\varkappa\right) = 1,$$

also

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} g_\lambda x^\lambda = \frac{g x}{\sigma - (g+1)x} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{g(g+1)^{\lambda-1}}{\sigma^\lambda} x^\lambda$$

ist. Mithin gelten die Ungleichheiten

$$|d_\mu| \leqq \frac{g}{g+1}\left(\frac{\sigma}{g+1}\right)^{-\mu},$$

aus denen folgt, daß die formal hergestellte Potenzreihe $\mathfrak{Q}(x)$ für

$$|x| \leqq \frac{\sigma}{g+1}$$

konvergiert.

Hilfssatz 4. *Wenn die reelle Potenzreihe*

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda$$

für $x = \sigma > 0$, $y = \tau > 0$ *unbedingt konvergiert, so gibt es eine positive Konstante* g *von der Beschaffenheit, daß für alle Werte der Zeiger* $\varkappa$ *und* λ *die Ungleichheiten*

$$|c_{\varkappa\lambda}| \leqq g \cdot \sigma^{-\varkappa}\tau^{-\lambda}$$

erfüllt sind.

Beweis. Aus der Voraussetzung der unbedingten Konvergenz folgt, daß es, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe ε, eine positive ganze Zahl M gibt, sodaß alle Größen

$$|c_{\varkappa\lambda}| \cdot \sigma^{-\varkappa}\tau^{-\lambda},$$

bei denen die Summe der Zeiger $\varkappa + \lambda \geqq M$ ist, kleiner als ε sind. Erklärt man daher die positive Größe g als die größte unter den $1 + \frac{1}{2}M(M+1)$ Größen ε und $c_{\varkappa\lambda}\sigma^{-\varkappa}\tau^{-\lambda}$, bei denen $\varkappa + \lambda \leqq M-1$ ist, so ergeben sich die zu beweisenden Ungleichheiten.

§ 11
Vorbereitende Umgestaltungen

Der Beweis des Lehrsatzes V wird vorbereitet durch gewisse Umgestaltungen der zu zerlegenden reellen Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda \quad (\varkappa+\lambda \geqq m).$$

1. Der Koeffizient a_{0m} sollte von Null verschieden sein. Indem man durch ihn dividiert, erreicht man, daß unbeschadet der Allgemeinheit

$$a_{0m} = 1$$

vorausgesetzt werden darf.

2. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x,y)$ enthält jetzt an Gliedern, in denen allein y vorkommt:

$$y^m\left(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda}y^\lambda\right).$$

Nach dem Hilfssatze 3 gibt es eine konvergente reelle Potenzreihe

$$\mathfrak{B}(y) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu y^\mu,$$

sodaß

$$\left(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda}y^\lambda\right)\left(1+\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu y^\mu\right) = 1$$

ist. Man überzeugt sich leicht, daß das Produkt

$$[1+\mathfrak{Q}(x,y)]\left(1+\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu y^\mu\right) = 1 + \mathfrak{Q}_1(x,y)$$

ist, wo $\mathfrak{Q}_1(x,y)$ wieder eine gewöhnliche Potenzreihe von x und y bedeutet, die für $x=0$ und $y=0$ verschwindet. Man darf daher $\mathfrak{P}(x,y)$ mit $\mathfrak{B}(y)$ multiplizieren und von vornherein voraussetzen, daß *die reelle Potenzreihe $\mathfrak{P}(x,y)$ an Gliedern, in denen allein y vorkommt, das einzige Glied y^m aufweist.*

3. Nach dem Hilfssatze 4 mögen für die umgestaltete Potenzreihe $\mathfrak{P}(x,y)$ die Ungleichheiten gelten

$$|a_{\varkappa\lambda}| \leqq g\cdot\sigma^{-\varkappa}\tau^{-\lambda}.$$

Indem man

$$x = \sigma\xi\,,\quad y = \tau\eta$$

setzt, geht $\mathfrak{P}(x,y)$ in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(\xi,\eta) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\varkappa\lambda}\xi^\varkappa\eta^\lambda$$

über, bei der die Ungleichheiten gelten

$$|b_{\varkappa\lambda}| \leqq g.$$

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(\xi,\eta)$ enthält an Gliedern, in denen nur η vorkommt, lediglich das Glied $\tau^m \eta^m$, folglich hat die Potenzreihe $\tau^{-m} \mathfrak{P}_1(\xi, \eta)$ die Eigenschaft, an Gliedern, in denen nur η vorkommt, genau das Glied η^m aufzuweisen. Man überzeugt sich leicht, daß der Nachweis der gewünschten Zerlegung für die Potenzreihe $\tau^{-m} \mathfrak{P}_1(\xi, \eta)$ ausreicht, um die Zerlegbarkeit von $\mathfrak{P}(x, y)$ zu sichern. Mithin ist es erlaubt, von vornherein anzunehmen, daß *die Koeffizienten der gegebenen Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x, y)$ *die Eigenschaft haben, sämtlich dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen positiven Schranke* g *zu liegen;* da y^m den Koeffizienten 1 hat, ist $g \geqq 1$.

§ 12
Formale Durchführung der Zerlegung

Nach den vorbereitenden Umgestaltungen erscheint die zu zerlegende Potenzreihe in der Form

$$\mathfrak{P}(x, y) = y^m + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_\varkappa(y) x^\varkappa;$$

hierin bezeichnen die Koeffizienten $\mathfrak{Q}_\varkappa(y)$ gewöhnliche Potenzreihen von y. Die zu beweisende Identität läßt sich alsdann in der Form darstellen:

$$y^m + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_\varkappa(y) x^\varkappa = \left[y_m + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{G}_\lambda(y) x^\lambda\right] \left[1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{R}_\mu(y) x^\mu\right];$$

die Koeffizienten $\mathfrak{G}_\lambda(y)$ sind ganze rationale Funktionen von y, höchstens vom Grade $m-1$, die Koeffizienten $\mathfrak{R}_\mu(y)$ gewöhnliche Potenzreihen von y.

Nach Ausführung der Multiplikation müssen die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten gleich sein. Dies gibt sogleich

$$\mathfrak{Q}_\varkappa(y) = \mathfrak{G}_\varkappa(y) + y^m \cdot \mathfrak{R}_\varkappa(y) + \sum_{\lambda+\mu=\varkappa} \mathfrak{G}_\lambda(y) \mathfrak{R}_\mu(y).$$

Da die Zeiger λ und μ mindestens gleich 1 sind, so besteht die Summe auf der rechten Seite aus $\varkappa-1$ Gliedern, deren Zeiger λ und μ alle kleiner als $\varkappa$ sind. Hat man also die Koeffizienten $\mathfrak{G}_\lambda(y)$ und $\mathfrak{R}_\mu(y)$ ermittelt, in denen λ und μ kleiner als $\varkappa$ sind, so kennt man auch die Potenzreihe

$$\mathfrak{G}_{\varkappa}(y) + y^m \cdot \mathfrak{R}_{\varkappa}(y),$$

und da $\mathfrak{G}_{\varkappa}(y)$ ein Polynom höchstens vom Grade $m-1$ ist, sind aus dieser Potenzreihe die Ausdrücke $\mathfrak{G}_{\varkappa}(y)$ und $\mathfrak{R}_{\varkappa}(y)$ selbst eindeutig und reell bestimmt, vorausgesetzt, daß der erste Schritt auf diese Art durchgeführt werden kann. Es wird aber für $\varkappa = 1$:

$$\mathfrak{Q}_1(y) = \mathfrak{G}_1(y) + y^m \mathfrak{R}_1(y),$$

woraus $\mathfrak{G}_1(y)$ und $\mathfrak{R}_1(y)$ unmittelbar in der verlangten Weise zu entnehmen sind.

Hiermit ist zugleich ein Verfahren gegeben, um beliebig viele Glieder der Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$, ..., $\mathfrak{P}_m(x)$ und $\mathfrak{Q}(x,y)$ zu ermitteln, die in der ursprünglichen Form der Zerlegung von $\mathfrak{P}(x,y)$ vorkommen.

§ 13
Konvergenzbeweis

Es bleibt übrig zu zeigen, daß es zwei positive Größen σ_1 und τ_1 von der Beschaffenheit gibt, daß die bei der Zerlegung von $\mathfrak{P}(x,y)$ auftretenden unendlichen Reihen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{G}_{\lambda}(y) x^{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{R}_{\mu}(y) x^{\mu}$$

für $|x| \leqq \sigma_1$, $|y| \leqq \tau_1$ unbedingt konvergieren.

Der Koeffizient von y^{ν} in $\mathfrak{G}_{\lambda}(y)$ sei $g_{\lambda\nu}$, der Koeffizient von y^{ν} in $\mathfrak{R}_{\mu}(y)$ sei $r_{\mu\nu}$. Dann wird, weil $G_{\lambda}(y)$ ein Polynom höchstens vom Grade $m-1$ ist, der Koeffizient von y^{ρ} in dem Produkt $\mathfrak{G}_{\lambda}(y)\mathfrak{R}_{\mu}(y)$ gleich der Summe von höchstens m Gliedern

$$\sum_{\nu=0}^{m} g_{\lambda\nu}\, r_{\mu,\rho-\nu};$$

für negative Werte von $\rho-\nu$ ist $r_{\mu,\rho-\nu}$ gleich Null zu setzen. Wenn man daher weiß, daß für alle Werte des Zeigers λ, die kleiner als $\varkappa$ sind, die Koeffizienten der Polynome $\mathfrak{G}_{\lambda}(y)$ und der Potenzreihen $\mathfrak{R}_{\lambda}(y)$ dem absoluten Betrage nach unter einer Schranke h_{λ} liegen, so folgt, daß der Koeffizient von y^{ρ} in dem Produkt $\mathfrak{G}_{\lambda}(y)\mathfrak{R}_{\mu}(y)$ dem absoluten Betrage nach nicht größer als

$$m \cdot h_\lambda h_\mu$$

sein kann. Hieraus folgt weiter, daß die Koeffizienten des Polynoms $\mathfrak{G}_\varkappa(y)$ und der Potenzreihe $\mathfrak{R}_\varkappa(y)$, die durch die Gleichung

$$\mathfrak{G}_\varkappa(y) + y^m \cdot \mathfrak{R}_\varkappa(y) = \mathfrak{Q}_\varkappa(y) + \sum_{\lambda+\mu=\varkappa} \mathfrak{G}_\lambda(y)\mathfrak{R}_\varkappa(y)$$

bestimmt werden, ihrem absoluten Betrage nach nicht größer sein können als die Schranke

$$h_\varkappa = g + m \sum_{\lambda+\mu=\varkappa} h_\lambda h_\mu;$$

denn die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}_\varkappa(y)$ sind nichts anderes als die Größen $a_{\varkappa\rho}$, die nach Voraussetzung dem absoluten Betrage nach unter der Schranke g liegen sollten.

Wiederum kommt alles darauf an nachzuweisen, daß der erste Schritt des Verfahrens gelingt. Es ist aber für $\varkappa = 1$:

$$\mathfrak{G}_1(y) + y^m \mathfrak{R}_1(y) = \mathfrak{Q}_1(y),$$

und es wird daher

$$h_1 = g.$$

Der Reihe nach fortschreitend gelangt man zu $h_2, h_3, \ldots$, und erkennt die allgemeine Richtigkeit der Gleichung

$$h_\varkappa = g + m \sum_{\lambda+\mu=\varkappa} h_\lambda h_\mu.$$

Weil die Koeffizienten des Polynoms $\mathfrak{G}_\varkappa(y)$ und der Potenzreihen $\mathfrak{R}_\varkappa(y)$ ihrem absoluten Betrage nach nicht größer als $h_\varkappa$ sind, handelt es sich jetzt darum, die Konvergenz der Potenzreihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} h_\lambda x^\lambda y^\mu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} h_\lambda x^\lambda \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} y^\mu$$

zu untersuchen. Hierzu genügt es zu zeigen, daß die Potenzreihe

$$\mathfrak{H}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} h_\lambda x^\lambda$$

für hinreichend kleine Werte von x konvergiert.

Zum Beweise bilde man, für einen Augenblick die Konvergenz der Reihe $\mathfrak{H}(x)$ voraussetzend,

$$\mathfrak{H}^2(x) = \sum_{\varkappa=2}^{\infty}\left(\sum_{\lambda+\mu=\varkappa} h_\varkappa h_\lambda\right) x^\varkappa.$$

Dann wird

$$m\mathfrak{H}^2(x) = \sum_{\varkappa=2}^{\infty}(h_\varkappa - g)x^\varkappa$$

$$= \mathfrak{H}(x) - h_1 x - g\,\frac{x^2}{1-x},$$

oder, weil $h_1 = g$ war,

$$m\mathfrak{H}^2(x) = \mathfrak{H}(x) - g\,\frac{x}{1-x}.$$

Demnach ist

$$\mathfrak{H}(x) = \frac{1}{2m}\left[1 - \left(\frac{1-(4m+1)gx}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right];$$

vor der positiv zu nehmenden Quadratwurzel ist das Minuszeichen zu schreiben, weil $\mathfrak{H}(x)$ für $x = 0$ verschwindet.

Man braucht jetzt nur noch den binomischen Lehrsatz für die Exponenten $\pm\frac{1}{2}$ anzuwenden, um zu erkennen, daß die Funktion $\mathfrak{H}(x)$ durch eine Potenzreihe dargestellt wird, die für

$$|x| < \frac{1}{(4m+1)g}$$

konvergiert und mit der gegebenen Reihe $\mathfrak{H}(x)$ übereinstimmt; es ist zu beachten, daß $g \geqq 1$ und daher die rechte Seite kleiner als 1 ist. Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß für y die Bedingung $|y| < 1$ herauskommt.

§ 14
Anwendung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes auf die Untersuchung krummer Flächen

Bei der Untersuchung des Verhaltens einer analytischen krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes handelt es sich um eine Potenzreihe, die man in der Gestalt

$$z = a_{20}x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \cdots$$

voraussetzen darf. Die Weierstrasssche Zerlegung lautet dann

$$z = \left\{y^2 + \left[\left(a_{21} - a_{20}a_{03}\right)x^2 + \cdots\right]y + \left[a_{20}x^2 + \left(a_{30} - a_{20}a_{12}\right)x^3 + \cdots\right]\right\}$$
$$\times\left\{1 + a_{12}x + a_{03}y + \cdots\right\},$$

und es liegen daher, bei hinreichend kleinen Werten von x und y, die Nullstellen der Funktion z von x und y auf der Kurve

$$y = -\tfrac{1}{2}\left(a_{21} - a_{20}a_{03}\right)x^2 + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-a_{20}x^2 - \left(a_{30} - a_{20}a_{12}\right)x^3 - \cdots} \ .$$

Bei der weiteren Untersuchung hat man zu unterscheiden, ob a_{20} positiv, negativ oder gleich Null ist[1].

1. Elliptischer Punkt. Ist a_{20} positiv, so erhält man, solange x von Null verschieden ist, keine reellen Nullstellen; für $x = 0$ wird $y = 0$ eine doppelt zählende Nullstelle. Hieraus folgt sofort die Richtigkeit des Lehrsatzes II; um ihn zu beweisen, bedarf es jedoch nicht des WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatzes, es genügt vielmehr schon der Lehrsatz I.

2. Hyperbolischer Punkt. Ist a_{20} negativ, so erhält man für positives und für negatives x je zwei reelle Werte von y, und zwar wird

$$y = \pm\sqrt{-a_{20}} \cdot x + \cdots \ .$$

Hieraus folgt, daß auf jedem der vier Kreisbogen (I), (II), (III), (IV) des § 6 je eine Nullstelle liegt, und damit *ist der Ergänzungssatz zum Lehrsatz III in aller Strenge bewiesen.*

3. Parabolischer Punkt. Ist $a_{20} = 0$, so möge, um die Untersuchung in voller Allgemeinheit zu führen, angenommen werden, daß die Gleichung für y die Gestalt habe

$$y^2 + \left(Ax^\alpha + \cdots\right)y + Bx^\beta + \cdots = 0,$$

wo A und B von Null verschiedene Konstanten bezeichnen und die ganzen Zahlen $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 3$ sind. Diesem Ansatz entziehen sich allerdings die besonderen Fälle, in denen der Koeffizient von y oder das absolute Glied identisch verschwinden, man erkennt jedoch leicht, daß die im folgenden abgeleiteten Sätze auch für sie gelten.

Die Tatsache, daß y durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmt wird, reicht schon aus, um den *ersten Teil des Ergänzungs-*

---

[1] In der vorliegenden Abhandlung werden nur *reguläre* Punkte der Fläche betrachtet. Für *singuläre* Punkte hat bereits R. v. LILIENTHAL den Weierstraßschen Vorbereitungssatz herangezogen, siehe dessen *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, zweiter Band; Flächentheorie, 1. Teil, Leipzig 1913, S. 34.

satzes zum Lehrsatz IV zu beweisen, in dem behauptet wird, daß auf jedem der beiden Kreisbogen (I) und (II) des § 7 entweder keine Nullstelle von z liegt oder eine Nullstelle ohne Zeichenwechsel oder zwei Nullstellen mit Zeichenwechsel.

Der *zweite Teil dieses Ergänzungssatzes* bezieht sich auf die Frage, in welchen Verbindungen die drei für jeden der beiden Kreisbogen geltenden Möglichkeiten wirklich auftreten. Um dies zu ermitteln, hat man die beiden Ausdrücke

$$y = -\tfrac{1}{2}\left(Ax^{\alpha}+\cdots\right) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(Ax^{\alpha}+\cdots\right)^2 - 4\left(Bx^{\beta}+\cdots\right)}$$

nach steigenden, ganzen oder gebrochenen Potenzen von x zu entwickeln. Dabei ist zu unterscheiden, ob $2\alpha < \beta$, $2\alpha > \beta$, $2\alpha = \beta$ ist.

I. Für $2\alpha < \beta$ wird

$$y_1 = -Ax^{\alpha}+\cdots, \quad y_2 = Cx^{\alpha+\gamma}+\cdots,$$

wo C eine reelle Konstante bezeichnet und die ganze Zahl $\gamma \geqq 1$ ist. Man erhält daher auf jedem der beiden Kreisbogen je zwei Nullstellen mit Zeichenwechsel.

II. Ist $2\alpha > \beta$, so gibt es zwei Unterfälle, je nachdem β grade oder ungrade ist:

a) Ist β grade, so erhält man auf jedem der beiden Kreisbogen keine oder zwei Nullstellen, je nachdem B positiv oder negativ ist.

b) Ist β ungrade, so muß, damit y reell ausfällt, x das entgegengesetzte Vorzeichen wie B haben. Mithin erhält man auf dem einen Kreisbogen keine, auf dem andern zwei Nullstellen. Die Schnittkurve der Fläche mit der berührenden Ebene hat in diesem Falle eine Spitze erster Art.

III. Ist $2\alpha = \beta$, so kommt es auf den Ausdruck A^2-4B an, der positiv, negativ oder Null sein kann.

a) Für A^2-4B liegen auf jedem der beiden Kreisbogen je zwei Nullstellen.

b) Für $A^2-4B < 0$ liegt auf keinem der beiden Kreisbogen eine Nullstelle.

c) Für $A^2-4B = 0$ hat man zu untersuchen, ob bei y der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen identisch verschwindet oder nicht. Im ersten Fall erhält man auf jedem der beiden Kreisbogen eine

Nullstelle ohne Zeichenwechsel. Im zweiten Fall sei $Cx^{2\alpha+\gamma}$ das Anfangsglied der Potenzreihe unter dem Wurzelzeichen. Bei gradem γ erhält man, je nachdem C positiv oder negativ ist, zwei Nullstellen, eine auf jedem der beiden Kreisbogen. Bei ungradem γ muß, damit y reell ausfällt, x dasselbe Vorzeichen wie C haben. Mithin erhält man auf dem einen Kreisbogen keine, auf dem andern zwei Nullstellen. Die Schnittkurve der Fläche mit der berührenden Ebene hat in diesem Falle eine Spitze zweiter Art.

Nunmehr führt die Zusammenfassung der verschiedenen Ergebnisse zum zweiten Teil des Ergänzungssatzes, durch den *die Frage nach dem Verhalten einer krummen Fläche in der Umgebung eines parabolischen Punktes in voller Allgemeinheit beantwortet wird.*

Weitere Unterscheidungen von Fällen würden sich ergeben, wenn man nicht nur die Anzahl der Nullstellen von z auf den Kreisbogen, sondern auch das Vorzeichen der zugehörigen Werte von y ins Auge faßte; auch kann man hinzunehmen, ob der Anfangspunkt ein Wendepunkt eines Zweiges der Schnittkurve ist oder nicht. Auf solche Einzelheiten, deren Untersuchung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietet, soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

II.

Haupttangenten und Hauptkrümmungshalbmesser krummer Flächen

§ 1

Die beiden üblichen Herleitungen

Um für einen beliebigen, regulären Punkt P einer krummen Fläche, die durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ dargestellt wird, die *Hauptkrümmungshalbmesser* R_1 und R_2 und die zugehörigen *Haupttangenten*[1] zu ermitteln, ist man auf zwei wesentlich verschiedene Arten vorgegangen.

Bei dem *ersten Verfahren* werden die Normalen der Fläche für die Umgebung des Punktes P in ihrer Beziehung zur Normale in P selbst betrachtet. Die Frage, *bei welchen dieser Normalen der kürzeste Abstand von der Normale in P von höherer als der ersten Ordnung ausfällt*, führt zu den Gleichungen für die Haupttangenten

$$(1)\quad \begin{cases} d_1 x + R_1 d_1 X = 0, \quad d_1 y + R_1 d_1 Y = 0, \quad d_1 z + R_1 d_1 Z = 0; \\ d_2 x + R_2 d_2 X = 0, \quad d_2 y + R_2 d_2 Y = 0, \quad d_2 z + R_2 d_2 Z = 0, \end{cases}$$

in denen X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale in P bedeuten. Hieraus erhält man für R_1 und R_2 die bekannte Gleichung zweiten Grades

$$(2)\quad \frac{1}{R^2} - \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{R} + \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = 0.$$

[1] Nach dem Vorgang von J. Knoblauch, *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen*, Leipzig 1888, S. 31, sollen die zu den Hauptkrümmungshalbmessern gehörigen Tangenten der Fläche als *Haupttangenten* bezeichnet werden; den Tangenten, die eine Berührung zweiter Ordnung mit der Fläche eingehen, diesen Namen beizulegen, ist unzweckmäßig.

Bei dem *zweiten Verfahren* wird der Ausdruck für die Krümmung einer beliebigen Raumkurve zur Berechnung der Krümmung eines Normalschnittes in P benutzt. Indem man nach den *größten und kleinsten Werten der Krümmung eines Normalschnittes* fragt, wird man auf die Hauptkrümmungshalbmesser und die zugehörigen Haupttangenten geführt.

§ 2
Ein neuer Ansatz

Im folgenden soll ein *drittes Verfahren* angegeben werden, das unmittelbar an den Artikel 8 der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* von C. F. GAUSS anknüpft. Wie GAUSS hier bemerkt, kann man es durch die Wahl des Punktes P als Anfangspunkt und geeigneter Koordinatenachsen ξ, η, ζ leicht bewerkstelligen, daß die krumme Fläche in der Umgebung des Punktes P durch die Gleichung

$$\zeta = \tfrac{1}{2} T_1 \xi^2 + \tfrac{1}{2} T_2 \eta^2 + \Omega \tag{3}$$

dargestellt wird, wo Ω der Inbegriff der Glieder von höherer als der zweiten Ordnung sein wird. Durch diese Forderung werden die Haupttangenten in P als die ξ- und η-Achse erklärt und gleichzeitig ergeben sich die Hauptkrümmungen als die Koeffizienten T_1 und T_2 von $\frac{1}{2}\xi^2$ und $\frac{1}{2}\eta^2$. Für die Krümmung T des Normalschnittes, dessen Spur in der berührenden Ebene mit der ξ-Achse den Winkel φ bildet, findet man aus der Gleichung (3) sogleich die klassische Formel von EULER:

$$T = T_1 \cos^2\varphi + T_2 \sin^2\varphi, \tag{4}$$

und gewinnt daraus die Maximal- und Minimaleigenschaften der Hauptkrümmungshalbmesser.

Um, auf dem GAUSSschen Wege vorgehend, die Krümmungslehre zum Abschluß zu bringen, hat man daher nur noch folgende Frage zu beantworten: *Wie lassen sich aus der Gleichung* (3), *bei der die Fläche auf das begleitende Dreikant bestehend aus den Haupttangenten und der Normale bezogen ist, die Gleichungen* (1) *und* (2) *herleiten, bei denen ein beliebiges Koordinatensystem der x, y, z zugrunde gelegt wird?*

Wie man die Gleichungen anzusetzen hat, die zur Beantwortung dieser Frage dienen, liegt auf der Hand. Man erhält leicht acht Gleichungen mit acht Unbekannten. Die Formeln sind jedoch so verwickelt, daß, wie es scheint, ihre Untersuchung bis jetzt nicht durchgeführt worden ist. Bei Einführung geeigneter Hilfsgrößen lassen sich jedoch die Schwierigkeiten überwinden. *Die Lösung erhält dann eine so übersichtliche Form, daß das dritte Verfahren an Einfachheit hinter den beiden ersten nicht zurücksteht.* Ja es verdient vielleicht vor diesen insofern den Vorzug, als es in engster Beziehung zu den Kegelschnitten steht, die aus der Gleichung (3) als Näherungen für die Schnitte der krummen Fläche mit Ebenen parallel der berührenden Ebene in P erhalten werden, und so eine einheitliche Behandlung der Krümmungseigenschaften erzielt wird, deren Mittelpunkt die Gausssche Form (3) der Flächengleichung bildet[1].

§ 3
Aufstellung der Bedingungsgleichungen

Aus der Gleichung $z = f(x, y)$ folgt für die Umgebung eines regulären Flächenpunktes P die Entwicklung

$$(5)\quad z'-z=p(x'-x)+q(y'-y)+\tfrac{1}{2}r(x'-x)^2+s(x'-x)(y'-y)+\tfrac{1}{2}t(y'-y)^2+\cdots,$$

während die Gleichung (3) die Entwicklung liefert

$$\zeta = \tfrac{1}{2}T_1\xi^2 + \tfrac{1}{2}T_2\eta^2 + \cdots .$$

Beide müssen ineinander übergehen vermöge einer orthogonalen Substitution

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \alpha_1(x'-x) + \beta_1(y'-y) + \gamma_1(z'-z),\\ \eta &= \alpha_2(x'-x) + \beta_2(y'-y) + \gamma_2(z'-z),\\ \zeta &= X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z). \end{aligned} \right.$$

---

[1] Daß die Entwicklung (3) der Koordinate ζ nach Potenzen von ξ und η wirklich durch den Inbegriff der Glieder zweiter Ordnung angenähert wird, bedarf eines Beweises. Wie dieser geführt werden kann, ist in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden. Es geht daraus hervor, daß die hier gegebene Herleitung nur für elliptische und hyperbolische Punkte der Fläche gilt; dies ist kein Mangel, weil die parabolischen Punkte von vornherein einer besonderen Untersuchung bedürfen.

Dabei bestehen die Relationen

$$(7)\qquad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,\qquad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1,\qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$$

und

$$(8)\qquad \alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z=0,\qquad \alpha_2 X+\beta_2 Y+\gamma_2 Z=0.$$

Ferner ist

$$(9)\qquad X=-pZ,\quad Y=-qZ,\quad Z=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

und es besteht die Identität

$$(10)\qquad X^2+Y^2+Z^2=1.$$

Um die Substitution (6) auszuführen, möge darin zunächst für $z'-z$ der Ausdruck (5) eingesetzt werden. Man erhält

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= (\alpha_1+p\gamma_1)(x'-x)+(\beta_1+q\gamma_1)(y'-y)\\ &\qquad +\tfrac{1}{2}r\gamma_1(x'-x)^2+s\gamma_1(x'-x)(y'-y)+\tfrac{1}{2}t\gamma_1(y'-y)^2+\cdots,\\ \eta &= (\alpha_2+p\gamma_2)(x'-x)+(\beta_2+q\gamma_2)(y'-y)\\ &\qquad +\tfrac{1}{2}r\gamma_2(x'-x)^2+s\gamma_2(x'-x)(y'-y)+\tfrac{1}{2}t\gamma_2(y'-y)^2+\cdots \end{aligned}\right.$$

und

$$(12)\qquad \zeta=\tfrac{1}{2}rZ(x'-x)^2+sZ(x'-x)(y'-y)+\tfrac{1}{2}tZ(y'-y)^2+\cdots.$$

Die so gewonnene Entwicklung von ζ nach Potenzen von $x'-x$ und $y'-y$ muß mit der Entwicklung übereinstimmen, die sich durch Einsetzen der Ausdrücke (11) für ξ und η aus der Gleichung (3) ergibt. Die Vergleichung liefert sofort die Relationen

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &T_1(\alpha_1+p\gamma_1)^2+T_2(\alpha_2+p\gamma_2)^2=rZ,\\ &T_1(\alpha_1+p\gamma_1)(\beta_1+q\gamma_1)+T_2(\alpha_2+p\gamma_2)(\beta_2+q\gamma_2)=sZ,\\ &T_1(\beta_1+q\gamma_1)^2+T_2(\beta_2+q\gamma_2)^2=tZ. \end{aligned}\right.$$

Auf diese Art ist man zu den acht Gleichungen (7), (8) und (13) für die acht Unbekannten $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\ \alpha_2,\beta_2,\gamma_2;\ T_1,T_2$ gelangt.

§ 4

Auflösung der Bedingungsgleichungen; Gleichung für die Hauptkrümmungshalbmesser

Die Form der Gleichungen (13) legt es nahe, als Hilfsgrößen einzuführen

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha_1 + p\gamma_1 = \delta_1, & \alpha_2 + p\gamma_2 = \delta_2, \\ \beta_1 + q\gamma_1 = \varepsilon_1, & \beta_2 + q\gamma_2 = \varepsilon_2. \end{cases}$$

Da die Relationen (8) sich in der Gestalt

$$(8')\qquad \gamma_1 = p\alpha_1 + q\beta_1, \quad \gamma_2 = p\alpha_2 + q\beta_2$$

schreiben lassen, so hat man im ganzen je drei lineare Gleichungen für $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, mittels deren sich diese Größen durch δ_1, ε_1 und δ_2, ε_2 ausdrücken lassen, und zwar so:

$$(15)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{(1+q^2)\delta_1 - pq\varepsilon_1}{1+p^2+q^2}, & \beta_1 = \dfrac{-pq\delta_1 + (1+p^2)\varepsilon_1}{1+p^2+q^2}, & \gamma_1 = \dfrac{p\delta_1 + q\varepsilon_1}{1+p^2+q^2}; \\ \alpha_2 = \dfrac{(1+q^2)\delta_2 - pq\varepsilon_2}{1+p^2+q^2}, & \beta_2 = \dfrac{-pq\delta_2 + (1+p^2)\varepsilon_2}{1+p^2+q^2}, & \gamma_2 = \dfrac{p\delta_2 + q\varepsilon_2}{1+p^2+q^2}. \end{cases}$$

Für die sechs Unbekannten δ_1, ε_1; δ_2, ε_2; T_1, T_2 hat man zunächst die drei Gleichungen

$$(13')\qquad \begin{cases} T_1\delta_1^2 + T_2\delta_2^2 = rZ, \\ T_1\delta_1\varepsilon_1 + T_2\delta_2\varepsilon_2 = sZ, \\ T_1\varepsilon_1^2 + T_2\varepsilon_2^2 = tZ. \end{cases}$$

Weitere Gleichungen ergeben sich, wenn man die Orthogonalitätsbedingungen für die Substitution (6) nicht nach den Zeilen, sondern nach den Spalten gebildet aufstellt. Die Gleichungen (9) berücksichtigend findet man

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 - X^2 = (1+q^2)Z^2, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = -YZ = qZ^2, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 - Y^2 = (1+p^2)Z^2, & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = -ZX = pZ^2, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - Z^2 = (p^2+q^2)Z^2; & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = -XY = -pqZ^2. \end{cases}$$

Vermöge dieser Relationen beweist man leicht die Richtigkeit der bemerkenswert einfachen Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{cases} \delta_1^2+\delta_2^2 = 1+p^2, \\ \delta_1\delta_2+\varepsilon_1\varepsilon_2 = pq, \\ \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 = 1+q^2, \end{cases}$$

und erhält durch Verbindung je der ersten, zweiten und dritten Gleichung in den Gleichungssätzen (13′) und (17):

$$(18)\qquad \begin{cases} \delta_1^2 = \dfrac{rZ-(1+p^2)T_2}{T_1-T_2}, & \delta_2^2 = \dfrac{rZ-(1+p^2)T_1}{T_2-T_1}, \\[2ex] \delta_1\varepsilon_1 = \dfrac{sZ-pqT_2}{T_1-T_2}, & \delta_2\varepsilon_2 = \dfrac{sZ-pqT_1}{T_2-T_1}, \\[2ex] \varepsilon_1^2 = \dfrac{tZ-(1+q^2)T_2}{T_1-T_2}, & \varepsilon_2^2 = \dfrac{tZ-(1+q^2)T_1}{T_2-T_1}. \end{cases}$$

Hieraus erkennt man sofort, daß die beiden Hauptkrümmungen T_1 und T_2 der Gleichung zweiten Grades genügen

$$(19)\qquad \left[rZ-(1+p^2)T\right]\left[tZ-(1+q^2)T\right]-\left[sZ-pqT\right]^2 = 0,$$

und das ist, wenn für Z sein Wert aus (9) eingesetzt wird, nichts anderes als die Gleichung (2).

Nach Bestimmung von T_1 und T_2 werden durch die Gleichungen (18) die beiden Paare von Hilfsgrößen δ_1, ε_1 und δ_2, ε_2 bis auf ein jedem Paare gemeinsames Vorzeichen und alsdann durch die Gleichungen (15) die Tripel der Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, wiederum bis auf ein jedem Tripel gemeinsames Vorzeichen, bestimmt.

Die Verhältnisse der Richtungscosinus sind *eindeutig* gegeben. *Nach Ermittelung der Größen T_1 und T_2 braucht sogar bei ihnen keine neue Wurzel gezogen zu werden.* Wenn man nämlich in den Gleichungen (15) die Zähler der Brüche mit δ_1 multipliziert, so gelangt man für den Zeiger 1 zu den Formeln

$$(20)\qquad \alpha_1:\beta_1:\gamma_1 = \left[(1+q^2)\delta_1^2-pq\delta_1\varepsilon_1\right]:\left[-pq\delta_1^2+(1+p^2)\delta_1\varepsilon_1\right]:\left[p\delta_1^2+q\delta_1\varepsilon_1\right].$$

und hat jetzt nur für δ_1^2 und $\delta_1\varepsilon_1$ die Werte aus den Gleichungen (18) einzusetzen. Die Durchführung der Rechnung ergibt

$$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=\left[(1+q^2)r-pqs-Z^{-3}T_2\right]:\left[-pqr+(1+p^2)s\right]:\left[pr+qs-pZ^{-3}T_2\right].$$

Entsprechende Formeln gelten für den Zeiger 2.

Damit ist die Auflösung der Gleichungen (7), (8) und (13) vollendet.

§ 5
Der Ausnahmefall der Nabelpunkte

Die Gleichungen (18) werden hinfällig, wenn $T_1=T_2$, also auch $R_1=R_2$ ist; die *Nabelpunkte* bedürfen daher einer besonderen Untersuchung.

Nach den Gleichungen (13′) und (17) ist in einem solchen Punkte

$$\delta_1^2+\delta_2^2=rZR_1=1+p^2,\quad \delta_1\varepsilon_1+\delta_2\varepsilon_2=sZR_1=pq,\quad \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=tZR_1=1+q^2.$$

Mithin gelten für einen Nabelpunkt notwendig die Gleichungen

$$\text{(21)}\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

Sind umgekehrt für einen Punkt P diese Gleichungen erfüllt, so kommt, wenn der gemeinsame Wert der drei Brüche mit λ bezeichnet wird:

$$\text{(22)}\qquad \left\{\begin{aligned}&(T_1-Z\lambda)\delta_1^2+(T_2-Z\lambda)\delta_2^2=0,\\&(T_1-Z\lambda)\delta_1\varepsilon_1+(T_2-Z\lambda)\delta_2\varepsilon_2=0,\\&(T_1-Z\lambda)\varepsilon_1^2+(T_2-Z\lambda)\varepsilon_2^2=0.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen erfordern, daß entweder

$$T_1-Z\lambda=0,\qquad T_2-Z\lambda=0$$

oder

$$\delta_1\varepsilon_2-\delta_2\varepsilon_1=0$$

ist. Im zweiten Fall wären aber, wie die Gleichungen (15) zeigen, die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ den Richtungscosinus $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ proportional, und das ist mit der Relation

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$$

nicht verträglich. Mithin muß

$$T_1 = T_2 = Z\lambda \tag{23}$$

sein. Die Gleichungen (21) sind demnach die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für einen Nabelpunkt.

Daß man bei einem Nabelpunkt für die vier Unbekannten $\delta_1, \varepsilon_1; \delta_2, \varepsilon_2$ nur die drei Gleichungen (13) erhält, kann nicht überraschen, denn in diesem Falle darf als begleitendes Dreikant ein jedes Dreikant genommen werden, dessen eine Kante die Flächennormale ist.

§ 6
Die Formeln für die Haupttangenten

Es bleibt übrig, die Gleichungen (1) zu beweisen, durch welche bestimmt wird, wie sich die Richtungscosinus der Flächennormale ändern, wenn man von P aus auf der Fläche in der Richtung einer der beiden Haupttangenten wandert.

Zunächst gilt für den *Fortgang in einer beliebigen Richtung* die Formel

$$dZ = p\,dX + p\,dY, \tag{24}$$

die aus der Identität (10) mittels der Gleichungen (9) hervorgeht. Aus diesen Gleichungen folgt ferner

$$dX + p\,dZ + Z\,dp = 0, \qquad dY + q\,dZ + Z\,dq = 0,$$

und daher wird nach (24):

$$(1+p^2)dX + pq\,dY + Z\,dp = 0, \quad pq\,dX + (1+q^2)dY + Z\,dq = 0,$$

woraus sich für dX und dY selbst die Gleichungen ergeben:

$$\left\{\begin{aligned} &(1+p^2+q^2)dX + Z\left[(1+q^2)dp - pq\,dq\right] = 0,\\ &(1+p^2+q^2)dY + Z\left[-pq\,dp + (1+p^2)dq\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Die Ähnlichkeit der Ausdrücke in den eckigen Klammern mit den Zählern der Brüche für α_1, β_1 und α_2, β_2 in den Gleichungen (15) springt in die Augen. An die Stelle von δ_1, ε_2 und

δ_2, ε_2 treten dabei dp und dq. In der Tat läßt sich zeigen, daß beim *Fortgang in der Richtung der Haupttangenten* jene Größen beziehungsweise proportional $d_1 p$, $d_1 q$ und $d_2 p$, $d_2 q$ sind, und hiermit ist dann der Beweis für die Gleichungen (1) geliefert. Es genügt, die Rechnungen für den Zeiger 1 durchzuführen.

Wandert man in der Richtung der ersten Haupttangente, so ist

$$(26) \qquad d_1 x = \alpha_1 d_1 s, \qquad d_1 y = \beta_1 d_1 s, \qquad d_1 z = \gamma_1 d_1 s,$$

und es wird nach den Gleichungen (13):

$$(27)\begin{cases} Zd_1 p = Z(rd_1 x + s d_1 y) = \left[\alpha_1(T_1\delta_1^2 + T_2\delta_2^2) + \beta_1(T_1\delta_1\varepsilon_1 + T_2\delta_2\varepsilon_2)\right] d_1 s, \\ Zd_1 q = Z(sd_1 x + t d_1 y) = \left[\alpha_1(T_1\delta_1\varepsilon_1 + T_2\delta_2\varepsilon_2) + \beta_1(T_1\varepsilon_1^2 + T_2\varepsilon_2^2)\right] d_1 s. \end{cases}$$

Nun gelten aber die Identitäten

$$(28) \qquad \alpha_1\delta_1 + \beta_1\varepsilon_1 = 1, \qquad \alpha_1\delta_2 + \beta_1\varepsilon_2 = 0.$$

Zum Beweise hat man nur aus den Gleichungen (14) die Werte von δ_1, ε_1; δ_2, ε_2 einzusetzen und die Gleichungen (8′) zu benutzen; man wird so auf die Orthogonalitätsbedingungen (7) geführt, mit denen die Gleichungen (28) im Grunde gleichbedeutend sind. Demnach wird

$$(29) \qquad Zd_1 p = \delta_1 T_1 d_1 s, \qquad Zd_1 q = \varepsilon_1 T_1 d_1 s,$$

und daher

$$(30) \qquad d_1 X + \alpha_1 T_1 d_1 s = 0, \qquad d_1 Y + \beta_1 T_1 d_1 s = 0.$$

Da aber gleichzeitig

$$d_1 Z = p d_1 X + q d_1 Y, \qquad \gamma_1 = p\alpha_1 + q\beta_1$$

ist, so folgt aus den beiden Gleichungen (30) sofort die dritte Gleichung

$$(31) \qquad d_1 Z + \gamma_1 T_1 d_1 s = 0,$$

womit die Gleichungen (1) gewonnen sind.