Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Kriterien für die Irreduktibilität einer Klasse homogener linearer Differentialgleichungen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1916, 5

Signatur UB Heidelberg: L 1431-10-25

Der früher von dem Verfasser auf algebraischem und funktionalem Wege verallgemeinerte Eisensteinsche Satz über die Irreduktibilität algebraischer Gleichungen im rationalen Zahlenkörper wird auf die Untersuchung homogener linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung ausgedehnt, deren Koeffizienten mit Ausnahme des letzten einen gemeinsamen linearen Teiler besitzen, der im ersten Koeffizienten nur einfach enthalten ist.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1916 , S. XVI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1916. 5. Abhandlung

Kriterien für die Irreduktibilität einer Klasse homogener linearer Differentialgleichungen

von

LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

1451 70/25

Eingegangen am 3. Mai 1916

Heidelberg 1916
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1300

Um das EISENSTEINsche Kriterium für die Irreduktibilität algebraischer Gleichungen auf Funktionalgleichungen auszudehnen, und für letztere eine Reihe anderer Kriterien zu entwickeln, die sich wieder auf numerische Gleichungen übertragen ließen, brauchte man nur die für algebraische Funktionen unmittelbar ersichtliche Erweiterung des GAUSSschen Satzes zugrunde zu legen, daß, wenn ein ganzzahliges Polynom in zwei rationalzahlige Polynome zerlegbar ist, auch eine Zerlegung in zwei ganzzahlige Polynome existiert[1]. Will man jedoch die analogen Untersuchungen zur Gewinnung von Irreduktibilitätskriterien für lineare homogene Differentialgleichungen durchführen, so muß zunächst der GAUSSsche Satz in etwas veränderter Form ausgesprochen und bewiesen werden.

Sei eine algebraische Funktionalgleichung gegeben

$$(1) \qquad P = f_0 y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_{n-1} y + f_n = 0,$$

in welcher $f_0, f_1, \ldots f_n$ ganze Funktionen von x sind, und genüge eine Lösung y_1 derselben einer gleichartigen Gleichung niederen Grades

$$(2) \qquad Q = \varphi_0 y^\nu + \varphi_1 y^{\nu-1} + \cdots + \varphi_{\nu-1} y + \varphi_\nu = 0,$$

aber keiner ebensolchen Gleichung von noch niedrigerem Grade als dem ν^{ten}; die Gleichung (2) ist dann eine mit Adjungierung rationaler Funktionen von x irreduktible, da für algebraische Funktionen die Definition der Irreduktibilität, keine Lösung mit einer gleichartigen Gleichung niederen Grades gemein zu haben, mit der, daß eine Lösung derselben nicht einer Gleichung niederen

[1] Vergl. meine Arbeiten: „Über den EISENSTEINschen Satz von der Irreduktibilität algebraischer Gleichungen" (Journ. f. Mathematik. Bd. 115) und „Über die Entwicklungsform der algebraischen Funktionen und die Irreduktibilität algebraischer Gleichungen" (Journ. f. Mathematik. Bd. 121).

Grades genügt, zusammenfällt, und es wird daher die irreduktible Gleichung (2) alle ihre Lösungen $y_1, y_2, \dots y_\nu$ mit der Gleichung (1) gemein haben.

Aus den beiden Polynomen

$$P = f_0 y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_n$$
$$Q = \varphi_0 y^\nu + \varphi_1 y^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu$$

folgt durch Elimination von $y^n, y^{n-1}, \dots y^\nu$ die nach Substitution der Polynome P und Q in x und y identische Gleichung

$$(3)\quad \varphi_0^{n-\nu+1} P = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0^{n-\nu} f_0 y^{n-\nu} + \varphi_0^{n-\nu-1}(\psi_1 f_0 + \varphi_0 f_1) y^{n-\nu-1} \\ \qquad + \varphi_0^{n-\nu-2}(\psi_2 f_0 + \varphi_0 \chi_1 f_1 + \varphi_0^2 f_2) y^{n-\nu-2} \end{array} \right.$$
$$+ \cdots + (\psi_{n-\nu} f_0 + \varphi_0 \chi_{n-\nu-1} f_1 + \varphi_0^2 \omega_{n-\nu-2} f_2 + \cdots + \varphi_0^{n-\nu} f_{n-\nu}) Q$$
$$+ H_0 y^{\nu-1} + H_1 y^{\nu-2} + \cdots + H_{\nu-1},$$

in welcher die Funktionen $\psi, \chi, \omega, \dots H$ ganze Funktionen von x sind; da aber $y = y_1$ die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ befriedigen sollte, also nach (3) auch

$$H_0 y_1^{\nu-1} + H_1 y_1^{\nu-2} + \cdots + H_{\nu-1} = 0$$

sein muß, so wird wegen der Irreduktibilität von (2) das in x identische Verschwinden der Koeffizienten H folgen, und daher die Gleichung (3) in die in x und y identische Beziehung übergehen:

$$(4)\quad \varphi_0^{n-\nu+1}(f_0 y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_n)$$
$$= [\varphi_0^{n-\nu} f_0 y^{n-\nu} + \varphi_0^{n-\nu-1}(\psi_1 f_0 + \varphi_0 f_1) y^{n-\nu-1} + \cdots][\varphi_0 y^\nu + \varphi_1 y^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu].$$

Ist nun $x - \alpha$ ein linearer Teiler von φ_0, und setzt man, ohne zu den weiteren Schlüssen die spezielle Form der Koeffizienten der Klammerausdrücke zu berücksichtigen, die Gleichung (4) in die Form

$$\varphi_0^{n-\nu+1} P = [(L_0 + (x-\alpha) M_0) y^{n-\nu} + (L_1 + (x-\alpha) M_1) y^{n-\nu-1} + \cdots]$$
$$[(l_0 + (x-\alpha) m_0) y^\nu + (l_1 + (x-\alpha) m_1) y^{\nu-1} + \cdots],$$

worin $L_0, L_1, \ldots l_0, l_1, \ldots$ den Faktor $x-\alpha$ nicht enthalten, so müssen, da die Koeffizienten der y-Potenzen auf der linken Seite dieser Gleichung durch $x-\alpha$ teilbar sind, auch die Koeffizienten in dem Produkt

$$[L_0 y^{n-\nu} + L_1 y^{n-\nu-1} + \cdots + L_{n-\nu}]\,[l_0 y^{\nu} + l_1 y^{\nu-1} + \cdots + l_\nu]$$

eben diese Eigenschaft haben. Seien nun die ersten, nicht identisch verschwindenden L- und l-Funktionen $L_\varkappa$ und l_λ, so müßte der Koeffizient der höchsten in dem Produkt enthaltenen y-Potenz $L_\varkappa l_\lambda$ durch $x-\alpha$ teilbar sein, also $L_\varkappa$ oder l_λ gegen die Voraussetzung verschwinden, d. h. alle Koeffizienten des ersten Klammerausdrucks der Gleichung (4) durch $x-\alpha$ teilbar sein, da wir annehmen dürfen, daß die Koeffizienten der Gleichung (2) keinen gemeinsamen Teiler haben. Dividiert man nun die beiden Seiten von (4) durch $x-\alpha$, so daß die rechte Seite aus einem Produkt eines Polynoms von y vom $n-\nu^{\text{ten}}$ Grade mit in x ganzen Koeffizienten und Q besteht, und wendet dieselben Schlüsse auf alle linearen Teiler von $\varphi_0^{n-\nu+1}$ an, so ergibt sich die Zerlegung

$$(5) \qquad P = (g_0 y^{n-\nu} + g_1 y^{n-\nu-1} + \cdots + g_{n-\nu-1} y + g_{n-\nu})\,Q,$$

worin $g_0, g_1, \ldots g_{n-\nu}$ ganze Funktionen von x sind, wie es der GAUSSsche Satz für Funktionalpolynome verlangt.

Es möge des Folgenden wegen hier noch bemerkt werden, daß wir die Möglichkeit der Zerlegung von P in ein Produkt von Q und einem Polynom in y, dessen Koeffizienten ganze Funktionen von x sind, auch aus der Beschaffenheit der oben als notwendig erkannten Gleichungen

$$H_0 = 0,\ H_1 = 0,\ \ldots H_{\nu-1} = 0$$

herleiten können. Habe z. B. die algebraische Funktionalgleichung

$$P = f_0 y^3 + f_1 y^2 + f_2 y + f_3 = 0$$

mit der Gleichung

$$Q = \varphi_0 y^2 + \varphi_1 y + \varphi_2 = 0$$

eine Lösung gemein, die nicht schon einer gleichartigen Gleichung

vom ersten Grade in y angehört, also eine rationale Funktion von x ist, so wird die in x und y identische Beziehung bestehen

$$\varphi_0^2 P = (\varphi_0 f_0 y + (\varphi_1 f_0 - \varphi_0 f_1))Q \tag{6}$$

und

$$H_0 = \varphi_0(\varphi_0 f_2 - \varphi_2 f_0) - \varphi_1(f_1\varphi_0 - \varphi_1 f_0) = 0 \tag{7}$$

$$H_1 = \varphi_0^2 f_3 - \varphi_2(f_1\varphi_0 - \varphi_1 f_0) = 0 \tag{8}$$

sein. Ist nun

$$\varphi_0 = (x-\alpha)^\varkappa (x-\beta)^\lambda (x-\gamma)^\mu \cdots ,$$

so wird, wenn

$$1) \quad \varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

ist, nach (7) $f_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)^\varkappa$ und somit

$$(a) \quad \varphi_0 f_0 \text{ und } f_1\varphi_0 - \varphi_1 f_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)^{2\varkappa}$$

sein, und wenn

$$2) \quad \varphi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha) ,$$

so ist nach (8) $f_1\varphi_0 - \varphi_1 f_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)^{2\varkappa}$ und hieraus nach (7) $\varphi_0 f_2 - \varphi_2 f_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)^\varkappa$, also $f_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)^\varkappa$, und es folgen somit wieder die beiden Kongruenzen (a), so daß die Koeffizienten des in y linearen Polynoms der Gleichung (6) durch $(x-\alpha)^{2\varkappa}$ teilbar sind, und da dasselbe für $(x-\beta)^\lambda$, $(x-\gamma)^\mu$ gilt, so ergibt sich aus (6) die Zerlegung

$$P = (g_0 y + g_1)Q ,$$

worin g_0 und g_1 ganze Funktionen von x sind.

Der erweiterte EISENSTEINsche Satz, daß, wenn in einer algebraischen Funktionalgleichung

$$P = f_0 y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_{n-1} y + f_n = 0$$

für irgend einen Wert $x = \alpha$

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = \cdots = f_{n-1}(\alpha) = 0$$

ist, während von den Werten $f_0(\alpha)$ und $f_n(\alpha)$ der eine von Null verschieden ist, der andere verschwindet, diese Funktion jedoch die

Lösung α nur einfach besitzt, die Gleichung mit Adjungierung rationaler Funktionen von x irreduktibel ist, folgt unmittelbar aus der Zerlegungsform (5), die für den Fall der Reduzibilität von $P=0$ bestehen müßte. Denn, wenn

$$f_0 \equiv 0,\ f_1 \equiv 0, \ldots f_{n-1} \equiv 0 \bmod (x-\alpha),\ f_n \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha),\ f_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2$$

ist, so folgt, da nach (5) $g_0 \varphi_0 = f_0$ ist, daß entweder g_0 oder φ_0 den Teiler $x-\alpha$ einfach besitzen; bringt man nun die Posten der rechten Seite von (5), für welche die Koeffizienten der y-Potenzen durch $x-\alpha$ teilbar sind, auf die linke Seite und wendet auf die sich so ergebende Gleichung in bekannter Weise dieselben Schlüsse an, so folgt, daß entweder alle Funktionen $g_0, g_1, \ldots g_{n-\nu}$ oder $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\nu$ durch $x-\alpha$ teilbar sein müssen, was aber wegen

$$g_{n-\nu} \cdot \varphi_\nu = f_n$$

der Voraussetzung nach nicht möglich ist — also muß $P=0$ irreduzibel sein.

Um nun diese Betrachtungen auf lineare homogene Differentialgleichungen auszudehnen, nehmen wir an, daß die Differentialgleichung

$$(9) \qquad P = f_0 y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1} y' + f_n y = 0,$$

in welcher $f_0, f_1, \ldots f_n$ ganze Funktionen von x sind[1], mit der gleichartigen linearen homogenen Differentialgleichung

$$(10) \qquad Q = \varphi_0 y^{(\nu)} + \varphi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \varphi_{\nu-1} y' + \varphi_\nu y = 0$$

ein Integral y_1 gemein hat, welches nicht schon einer ebensolchen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der ν^{ten} Genüge leistet, und man erhält dann, genau wie oben für algebraische Gleichungen, die für eine beliebige Funktion y von x identische Gleichung

[1] Die Ausdehnung der nachfolgenden Untersuchungen auf den Fall, daß die Koeffizienten der Differentialgleichungen nach ganzen Potenzen von $x-\alpha$ fortschreitende Reihen sind, ist unmittelbar ersichtlich.

$$\varphi_0^{n-\nu+1} P = \varphi_0^{n-\nu} f_0 Q^{(n-\nu)} + \varphi_0^{n-\nu-1} \left(\psi_1 f_0 + \varphi_0 f_1\right) Q^{(n-\nu-1)} + \cdots$$
$$+ \left(\psi_{n-\nu} f_0 + \varphi_0 \chi_{n-\nu-1} f_1 + \varphi_0^2 \omega_{n-\nu-2} f_2 + \cdots + \varphi_0^{n-\nu} f_{n-\nu}\right) Q$$
$$+ H_0 y^{(\nu-1)} + H_1 y^{(\nu-2)} + \cdots + H_{\nu-1} y ,$$

worin die Funktionen $\varphi, \psi, \chi, \omega, \ldots H$ ganze Funktionen von x sind.

Substituiert man hierin das den beiden Gleichungen $P=0$ und $Q=0$ der Voraussetzung nach gemeinsame Integral y_1, so müßte

$$H_0 y_1^{(\nu-1)} + H_1 y_1^{(\nu-2)} + \cdots + H_{\nu-1} y_1 = 0$$

sein, und da dasselbe der Annahme nach nicht schon einer gleichartigen linearen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der ν^{ten} genügen sollte,

$$H_0 = 0,\ H_1 = 0,\ \ldots H_{\nu-1} = 0 ,$$

so daß sich die für jede Funktion y von x identische Darstellung von P durch die Ableitungen von Q in der Form ergibt

$$(11) \qquad \varphi_0^{n-\nu+1} P = \varphi_0^{n-\nu} f_0 Q^{(n-\nu)} + \varphi_0^{n-\nu-1} \left(\psi_1 f_0 + \varphi_0 f_1\right) Q^{(n-\nu-1)}$$
$$+ \varphi_0^{n-\nu-2} \left(\psi_2 f_0 + \varphi_0 \chi_1 f_1 + \varphi_0^2 f_2\right) Q^{(n-\nu-2)} + \cdots$$
$$+ \left(\psi_{n-\nu} f_0 + \varphi_0 \chi_{n-\nu-1} f_1 + \varphi_0^2 \omega_{n-\nu-2} f_2 + \cdots + \varphi_0^{n-\nu} f_{n-\nu}\right) Q ,$$

aus welcher ersichtlich ist, daß alle Integrale der Differentialgleichung $Q=0$ auch Integrale der Differentialgleichung $P=0$ sein werden.

Es ist jedoch zu bemerken, daß, während oben für die algebraische Gleichung $Q=0$ die Definitionen der Irreduktibilität, keine Lösung mit einer gleichartigen Gleichung niederen Grades gemein zu haben, oder mindestens eine Lösung zu besitzen, welche nicht schon einer gleichartigen Gleichung niederen Grades genügt, einander äquivalent sind, diese Äquivalenz für lineare Differentialgleichungen nicht besteht. Es kann nämlich y_1 der Bedingung unterliegen, nicht einer gleichartigen linearen Differentialgleichung niederer Ordnung als der ν^{ten} zu genügen, während dies für andere Integrale dieser Differentialgleichung wohl der Fall sein kann. Nennt man eine lineare Differentialgleichung irreduktibel, wenn

sie kein Integral mit einer gleichartigen linearen Differentialgleichung niederer Ordnung gemein hat, so gilt bekanntlich der Satz, daß, wenn eines ihrer Integrale einer gleichartigen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung angehört, auch alle ihre Integrale dieser letzteren Differentialgleichung genügen werden; soll jedoch eine lineare Differentialgleichung als irreduktibel bezeichnet werden, wenn sie überhaupt nur ein Integral besitzt, welches nicht einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, so folgt aus der obigen Darstellung (11), daß, wenn dieses Integral einer gleichartigen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung genügt, ebenfalls auch alle Integrale jener derart definierten irreduktibeln Differentialgleichung Integrale der letzteren sind.

So hat z. B. die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(12)\quad P=(4x^2-2x+2)y'''-(8x^3+10x)y''+(8x^3-4x^2+12x-2)y'=0$$

mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(13)\qquad Q=(2x-1)y''-(4x^2+1)y'+(4x^2-2x+2)y=0$$

das Integral

$$y_1=e^{x^2}+e^x$$

gemein, welches nicht schon einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit in x rationalen Koeffizienten genügt, und es werden somit alle Integrale von (13), die sämtlich in der Form

$$y=c_1e^{x^2}+c_2e^x$$

enthalten sind, auch der Gleichung (12) angehören, wiewohl das Integral e^x der ersteren schon der linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y'-y=0$ angehört, diese also im ersteren Sinne nicht irreduktibel ist.

Wir werden die zweite der oben für die Irreduktibilität einer linearen Differentialgleichung gegebenen Definitionen der Kürze des Ausdrucks wegen im folgenden beibehalten.

Daß sich nicht, wie oben bei der Erweiterung des GAUSSschen Satzes auf algebraische Funktionen, für lineare Differentialgleichungen allgemein aus der Gleichung (11) P als lineare Funktion von Q und dessen Ableitungen ergeben wird mit Koeffizienten, welche

ganze Funktionen von x sind, ist z. B. schon aus den Gleichungen (12) und (13) ersichtlich, für welche nach (11)

$$(2x-1)^2 P = (2x-1)(4x^2-2x+2)Q' - [(2x-1)(8x^3+10x) - (4x^2-1)(4x^2-2x+2)]Q$$

ist, woraus sich nur

$$(2x-1)P = (4x^2-2x+2)Q' - [8x^3+10x-(2x+1)(4x^2-2x+2)]Q,$$

aber nicht eine Darstellung von P selbst mit in x ganzen Koeffizienten ergibt.

Um nun die Untersuchung allgemein durchzuführen, wann sich aus (11) eine analoge Darstellung für P selbst ergeben wird, wollen wir eine Hilfsbemerkung vorausschicken und dann zunächst die Untersuchungsmethode selbst an der Zusammenstellung einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer irreduktibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung erläutern.

Es ist leicht zu sehen, daß, wenn in der durch $\varphi_0^{n-\nu+1}$ dividierten Gleichung (11) die Koeffizienten von $Q^{(n-\nu)}, Q^{(n-\nu-1)}, \ldots Q'$ ganze Funktionen von x sind, auch der von Q diese Eigenschaft haben wird. Denn, wenn sich aus

$$\varphi_0^{n-\nu+1} P = G_0(x)Q^{(n-\nu)} + G_1(x)Q^{(n-\nu-1)} + \cdots + G_{n-\nu-1}(x)Q' + G_{n-\nu}(x)Q$$

durch Division mit $\varphi_0^{n-\nu+1}$

$$P = g_0(x)Q^{(n-\nu)} + g_1(x)Q^{(n-\nu-1)} + \cdots + g_{n-\nu-1}(x)Q' + \frac{G_{n-\nu}(x)}{\varphi_0^{n-\nu+1}}Q$$

ergibt, worin $g_0(x), g_1(x), \ldots g_{n-\nu-1}(x)$ ganze Funktionen von x sind, so müssen in dieser identischen Gleichung auch die Koeffizienten von $y^{(\nu)}, y^{(\nu-1)}, \ldots y', y$ in dem Ausdruck

$$\frac{G_{n-\nu}(x)}{\varphi_0^{n-\nu+1}}(\varphi_0 y^{(\nu)} + \varphi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \varphi_\nu y)$$

dieselbe Eigenschaft haben, und da zunächst der Koeffizient von $y^{(\nu)}$

$$\frac{G_{n-\nu}(x)}{\varphi_0^{n-\nu}} = G(x)$$

in x ganz sein muß, sich auch

$$\frac{G(x)}{\varphi_0}\varphi_1, \frac{G(x)}{\varphi_0}\varphi_2, \cdots \frac{G(x)}{\varphi_0}\varphi_\nu$$

als ganze Funktionen von x ergeben, oder es müßten, wenn N der größte gemeinsame Teiler von $G(x)$ und φ_0 ist,

$$\frac{\frac{G(x)}{N}}{\frac{\varphi_0}{N}}\varphi_1, \frac{\frac{G(x)}{N}}{\frac{\varphi_0}{N}}\varphi_2, \cdots \frac{\frac{G(x)}{N}}{\frac{\varphi_0}{N}}\varphi_\nu$$

ganze Funktionen von x sein. Da aber $\frac{G(x)}{N}$ und $\frac{\varphi_0}{N}$ relativ prim sind, so würden $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_\nu$ den gemeinsamen Teiler $\frac{\varphi_0}{N}$ haben, also $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_\nu$ einen gemeinsamen Teiler besitzen, welcher Fall für die Differentialgleichung $Q=0$ ausgeschlossen werden durfte; es muß somit

$$\frac{G(x)}{\varphi_0} = \frac{G_{n-\nu}(x)}{\varphi_0^{n-\nu+1}}$$

eine ganze Funktion von x sein.

Habe nun, um die Untersuchung zunächst an dem einfachsten Falle durchzuführen, die Differentialgleichung

$$P = f_0 y''' + f_1 y'' + f_2 y' + f_3 y = 0$$

mit der Differentialgleichung

$$Q = \varphi_0 y'' + \varphi_1 y' + \varphi_2 y = 0$$

ein Integral gemein, welches nicht schon einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit in x ganzen Koeffizienten genügt, so ergibt sich nach (11) die identische Zerlegung

$$\varphi_0^2 P = \varphi_0 f_0 Q' + (\varphi_0 f_1 - f_0(\varphi_0' + \varphi_1))Q, \tag{14}$$

während die Gleichungen $H_0=0$, $H_1=0$ die Beziehungen liefern

$$\varphi_0(\varphi_0 f_2 - f_0(\varphi_1' + \varphi_2)) = \varphi_1(\varphi_0 f_1 - f_0(\varphi_0' + \varphi_1)) \tag{15}$$

$$\varphi_0(\varphi_0 f_3 - f_0 \varphi_2') = \varphi_2(\varphi_0 f_1 - f_0(\varphi_0' + \varphi_1)) \,. \tag{16}$$

Da wir wieder annehmen dürfen, daß φ_0, φ_1, φ_2 keinen gemeinsamen Teiler haben, so folgt auf Grund der obigen Hilfsbemerkung, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß P nach Q′ und Q mit in x ganzen Koeffizienten zerlegbar ist, dadurch ausgedrückt wird, daß f_0 durch φ_0 teilbar ist, und wir haben somit nur die Frage nach der Beschaffenheit der Lösungen von φ_0 zu erörtern, damit diese Bedingung erfüllt ist. Besitze

1) φ_0 den Faktor $(x-\alpha)^\varkappa$ und sei $\varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$,

so folgt aus (15), daß $f_0(\varphi_0' + \varphi_1)$ durch $(x-\alpha)^\varkappa$ teilbar ist; es wird somit, wenn $\varkappa > 1$ ist, f_0 den Divisor $(x-\alpha)^\varkappa$ enthalten, und daher, wenn φ_0 nur vielfache Lösungen besitzt, f_0 durch φ_0 teilbar sein. Ist jedoch $\varkappa = 1$, so kann aus der Teilbarkeit von $f_0(\varphi_0' + \varphi_1)$ durch $x-\alpha$ nur geschlossen werden, daß f_0 durch $x-\alpha$ teilbar sein muß, wenn $\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist, wiewohl auch die Teilbarkeit von f_0 durch $x-\alpha$ bestehen kann, wenn $\varphi_0' + \varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist. Wir finden somit, daß, wenn

$$\varphi_0 = (x-\alpha)^\varkappa (x-\beta)^\lambda (x-\gamma)^\mu \ldots (x-a)(x-b)\ldots(x-a_1)(x-b_1)\ldots$$

ist, worin $\varkappa, \lambda, \mu \ldots > 1$, und die einfachen Lösungen $a_1, b_1, \ldots$ so beschaffen sind, daß unter der Voraussetzung, daß φ_1 keine Lösung mit φ_0 gemein hat, $\varphi_0' + \varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-a_1)$, $\bmod (x-b_1), \ldots$ ist, im allgemeinen f_0 nur durch

$$\frac{\varphi_0}{(x-a_1)(x-b_1)\ldots}$$

teilbar und daher auch nur

$$(x-a_1)(x-b_1)\ldots P$$

mit in x ganzen Koeffizienten zerlegbar sein wird, was in der Tat in dem obigen Beispiel (12), (13), in welchem

$a_1=\frac{1}{2}$, $\varphi_0=2x-1$, $\varphi_1=-(4x^2+1)$, also $\varphi_0'+\varphi_1=-(4x^2-1)\equiv 0 \bmod (x-\frac{1}{2})$,

der Fall ist. Kommen Lösungen von der Beschaffenheit der $a_1, b_1, \ldots$ in φ_0 nicht vor, so wird stets f_0 durch φ_0 teilbar, also P mit in x ganzen Koeffizienten zerlegbar sein. Daß aber auch, wenn $\varphi_0'+\varphi_1\equiv 0 \bmod (x-a_1)$ ist, zugleich f_0 durch $x-a_1$ teilbar sein kann, sich also auch P mit in x ganzen Koeffizienten zerlegen lassen kann, zeigt das Beispiel

$$xy'''+x^2y''+xy'-y=\frac{d}{dx}\left(xy''+(x^2-1)y'-xy\right).$$

Enthält

2) φ_0 den Faktor $(x-\alpha)^\varkappa$, φ_1 den Faktor $(x-\alpha)^\mu$,

worin $\varkappa\geq 1$, $\mu\geq 1$, und ist somit $\varphi_2\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, so liefert die direkte Untersuchung von

$$(x-\alpha)^{2\varkappa}\,G\cdot P=G_0\frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)^\varkappa g_0y''+(x-\alpha)^\mu g_1y'+g_2y\right]$$
$$+G_1\left[(x-\alpha)^\varkappa g_0y''+(x-\alpha)^\mu g_1y'+g_2y\right],$$

worin $G, G_0, G_1, g_0, g_1, g_2$ ganze Funktionen von x, und $G, g_0, g_1, g_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sind, für die Koeffizienten von y''', y'', y', y auf der rechten Seite dieser Gleichung vermöge der Form der linken Seite die notwendig zu erfüllenden Kongruenzen:

$$(17)\qquad G_0(x-\alpha)^\varkappa g_0\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

$$(18)\quad G_0\left[(x-\alpha)^\varkappa g_0'+\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}g_0+(x-\alpha)^\mu g_1\right]+G_1(x-\alpha)^\varkappa g_0\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

$$(19)\quad G_0\left[(x-\alpha)^\mu g_1'+\mu(x-\alpha)^{\mu-1}g_1+g_2\right]+G_1(x-\alpha)^\mu g_1\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

$$(20)\qquad G_0g_2'+G_1g_2\equiv 0 \bmod (x-\alpha);$$

für $\varkappa=1$, $\mu\geq 1$ folgt aus (18) $G_0\equiv 0$, also auch $G_1\equiv 0$, und dasselbe für $\mu>1$ aus (19), während für $\mu=1$ $G_0(g_1+g_2)\equiv 0$, also im allgemeinen nur $G_0\equiv 0$ und $G_1\equiv 0$ folgt, wenn $g_1+g_2\not\equiv 0$ ist. Bemerkt man nun, daß

$$\varphi_0' + \varphi_1 = (x-\alpha)^{\varkappa} g_0' + \varkappa (x-\alpha)^{\varkappa-1} g_0 + (x-\alpha)^{\mu} g_1 \equiv 0, \text{ wenn } \varkappa > 1,$$
$$\text{und } \not\equiv 0, \text{ wenn } \varkappa = 1,$$

und

$$\varphi_1' + \varphi_2 = (x-\alpha)^{\mu} g_1' + \mu (x-\alpha)^{\mu-1} g_1 + g_2 \not\equiv 0, \text{ wenn } \mu > 1,$$
$$\text{und } \equiv g_1 + g_2, \text{ wenn } \mu = 1$$

ist, so ergibt sich durch Zusammenfassen der für 1) und 2) gewonnenen Resultate, daß, wenn $\varphi_0 = (x-\alpha)^{\varkappa} g_0$, $\varphi_1 = (x-\alpha)^{\mu} g_1$, $\varphi_2 = (x-\alpha)^{\rho} g_2$, worin $g_0, g_1, g_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sind, für $\varkappa > 1$ $\mu > 1$, $\varkappa > 1$ $\mu = 0$, $\varkappa = 1$ $\mu \geqq 1$ die Koeffizienten G_0 und G_1 durch $x-\alpha$ teilbar sind, während dies im allgemeinen für $\varkappa > 1$ $\mu = 1$ nur stattfinden wird, wenn $\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0$, und für $\varkappa = 1$ $\mu = 0$, wenn $\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0$ ist; die Teilbarkeit von G_0 und G_1 durch $x-\alpha$ wird daher nicht notwendig stattfinden für die Differentialgleichungen

$$Q = (x-\alpha) g_0 y'' + g_1 y' + (x-\alpha)^{\rho} g_2 y = 0,$$

worin $\rho \geqq 0$, wenn $\varphi_0' + \varphi_1 \equiv 0$, und

$$Q = (x-\alpha)^{\varkappa} g_0 y'' + (x-\alpha) g_1 y' + g_2 y = 0,$$

wenn $\varphi_1' + \varphi_2 \equiv 0$ ist.

Da nun dieselben Schlüsse für jeden linearen Teiler von φ_0^2 gelten, so wird sich der Gleichung (14) zufolge das nachstehende Resultat ergeben: Wenn φ_0 die Lösungen $\alpha, \beta, \ldots$ mehrfach, die Lösungen $a, b, \ldots$ einfach enthält, und es besitzt φ_1 von den Größen $\alpha, \beta, \ldots$ die Lösungen $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ mehrfach, oder wenn einfach und es ist

$$\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha_1), \bmod (x-\beta_1), \ldots,$$

und enthält φ_1 von den Werten $a, b, \ldots$ die Lösungen $a_1, b_1, \ldots$ mehrfach oder einfach, oder wenn garnicht und es ist

$$\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-a_1), \bmod (x-b_1), \ldots,$$

so werden sich in (14) alle linearen Teiler von φ_0^2 wegdividieren lassen, und somit die Zerlegungsform von P selbst nach Q' und Q nur in x ganze Koeffizienten besitzen; die aufgestellten Bedingungen werden daher für diese Zerlegung hinreichende sein.

Um nun allgemein, nicht nur wie in dem soeben behandelten Beispiel die hinreichenden Bedingungen, in den Koeffizienten $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ in Q ausgedrückt, für die Zerlegung von P mit in x ganzen Koeffizienten, sondern die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür in den Koeffizienten $f_0, f_1, \ldots, \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ von P und Q ausgedrückt aufzustellen, bemerke man zunächst, daß – von dem selbstverständlichen Falle, daß φ_0 eine Konstante ist, abgesehen –, wenn f_0 nicht durch φ_0 teilbar ist, wie aus dem Koeffizienten von $Q^{(n-\nu)}$ in (11) zu ersehen, eine Zerlegung mit in x ganzen Koeffizienten nicht möglich ist, und daß ferner eine hinreichende Bedingung für eine derartige Zerlegung durch die Kongruenzen geliefert wird

$$f_0 \equiv 0 \bmod \varphi_0^{n-\nu},\ f_1 \equiv 0 \bmod \varphi_0^{n-\nu-1},\ \ldots\ f_{n-\nu-1} \equiv 0 \bmod \varphi_0,$$

da dann alle Koeffizienten von $Q^{(n-\nu)}, Q^{(n-\nu-1)}, \ldots Q'$ auf der rechten Seite der Gleichung (11), und somit auch der von Q durch $\varphi_0^{n-\nu+1}$ teilbar sind, während sonst nur ohne weitere Bedingungen die Teilbarkeit der rechten Seite von (11) durch φ_0 unmittelbar ersichtlich ist.

Hat nun $P=0$ mit der irreduktibeln Gleichung $Q=0$ ein Integral gemein, so daß nach (11) die Beziehung besteht

$$\varphi_0^{n-\nu+1} P = G_0 Q^{n-\nu} + G_1 Q^{n-\nu-1} + \cdots + G_{n-\nu} Q,$$

so folgt durch Identifizierung der Koeffizienten der Ableitung von y

$$\varphi_0^{n-\nu+1} f_0 = G_0 \varphi_0 \quad \text{oder} \quad G_0 = \varphi_0^{n-\nu} f_0$$

$$\varphi_0^{n-\nu+1} f_1 = G_0 \left[(n-1)\varphi_0' + \varphi_1\right] + G_1 \varphi_0$$

oder

$$G_1 = \varphi_0^{n-\nu} f_1 + \varphi_0^{n-\nu-1} f_0 \left[(n-\nu)\varphi_0' + \varphi_1\right]$$

usw., und es werden somit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Zerlegung von P eine ganze sein soll, also die Koeffizienten $G_0, G_1, \ldots$ durch $\varphi_0^{n-\nu+1}$ teilbar sein sollen, in den Größen $f_0, f_1, \ldots \varphi_0, \varphi_1 \ldots$ ausgedrückt, die folgenden sein:

$$f_0 : \varphi_0 = g_0$$

$$\varphi_0 f_1 + f_0\left[(n-\nu)\varphi_0' + \varphi_1\right] : \varphi_0^2 = g_1$$

$$\varphi_0^2 f_2 - \varphi_0 f_0\left[(n-\nu)_2 \varphi_0'' + (n-\nu)_1 \varphi_1' + \varphi_2\right]$$
$$- \left[\varphi_0 f_1 + f_0\left((n-\nu)\varphi_0' + \varphi_1\right)\right]\left[(n-\nu-1)\varphi_0' + \varphi_1\right] : \varphi_0^3 = g_2$$

usw., worin $g_0, g_1, g_2, \ldots$ ganze Funktionen von x sein sollen.

Um zunächst nur eine unmittelbare Anwendung von diesen Beziehungen hervorzuheben, nehmen wir an, daß α eine einfache Lösung von f_0 ist, für welche auch $\varphi_0(\alpha) = 0$ ist; dann wird, weil g_0 eine ganze Funktion von x sein soll, α auch eine einfache Lösung von φ_0 sein müssen, und somit, wenn α auch eine Lösung von f_1 ist, da g_1 in x ganz sein soll,

$$(n-\nu)\varphi_0' + \varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

sein, also φ_1 nicht die Lösung α haben dürfen. Wir finden somit, daß, wenn f_0 die einfache Lösung α besitzt, die auch $f_1(\alpha)$ und $\varphi_0(\alpha)$ zu Null macht, eine notwendige Bedingung für die Möglichkeit einer ganzen Zerlegung von P, wenn $P = 0$ ein Integral mit der irreduktibeln Gleichung $Q = 0$ gemein hat, die ist, daß die Lösung α der Funktion φ_1 nicht angehört und die obige Kongruenz befriedigt wird.

Aber wir können auf diesem Wege durch Vergleichung der Koeffizienten von y und dessen Ableitungen in der Zerlegungsform (11) auch allgemeinere Sätze herleiten. Habe z. B. die Differentialgleichung

$$P = f_0 y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \cdots + f_n y = 0,$$

in welcher

$$f_0 = (x-\alpha)^{\varkappa_0} F_0, \quad f_1 = (x-\alpha)^{\varkappa_1} F_1, \quad \ldots \quad f_n = (x-\alpha)^{\varkappa_n} F_n,$$

$F_0, F_1, \ldots F_n$ nicht durch $x-\alpha$ teilbar, und nicht alle $\varkappa$ von Null verschieden sind, mit einer irreduktibeln Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

$$Q \equiv \varphi_0 y^{(\nu)} + \varphi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \varphi_\nu y = 0,$$

in welcher

$$\varphi_0 = (x-\alpha)^{\lambda_0}\psi_0, \quad \varphi_1 = (x-\alpha)^{\lambda_1}\psi_1, \quad \ldots \quad \varphi_\nu = (x-\alpha)^{\lambda_\nu}\psi_\nu,$$

$\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_\nu$ nicht durch $x-\alpha$ teilbar, und nicht alle λ von Null verschieden sind, ein Integral gemein, so folgt aus der Zerlegungsgleichung (11) durch Identifizierung der Koeffizienten von $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}, \ldots$

$$(x-\alpha)^{(n-\nu+1)\lambda_0+\varkappa_0}\psi_0^{n-\nu+1}F_0 = G_0(x-\alpha)^{\lambda_0}\psi_0 \text{ oder } G_0 = (x-\alpha)^{(n-\nu)\lambda_0+\varkappa_0}g_0,$$

worin $g_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$; ferner aus

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^{(n-\nu+1)\lambda_0+\varkappa_1}\psi_0^{n-\nu+1}F_1\\ &= (x-\alpha)^{(n-\nu)\lambda_0+\varkappa_0}g_0\left[(n-\nu)\left((x-\alpha)^{\lambda_0}\psi_0' + \lambda_0(x-\alpha)^{\lambda_0-1}\psi_0\right) + (x-\alpha)^{\lambda_1}\psi_1\right]\\ &\qquad + G_1(x-\alpha)^{\lambda_0}\psi_0,\end{aligned}$$

und unter der Voraussetzung, daß $\lambda_0 \geqq 1$, und zwar, wenn $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 \geqq 1$, wenn $\lambda_0 > 1$, $\lambda_1 = 0$ ist, wenn ferner $\varkappa_1 > \varkappa_0 - \lambda_0$ und $\varkappa_0 \geqq \lambda_0$ ist,

$$G_1 = (x-\alpha)^{(n-\nu-1)\lambda_0+\varkappa_0}g_1,$$

worin $g_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist. Ebenso ergibt sich aus der Identifizierung der Koeffizienten von $y^{(n-2)}$

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^{(n-\nu+1)\lambda_0+\varkappa_2}\psi_0^{n-\nu+1}F_2\\ &= (x-\alpha)^{(n-\nu)\lambda_0+\varkappa_0}g_0\Big[(n-\nu)_2\left((x-\alpha)^{\lambda_0}\psi_0'' + 2\lambda_0(x-\alpha)^{\lambda_0-1}\psi_0' + \lambda_0(\lambda_0-1)(x-\alpha)^{\lambda_0-2}\psi_0\right)\\ &\qquad + (n-\nu)_1\left((x-\alpha)^{\lambda_1}\psi_1' + \lambda_1(x-\alpha)^{\lambda_1-1}\psi_1\right) + (x-\alpha)^{\lambda_2}\psi_2\Big]\\ &\quad + (x-\alpha)^{(n-\nu-1)\lambda_0+\varkappa_0}g_1\left[(n-\nu-1)\left((x-\alpha)^{\lambda_0}\psi_0' + \lambda_0(x-\alpha)^{\lambda_0-1}\psi_0\right) + (x-\alpha)^{\lambda_1}\psi_1\right]\\ &\qquad + G_2(x-\alpha)^{\lambda_0}\psi_0,\end{aligned}$$

daß unter der Voraussetzung, daß $\varkappa_2 > \varkappa_0 - 2\lambda_0$ und $\varkappa_0 \geqq 2\lambda_0$ ist,

$$G_2 = (x-\alpha)^{(n-\nu-2)\lambda_0+\varkappa_0}g_2,$$

worin wieder $g_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist. Schließt man so weiter, so ergibt sich unter der Voraussetzung $\varkappa_{n-\nu-1} > \varkappa_0 - (n-\nu-1)\lambda_0$ und $\varkappa_0 \geqq (n-\nu-1)\lambda_0$

$$G_{n-\nu-1} = (x-\alpha)^{\lambda_0+\varkappa_0} g_{n-\nu-1}, \text{ worin } g_{n-\nu-1} \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha),$$

und unter der Voraussetzung $\varkappa_{n-\nu} > \varkappa_0 - (n-\nu)\lambda_0$ und $\varkappa_0 \geqq (n-\nu)\lambda_0$

$$G_{n-\nu} = (x-\alpha)^{\varkappa_0} g_{n-\nu}, \text{ worin } g_{n-\nu} \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

ist. Da nun die linke Seite der Gleichung

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^{(n-\nu+1)\lambda_0} \psi_0^{n-\nu+1} P - G_0 Q^{(n-\nu)} - G_1 Q^{(n-\nu-1)} - \cdots - G_{n-\nu-1} Q' \\ = G_{n-\nu}\left((x-\alpha)^{\lambda_0} \psi_0 y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\lambda_1} \psi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{\lambda_\nu} \psi_\nu y\right)\end{aligned}$$

durch $(x-\alpha)^{\lambda_0+\varkappa_0}$ teilbar ist, aber $G_{n-\nu}$ nur den Divisor $(x-\alpha)^{\varkappa_0}$ besitzt, so müßte

$$\lambda_1 \geqq \lambda_0, \quad \lambda_2 \geqq \lambda_0, \quad \ldots \lambda_\nu \geqq \lambda_0$$

sein, was, da die φ-Funktionen keinen gemeinsamen Teiler haben sollen, nur möglich ist, wenn $\lambda_0 = 0$, während oben $\lambda_0 \geqq 1$ vorausgesetzt war, und wir finden somit durch Zusammenfassen aller Voraussetzungen, daß die Differentialgleichung $P = 0$ mit der irreduktibeln Gleichung $Q = 0$ kein Integral gemein haben kann, wenn

$\lambda_0 \geqq 1$, und zwar, wenn $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 \geqq 1$, wenn $\lambda_0 > 1$, $\lambda_1 = 0$ ist, und

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{n-\nu} > \varkappa_0 - \lambda_0, \quad \varkappa_0 \geqq (n-\nu)\lambda_0$$

ist.

Habe nun

$$P = f_0 y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \cdots + f_n y = 0$$

mit der irreduktibeln Differentialgleichung

$$Q = \varphi_0 y^{(\nu)} + \varphi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \varphi_\nu y = 0$$

ein Integral gemein, so daß nach (11) die Beziehung besteht

$$(21)\qquad \varphi_0^{n-\nu+1}\left(f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\cdots+f_n y\right)$$
$$=G_0\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\left(\varphi_0 y^{(\nu)}+\varphi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots+\varphi_\nu y\right)+G_1\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}\left(\varphi_0 y^{(\nu)}+\varphi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots+\varphi_\nu y\right)$$
$$+\cdots+G_{n-\nu}\left(\varphi_0 y^{(\nu)}+\varphi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots+\varphi_\nu y\right),$$

so wird es für die folgenden Untersuchungen wesentlich darauf ankommen, hinreichende, nur in den Koeffizienten $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\nu$ ausgedrückte Bedingungen dafür aufzustellen, daß sich P mit in x ganzen Koeffizienten durch Q und dessen Ableitungen ausdrücken lasse. Sei α eine Lösung von φ_0, so werden wegen der Teilbarkeit der linken Seite der obigen Zerlegungsgleichung durch $x-\alpha$ die Koeffizienten der Ableitungen von y den Kongruenzen genügen:

$$(22)\left\{\begin{array}{l}
G_0\varphi_0\equiv 0\\
G_0\left[(n-\nu)_1\varphi_0'+\varphi_1\right]+G_1\varphi_0\equiv 0\\
G_0\left[(n-\nu)_2\varphi_0''+(n-\nu)_1\varphi_1'+\varphi_2\right]+G_1\left[(n-\nu-1)\varphi_0'+\varphi_1\right]+G_2\varphi_0\equiv 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
G_0\left[\varphi_0^{(n-\nu)}+(n-\nu)_1\varphi_1^{(n-\nu-1)}+\cdots\right]+G_1\left[\varphi_0^{(n-\nu-1)}+(n-\nu-1)_1\varphi_1^{(n-\nu-2)}+\cdots\right]\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\cdots+G_{n-\nu}\varphi_0\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(x-\alpha).\\
G_0\left[\varphi_1^{(n-\nu)}+(n-\nu)_1\varphi_2^{(n-\nu-1)}+\cdots\right]+G_1\left[\varphi_1^{(n-\nu-1)}+(n-\nu-1)_1\varphi_2^{(n-\nu-2)}+\cdots\right]\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\cdots+G_{n-\nu}\varphi_1\equiv 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
G_0\varphi_\nu^{(n-\nu)}+G_1\varphi_\nu^{(n-\nu-1)}+\cdots+G_{n-\nu-1}\varphi_\nu'+G_{n-\nu}\varphi_\nu\equiv 0
\end{array}\right.$$

Nun folgt aus der zweiten dieser Kongruenzen, daß, wenn $(n-\nu)\varphi_0'+\varphi_1\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist, $G_0\equiv 0$ sein wird, sodann aus der dritten, daß, wenn $(n-\nu-1)\varphi_0'+\varphi_1\not\equiv 0$, $G_1\equiv 0$ ist, usw., endlich, wenn $\varphi_0'+\varphi_1\not\equiv 0$ ist, $G_{n-\nu-1}$, also auch $G_{n-\nu}\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$. Ist nun α eine mehrfache Lösung von φ_0, so verlangt das Bestehen all dieser Inkongruenzen als notwendig und hinreichend, daß $\varphi_1\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist, ist jedoch α eine einfache Wurzel von φ_0, so werden zwar die Inkongruenzen befriedigt, also sämtliche $G\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sein, wenn $\varphi_1\equiv 0$, es können jedoch auch im letzteren Falle die Inkongruenzen für $\varphi_1\not\equiv 0$ bestehen.

Da nun für den Fall, daß α eine einfache Lösung von φ_0 ist, die Kongruenz $m\varphi_0'+\varphi_1\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ nicht für zwei verschiedene

ganze Zahlen m_1 und m_2 bestehen kann, weil sich daraus α als mehrfache Lösung von φ_0 ergeben würde, und die obigen Schlüsse für alle linearen Faktoren von φ_0 gelten, so ergibt sich das nachfolgende Resultat:

Hat φ_0 die Form

$$\varphi_0 = (x-\alpha)^{\varkappa}(x-\beta)^{\lambda}\dots(x-a)(x-b)\dots,$$

worin $\varkappa, \lambda, \dots > 1$, und ist

$$\varphi_1 = (x-a)^{\rho}(x-b)^{\sigma}\dots\psi(x),$$

worin $\rho, \sigma, \dots \geqq 1$, und $\psi(x)$ keine der Lösungen $\alpha, \beta, \dots$ besitzt, so wird sich P mit in x ganzen Koeffizienten nach $Q, Q', \dots Q^{(n-\nu)}$ zerlegen lassen; sind jedoch $\rho = \sigma = \dots = 0$, so *können* die Kongruenzen

$$m\varphi_0' + \varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-a), \bmod (x-b), \dots$$

– jedoch stets nur für *einen* Wert von m – befriedigt sein, und in diesem Falle kann man nicht auf eine Zerlegung von P mit in x ganzen Koeffizienten nach $Q, Q', \dots$ schließen.

Gehört jedoch eine mehrfache Lösung von φ_0 auch der Funktion φ_1 an, so daß keine der obigen Inkongruenzen befriedigt wird, so folgt, wenn α mindestens eine dreifache Lösung von φ_0 ist, aus den auf die zweite folgenden Kongruenzen (22), daß, wenn die Inkongruenzen

$$(n-\nu)\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0,\ (n-\nu-1)\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0, \dots \varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

befriedigt werden, wiederum alle G durch $x-\alpha$ teilbar sind, und es wird somit wieder eine Zerlegung von P mit in x ganzen Koeffizienten möglich sein, wenn für alle dreifachen Lösungen von φ_0, die auch Lösungen von φ_1 sein sollten, diese Lösungen mehrfache Lösungen von φ_1 sind, aber nicht φ_2 angehören, oder einfache Lösungen von φ_1, welche auch φ_2 besitzt, und in derselben Weise können wir weiter schließen, wenn mehrfache Lösungen von φ_1 auch φ_2 angehören, usw.

Hinreichende Bedingungen für die Zerlegung von P nach Q und dessen Ableitungen mit in x ganzen Koeffizienten sind also dadurch gegeben, daß für alle Lösungen α der Funktion φ_0 für alle ganzen Zahlen $k=1,2,3,\ldots n-\nu$ die Inkongruenzen bestehen

$$k\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha).$$

Habe z. B. die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$P = f_0 y'''' + f_1 y''' + f_2 y'' + f_3 y' + f_4 y = 0$$

mit der irreduktibeln Differentialgleichung

$$Q = \varphi_0 y'' + \varphi_1 y' + \varphi_2 = 0$$

ein Integral gemein, so daß nach (11) die identische Beziehung besteht

$$\varphi_0^3 P = G_0 \frac{d^2}{dx^2}(\varphi_0 y'' + \varphi_1 y' + \varphi_2 y) + G_1 \frac{d}{dx}(\varphi_0 y'' + \varphi_1 y' + \varphi_2 y) + G_2(\varphi_0 y'' + \varphi_1 y' + \varphi_2 y),$$

so werden die aus der Vergleichung der Koeffizienten von y und dessen Ableitungen sich ergebenden Kongruenzen (22) lauten:

$$\left.\begin{aligned}
&G_0 \varphi_0 \equiv 0\\
&G_0(2\varphi_0' + \varphi_1) + G_1 \varphi_0 \equiv 0\\
&G_0(\varphi_0'' + 2\varphi_1' + \varphi_2) + G_1(\varphi_0' + \varphi_1) + G_2 \varphi_0 \equiv 0\\
&G_0(\varphi_1'' + 2\varphi_2) + G_1(\varphi_1' + \varphi_2) + G_2 \varphi_1 \equiv 0\\
&G_0 \varphi_2'' + G_1 \varphi_2' + G_2 \varphi_2 \equiv 0
\end{aligned}\right\} \bmod (x-\alpha),$$

und man findet leicht auf dem eben angegebenen Wege die hinreichenden, nur durch die Koeffizienten $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ausgedrückten Bedingungen für die Zerlegung von P nach Q, Q', Q'' mit in x ganzen Koeffizienten, wenn α eine $\varkappa$-fache Wurzel von φ_0 und eine λ-fache von φ_1 ist,

für $\varkappa \geqq 3$, wenn $\lambda = 0$, oder $\lambda \geqq 2$, oder wenn $\lambda = 1$, wenn $\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0$ und $2\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$

für $\varkappa = 2$, wenn $\lambda = 0$, oder $\lambda \geqq 2$, wenn $\varphi_0'' + \varphi_2 \not\equiv 0$, oder $\lambda = 1$, wenn $\varphi_0'' + 2\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0$ und $\varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$

für $\varkappa = 1$, wenn $\lambda \geqq 1$,

und es wird somit die Teilbarkeit von G_0, G_1, G_2 durch $x-\alpha$ in allen Fällen erwiesen sein, wenn ohne weitere Kongruenzbedingungen für die φ

$$\varkappa \geqq 2,\ \lambda = 0;\ \varkappa \geqq 3,\ \lambda \geqq 2;\ \varkappa = 1,\ \lambda \geqq 1$$

ist.

Es möge noch bemerkt werden, daß die für den allgemeinen Fall hinreichenden Bedingungen für die Teilbarkeit der Koeffizienten $G_0, G_1, \ldots$ der Zerlegungsform (21) in noch etwas veränderter Form folgendermaßen ausgedrückt werden können. Setzt man, wenn α eine Lösung von φ_0 ist,

$$G_\varkappa = \gamma_\varkappa + (x-\alpha)\delta_\varkappa,\quad \varphi_\varkappa = \psi_\varkappa + (x-\alpha)\omega_\varkappa$$

in (21) ein und stellt wiederum die Bedingungen dafür auf, daß die Koeffizienten von $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots$ auf der rechten Seite der Gleichung durch $x-\alpha$ teilbar sein sollen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{c} \gamma_0\big((n-\nu)_1\omega_0 + \psi_1\big) \equiv 0 \\ \gamma_0\big((n-\nu)_2\omega_0' + (n-\nu)_1\psi_1' + (n-\nu)_1\omega_1 + \psi_2\big) + \gamma_1\big((n-\nu-1)\omega_0 + \psi_1\big) \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \bmod (x-\alpha).$$

Da nun γ_0 nicht durch $x-\alpha$ teilbar sein sollte, so muß es, wenn

$$(n-\nu)\omega_0 + \psi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

ist, nach der ersten dieser Kongruenzen den Wert Null annehmen, also G_0 durch $x-\alpha$ teilbar sein, und eben diese Inkongruenz kann, weil

$$\varphi_0 = (x-\alpha)\omega_0,\quad \varphi_0' = \omega_0 + (x-\alpha)\omega_0',\quad \varphi_1 = \psi_1 + (x-\alpha)\omega_1$$

ist, durch

$$(n-\nu)\varphi_0'+\varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

ersetzt werden. Danach folgt aus der zweiten Kongruenz wegen $\gamma_0=0$, daß wiederum $\gamma_1=0$ oder G_1 durch $x-\alpha$ teilbar ist, wenn

$$(n-\nu-1)\omega_0+\psi_1 \not\equiv 0 \text{ oder } (n-\nu-1)\varphi_0'+\varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

ist, usw. Besteht jedoch für einen der Werte $k=1, 2, \ldots n-\nu$ die Kongruenz

$$k\varphi_0'+\varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha),$$

so folgt nicht, daß das zugehörige G durch $x-\alpha$ teilbar, also die Zerlegungsform mit in x ganzen Koeffizienten möglich ist. Sollen also alle obigen Inkongruenzen erfüllt sein, so muß man, wenn α eine vielfache Lösung von φ_0 ist, annehmen, daß φ_1 diese Lösung nicht hat, und wenn α eine einfache Lösung von φ_0 ist, diese auch φ_1 angehört, oder wenn dies nicht der Fall ist, für kein $k=n-\nu$, $n-\nu-1, \ldots 1$ die Kongruenz $k\varphi_0'+\varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ besteht, deren Gültigkeit aber die Teilbarkeit der G durch $x-\alpha$ nicht auszuschließen braucht – und dies waren auch die früher gefundenen hinreichenden Bedingungen.

Wir wollen nun zunächst eine einfache Anwendung der gewonnenen Resultate auf die Frage machen, ob eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$P=f_0 y'''+f_1 y''+f_2 y'+f_3 y=0,$$

deren Koeffizienten für irgend einen Wert α den Bedingungen unterliegen

$$f_0 \equiv 0,\ f_1 \equiv 0,\ f_2 \equiv 0,\ f_3 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha),\ f_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2,$$

mit der irreduktibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Q=\varphi_0 y''+\varphi_1 y'+\varphi_2 y=0$$

ein Integral gemein haben kann.

Wäre dies der Fall, fände also der Gleichung (11) gemäß die Beziehung statt

$$\varphi_0^2 P = G_0 Q' + G_1 Q\,,$$

worin G_0 und G_1 ganze Funktionen von x sind, so würde sich zunächst unter der Voraussetzung, daß $\varphi_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist, aus

$$\varphi_0^2 f_0 = G_0 \varphi_0, \text{ oder } G_0 = \varphi_0 f_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

die Kongruenz

$$\varphi_0^2 f_1 - G_0(\varphi_0' + \varphi_1) = G_1 \varphi_0 \equiv 0, \text{ also } G_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

ergeben, was unmöglich ist, da dann

$$\varphi_0^2 f_3 = G_0 \varphi_2' + G_1 \varphi_2 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

wäre, während nach der Voraussetzung $f_3 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sein sollte. Ist aber $\varphi_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, und nimmt man an, daß, wenn α eine mehrfache Wurzel von φ_0 ist, diese nicht φ_1 angehört, und wenn eine einfache Wurzel von φ_0, auch φ_1 diese Lösung besitzt, so würde nach der obigen Auseinandersetzung sich für P, wenn $\varphi_0 = (x-\alpha)^\varkappa \psi_0$ gesetzt wird, worin $\psi_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, die Zerlegungsform mit in x ganzen Koeffizienten ergeben

$$\psi_0^2 P = g_0 Q' + g_1 Q\,.$$

Da aber $\psi_0 f_0 = g_0 \varphi_0$, also, weil α als einfache Wurzel von f_0 vorausgesetzt war, diese Lösung keine mehrfache von φ_0 sein kann, so bleibt von der obigen Annahme nur noch der Fall zu untersuchen, daß α eine einfache Lösung von φ_0 ist, welche auch φ_1 angehört, und da sich dann aus eben dieser Beziehung $g_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ergibt, so wird wegen

$$\psi_0 f_1 = g_0(\varphi_0' + \varphi_1) + g_1 \varphi_0$$

$\varphi_0' + \varphi_1$ durch $x-\alpha$ teilbar sein, was wieder der Annahme widerspricht. Es folgt somit, daß die Differentialgleichung dritter Ordnung mit keiner irreduktibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$\psi_0 y'' + (x-\alpha)^\rho \psi_1 y' + \psi_2 y = 0, \text{ worin } \rho \geq 0$$

oder

$$(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 y''+\psi_1 y'+\psi_2 y=0, \text{ worin } \varkappa\geqq 2,$$

oder

$$(x-\alpha)\psi_0 y''+(x-\alpha)^{\lambda}\psi_1 y'+\psi_2 y=0, \text{ worin } \lambda\geqq 1,$$

wenn ψ_0 und $\psi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sind, ein Integral gemein haben kann.

Dieser speziellen Anwendung wollen wir noch der folgenden Untersuchung wegen eine weitere Ausdehnung geben.

Sind in der Differentialgleichung

$$P=f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\cdots+f_n y=0$$

die Funktionen $f_0, f_1, \ldots f_{n-\nu}$ für irgendeinen Wert α durch $x-\alpha$ teilbar, aber eine der folgenden Funktionen $f_{n-\nu+1}, f_{n-\nu+2}, \ldots f_n$ nicht, so kann diese mit keiner irreduktibeln Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

$$Q=\varphi_0 y^{(\nu)}+\varphi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots+\varphi_\nu y=0,$$

in welcher $\varphi_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ angenommen wird, ein Integral gemein haben. Denn wäre dies der Fall, so würden sich aus der Zerlegungsform (11) die Beziehungen ergeben

$$\varphi_0^{n-\nu+1} f_0 = G_0\varphi_0, \text{ also } G_0\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

$$\varphi_0^{n-\nu+1} f_1 = G_0\left[(n-\nu)\varphi_0'+\varphi_1\right]+G_1\varphi_0, \text{ also } G_1\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

$$\varphi_0^{n-\nu+1} f_2 = G_0\left[(n-\nu)_2\varphi_0''+(n-\nu)_1\varphi_1'+\varphi_2\right]+G_1\left[(n-\nu-1)\varphi_0'+\varphi_1\right]+G_2\varphi_0,$$
$$\text{also } G_2\equiv 0 \bmod (x-\alpha),$$

usw., endlich $G_{n-\nu}\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, und somit die rechte Seite der Zerlegungsform durch $x-\alpha$ teilbar sein, was der Annahme, daß eine der f-Funktionen mit höherem Index als $n-\nu$ nicht durch $x-\alpha$ teilbar sein sollte, widerspricht.

Nehmen wir also an, daß in einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung alle Koeffizienten mit Ausnahme des letzten einen gemeinsamen linearen Teiler $x-\alpha$ besitzen, so kann diese Differentialgleichung mit keiner irreduktibeln Differentialgleichung der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n-1^{\text{ten}}$ Ordnung, deren höchster Koeffizient den Teiler $x-\alpha$ nicht besitzt, ein Integral gemein haben, wird also in bezug

auf Differentialgleichungen mit der letzteren Beschränkung selbst irreduktibel sein.

Hat ferner in $P=0$ der Koeffizient f_0 eine einfache Lösung α, so kann dieselbe mit keiner linearen irreduktibeln Differentialgleichung niederer Ordnung, derer erster Koeffizient die Lösung α mehrfach, und deren zweiter sie gar nicht enthält, ein Integral gemein haben.

Denn, wäre dies der Fall, so würde sich nach den früheren Auseinandersetzungen P mit in x ganzen Koeffizienten, wenn $\varphi_0=(x-\alpha)^\varkappa\psi_0\,(\varkappa\geq 2)$, in der Form zerlegen lassen

$$\psi_0^{n-\nu+1}\left(f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\ldots\right)=g_0\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\left((x-\alpha)^\varkappa\psi_0 y^{(\nu)}+\psi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots\right)$$
$$+\cdots+g_{n-\nu}\left((x-\alpha)^\varkappa\psi_0 y^{(n)}+\psi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots\right),$$

worin ψ_0 und $\psi_1\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sind, und somit

$$\psi_0^{n-\nu+1} f_0=g_0(x-\alpha)^\varkappa\psi_0$$

sein, sich also gegen die Voraussetzung α als mehrfache Lösung von f_0 ergeben — die Annahme $\varphi_1\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ war zur Annahme der Zerlegung von P mit in x ganzen Koeffizienten notwendig.

Hat endlich der erste Koeffizient f_0 der Differentialgleichung $P=0$ wieder eine Lösung α einfach und gehört dieselbe auch dem Koeffizienten f_1 an, so kann dieselbe wieder kein Integral mit einer irreduktibeln linearen Differentialgleichung niederer Ordnung gemein haben, in welcher φ_0 diese Lösung einfach und φ_1 sie ebenfalls besitzt, da sonst, wenn $\varphi_0=(x-\alpha)\psi_0$ und $\psi_0\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist, wieder eine Zerlegung von P mit in x ganzen Koeffizienten von der Form möglich wäre

$$\psi_0^{n-\nu+1}\left(f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\cdots\right)=g_0\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\left((x-\alpha)\psi_0 y^{(\nu)}+(x-\alpha)^\lambda\psi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots\right)$$
$$+\cdots+g_{n-\nu}\left((x-\alpha)\psi_0 y^{(\nu)}+(x-\alpha)^\lambda\psi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots\right),$$

aus der sich die beiden Beziehungen ergeben würden

$$\psi_0^{n-\nu+1} f_0 = g_0 (x-\alpha) \psi_0, \text{ wonach } g_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

und

$$\psi_0^{n-\nu+1} f_1 = g_0 \left[(n-\nu)\left((x-\alpha)\psi_0' + \psi_0\right) + (x-\alpha)^\lambda \psi_1\right] + g_1 (x-\alpha)\psi_0,$$

welch letztere unmöglich ist, da $f_1 \equiv 0$ und $\psi_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist.

Fassen wir die letzten drei Sätze zusammen, so finden wir,

daß eine Differentialgleichung

$$P = f_0 y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1} y' + f_n y = 0,$$

in welcher für irgend einen Wert α

$$f_0, f_1, \ldots f_{n-1} \equiv 0 \bmod (x-\alpha), \; f_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2, \; f_n \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

ist, und die wir eine EISENSTEINsche Differentialgleichung nennen wollen, mit keiner irreduktibeln Differentialgleichung niederer Ordnung, in welcher die beiden ersten Koeffizienten φ_0 und φ_1 den Bedingungen unterliegen, daß entweder $\varphi_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, oder $\varphi_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2$ und $\varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, oder $\varphi_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, aber $\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2$ und $\varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist, ein Integral gemein haben kann.

Daß nicht jede EISENSTEINsche Differentialgleichung selbst irreduktibel sein muß, möge zunächst nur durch das Beispiel erläutert werden

$$x(x-\alpha)y'' + (x-\alpha)\left(x(x-\alpha)+1\right)y' + \left(2x(x-\alpha) + (x-\alpha)^2 - 1\right)y$$
$$= x\frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)y' + \left((x-\alpha)^2-1\right)y\right] + \left[(x-\alpha)y' + \left((x-\alpha)^2-1\right)y\right],$$

welches zugleich eine Zerlegungsform mit in x ganzen Koeffizienten bildet.

Es bleiben somit nur noch die beiden Fälle zu untersuchen, daß

1) φ_0 die Lösung α einfach, φ_1 sie gar nicht enthält, und
2) φ_0 dieselbe mehrfach und φ_1 sie einfach oder mehrfach besitzt.

In dem ersten der beiden Fälle würden sich für die Annahme der Reduzibilität die Beziehungen ergeben

$$(x-\alpha)^{n-\nu+1}\psi_0^{n-\nu+1} f_0 = G_0(x-\alpha)\psi_0$$

oder $G_0 = (x-\alpha)^{n-\nu+1} g_0$, worin $g_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist,

und

$$(x-\alpha)^{n-\nu+1}\psi_0^{n-\nu+1} f_1 = (x-\alpha)^{n-\nu+1} g_0\left[(n-\nu)\varphi_0' + \varphi_1\right] + G_1(x-\alpha)\psi_0,$$

woraus, wenn $(n-\nu)\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0$ ist, $G_1 = (x-\alpha)^{n-\nu} g_1$ folgt, worin $g_1 \not\equiv 0$ ist.

Ebenso ergibt sich aus

$$(x-\alpha)^{n-\nu+1}\psi_0^{n-\nu+1} f_2 = (x-\alpha)^{n-\nu+1} g_0\left[(n-\nu)_2\varphi_0'' + (n-\nu)_1\varphi_1' + \varphi_2\right]$$
$$+ (x-\alpha)^{n-\nu} g_1\left[(n-\nu-1)\varphi_0' + \varphi_1\right] + G_2(x-\alpha)\psi_0,$$

daß, wenn wieder $(n-\nu-1)\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0$ ist, $G_2 = (x-\alpha)^{n-\nu-1} g_2$ wird, worin $g_2 \not\equiv 0$ ist, usw., bis man unter der Annahme $\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0$ den Wert $G_{n-\nu} = (x-\alpha) g_{n-\nu}$ erhält, worin $g_{n-\nu} \not\equiv 0$, wobei zu bemerken ist, daß die Annahme, daß für keine ganze Zahl $k = 1, 2, \ldots n-\nu$ die Kongruenz $k\varphi_0' + \varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ befriedigt wird, nach den früheren Auseinandersetzungen mit der Voraussetzung zusammenfällt, daß eine Zerlegungsform der mit $\psi_0^{n-\nu+1}$ multiplizierten und als reduzibel angenommenen EISENSTEINschen Gleichung mit in x ganzen Koeffizienten existiert.

Aus der Identifizierung der Koeffizienten von y ergibt sich aber die Gleichung

$$(x-\alpha)^{n-\nu+1} g_0 \varphi_\nu^{(n-\nu)} + (x-\alpha)^{n-\nu} g_1 \varphi_\nu^{(n-\nu-1)} + \cdots + (x-\alpha) g_{n-\nu}\varphi_\nu$$
$$= (x-\alpha)^{n-\nu+1}\psi_0^{n-\nu+1} f_n,$$

welche nur bestehen kann, wenn $\varphi_\nu \equiv 0$ ist; dann würde aber durch Gleichsetzen der Koeffizienten von y'

$$(x-\alpha)^{n-\nu+1} g_0\left[\varphi_{\nu-1}^{(n-\nu)} + (n-\nu)\varphi_\nu^{(n-\nu-1)}\right] + (x-\alpha)^{n-\nu} g_1\left[\varphi_{\nu-1}^{(n-\nu-1)} + (n-\nu-1)\varphi_\nu^{(n-\nu-2)}\right]$$
$$+ \cdots + (x-\alpha) g_{n-\nu}\varphi_{\nu-1} = (x-\alpha)^{n-\nu+1}\psi_0^{n-\nu+1} f_{n-1}$$

und somit wieder $\varphi_{\nu-1} \equiv 0$ folgen, und schließt man so weiter, so würde das Bestehen der Zerlegungsform gegen die Annahme die

Teilbarkeit aller Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_\nu$ durch $x-\alpha$ nach sich ziehen, wobei wir des Folgenden wegen bemerken, daß der letztere Schluß darauf beruhte, daß die Exponenten der in den G enthaltenen Potenzen von $x-\alpha$ mit wachsendem Index dieser Funktionen abnehmen und sämtlich kleiner als $n-\nu+1$ sind, oder noch allgemeiner, daß der Exponent der in $G_{n-\nu}$ enthaltenen Potenz von $(x-\alpha)$ kleiner ist als die in den übrigen G enthaltenen Potenzen, und kleiner als $n-\nu+1$.

Wir finden somit, daß

eine EISENSTEINsche Differentialgleichung sich nicht auf eine irreduktible Differentialgleichung niederer Ordnung reduzieren läßt, für welche α eine einfache Lösung von φ_0 ist, welche φ_1 nicht angehört, wenn die Bedingung erfüllt ist, daß für keine ganze Zahl $k=1, 2, \dots n-1$ die Kongruenz $k\varphi_0'+\varphi_1 \equiv 0$, oder, wenn $\varphi_0=(x-\alpha)\psi_0, \varphi_1=\psi_1$ gesetzt wird, $k\psi_0+\psi_1 \equiv 0$ befriedigt wird.

Ist jedoch $k\varphi_0'+\varphi_1 \equiv 0$, so kann die Differentialgleichung reduktibel sein, wie das Beispiel zeigt

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)y''''+(x-\alpha)^2y'''+(x-\alpha)y''+(x-\alpha)(x-\alpha+2)y'-2y \\
&=\frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)y'''+\left((x-\alpha)^2-(x-\alpha)-1\right)y''+\left(-(x-\alpha)^2+2\right)y'-2y\right] \\
&\quad+\left[(x-\alpha)y'''+\left((x-\alpha)^2-(x-\alpha)-1\right)y''+\left(-(x-\alpha)^2+2\right)y'-2y\right],
\end{aligned}$$

worin $1\cdot\varphi_0'+\varphi_1=(x-\alpha)^2-(x-\alpha)\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ ist.

Um für diesen Fall, daß eine der oben aufgestellten Inkongruenzen nicht erfüllt wird, etwaige weitere Bedingungen für die Möglichkeit der Reduzibilität aufzustellen, beachte man, daß, wenn z. B. $(n-\nu)\varphi_0'+\varphi_1 \equiv 0$ ist, nicht auch zugleich die Kongruenz $(n-\nu-1)\varphi_0'+\varphi_1 \equiv 0$ erfüllt sein kann, weil dies gegen die Annahme darauf führen würde, daß φ_0 die Lösung α mehrfach besitzt, und daß somit aus den oben für $f_0, f_1, f_2, \dots$ aufgestellten Beziehungen folgt, daß wieder $G_0=(x-\alpha)^{n-\nu+1}g_0$, worin $g_0 \not\equiv 0$, daß sich aber jetzt $G_1=(x-\alpha)^{n-\nu+1}g_1$ ergibt, worin sich für g_1 allgemein nichts weiter aussagen läßt; dann folgt aber unter der Annahme, daß z. B. $n-\nu=2$, also $2\varphi_0'+\varphi_1 \equiv 0$ ist, aus der Beziehung für f_2, weil nach

einer früheren Bemerkung dann auch G_2 durch $(x-\alpha)^{n-\nu+1}$ teilbar sein muß, durch Division mit $(x-\alpha)^{n-\nu+1}$ die Beziehung

$$\psi_0^{n-\nu+1} f_2 = g_0\left[(n-\nu)_2 \varphi_0'' + (n-\nu)_1 \varphi_1' + \varphi_2\right] + g_1\left[(n-\nu-1)\varphi_0' + \varphi_1\right] + g_2(x-\alpha)\psi_0,$$

und für das Bestehen dieser Gleichung die notwendige Bedingung, daß

$$\text{wenn } g_1 \equiv 0 \text{ auch } (n-\nu)_2 \varphi_0'' + (n-\nu)_1 \varphi_1' + \varphi_2 \equiv 0$$

und

$$\text{wenn } g_1 \not\equiv 0 \text{ auch } (n-\nu)_2 \varphi_0'' + (n-\nu)_1 \varphi_1' + \varphi_2 \not\equiv 0,$$

$$\text{aber zugleich } g_0\left[(n-\nu)_2 \varphi_0'' + (n-\nu)_1 \varphi_1' + \varphi_2\right] + g_1\left[(n-\nu-1)\varphi_0' + \varphi_1\right] \equiv 0$$

sein muß. Daß in der Tat die Erfüllung dieser beiden Bedingungen, welche für die Zerlegung der EISENSTEINschen Gleichung notwendig waren, auch eine Zerlegung in Wirklichkeit gestatten kann, ist aus den beiden Beispielen

$$\begin{aligned} &x(x-\alpha)y''' + (x+1)(x-\alpha)y'' + (x-\alpha)\left((x-\alpha)^2 + 4x\right)y' + \left(3(x-\alpha)^2 + 2(x-1)\right)y \\ &= x\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-\alpha)y' + \left((x-\alpha)^2 - 2\right)y\right] + (x-\alpha)\frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)y' + \left((x-\alpha)^2 - 2\right)y\right] \\ &\qquad + \left[(x-\alpha)y' + \left((x-\alpha)^2 - 2\right)y\right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &(\alpha-1)(x-1)(x-\alpha)y''' + (x-\alpha)(4x+5\alpha-9)y'' + (x-\alpha)\left((\alpha-1)x - \alpha + 13\right)y' \\ &\qquad + \left(4 + (\alpha-1)(x-3\alpha+2)\right)y \\ &= (\alpha-1)\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-1)(x-\alpha)y' + (x-3\alpha+2)y\right] \\ &+ 4\frac{d}{dx}\left[(x-1)(x-\alpha)y' + (x-3\alpha+2)y\right] + (\alpha-1)\left[(x-1)(x-\alpha)y' + (x-3\alpha+2)y\right] \end{aligned}$$

unmittelbar ersichtlich.

In derselben Weise werden sich die weiteren Bedingungen aus der angenommenen Zerlegungsform herleiten lassen. Im allgemeinen läßt sich nur aussagen, daß, wenn für irgend einen Wert von k die Kongruenz $k\varphi_0' + \varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ erfüllt ist, die Exponenten von $(x-\alpha)$ in den auf das zugehörige G folgenden Funktionen stets um eine Einheit abnehmen werden, daß aber nur,

wenn der Exponent in $G_{n-\nu}$ der kleinste der in all den Funktionen $G_0, G_1, \ldots G_{n-\nu}$ vorkommenden ist, der auf einer früheren Bemerkung basierende Schluß von der Unmöglichkeit der Reduzierbarkeit wird gemacht werden können.

Es bleibt nunmehr für die Feststellung, wann eine EISENSTEINsche Differentialgleichung irreduktibel und wann reduktibel ist, nur noch der Fall 2) zu untersuchen, in welchem φ_0 die Lösung α mehrfach besitzt, die zugleich auch eine Lösung des Koeffizienten φ_1 ist.

Daß auch in diesem Falle eine Reduktion einer solchen Differentialgleichung auf eine irreduktible Gleichung niederer Ordnung unter gewissen Bedingungen möglich ist, geht zunächst aus dem folgenden Beispiel hervor, in welchem P selbst nicht mit in x ganzen Koeffizienten zerlegbar ist, und bei welchem hervorzuheben ist, daß die Koeffizienten φ_0 und φ_1 die Form haben $\varphi_0 = (x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0$, $\varphi_1 = (x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_1$:

$$(x-\alpha)\left\{\begin{aligned}&(x-\alpha)(x-\alpha-\tfrac{1}{2})y''' + (x-\alpha)\big(3-(x-\alpha)^2+\tfrac{1}{2}(x-\alpha)\big)y'' \\ &\qquad\qquad + (x-\alpha)y' + \big(5-2(x-\alpha)^2\big)y\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)^2(x-\alpha-\tfrac{1}{2})y'' + (x-\alpha)y' + \big(2(x-\alpha)^2-1\big)y\right]$$

$$-(x-\alpha)\left[(x-\alpha)^2(x-\alpha-\tfrac{1}{2})y'' + (x-\alpha)y' + \big(2(x-\alpha)^2-1\big)y\right].$$

Um nun für die Untersuchung des durch dieses Beispiel charakterisierten Falles von der Reduzierbarkeit einer EISENSTEINschen Differentialgleichung auf eine Differentialgleichung niederer Ordnung neue Gesichtspunkte zu gewinnen, wollen wir zunächst die Frage von der Reduktion einer solchen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf eine Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung erörtern.

Sei dem Falle 2) entsprechend

$$\varphi_0 = (x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0, \quad \varphi_1 = (x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1,$$

worin $\varkappa \geqq 2$, $\lambda \geqq -(\varkappa-1)$ ist, und bestehe nach (11) für $\nu = n-1$ die Zerlegungsform

$$(x-\alpha)^{2\varkappa}\psi_0^2(f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\cdots+f_n y)$$
$$=G_0\frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 y^{(n-1)}+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1 y^{(n-2)}+\cdots+\varphi_{n-1}y\right]$$
$$+G_1\left[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 y^{(n-1)}+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1 y^{(n-2)}+\cdots+\varphi_{n-1}y\right],$$

so folgt zunächst wieder durch Identifizierung der Koeffizienten von $y^{(n)}$ und $y^{(n-1)}$

$$(x-\alpha)^{2\varkappa}\psi_0^2 f_0=G_0(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 \text{ oder } G_0=(x-\alpha)^{\varkappa+1}g_0, \text{ worin } g_0\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

und

$$(x-\alpha)^{2\varkappa}\psi_0^2 f_1=(x-\alpha)^{\varkappa+1}g_0\left[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0'+\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_0+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1\right]$$
$$+G_1(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0;$$

da nun die niedrigste Potenz von $(x-\alpha)$ in der Klammer der rechten Seite für $\lambda\geq 0$ die $\varkappa-1^{te}$, dagegen für negative Werte von $\lambda<-1$ durch das Glied $(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1$, für $\lambda=-1$ durch $(\varkappa\psi_0+\psi_1)(x-\alpha)^{\varkappa-1}$ dargestellt wird, so ergibt sich

für $\lambda\geqq 0$ $G_1=(x-\alpha)^{\varkappa}g_1$, für $\lambda<-1$ $G_1=(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda+1<\varkappa-1}g_1$, worin $g_1\not\equiv 0$,

für $\lambda=-1$, wenn $\varkappa\psi_0+\psi_1\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ $G_1=(x-\alpha)^{\varkappa}g_1$, worin $g_1\not\equiv 0$.

Beachtet man nun, daß für jeden Wert von λ ($\lambda=-1$ ausgenommen) die in G_1 enthaltene Potenz von $x-\alpha$ einen Exponenten hat, der kleiner als $\varkappa+1$ ist, und daß dasselbe auch für $\lambda=-1$ gilt, wenn die Inkongruenz $\varkappa\psi_0+\psi_1\not\equiv 0$ besteht, während G_0 die Potenz $(x-\alpha)^{\varkappa+1}$ enthält, so ist nach einer früheren Bemerkung erwiesen, daß die angenommene Zerlegungsform unmöglich ist, und es folgt somit der Satz,

daß eine EISENSTEINsche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung nur dann mit einer irreduktibeln Differentialgleichung $n-1^{ter}$ Ordnung, für welche

$$\varphi_0=(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0(\varkappa\geq 2),\ \varphi_1=(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1(\varkappa+\lambda\geq 1),$$

ein Integral gemein haben kann, wenn $\lambda=-1$ ist,

aber auch in diesem Falle nicht, wenn die Inkongruenz besteht

$$\varkappa\psi_0+\psi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha).$$

Ist jedoch für $\lambda=-1$ die Kongruenz erfüllt $\varkappa\psi_0+\psi_1\equiv 0$, so ist aus der obigen Gleichung für f_1 leicht zu sehen, daß

$$G_1=(x-\alpha)^{\varkappa+1}g_1,$$

worin $g_1\equiv 0$ oder $\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sein kann, also

$$G_1=(x-\alpha)^{\sigma}g_1, \text{ worin } \sigma\geqq\varkappa+1 \text{ und } g_1\not\equiv 0 \text{ ist;}$$

man kann daher, weil $x-\alpha$ in G_1 zu derselben Vielfachheit oder zu einer noch höheren als in G_0 vorkommt, nicht auf die Unmöglichkeit der Existenz der Zerlegungsgleichung schließen, für $\lambda=-1$ und $\varkappa\psi_0+\psi_1\equiv 0$ kann daher eine Zerlegung existieren. In der Tat geht in dem obigen Beispiel, worin

$$\psi_0=x-\alpha-\tfrac{1}{2},\quad \psi_1=1,\quad \varphi_2=2(x-\alpha)^2-1,\quad \text{also}\quad \varkappa\psi_0+\psi_1=2(x-\alpha)\equiv 0,$$

und durch Multiplikation der Zerlegungsgleichung mit

$$(x-\alpha)^3(x-\alpha-\tfrac{1}{2})^2$$

sich die Werte

$$G_0=(x-\alpha)^3(x-\alpha-\tfrac{1}{2})^2,\quad G_1=(x-\alpha)^4(x-\alpha-\tfrac{1}{2})^2$$

ergeben, aus der allgemein bestehenden Gleichung

$$G_0\varphi_2'+G_1\varphi_2=(x-\alpha)^{2\varkappa}\psi_0^2 f_3,$$

welche, wenn G_1 eine höhere Potenz von $x-\alpha$ als G_0 enthält, auf einen Widerspruch, also die Unmöglichkeit der Reduktion führte, hier die Gleichung hervor

$$(x-\alpha)^3(x-\alpha-\tfrac{1}{2})^2 4(x-\alpha)-(x-\alpha)^4(x-\alpha-\tfrac{1}{2})^2\big(2(x-\alpha)^2-1\big)$$
$$=(x-\alpha)^4(x-\alpha-\tfrac{1}{2})^2\big(5-2(x-\alpha)^2\big),$$

die in der Tat eine identische ist.

Es soll nun noch im folgenden die Reduktion einer EISENSTEINschen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf eine irreduktible Differentialgleichung $n-2^{ter}$ Ordnung untersucht werden, also die Zerlegungsform

$$\varphi_0^3\left(f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\cdots+f_n y\right)$$
$$=G_0\frac{d^2}{dx^2}\left[\varphi_0 y^{(n-2)}+\varphi_1 y^{(n-3)}+\cdots+\varphi_{n-2} y\right]+G_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_0 y^{(n-2)}+\varphi_1 y^{(n-3)}+\cdots+\varphi_{n-2} y\right]$$
$$+G_2\left[\varphi_0 y^{(n-2)}+\varphi_1 y^{(n-3)}+\cdots+\varphi_{n-2} y\right],$$

in welcher, dem Fall 2) entsprechend, die den Funktionen $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ gemeinsame, aber f_0 nur einfach angehörige Lösung eine mehrfache Lösung von φ_0 und eine einfache oder mehrfache Lösung von φ_1 sein soll.

Sei demgemäß für $\varkappa \geqq 2$

$$\varphi_0=(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0,\ \varphi_1=(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1,\ \varphi_2=(x-\alpha)^{\varkappa+\mu}\psi_2,$$

worin $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, $\lambda \geqq -(\varkappa-1)$, $\mu > -\varkappa$, so folgt zunächst wieder, daß

$$(x-\alpha)^{3\varkappa}\psi_0^3 f_0=G_0(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0, \text{ oder } G_0=(x-\alpha)^{2\varkappa+1}g_0, \text{ worin } g_0 \not\equiv 0 \text{ ist};$$

ferner aus der Gleichung

$$(x-\alpha)^{3\varkappa}\psi_0^3 f_1=(x-\alpha)^{2\varkappa+1}g_0\left[2(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0'+2\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_0+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1\right]$$
$$+G_1(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0,$$

daß für $\lambda \geqq 0$ $G_1=(x-\alpha)^{2\varkappa}g_1$ ist, worin $g_1 \not\equiv 0$, für $\lambda=-1$ G_1 dieselbe Form hat, wenn die Inkongruenz $2\varkappa\psi_0+\psi_1 \not\equiv 0$ als Bedingung hinzutritt, und für $\lambda \leqq -2$ G_1 den Wert annimmt $G_1=(x-\alpha)^{2\varkappa+\lambda+1 \leqq 2\varkappa-1}g_1$, worin wieder $g_1 \not\equiv 0$, also in allen Fällen

$$G_1=(x-\alpha)^{\sigma}g_1, \text{ worin } \sigma \leqq 2\varkappa$$

ist; es enthält also stets G_1 eine niedrigere Potenz von $x-\alpha$ als G_0. Ist jedoch für $\lambda=-1$ $2\varkappa\psi_0+\psi_1 \not\equiv 0$, so hat G_1 wieder die Form $(x-\alpha)^{\sigma}g_1$, worin $\sigma \geqq 2\varkappa+1$ und $g_1 \not\equiv 0$, enthält also eine gleiche oder höhere Potenz von $x-\alpha$ als G_0.

Endlich folgt aus der Identifizierung der Koeffizienten von $y^{(n-2)}$

$$(x-\alpha)^{3\varkappa}\psi_0^3 f_2=(x-\alpha)^{2\varkappa+1}g_0\big[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0''+2\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_0'+\varkappa(\varkappa-1)(x-\alpha)^{\varkappa-2}\psi_0$$
$$+2(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1'+2(\varkappa+\lambda)(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda-1}\psi_1+(x-\alpha)^{\varkappa+\mu}\psi_2\big]$$
$$+(x-\alpha)^{\sigma}g_1\big[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0'+\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_0+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1\big]+G_2(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0,$$

und daher zunächst

$$1)\quad \text{für } \lambda\geqq 0,\ \text{also } \sigma=2\varkappa,$$

wenn $\mu\geqq -1$ und $(\varkappa-1)g_0+g_1\not\equiv 0$, $G_2=(x-\alpha)^{2\varkappa-1}g_2$, worin $g_2\not\equiv 0$,
wenn $\mu=-2$ und $\varkappa\psi_0((\varkappa-1)g_0+g_1)+g_0\psi_2\not\equiv 0$, $G_2=(x-\alpha)^{2\varkappa-1}g_2$
wenn $\mu\leqq -3$, $G_2=(x-\alpha)^{2\varkappa+\mu+1\leqq 2\varkappa-2}g_2$,

so daß für $\lambda\geqq 0$ und beliebige Werte von μ

$$G_0=(x-\alpha)^{2\varkappa+1}g_0,\ G_1=(x-\alpha)^{2\varkappa}g_1,\ G_2=(x-\alpha)^{\tau\leqq 2\varkappa-1}g_2$$

ist, worin $g_0, g_1, g_2\not\equiv 0$ sind; es enthält somit G_2 niedrigere Potenzen von $(x-\alpha)$ als G_0 und G_1, und somit ist die Reduktion der gegebenen Differentialgleichung unmöglich.

Bemerkt man aber, daß wegen

$$g_0=\frac{G_0}{(x-\alpha)^{2\varkappa+1}}=\frac{\psi_0^2 f_0}{x-\alpha}$$

$$g_1=\frac{G_1}{(x-\alpha)^{\sigma}}=\psi_0^2(x-\alpha)^{2\varkappa-\sigma}f_1$$
$$-\frac{g_0}{\psi_0}\big[2(x-\alpha)^{2\varkappa+1-\sigma}\psi_0'+2\varkappa(x-\alpha)^{2\varkappa-\sigma}+(x-\alpha)^{2\varkappa+1+\lambda-\sigma}\psi_1\big]$$

sich für $\lambda\geqq 0$ also $\sigma=2\varkappa$ $g_1\equiv -2\varkappa g_0$ ergibt, so daß

$$(\varkappa-1)g_0+g_1\equiv -(\varkappa+1)g_0\not\equiv 0 \text{ stets befriedigt ist,}$$

während die Inkongruenz

$$\varkappa\psi_0((\varkappa-1)g_0+g_1)+g_0\psi_2\not\equiv 0 \text{ in } \psi_2-\varkappa(\varkappa+1)\psi_0\not\equiv 0$$

übergeht, so folgt,

daß eine EISENSTEINsche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit keiner irreduktibeln Differentialgleichung $n-2^{ter}$ Ordnung

$$\varphi_0 y^{(n-2)}+\varphi_1 y^{(n-3)}+\cdots+\varphi_{n-2}y=0,$$

in welcher

$$\varphi_0=(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0(\varkappa\geq 2),\ \varphi_1=(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1(\lambda\geq 0),\ \varphi_2=(x-\alpha)^{\varkappa+\mu}\psi_2(\mu\geq-\varkappa)$$

und $\psi_0, \psi_1, \psi_2\not\equiv 0$ sind, ein Integral gemein haben kann, vorausgesetzt, daß für den Fall $\mu=-2$ die Inkongruenz besteht

$$\psi_2-\varkappa(\varkappa+1)\psi_0\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha).$$

Ist

$$2)\quad \lambda=-1, \text{ also wieder } \sigma=2\varkappa,$$

so wird sich für $\mu\geq-1$ aus dem obigen Ausdruck von f_2

$$G_2=(x-\alpha)^{2\varkappa-1}g_2, \text{ worin } g_2\not\equiv 0,$$

ergeben, wenn zu der für die Bestimmung der Form von G_1 gefundenen Bedingung $2\varkappa\psi_0+\psi_1\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ noch die Inkongruenz hinzutritt

$$g_0(\varkappa-1)(\varkappa\psi_0+2\psi_1)+g_1(\varkappa\psi_0+\psi_1)\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha),$$

welche, da sich den oben aufgestellten Ausdrücken von g_0 und g_1 zufolge für $\lambda=-1$, $\sigma=2\varkappa$ die Kongruenz

$$g_1\equiv-\frac{g_0}{\psi_0}(2\varkappa\psi_0+\psi_1) \bmod (x-\alpha)$$

ergibt, in

$$\varkappa(\varkappa+1)\psi_0^2+(\varkappa+2)\psi_0\psi_1+\psi_1^2\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

übergeht. Für $\mu=-2$ wird bei Geltung der Inkongruenz

$$g_0\left[(\varkappa-1)(\varkappa\psi_0+2\psi_1)+\psi_2\right]+g_1\left[\varkappa\psi_0+\psi_1\right]\not\equiv 0$$

oder wieder durch Substitution der Werte von g_0 und g_1

$$\varkappa(\varkappa+1)\psi_0^2+(\varkappa+2)\psi_0\psi_1+\psi_1^2-\psi_0\psi_2\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

G_2 wieder der Form nach denselben Wert annehmen, während sich für $\mu\leq -3$

$$G_2=(x-\alpha)^{2\varkappa+\mu+1<2\varkappa-1}g_2, \text{ worin } g_2\not\equiv 0,$$

ergibt.

Da somit wieder die Exponenten von $(x-\alpha)$ in den Ausdrücken G_0, G_1, G_2 fallen, wird bei Geltung der oben aufgestellten Inkongruenzen die Unmöglichkeit der Reduzibilität nachgewiesen sein.

Für den Fall, daß eine der beschränkenden Inkongruenzen in die entsprechende Kongruenz übergeht, wird die Existenz einer Zerlegung möglich sein.

So wird z. B. für $\psi_0=1$, $\psi_1=-4$, $\psi_2=6$, $\varkappa=2$, $\lambda=-1$, $\mu=-2$ die Zerlegungsform bestehen

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^6\left[(x-\alpha)y''''+(x-\alpha)^3y'''-(x-\alpha)^2y''-2(x-\alpha)y'+6y\right]\\&=(x-\alpha)^5\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-\alpha)^2y''-4(x-\alpha)y'+6y\right]+(x-\alpha)^7\frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)^2y''-4(x-\alpha)y'+6y\right]\\&\qquad+(x-\alpha)^6\left[(x-\alpha)^2y''-4(x-\alpha)y'+6y\right],\end{aligned}$$

und für $\psi_0=1$, $\psi_1=-4$, $\psi_2=(x-\alpha)^4+6$

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^6\left[(x-\alpha)y''''+(x-\alpha)^3y'''+(x-\alpha)^2(x-\alpha-1)y''+(x-\alpha)\left(8(x-\alpha)+(x-\alpha)^4-2\right)y'\right.\\&\qquad\left.+\left(12(x-\alpha)+5(x-\alpha)^4+6\right)y\right.\\&=(x-\alpha)^5\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-\alpha)^2y''-4(x-\alpha)y'+\left((x-\alpha)^4+6\right)y\right]\\&+(x-\alpha)^7\frac{d}{dx}\left[(x-\alpha)^2y''-4(x-\alpha)y'+\left((x-\alpha)^4+6\right)y\right]\\&+(x-\alpha)^6\left[(x-\alpha)^2y''-4(x-\alpha)y'+\left((x-x)^4+6\right)y\right].\end{aligned}$$

Ist endlich

$$3)\quad \lambda \leqq -2, \text{ also } \sigma = 2\varkappa + \lambda + 1 \leqq 2\varkappa - 1,$$

so wird, wenn $\mu > 2\lambda$, wie wiederum aus der Gleichung für f_2 unmittelbar zu ersehen,

$$G_2 = (x-\alpha)^{\tau = 2\varkappa + 2\lambda + 1 \leqq 2\varkappa - 3} g_2, \text{ worin } g_2 \not\equiv 0 \text{ und } \tau < \sigma;$$

hat dagegen μ den Wert 2λ, so wird G_2 der Form nach denselben Wert behalten, wenn noch die Beschränkung durch die Inkongruenz hinzutritt

$$g_0 \psi_2 + g_1 \psi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha),$$

welche, da sich nach den oben für g_0 und g_1 gegebenen Ausdrücken für $\lambda \leqq -2$ wegen $\sigma = 2\varkappa + \lambda + 1$ die Kongruenz ergibt $g_1 = -\frac{g_0}{\psi_0}\psi_1$, in die Inkongruenz

$$\psi_1^2 - \psi_0 \psi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

übergeht. Ist jedoch μ eine negative Zahl $< 2\lambda$, so wird

$$G_2 = (x-\alpha)^{2\varkappa + \mu + 1 < 2\varkappa + 2\lambda + 1 < 2\varkappa - 3} g_2, \text{ worin } g_2 \not\equiv 0,$$

und es wird daher

in allen Fällen für $\lambda \leqq -2$, mit Beifügung der Inkongruenz $\psi_1^2 - \psi_0 \psi_2 \not\equiv 0$ für $\mu = 2\lambda$, wegen der Abnahme der Exponenten von $(x-\alpha)$ in den Ausdrücken für G_0, G_1, G_2 die Reduzibilität der EISENSTEINschen Differentialgleichung unmöglich sein, oder es wird dieselbe im allgemeinen – von den beiden Fällen $\lambda \geqq 0$, $\mu = -2$ und $\lambda \leqq -2$, $\mu = 2\lambda$ abgesehen – mit einer irreduktibeln Differentialgleichung $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung nur dann ein Integral gemein haben können, wenn, wie oben, $\lambda = -1$ ist.

Fassen wir die bisher gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Eine EISENSTEINsche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung kann nicht mit einer irreduktibeln Diffe-

rentialgleichung $n-2^{ter}$ Ordnung ein Integral gemein haben, in welcher

$$\varphi_0=(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0(\varkappa\geq 2),\ \varphi_1=(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda}\psi_1(\varkappa+\lambda>0),\ \varphi_2=(x-\alpha)^{\varkappa+\mu}\psi_2(\varkappa+\mu\geq 0),$$

worin $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, wenn

1) $\lambda\geq 0$, μ beliebig ($\mu=-2$ ausgeschlossen)

2) $\lambda\geq 0$, $\mu=-2$, $\psi_2-\varkappa(\varkappa+1)\psi_0\not\equiv 0$

3) $\lambda=-1$, $\mu\geq -1$, $2\varkappa\psi_0+\psi_1\not\equiv 0$, $\varkappa(\varkappa+1)\psi_0^2+(\varkappa+2)\psi_0\psi_1+\psi_1^2\not\equiv 0$

4) $\lambda=-1$, $\mu=-2$, $2\varkappa\psi_0+\psi_1\not\equiv 0$, $\varkappa(\varkappa+1)\psi_0^2+(\varkappa+2)\psi_0\psi_1+\psi_1^2-\psi_0\psi_2\not\equiv 0$

5) $\lambda=-1$, $\mu\leq -3$, $2\varkappa\psi_0+\psi_1\not\equiv 0$

6) $\lambda\leq -2$, $\mu=2\lambda$, $\psi_1^2-\psi_0\psi_2\not\equiv 0$

7) $\lambda\leq -2$, $\mu>2\lambda$ oder $\mu<2\lambda$;

es wird also die Existenz einer Zerlegung – von den Fällen $\lambda\geq 0$, $\mu=-2$ und $\lambda\leq -2$, $\mu=2\lambda$ abgesehen – nur möglich sein für $\lambda=-1$, und zwar nur dann, wenn die beschränkenden Inkongruenzen in die entsprechenden Kongruenzen übergehen.

Genau in derselben Weise können wir die Irreduktibilitätsbedingungen der EISENSTEINschen Differentialgleichung in bezug auf eine Differentialgleichung beliebiger, aber bestimmter niederer Ordnung aufstellen; es ist aber auch möglich, ganz allgemein hinreichende Bedingungen für die Irreduktibilität in bezug auf jede Differentialgleichung niederer Ordnung anzugeben.

Sei wieder angenommen, daß die EISENSTEINsche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\cdots+f_n y=0$$

mit einer linearen Differentialgleichung von beliebiger Ordnung ν ein Integral gemein habe, das nicht einer ebensolchen Differentialgleichung noch niederer Ordnung genügt, so wird, wenn letztere die Form hat

$$(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_1}\psi_1 y^{(\nu-1)}+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_2}\psi_2 y^{(\nu-2)}+\cdots$$
$$+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_\nu}\psi_\nu y=0\,,$$

worin $\varkappa>0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu \geq -\varkappa$, $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_\nu \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$ sind, die Zerlegungsgleichung zu untersuchen sein

$$(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu+1)}\psi_0^{n-\nu+1}\left(f_0 y^{(n)}+f_1 y^{(n-1)}+\cdots+f_n y\right)$$
$$=G_0\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\left[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_1}\psi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_\nu}\psi_\nu y\right]$$
$$+G_1\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}\left[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 y^{(\nu)}+\cdots+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_\nu}\psi_\nu y\right]$$
$$+\cdots+G_{n-\nu}\left[(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_1}\psi_1 y^{(\nu-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_\nu}\psi_\nu y\right].$$

Zunächst folgt wieder durch Identifizierung der Koeffizienten von $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots$

$$(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu+1)}\psi_0^{n-\nu+1}f_0=G_0(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0 \quad \text{oder} \quad G_0=(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu)+1}g_0\,,$$
$$\text{worin } g_0\not\equiv 0\,;$$

ferner ergibt sich aus der Gleichung

$$(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu+1)}\psi_0^{n-\nu+1}f_1$$
$$=(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu)+1}g_0\left[(n-\nu)\left((x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0'+\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_0\right)+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_1}\psi_1\right]+G_1(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0$$

unter der Annahme, daß $\lambda_1\geq 0$ ist,

$$G_1=(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu)}g_1, \text{ worin } g_1=-(n-\nu)\varkappa g_0\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)\,;$$

ebenso folgt aus

$$(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu+1)}\psi_0^{n-\nu+1}f_2$$
$$=(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu)+1}g_0\left[(n-\nu)_2\left((x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0''+2\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_0'+\varkappa(\varkappa-1)(x-\alpha)^{\varkappa-2}\psi_0\right)\right.$$
$$\left.+(n-\nu)_1\left((x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_1}\psi_1'+(\varkappa+\lambda_1)(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_1-1}\psi_1\right)+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_2}\psi_2\right]$$
$$+(x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu)}g_1\left[(n-\nu-1)\left((x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0'+\varkappa(x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_0\right)+(x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_1}\psi_1\right]$$
$$+G_2(x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0\,,$$

daß, wenn $\lambda_2 \geqq -1$ angenommen wird,

$$G_2 = (x-\alpha)^{\varkappa(n-\nu)-1} g_2, \text{ worin } g_2 \equiv (n-\nu)_2 \varkappa(\varkappa+1) g_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha),$$

usw., bis man

$$G_{n-\nu} = (x-\alpha)^{(\varkappa-1)(n-\nu)+1} g_{n-\nu}, \text{ worin } g_{n-\nu} \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$$

erhält, und wir finden somit, da die Exponenten der $(x-\alpha)$-Potenzen in den Funktionen G mit wachsendem Index abnehmen, daß unter der Annahme, daß

$$\varkappa > 0, \ \lambda_\rho \geqq -\varkappa \text{ und } \geqq -(\rho-1)$$

– also z. B. wenn $\varkappa > \nu-1$, $\lambda_\rho \geqq -(\rho-1)$ – die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit der Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung kein Integral gemein haben kann.

Fassen wir die bisher gewonnenen Resultate zusammen, so folgt,

daß eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$f_0 y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1} y' + f_n y = 0,$$

in welcher alle Koeffizienten – mit Ausnahme des letzten – einen gemeinsamen Teiler $x-\alpha$ haben, der in f_0 nur einfach enthalten ist, mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niederer Ordnung

$$\varphi_0 y^{(\nu)} + \varphi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \varphi_{\nu-1} y' + \varphi_\nu y = 0$$

ein Integral gemein haben kann, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung noch niederer Ordnung als der ν^{ten} genügt, wenn

1) $\varphi_0 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$

2) $\varphi_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2$, $\varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$

3) $\varphi_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, $\varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$
$\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2$

4) $\varphi_0 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, $\varphi_1 \equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, $k\varphi_0' + \varphi_1 \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$
$\not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)^2$ $\qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$

5) $\varphi_\rho = (x-\alpha)^{\varkappa+\lambda_\rho}\psi_\rho$, worin $\psi_\rho \not\equiv 0 \bmod (x-\alpha)$, $\varkappa > 0$, $\lambda_0 = 0$,
und $\lambda_\rho > -\varkappa$ $\qquad (\rho = 1, 2, \ldots \nu)$,
$> -(\rho - 1)$

während für den Fall, daß φ_0 die Lösung α mehrfach, φ_1 dieselbe einfach oder mehrfach besitzt, die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer gleichartigen Differentialgleichung niedrigster Ordnung ein Integral im allgemeinen mit Berücksichtigung der oben durch Kongruenzen gegebenen Beschränkungen nur wird gemein haben können, wenn

$$\varphi_0 = (x-\alpha)^{\varkappa}\psi_0, \quad \varphi_1 = (x-\alpha)^{\varkappa-1}\psi_1$$

ist, worin $\varkappa \geqq 2$, ψ_0 und ψ_1 den Faktor $(x-\alpha)$ nicht enthalten.