Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Loewy, Alfred** (1873 – 1935)

Titel: **Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1917, 6

In den letzten Jahren ist der Intensitätsbegriff besonders infolge der Bereicherung, die er durch J. Karups Einführung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten erfahren hat, der Gegenstand einer Anzahl von Arbeiten gewesen. Diese Theorie war aber noch nicht so einfach und übersichtlich dargestellt worden, wie es ihrem grundlegenden Charakter entspricht. Die vorliegende Arbeit behandelt zunächst die Intensitäten in ihrem Zusammenhang mit den abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. Es folgt die Untersuchung eines ganz allgemeinen Versicherungsverhältnisses auf Grund analytischer Methoden mittels der Ausscheidungsintensitäten. Schließlich werden ausreichende Prämien abgeleitet, die neben dem freiwilligen Ausscheiden mit Abgangsvergütung auch noch den drei Gattungen von Unkosten des Versicherungsbetriebs, Erwerbs-, Inkasso- und Verwaltungskosten, sowie weiter den vom Versicherer versprochenen Dividenden Rechnung tragen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1917 , S. XVI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1917. 6. Abhandlung

Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik

Von

ALFRED LOEWY

Eingegangen am 24. Februar 1917

Vorgelegt von P. STÄCKEL

Heidelberg 1917
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1375

EINLEITUNG.

Der Intensitätsbegriff ist in der Versicherungsmathematik während der letzten Jahre besonders infolge der Bereicherung, die er durch J. KARUPS Einführung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten erfahren hat, der Gegenstand einer Anzahl von Arbeiten gewesen. Unter den von mir in der Anmerkung zusammengestellten hebe ich besonders diejenigen von P. SPANGENBERG[1]) und L. G. DU PASQUIER[2]) hervor, die auch die historische Seite des Problems eingehend behandeln. Soweit ich sehen kann, ist aber die Einführung der Intensitäten sowie ihr Zusammenhang mit den

---

[1]) P. SPANGENBERG, Die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft 20, Seite 91, Berlin 1911.

[2]) L. G. DU PASQUIER, Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 8. Heft, S. 1; Berlin 1913. Weitere Literatur: Bedeutung, Anwendung und Berechnung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten in Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des siebenten internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft. Amsterdam, 2.—7. September 1912. Amsterdam 1912, Bd. II, S. 325 ff.: P. E. BÖHMER, Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, a. a. O. S. 327. G. ROSMANITH, Bedeutung, Anwendung und Berechnung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten und ihr Verhältnis zu den übrigen statistischen Maßzahlen, a. a. O. S. 347. R. RISSER, Importance, application et calcul des probabilités indépendantes et leurs rapports aux autres mesures statistiques, a. a. O. S. 369. H. A. VAN DEN BELT, Meaning, use and calculation of independent probabilities and their relation to the most usual statistical quantities, a. a. O. S. 389. L. G. DU PASQUIER, Neue mathematische Grundlage der partiellen Wahrscheinlichkeiten und einer damit zusammenhängenden Lebensversicherungstheorie, wenn auf die versicherte Personengruppe mehrere Veränderungsursachen gleichzeitig einwirken, a. a. O. S. 399. — P. E. BÖHMER, Die Grundlagen der Theorie der Invaliditätsversicherung, Jahrbuch für Versicherungsmathematik, Berlin 1914, 1. Jahrgang, S. 142. — P. SPANGENBERG, Die zahlenmäßige Berechnung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den „abhängigen" und der „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den „unabhängigen", Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 10. Heft, S. 25 (1915).

abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten noch nicht in so einfacher und übersichtlicher Weise dargelegt worden, wie es der grundlegenden Wichtigkeit des Problems entspricht. § 1 und § 2 behandeln daher die Intensitäten in ihren Beziehungen zu den abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. Alsdann stelle ich ein ganz allgemeines Versicherungsverhältnis mit n Ausscheidegründen auf und behandle es nach analytischer Methode unter Verwendung der Intensitäten. Die Grundlage hierfür bildet die Verallgemeinerung der zuerst von dem dänischen Astronomen T. N. THIELE[1]) für den Fall der Todesfallversicherung, also bei einem einzigen Ausscheidegrund, aufgestellten Differentialgleichung, der das Deckungskapital genügen muß. Im § 3 gelangen die Nettoprämien und Deckungskapitalien dieser allgemeinen Versicherung zur Ableitung, u. a. wird auch ein HÖCKNERscher Satz über Prämienaufschläge vom analytischen Standpunkte beleuchtet. § 4 behandelt den Zusammenhang der in § 3 bestimmten Prämien und Deckungskapitalien mit denjenigen, die sich ergeben, wenn die Ausscheideordnung noch als $(n+1)^{\text{ten}}$ weiteren Ausscheidegrund das freiwillige Ausscheiden aus dem Versicherungsverhältnis berücksichtigt. Im letzten Paragraphen gehe ich schließlich zur Ableitung von ausreichenden Prämien über, die neben dem freiwilligen Ausscheiden auch noch den mit jedem Versicherungsbetriebe verbundenen drei Gattungen von Unkosten, den Erwerbs-, Inkasso- und Verwaltungskosten, sowie den versprochenen Dividenden Rechnung tragen. Die ausreichende Prämie läßt sich alsdann aus Nettoprämie, Inkassogebühr, Erwerbs-, Verwaltungskosten- und Dividendenzuschlag zusammensetzen; bei den Deckungskapitalien ist der Aufbau aus dem Deckungskapital der Nettomethode, dem ZILLMERschen Deckungskapital, der Verwaltungskosten- und der Dividendenreserve zu studieren.

[1]) N. R. JÖRGENSEN, Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung, Jena 1913, S. 253; ferner seinen Aufsatz „Einige Bemerkungen über die Thielesche Differentialgleichung der Prämienreserve", Jahrbuch für Versicherungsmathematik 1914, S. 230, Berlin 1914.

§ 1.

Die allgemeine, zweifach abgestufte Ausscheideordnung mit n Ausscheidegründen. Die Ausscheideintensitäten in ihrem Zusammenhang mit den (sogenannten abhängigen) Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Den folgenden Untersuchungen liegt eine allgemeine, zweifach abgestufte Ausscheideordnung zugrunde, d. h. eine solche, die nicht nur dem Lebensalter, sondern auch der Beobachtungsdauer Rechnung trägt (Selektionstafel) und bei der n Ausscheidegründe wirksam sind. Die Anzahl der für unsere Ausscheideordnung in Frage kommenden Personen sei mit $l_{[y]+x}$ bezeichnet, so daß $l_{[y]+x}$ die Anzahl derjenigen Personen bedeutet, die mit y Jahren in die Beobachtung eingetreten sind und das Lebensalter $y+x$ unter den von der Ausscheideordnung geforderten Bedingungen erleben. Nach der gegebenen Erklärung nimmt bei $l_{[y]+x}$ der Index x nur Werte an, die nicht negativ sind. Die Anzahl der mit y Jahren in die Beobachtung eingetretenen Personen, die durch den Wert $x=0$ charakterisiert wird, bezeichnet man einfach mit $l_{[y]}$ statt mit $l_{[y]+0}$.

In den x Jahren, in denen sich die im Alter y in die Beobachtung eingetretenen $l_{[y]}$ Personen auf $l_{[y]+x}$ vermindert haben, seien aus dem ersten Grunde $f^{(1)}_{[y]+x}$, aus dem zweiten Grunde $f^{(2)}_{[y]+x}$ usw., aus dem n^{ten} Grunde $f^{(n)}_{[y]+x}$ ausgeschieden. Da die Beobachtung erst beim Lebensalter y anfängt, sind $f^{(1)}_{[y]+x}, f^{(2)}_{[y]+x}, \dots f^{(n)}_{[y]+x}$ nur für $x \geqq 0$ definiert, und es ist $f^{(1)}_{[y]} = f^{(2)}_{[y]} = \cdots = f^{(n)}_{[y]} = 0$. Weiter sind $f^{(1)}_{[y]+x}, f^{(2)}_{[y]+x}, \dots f^{(n)}_{[y]+x}$ ihrer Erklärung nach niemals abnehmende (also wachsende oder gleichbleibende) Funktionen von x, während $l_{[y]+x}$ eine niemals zunehmende (also fallende oder gleichbleibende) Funktion von x ist[1]).

Auf Grund ihres Zusammenhanges besteht zwischen den eingeführten Funktionen die Relation:

$$l_{[y]+x} = l_{[y]} - f^{(1)}_{[y]+x} - f^{(2)}_{[y]+x} \cdots - f^{(n)}_{[y]+x}\,. \tag{1}$$

[1]) Der in eckigen Klammern stehende Index y wird im folgenden immer als ein festes, gegebenes Lebensalter gelten, bei dem die Beobachtung der Personengruppe beginnt.

Von den Funktionen $f^{(1)}_{[y]+x}, f^{(2)}_{[y]+x}, \dots f^{(n)}_{[y]+x}$ setzen wir voraus, daß sie nicht nur stetige, sondern auch differentierbare Funktionen von x sind. Alsdann folgt aus (1), daß $l_{[y]+x}$ ebenfalls eine differentierbare Funktion von x ist. Diese Voraussetzung der Differentierbarkeit wird im folgenden verwendet werden.

Aus unserer Definition der Funktion $f^{(1)}_{[y]+x}$ ergibt sich, daß von den im Alter y in die Beobachtung eingetretenen $l_{[y]}$ Personen die Anzahl $f^{(1)}_{[y]+x+h} - f^{(1)}_{[y]+x}$ im Alter $y+x$ bis $y+x+h$ aus dem ersten Grunde ausscheidet. Wir bilden:

$$(2_1) \qquad {}_hq^{(1)}_{[y]+x} = \frac{f^{(1)}_{[y]+x+h} - f^{(1)}_{[y]+x}}{l_{[y]+x}} .$$

${}_hq^{(1)}_{[y]+x}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein mit y Jahren in die Beobachtung Eingetretener im Alter von $y+x$ bis $y+x+h$ aus dem ersten Grunde ausscheidet; denn von $l_{[y]+x}$ Personen des Alters $y+x$, die mit y Jahren in die Beobachtung eingetreten sind, scheiden $f^{(1)}_{[y]+x+h} - f^{(1)}_{[y]+x}$ im Alter $y+x$ bis $y+x+h$ infolge des ersten Grundes aus. Entsprechend zu (2_1) erhält man die Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus dem zweiten usw. bis n^{ten} Grunde:

$$(2_2) \qquad {}_hq^{(2)}_{[y]+x} = \frac{f^{(2)}_{[y]+x+h} - f^{(2)}_{[y]+x}}{l_{[y]+x}} ,$$

$$\vdots$$

$$(2_n) \qquad {}_hq^{(n)}_{[y]+x} = \frac{f^{(n)}_{[y]+x+h} - f^{(n)}_{[y]+x}}{l_{[y]+x}} .$$

Als totale Ausscheidewahrscheinlichkeit ${}_hq_{[y]+x}$, die für einen mit y Jahren in die Beobachtung Eingetretenen in seinem Alter $y+x$ bis $y+x+h$ besteht, ist zu definieren:

$$(3) \qquad {}_hq_{[y]+x} = \frac{l_{[y]+x} - l_{[y]+x+h}}{l_{[y]+x}} ;$$

denn von $l_{[y]+x}$ Personen des Alters $y+x$ scheiden im Alter $y+x$ bis $y+x+h$ insgesamt $l_{[y]+x} - l_{[y]+x+h}$ aus.

Nach Gleichung (1) ist:

$$(1') \qquad l_{[y]+x+h} = l_{[y]} - f^{(1)}_{[y]+x+h} - f^{(2)}_{[y]+x+h} \cdots - f^{(n)}_{[y]+x+h} .$$

Dividiert man die Differenz zwischen (1) und (1') durch $l_{[y]+x}$, so ergibt sich mittels (3), (2_1) bis (2_n):

$$ {}_h q_{[y]+x} = {}_h q^{(1)}_{[y]+x} + {}_h q^{(2)}_{[y]+x} + \cdots + {}_h q^{(n)}_{[y]+x} \,. \tag{4} $$

In Worten: Die totale Ausscheidewahrscheinlichkeit ${}_h q_{[y]+x}$ setzt sich aus den Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_h q^{(1)}_{[y]+x}$, ${}_h q^{(2)}_{[y]+x}$, … ${}_h q^{(n)}_{[y]+x}$ der einzelnen Ursachen additiv zusammen.

Aus ${}_h q_{[y]+x}$ leitet man ab

$$ {}_h p_{[y]+x} = 1 - {}_h q_{[y]+x} = \frac{l_{[y]+x+h}}{l_{[y]+x}} \,; \tag{5} $$

die Funktion ${}_h p_{[y]+x}$ ist die totale Verbleibswahrscheinlichkeit, die für einen mit y Jahren in die Beobachtung Eingetretenen in seinem Alter $y+x$ bis $y+x+h$ besteht.

Entsprechend den definierten Wahrscheinlichkeiten ${}_h q^{(1)}_{[y]+x}$, ${}_h q^{(2)}_{[y]+x}$, … ${}_h q^{(n)}_{[y]+x}$ führen wir die Intensitäten $\mu^{(1)}_{[y]+x}$, $\mu^{(2)}_{[y]+x}$, … $\mu^{(n)}_{[y]+x}$ ein:

$$ \mu^{(1)}_{[y]+x} = \frac{\dfrac{d f^{(1)}_{[y]+x}}{dx}}{l_{[y]+x}} \,, \tag{6_1} $$

$$ \mu^{(2)}_{[y]+x} = \frac{\dfrac{d f^{(2)}_{[y]+x}}{dx}}{l_{[y]+x}} \,, \tag{6_2} $$

$$ \vdots $$

$$ \mu^{(n)}_{[y]+x} = \frac{\dfrac{d f^{(n)}_{[y]+x}}{dx}}{l_{[y]+x}} \,, \tag{6_n} $$

wobei die Zähler die Differentialquotienten der Funktionen $f^{(1)}_{[y]+x}$, $f^{(2)}_{[y]+x}$, … $f^{(n)}_{[y]+x}$ nach x bedeuten.

Die Größen $\mu^{(1)}_{[y]+x}$, $\mu^{(2)}_{[y]+x}$, … $\mu^{(n)}_{[y]+x}$ bezeichnet man als die Intensitäten des Ausscheidens aus dem ersten, aus dem zweiten usw., schließlich aus dem n^{ten} Grunde. Ihnen fügen wir noch die totale Ausscheideintensität $\mu_{[y]+x}$ bei:

(7) $$\mu_{[y]+x} = \frac{-\dfrac{d\,l_{[y]+x}}{dx}}{l_{[y]+x}}\ ^{1)}.$$

Nach (2_1) ist

$${}_hq_{[y]+x} = \frac{f^{(1)}_{[y]+x+h} - f^{(1)}_{[y]+x}}{h} \cdot \frac{h}{l_{[y]+x}}.$$ Nun ist $\lim\limits_{h=0} \left| \dfrac{f^{(1)}_{[y]+x+h} - f^{(1)}_{[y]+x}}{h} \right|$

der Differentialquotient von $f^{(1)}_{[y]+x}$ nach x. Bezeichnen wir eine nach Null konvergierende Größe h in üblicher Weise mit dx, Differential von x, so ergibt sich:

$$\lim_{h=0} {}_hq^{(1)}_{[y]+x} = \frac{\dfrac{df^{(1)}_{[y]+x}}{dx}}{l_{[y]+x}} \cdot dx,$$ oder nach (6_1): $$\lim_{h=0} {}_hq^{(1)}_{[y]+x} = \mu^{(1)}_{[y]+x}\, dx\,.$$

$\mu^{(1)}_{[y]+x} \cdot dx$, die mit dem Differential dx multiplizierte erste Intensität $\mu^{(1)}_{[y]+x}$, kann als die Wahrscheinlichkeit angesehen werden, daß ein mit y Jahren in die Beobachtung Eingetretener im Alter $y+x$ bis $y+x+dx$ während des unendlichkleinen Zeitintervalls dx aus dem ersten Grunde ausscheidet.

Entsprechend wird $\mu^{(2)}_{[y]+x}\, dx = \lim\limits_{h=0} {}_hq^{(2)}_{[y]+x}, \ldots \mu^{(n)}_{[y]+x}\, dx = \lim\limits_{h=0} {}_hq^{(n)}_{[y]+x}$.

Nach (3) hat man ${}_hq_{[y]+x} = -\dfrac{l_{[y]+x+h} - l_{[y]+x}}{h} \cdot \dfrac{h}{l_{[y]+x}}$. Nun ist $\dfrac{d\,l_{[y]+x}}{dx} = \lim\limits_{h=0} \left| \dfrac{l_{[y]+x+h} - l_{[y]+x}}{h} \right|$. Folglich ergibt sich nach (7), wenn man für $\lim\limits_{h=0} h$ das Differential dx benützt, $\lim\limits_{h=0} {}_hq_{[y]+x} = \mu_{[y]+x}\, dx$.

In Worten: $\mu_{[y]+x}\, dx$, die mit dem Differential dx multiplizierte totale Ausscheideintensität $\mu_{[y]+x}$, stellt

---

[1]) Man beachte, daß in (7) bei $\mu_{[y]+x}$ rechter Hand das negative Zeichen steht, was in (6_1) bis (6_n) bei $\mu^{(1)}_{[y]+x}, \mu^{(2)}_{[y]+x}, \ldots \mu^{(n)}_{[y]+x}$ nicht der Fall ist. Der Grund hierfür ist, daß die Intensitäten positiv sein sollen; nun hat die Funktion $l_{[y]+x}$ als nicht zunehmende Funktion einen negativen Differentialquotienten, während $f^{(1)}_{[y]+x}, f^{(2)}_{[y]+x}, \ldots f^{(n)}_{[y]+x}$ als nicht abnehmende Funktionen positive Differentialquotienten besitzen.

die Wahrscheinlichkeit dar, daß ein mit y Jahren in die Beobachtung Eingetretener im Alter $y+x$ bis $y+x+dx$ während des unendlichkleinen Zeitintervalls dx irgendwie ausscheidet, ganz gleich, aus welchem der n Gründe es auch sei.

Entweder aus (1) durch Differentiation nach x und Division durch $l_{[y]+x}$ oder auch aus (4) durch Übergang zur Grenze für nach Null konvergierendes h ergibt sich die Gleichung:

$$\mu_{[y]+x} = \mu^{(1)}_{[y]+x} + \mu^{(2)}_{[y]+x} + \cdots + \mu^{(n)}_{[y]+x} \,. \tag{8}$$

In Worten: Die totale Ausscheideintensität $\mu_{[y]+x}$ ist die Summe der einzelnen Ausscheideintensitäten.

Schreibt man (7) in der Form

$$\mu_{[y]+x} = -\frac{d \overset{e}{\log}\, l_{[y]+x}}{dx}\,, \tag{7*}$$

wobei $\overset{e}{\log}\, l_{[y]+x}$ den natürlichen Logarithmus von $l_{[y]+x}$ bedeutet, so ergibt sich durch Integration zwischen den Grenzen 0 und x:

$$\overset{e}{\log}\, l_{[y]+x} - \overset{e}{\log}\, l_{[y]} = -\int_0^x \mu_{[y]+x}\, dx$$

oder

$$\overset{e}{\log}\left|\frac{l_{[y]+x}}{l_{[y]}}\right| = -\int_0^x \mu_{[y]+x}\, dx \,.$$

Mithin wird

$$l_{[y]+x} = l_{[y]}\, e^{-\int_0^x \mu_{[y]+x}\, dx} \,. \tag{9}$$

Die Formel (9) drückt $l_{[y]+x}$ durch die totale Ausscheideintensität $\mu_{[y]+x}$ und den Anfangsbestand $l_{[y]}$ aus.

Nach (6_1) hat man $\dfrac{df^{(1)}_{[y]+x}}{dx} = \mu^{(1)}_{[y]+x} \cdot l_{[y]+x}$. Hieraus folgt durch Integration zwischen den Grenzen 0 und x:

$$f^{(1)}_{[y]+x} - f^{(1)}_{[y]} = \int_0^x \mu^{(1)}_{[y]+x} \cdot l_{[y]+x} \cdot dx \,,$$

oder, da $f^{(1)}_{[y]}=0$ ist:

$$(10_1) \qquad f^{(1)}_{[y]+x} = \int_0^x \mu^{(1)}_{[y]+x} \cdot l_{[y]+x} \cdot dx\,.$$

Führt man für $l_{[y]+x}$ seinen Wert nach (9) ein, so wird:

$$(10_1^*) \qquad f^{(1)}_{[y]+x} = l_{[y]} \cdot \int_0^x \mu^{(1)}_{[y]+x} \cdot e^{-\int_0^x \mu_{[y]+x} \cdot dx} \cdot dx\,.$$

Die Formeln (10_1) und (10_1^*) drücken $f^{(1)}_{[y]+x}$, die im Alter von y bis $y+x$ Jahren aus dem Anfangsbestand $l_{[y]}$ infolge des ersten Grundes Ausgeschiedenen, durch die Intensitäten $\mu_{[y]+x}$ und $\mu^{(1)}_{[y]+x}$ sowie den Anfangsbestand $l_{[y]}$ aus.

Entsprechend (10_1) und (10_1^*) hat man:

$$(10_2) \qquad f^{(2)}_{[y]+x} = \int_0^x \mu^{(2)}_{[y]+x} \cdot l_{[y]+x} \cdot dx\,,$$

$$(10_2^*) \qquad f^{(2)}_{[y]+x} = l_{[y]} \cdot \int_0^x \mu^{(2)}_{[y]+x} \cdot e^{-\int_0^x \mu_{[y]+x} \cdot dx} \cdot dx\,,$$

$$\vdots$$

$$(10_n) \qquad f^{(n)}_{[y]+x} = \int_0^x \mu^{(n)}_{[y]+x} \cdot l_{[y]+x} \cdot dx\,,$$

$$(10_n^*) \qquad f^{(n)}_{[y]+x} = l_{[y]} \cdot \int_0^x \mu^{(n)}_{[y]+x} \cdot e^{-\int_0^x \mu_{[y]+x} \cdot dx} \cdot dx\,.$$

Auch die oben zuerst eingeführten Wahrscheinlichkeiten lassen sich durch die Intensitäten ausdrücken. Aus (9) folgt

$$l_{[y]+x+h} = l_{[y]}\, e^{-\int_0^{x+h} \mu_{[y]+x}\, dx}\,.$$

Da nach (5) ${}_hp_{[y]+x} = \frac{l_{[y]+x+h}}{l_{[y]+x}}$ ist, ergibt sich aus der voraufgehenden Gleichung und der Relation (9), daß

$$ {}_hp_{[y]+x} = e^{-\int\limits_0^{x+h} \mu_{[y]+x}\,dx} \cdot e^{\int\limits_0^{x} \mu_{[y]+x}\,dx} = e^{-\int\limits_x^{x+h} \mu_{[y]+x}\,dx} $$

wird. Wir haben mithin das Resultat:

Die totale Verbleibswahrscheinlichkeit ${}_hp_{[y]+x}$ ist gegeben durch

$$ (11) \qquad {}_hp_{[y]+x} = e^{-\int\limits_x^{x+h} \mu_{[y]+x}\,dx} $$

oder

$$ (11^*) \qquad {}_hp_{[y]+x} = e^{-\int\limits_0^{h} \mu_{[y]+x+t}\,dt}. $$

Die letzte Formel folgt aus (11), wenn man in (11) die Integrationsvariable mit u bezeichnet denkt und für u die neue Variable t durch $u=x+t$ einführt; den Grenzen x und $x+h$ für u entsprechen dann die Grenzen 0 und h für t.

Führt man in (2_1)

$$ {}_hq^{(1)}_{[y]+x} = \frac{f^{(1)}_{[y]+x+h} - f^{(1)}_{[y]+x}}{l_{[y]+x}} $$

für $f^{(1)}_{[y]+x+h}$ und $f^{(1)}_{[y]+x}$ ihre Werte nach (10_1) ein und bezeichnet die Integrationsvariable mit t, so erhält man

$$ {}_hq^{(1)}_{[y]+x} = \frac{\int\limits_0^{x+h} \mu^{(1)}_{[y]+t} \cdot l_{[y]+t}\,dt - \int\limits_0^{x} \mu^{(1)}_{[y]+t}\, l_{[y]+t}\,dt}{l_{[y]+x}} = \frac{\int\limits_x^{x+h} \mu^{(1)}_{[y]+t}\, l_{[y]+t} \cdot dt}{l_{[y]+x}}. $$

Benützt man für t eine neue Integrationsvariable v, indem man $t=x+v$ setzt, so wird

$$ (12_1) \qquad {}_hq^{(1)}_{[y]+x} = \frac{\int\limits_0^{h} \mu^{(1)}_{[y]+x+v}\, l_{[y]+x+v}\,dv}{l_{[y]+x}}. $$

Nimmt man $l_{[y]+x}$ unter das Integral und beachtet, daß $\frac{l_{[y]+x+v}}{l_{[y]+x}} = {}_vp_{[y]+x}$

ist und daß die letzte Größe nach (11*) weiter den Wert $e^{-\int\limits_0^v \mu_{[y]+x+t}\,dt}$ hat, so erhält man:

$$(12_1^*) \qquad {}_h q^{(1)}_{[y]+x} = \int\limits_0^h \mu^{(1)}_{[y]+x+v} \cdot e^{-\int\limits_0^v \mu_{[y]+x+t}\,dt}\, dv\,.$$

Die Formel (12_1^*) drückt ${}_h q^{(1)}_{[y]+x}$ durch die Intensitäten $\mu_{[y]+x}$ und $\mu^{(1)}_{[y]+x}$ aus.

Den Formeln (12_1) und (12_1^*) entsprechend erhält man:

$$(12_2) \qquad {}_h q^{(2)}_{[y]+x} = \frac{\int\limits_0^h \mu^{(2)}_{[y]+x+v}\, l_{[y]+x+v}\, dv}{l_{[y]+x}}\,,$$

$$(12_2^*) \qquad {}_h q^{(2)}_{[y]+x} = \int\limits_0^h \mu^{(2)}_{[y]+x+v} \cdot e^{-\int\limits_0^v \mu_{[y]+x+t}\,dt} \cdot dv\,,$$

$$\vdots$$

$$(12_n) \qquad {}_h q^{(n)}_{[y]+x} = \frac{\int\limits_0^h \mu^{(n)}_{[y]+x+v} \cdot l_{[y]+x+v}\, dv}{l_{[y]+x}}\,;$$

$$(12_n^*) \qquad {}_h q^{(n)}_{[y]+x} = \int\limits_0^h \mu^{(n)}_{[y]+x+v} \cdot e^{-\int\limits_0^v \mu_{[y]+x+t}\,dt} \cdot dv\,.$$

Schließlich drücken wir noch die totale Ausscheidewahrscheinlichkeit ${}_h q_{[y]+x}$ durch die totale Intensität aus mittels der Formel:

$$(13) \qquad {}_h q_{[y]+x} = 1 - e^{-\int\limits_0^h \mu_{[y]+x+t}\,dt} = 1 - e^{-\int\limits_x^{x+h} \mu_{[y]+x}\,dx}\,,$$

wie aus Formel (5) in Verbindung mit (11) und (11*) unmittelbar folgt. Durch Addition von (12_1^*) bis (12_n^*) findet man bei Beachtung von (4) und (8) ${}_h q_{[y]+x}$ auch als Integral

$$(13^*) \qquad {}_h q_{[y]+x} = \int_0^h \mu_{[y]+x+v}\, e^{-\int_0^v \mu_{[y]+x+t}\,dt} \cdot dv\,.$$

Die letzte Formel wird sofort auf (13) zurückgeführt mittels der Bemerkung, daß

$$\mu_{[y]+x+v} \cdot e^{-\int_0^v \mu_{[y]+x+t}\,dt} = \frac{d}{dv}\left(-e^{-\int_0^v \mu_{[y]+x+t}\,dt}\right).$$

Die voraufgehenden Formeln lehren, daß unsere allgemeine, doppelt abgestufte Ausscheideordnung vollkommen charakterisiert wird durch den Anfangsbestand $l_{[y]}$ und die n Ausscheideintensitäten $\mu^{(1)}_{[y]+x}, \mu^{(2)}_{[y]+x}, \ldots \mu^{(n)}_{[y]+x}$.

§ 2.

Die *n* Vergleichsausscheideordnungen und die *n* unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Neben die in § 1 betrachtete Ausscheideordnung der $l_{[y]+x}$ stellen wir eine erste Vergleichsausscheideordnung, die auch zweifach nach Lebensalter und Beobachtungsdauer abgestuft sein soll und bei der wir die beim Lebensalter $y+x$ vorhandenen, mit y Jahren in die Beobachtung eingetretenen Personen mit ${}^{(1)}l_{[y]+x}$ bezeichnen. Die mit y Jahren zu Beginn der Beobachtung vorhandenen Personen werden also durch ${}^{(1)}l_{[y]}$ charakterisiert. Die erste Vergleichsausscheideordnung soll diejenige Ausscheideordnung sein, die sich ergeben würde, wenn nur die erste Ausscheideursache und zwar mit der nämlichen Ausscheideintensität wie bei der ursprünglichen Ausscheideordnung wirksam wäre.

Nach (7) und (7*) ist die totale Ausscheideintensität der Ausscheideordnung ${}^{(1)}l_{[y]+x}$ gleich $-\dfrac{d \log^e {}^{(1)}l_{[y]+x}}{dx}$. Diese Gesamtausscheideintensität soll mit der ersten bei der ursprünglich vorliegenden Ausscheideordnung wirksamen Ausscheideintensität übereinstimmen; denn für ${}^{(1)}l_{[y]+x}$ soll ja nach Voraussetzung nur die erste Ausscheideursache als alleiniger Ausscheidegrund und zwar mit der Intensität $\mu^{(1)}_{[y]+x}$ bestehen. Mithin ist $-\frac{d \log {}^{(1)}l_{[y]+x}}{dx} = \mu^{(1)}_{[y]+x}$.

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration analog zu (9):

$$(14_1) \qquad {}^{(1)}l_{[y]+x} = {}^{(1)}l_{[y]} \cdot e^{-\int\limits_0^x \mu^{(1)}_{[y]+x} \cdot dx}.$$

Für die erste Vergleichsausscheideordnung führen wir die Wahrscheinlichkeit ${}_h'q^{(1)}_{[y]+x}$ ein, daß eine mit y Jahren in die Beobachtung eingetretene Person im Alter $y+x$ bis $y+x+h$ ausscheidet. Es ist

$$(15_1) \qquad {}_h'q^{(1)}_{[y]+x} = \frac{{}^{(1)}l_{[y]+x} - {}^{(1)}l_{[y]+x+h}}{{}^{(1)}l_{[y]+x}} = 1 - \frac{{}^{(1)}l_{[y]+x+h}}{{}^{(1)}l_{[y]+x}};$$

denn von ${}^{(1)}l_{[y]+x}$ Personen sind ${}^{(1)}l_{[y]+x} - {}^{(1)}l_{[y]+x+h}$ im Alter $y+x$ bis $y+x+h$ ausgeschieden. Man nennt ${}_h'q^{(1)}_{[y]+x}$ die erste „unabhängige" oder „absolute" oder „reine" oder „partielle" Ausscheidewahrscheinlichkeit für den mit y Jahren in die Beobachtung Eingetretenen während des Alters $y+x$ bis $y+x+h$ [1]).

Zur Erfassung der statistischen Bedeutung von ${}_h'q^{(1)}_{[y]+x}$ lassen wir für einen Augenblick den Anfangsbestand ${}^{(1)}l_{[y]}$ unserer Vergleichsausscheideordnung mit dem Anfangsbestand $l_{[y]}$ der ursprünglichen Ausscheideordnung zusammenfallen. Gehen wir von der ursprünglichen Ausscheideordnung mit ihrem Anfangsbestand $l_{[y]}$ und den bei ihr wirksamen n Ausscheidegründen aus und lassen für jede Person, die im Laufe der Zeit aus einem anderen Grunde als dem ersten ausscheidet, sofort eine Ersatzperson eintreten, so sind in dem beständig derart ergänzten Komplexe alle Ausscheideursachen bis auf die erste ausgeschaltet, und nur diese allein ist mit ihrer unveränderten Intensität $\mu^{(1)}_{[y]+x}$ weiter wirksam. Wird daher der Anfangsbestand $l_{[y]}$ der ursprünglichen Ausscheide-

[1]) Die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten hat JOHANNES KARUP auf anderem Wege eingeführt, zum ersten Male in einem Gutachten 1875. Vgl. die Angaben bei SPANGENBERG und DU PASQUIER in den oben angeführten Arbeiten.

ordnung beständig in der geschilderten Weise ergänzt, so muß die Anzahl der aus den $l_{[y]}$ infolge des ersten Grundes im Alter y bis $y+z$ Ausgeschiedenen gleich $l_{[y]} \cdot {}_z'q_{[y]}^{(1)}$ werden, nicht gleich $l_{[y]} \cdot {}_zq_{[y]}^{(1)}$, wie es ohne die Ergänzung der Fall wäre. Da nach (15_1) die Gleichung

$$ {}_h'q_{[y]+x}^{(1)} = \frac{1}{1-{}_x'q_{[y]}^{(1)}} \cdot \left({}_{x+h}'q_{[y]}^{(1)} - {}_x'q_{[y]}^{(1)}\right) $$

besteht, hat die Übereinstimmung zweier Ausscheideordnungen in ${}_z'q_{[y]}^{(1)}$ auch diejenige in ${}_h'q_{[y]+x}^{(1)}$ zur Folge, und es ergibt sich: Geht man von dem anfänglichen Bestande $l_{[y]}$ der ursprünglichen Ausscheideordnung mit ihren n Ausscheideursachen aus und ersetzt einen jeden aus einem anderen als dem ersten Grunde Ausgeschiedenen durch einen Ersatzmann, so kann man die ursprüngliche Ausscheideordnung, wenn sie beständig in der geschilderten Weise ergänzt wird, als erste Vergleichsausscheideordnung benützen, also aus ihr die erste unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeit ${}_h'q_{[y]+x}^{(1)}$ bestimmen.

Nach (15_1) wird

$$ (16_1) \qquad {}_h'q_{[y]+x}^{(1)} = 1 - e^{-\int_0^{x+h} \mu_{[y]+x}^{(1)}\,dx} \cdot e^{\int_0^{x} \mu_{[y]+x}^{(1)}\,dx} = 1 - e^{-\int_x^{x+h} \mu_{[y]+x}^{(1)}\,dx} . $$

Durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen kann man ${}_h'q_{[y]+x}^{(1)}$ die Form geben:

$$ (16_1^*) \qquad {}_h'q_{[y]+x}^{(1)} = 1 - e^{-\int_0^{h} \mu_{[y]+x+t}^{(1)}\,dt} . $$

Die Formeln (16_1) und (16_1^*) drücken die erste unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeit ${}_h'q_{[y]+x}^{(1)}$ durch die erste Ausscheideintensität $\mu_{[y]+x}^{(1)}$ aus.

In entsprechender Weise wie für die erste führen wir auch für die zweite Ausscheideursache eine zweite, doppelt nach Lebensalter und Beobachtungsdauer abgestufte Vergleichsausscheideordnung ein, bei der wir die beim Lebensalter $y+x$ vorhandenen, mit y Jahren in die Beobachtung eingetretenen Personen mit ${}^{(2)}l_{[y]+x}$ bezeichnen, also den Anfangsbestand der y-jährigen mit ${}^{(2)}l_{[y]}$. Die dieser zweiten Vergleichsausscheideordnung entsprechenden „zweiten unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten" seien mit ${}_h'q^{(2)}_{[y]+x}$ bezeichnet. So fahren wir fort und führen für die n^{te} Ausscheideursache eine n^{te}, doppelt nach Lebensalter und Beobachtungsdauer abgestufte Vergleichsausscheideordnung ein, bei der wir die beim Lebensalter $y+x$ vorhandenen, mit y Jahren in die Beobachtung eingetretenen Personen mit ${}^{(n)}l_{[y]+x}$ bezeichnen, also den Anfangsbestand der y-jährigen mit ${}^{(n)}l_{[y]}$. Die dieser n^{ten} Vergleichsausscheideordnung entsprechenden „n^{ten} unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten" seien mit ${}_h'q^{(n)}_{[y]+x}$ bezeichnet. Natürlich soll analog wie bei der ersten Vergleichsausscheideordnung bei der zweiten nur die zweite Ausscheideintensität wirksam sein usw., schließlich soll bei der n^{ten} Vergleichsausscheideordnung nur die n^{te} Ausscheideintensität zur Geltung kommen. Alsdann kann die ursprüngliche Ausscheideordnung mit n Ausscheidegründen auch als zweite Vergleichsausscheideordnung dienen, wenn jeder aus dem Anfangsbestand $l_{[y]}$ der ursprünglichen Ausscheideordnung infolge eines anderen als des zweiten Grundes Ausgeschiedene sofort einen Ersatzmann erhält. Entsprechendes gilt für die Herleitung der dritten usw. bis n^{ten} Vergleichsausscheideordnung aus der ursprünglichen.

Für (14_1) bis (16_1) treten dann analoge Formeln:

$$(14_2)\qquad {}^{(2)}l_{[y]+x} = {}^{(2)}l_{[y]}\, e^{-\int\limits_0^x \mu^{(2)}_{[y]+x}\,dx},$$

$$(15_2)\qquad {}_h'q^{(2)}_{[y]+x} = 1 - \frac{{}^{(2)}l_{[y]+x+h}}{{}^{(2)}l_{[y]+x}},$$

$$(16_2)\qquad {}_h'q^{(2)}_{[y]+x} = 1 - e^{-\int\limits_x^{x+h} \mu^{(2)}_{[y]+x}\,dx},$$

$$(16_2^*)\qquad {}_h'q^{(2)}_{[y]+x} = 1 - e^{-\int\limits_0^h \mu^{(2)}_{[y]+x+t}\,dt}, \quad \text{usw.}$$

$$(14_n)\qquad {}^{(n)}l_{[y]+x} = {}^{(n)}l_{[y]}\cdot e^{-\int\limits_0^x \mu^{(n)}_{[y]+x}\,dx},$$

$$(15_n) \qquad {}_h'q^{(n)}_{[y]+x} = 1 - \frac{{}^{(n)}l_{[y]+x+h}}{{}^{(n)}l_{[y]+x}},$$

$$(16_n) \qquad {}_h'q^{(n)}_{[y]+x} = 1 - e^{-\int\limits_x^{x+h} \mu^{(n)}_{[y]+x}\, dx},$$

$$(16^*_n) \qquad {}_h'q^{(n)}_{[y]+x} = 1 - e^{-\int\limits_0^{h} \mu^{(n)}_{[y]+x+t}\, dt}.$$

Beachtet man die Gleichung (8), so erhält man aus (11*) die Formel:

$$(17) \qquad {}_hp_{[y]+x} = e^{-\int\limits_0^h \left\{\mu^{(1)}_{[y]+x+t} + \mu^{(2)}_{[y]+x+t} + \cdots + \mu^{(n)}_{[y]+x+t}\right\} dt}$$

$$= e^{-\int\limits_0^h \mu^{(1)}_{[y]+x+t}\, dt} \cdot e^{-\int\limits_0^h \mu^{(2)}_{[y]+x+t}\, dt} \cdots e^{-\int\limits_0^h \mu^{(n)}_{[y]+x+t}\, dt}.$$

Hieraus folgt nach (16^*_1) bis (16^*_n):

$$(18) \qquad {}_hp_{[y]+x} = \left(1 - {}_h'q^{(1)}_{[y]+x}\right) \cdot \left(1 - {}_h'q^{(2)}_{[y]+x}\right) \cdots \left(1 - {}_h'q^{(n)}_{[y]+x}\right).$$

Neben (18) stellen wir noch die sich aus (4) und (5) ergebende Formel:

$$(18') \qquad {}_hp_{[y]+x} = 1 - {}_hq^{(1)}_{[y]+x} - {}_hq^{(2)}_{[y]+x} - \cdots - {}_hq^{(n)}_{[y]+x}.$$

In der bekannten Formel (18) ist das wichtige Resultat enthalten, daß man ${}_hp_{[y]+x}$ durch die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten in Form eines Produktes darstellen kann; bei (18′) wird ${}_hp_{[y]+x}$ in Form einer Differenz durch die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten dargestellt.

Zum Unterschiede von den unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_h'q^{(1)}_{[y]+x}, {}_h'q^{(2)}_{[y]+x}, \ldots {}_h'q^{(n)}_{[y]+x}$ bezeichnet man die im vorigen Paragraphen eingeführten Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_hq^{(1)}_{[y]+x}, {}_hq^{(2)}_{[y]+x}, \ldots {}_hq^{(n)}_{[y]+x}$ als die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Die letzteren sollen nun durch die ersteren ausgedrückt werden.

Nach den Formeln (12_1^*) und (11^*) hat man:

$$(19) \qquad {}_h q^{(1)}_{[y]+x} = \int_0^h \mu^{(1)}_{[y]+x+v} \cdot {}_v p_{[y]+x} \cdot dv \ ,$$

oder nach (18):

$$(20) \quad {}_h q^{(1)}_{[y]+x} = \int_0^h \mu^{(1)}_{[y]+x+v} \cdot \left(1 - {}_v' q^{(1)}_{[y]+x}\right) \cdot \left(1 - {}_v' q^{(2)}_{[y]+x}\right) \cdots \left(1 - {}_v' q^{(n)}_{[y]+x}\right) dv \ .$$

Nun folgt durch Differentiation von (16_1^*):

$$_v' q^{(1)}_{[y]+x} = 1 - e^{-\int_0^v \mu^{(1)}_{[y]+x+t}\, dt} \ ,$$

$$\frac{d\ {}_v' q^{(1)}_{[y]+x}}{dv} = \mu^{(1)}_{[y]+x+v}\ e^{-\int_0^v \mu^{(1)}_{[y]+x+t}\, dt} \ ,$$

oder bei nochmaliger Verwendung der Ausgangsformel (16_1^*):

$$\frac{d\ {}_v' q^{(1)}_{[y]+x}}{dv} = \mu^{(1)}_{[y]+x+v} \left(1 - {}_v' q^{(1)}_{[y]+x}\right) .$$

Mithin wird

$$(21_1) \quad {}_h q^{(1)}_{[y]+x} = \int_0^h \left(1 - {}_v' q^{(2)}_{[y]+x}\right) \cdot \left(1 - {}_v' q^{(3)}_{[y]+x}\right) \cdots \left(1 - {}_v' q^{(n)}_{[y]+x}\right) \cdot \frac{d\ {}_v' q^{(1)}_{[y]+x}}{dv} \cdot dv \ .$$

Entsprechend findet man

$$(21_2) \quad {}_h q^{(2)}_{[y]+x} = \int_0^h \left(1 - {}_v' q^{(1)}_{[y]+x}\right) \cdot \left(1 - {}_v' q^{(3)}_{[y]+x}\right) \cdots \left(1 - {}_v' q^{(n)}_{[y]+x}\right) \cdot \frac{d\ {}_v' q^{(2)}_{[y]+x}}{dv} \cdot dv \ ,$$

$$\vdots$$

$$(21_n) \quad {}_h q^{(n)}_{[y]+x} = \int_0^h \left(1 - {}_v' q^{(1)}_{[y]+x}\right) \cdot \left(1 - {}_v' q^{(2)}_{[y]+x}\right) \cdots \left(1 - {}_v' q^{(n-1)}_{[y]+x}\right) \cdot \frac{d\ {}_v' q^{(n)}_{[y]+x}}{dv} \cdot dv \ .$$

Mittels der Formeln (21_1) bis (21_n) sind die abhängigen Wahrscheinlichkeiten durch die unabhängigen dargestellt.

Wir wollen noch einige Formeln für die Intensitäten auf Grund der für sie verwendeten Vergleichsausscheideordnungen ableiten.

Bezeichnet man bei der Vergleichsausscheideordnung ${}^{(1)}l_{[y]+x}$ sämtliche im Alter von y bis $y+x$ Jahren aus dem Anfangsbestande ${}^{(1)}l_{[y]}$ Ausgeschiedenen mit ${}^{(1)}f_{[y]+x}$, so hat man, da bei der Vergleichsausscheideordnung nur ein Ausscheidegrund in Frage kommt:

$$(22_1) \qquad {}^{(1)}l_{[y]+x} = {}^{(1)}l_{[y]} - {}^{(1)}f_{[y]+x} .$$

Nach der in § 1 gegebenen Definitionsgleichung (6_1) für die Intensitäten ist demnach

$$(23_1) \qquad \mu^{(1)}_{[y]+x} = \frac{\dfrac{d\, {}^{(1)}f_{[y]+x}}{dx}}{{}^{(1)}l_{[y]+x}} .$$

Da nach (22_1) $\dfrac{d\, {}^{(1)}l_{[y]+x}}{dx} = - \dfrac{d\, f^{(1)}_{[y]+x}}{dx}$ ist, erhält man

$$(23^*_1) \qquad \mu^{(1)}_{[y]+x} = - \frac{1}{{}^{(1)}l_{[y]+x}} \frac{d\, {}^{(1)}l_{[y]+x}}{dx} \text{ [1]} .$$

Nach (15_1) hat man ${}^{(1)}l_{[y]+x} = {}^{(1)}l_{[y]} \left(1 - {}_x'q^{(1)}_{[y]}\right)$. Mithin ergibt sich aus (23^*_1) die folgende Darstellung der Intensität $\mu^{(1)}_{[y]+x}$ durch die unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeit ${}_x'q^{(1)}_{[y]}$:

$$(24_1) \qquad \mu^{(1)}_{[y]+x} = \frac{-1}{1 - {}_x'q^{(1)}_{[y]}} \cdot \frac{d\left(1 - {}_x'q^{(1)}_{[y]}\right)}{dx} = - \frac{d \log^e \left(1 - {}_x'q^{(1)}_{[y]}\right)}{dx} .$$

Die entsprechenden Formeln gelten natürlich für $\mu^{(2)}_{[y]+x}, \ldots \mu^{(n)}_{[y]+x}$.

§ 3.

Eine allgemeine, nach analytischer Methode behandelte Versicherung. Ihre Prämien und Deckungskapitalien nach der Nettomethode.

Die in den voraufgehenden Paragraphen abgeleiteten Formeln sollen bei der folgenden ganz allgemeinen Versicherung

[1] Diese Gleichung ist als Definition der Sterblichkeitsintensität bei einer Absterbeordnung mit dem einzigen Ausscheidegrund „Tod“ der Ausgangspunkt für die ganze Theorie gewesen.

Anwendung finden. Ein y-jähriger versichere sich mit p-jähriger Versicherungsdauer, daß, wenn er während dieser Zeit infolge irgend eines der n in den Versicherungsbedingungen festgelegten, sich gegenseitig ausschließenden Gründe aus der Versicherung ausscheidet, die Versicherungsanstalt vertragsgemäß eine Summe zu zahlen hat. Ihre Höhe richte sich nach Austrittsalter und Austrittsgrund. Findet der Austritt während des unendlich kleinen Zeitelements dt im Alter $y+t$ bis $y+t+dt$ statt, so betrage die auszuzahlende Summe $U^{(1)}_{[y]+t}$ bezw. $U^{(2)}_{[y]+t}$ usw., bezw. $U^{(n)}_{[y]+t}$, je nachdem das Ausscheiden aus dem ersten, zweiten usw. bis n^{ten} Grunde erfolgt. Ferner soll an den Versicherten, wenn er bis zum Ablauf der p-jährigen Versicherungsdauer nicht ausgeschieden ist, einmalig die Summe T zur Auszahlung gelangen. Schließlich soll dem Versicherten, solange er versichert ist, kontinuierlich ein vom Lebensalter abhängiger Betrag als Rente ausgezahlt oder wenigstens in den Büchern der Gesellschaft gutgeschrieben werden; auch dieser hänge vom Lebensalter ab und betrage bei Erreichung des Lebensalters $y+t$ für das unendlich kleine Zeitelement dt, das dem Alter $y+t$ folgt, $S_{[y]+t} \cdot dt$ [1]). Schließlich finde auch die Prämienzahlung kontinuierlich statt oder werde wenigstens theoretisch so verrechnet; sie sei veränderlich angenommen, und zwar bezahle der $(y+t)$-jährige für das unendlich kleine Zeitintervall dt, das dem Alter $y+t$ folgt, die Prämie $P_{[y]+t}\, dt$. Alle Größen $U^{(1)}_{[y]+t}$, $U^{(2)}_{[y]+t}, \ldots U^{(n)}_{[y]+t}, S_{[y]+t}, P_{[y]+t}$ sind positiv; sie sind mit t variabel, sie können aber auch im besondern konstant, teilweise oder für gewisse Altersklassen sogar Null sein.

Mit ${}_tV_{[y]}$ bezeichnen wir das Deckungskapital der obigen Versicherung für eine mit y Jahren versicherte Person, t Jahre nach Abschluß ihres Vertrages. Von ${}_tV_{[y]}$ setzen wir voraus, daß es eine differentierbare Funktion von t ist. Wir betrachten eine fingierte Gesellschaft von $l_{[y]+t}$ Personen, wie sie die in § 1 betrachtete allgemeine Ausscheideordnung als t Jahre nach Abschluß des Vertrages vorhanden verzeichnet, wenn der Eintritt in die Versicherung, also die Beobachtung mit y Jahren beginnt. In dem unendlich kleinen Zeitintervall dt erleidet alsdann das Deckungskapital $l_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]}$ einen Zuwachs von

---

[1] Über die Bedeutung der analytischen Rente für die Praxis vgl. die Erörterungen bei M. Brendel, Analytische Methoden in der Lebensversicherung, Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, Bd. 9, S. 216 (1909).

$$l_{[y]+t+dt} \cdot {}_{t+dt}V_{[y]} - l_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]} = \frac{d\{l_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]}\}}{dt} \cdot dt$$

$$= \left\{l_{[y]+t} \cdot \frac{d\,{}_tV_{[y]}}{dt} + {}_tV_{[y]} \cdot \frac{d\,l_{[y]+t}}{dt}\right\} \cdot dt = \left\{l_{[y]+t} \cdot \frac{d\,{}_tV_{[y]}}{dt} - l_{[y]+t} \cdot \mu_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]}\right\} \cdot dt,$$

wie aus (7) folgt.

Der angegebene Zuwachs an Deckungskapital setzt sich zusammen: Erstens aus der Prämieneinnahme des Zeitintervalls dt, die für die $l_{[y]+t}$ Personen $l_{[y]+t} \cdot P_{[y]+t}\,dt$ beträgt, zweitens aus der Zinseinnahme, die das vorhandene Deckungskapital $l_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]}$ in dem Zeitintervall dt abwirft, $\delta \cdot l_{[y]+t} \cdot {}_tV_{[y]}\,dt$, wobei δ die mit der Zeit t nicht veränderliche Verzinsungsintensität bedeutet[1]). Von dieser Summe gehen die Auszahlungen an diejenigen Personen ab, die im Alter $y+t$ bis $y+t+dt$ infolge eines der n Gründe ausscheiden. Aus dem ersten Grunde sind es, wenn die Bezeichnungen des § 1 benützt werden,

$$f^{(1)}_{[y]+t+dt} - f^{(1)}_{[y]+t} = \frac{d\,f^{(1)}_{[y]+t}}{dt} \cdot dt = \mu^{(1)}_{[y]+t} \cdot l_{[y]+t} \cdot dt\,,$$

wie aus (6_1) folgt, aus dem zweiten entsprechend $\mu^{(2)}_{[y]+t} \cdot l_{[y]+t}\,dt$ usw., schließlich aus dem n^{ten} $\mu^{(n)}_{[y]+t} \cdot l_{[y]+t}\,dt$. An diese Austretenden gelangen nach den Versicherungsbedingungen die Summen $U^{(1)}_{[y]+t}$, $U^{(2)}_{[y]+t}, \ldots U^{(n)}_{[y]+t}$ zur Auszahlung, also insgesamt

$$\mu^{(1)}_{[y]+t} \cdot l_{[y]+t} \cdot U^{(1)}_{[y]+t}\,dt + \mu^{(2)}_{[y]+t}\,l_{[y]+t}\,U^{(2)}_{[y]+t}\,dt + \cdots + \mu^{(n)}_{[y]+t}\,l_{[y]+t}\,U^{(n)}_{[y]+t}\,dt\,.$$

Weiter ist noch den das Lebensalter $y+t$ erlebenden $l_{[y]+t}$ Personen ihr Rententeil $S_{[y]+t}\,dt$ gutzuschreiben, also der Gesamtheit die Summe $l_{[y]+t} \cdot S_{[y]+t}\,dt$. Bringt man die letzten Summen von den

[1]) δdt ist diejenige Größe, mit der man eine zur Zeit t vorhandene Summe s multiplizieren muß, um ihren unendlich kleinen Zinsertrag ds in dem unendlich kleinen Zeitintervall dt zu finden. Es ist also $ds = s \cdot \delta \cdot dt$. Hieraus findet man $\frac{d \overset{e}{\log} s}{dt} = \delta$, oder durch Integration, wenn s_0 das zur Zeit $t=0$ vorhandene Anfangskapital bedeutet, $\overset{e}{\log} s - \overset{e}{\log} s_0 = \int_0^t \delta\,dt$, also $\overset{e}{\log} \frac{s}{s_0} = \delta t$. Folglich hat man $s = s_0 e^{\delta t}$. Ist i der Jahreszins für die Einheit, also ist für $s_0 = 1$, $t = 1$, $s = 1 + i$, so findet man $1 + i = e^{\delta}$ oder $\delta = \overset{e}{\log}(1+i)$.

ersten in Abzug, so hat man den Zuwachs an Deckungskapital. Dividiert man durch $l_{[y]+t}\,dt$, so erhält man die Relation:

$$\frac{d\,{}_tV_{[y]}}{dt} - \mu_{[y]+t}\cdot {}_tV_{[y]} = P_{[y]+t} + \delta\cdot {}_tV_{[y]}$$
$$- \left\{ \mu^{(1)}_{[y]+t}\cdot U^{(1)}_{[y]+t} + \mu^{(2)}_{[y]+t}\cdot U^{(2)}_{[y]+t} + \cdots + \mu^{(n)}_{[y]+t}\cdot U^{(n)}_{[y]+t} + S_{[y]+t} \right\},$$

oder:

$$(25)\quad \frac{d\,{}_tV_{[y]}}{dt} - {}_tV_{[y]}\left(\delta + \mu_{[y]+t}\right) = P_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right).$$

Durch Integration der linearen unhomogenen Differentialgleichung (25) findet man

$${}_tV_{[y]} = e^{\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}$$
$$\times\left[\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \left\{ P_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right)\right\} dt + C\right].$$

Bedeutet ${}_0V_{[y]}$ das ursprüngliche, bei Versicherungsbeginn, also zur Zeit $t=0$ vorhandene Deckungskapital, so ergibt sich die Integrationskonstante $C = {}_0V_{[y]}$, und man hat:

$$(26)\quad \begin{cases} {}_tV_{[y]} = e^{\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \\ \times\left[\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \left\{ P_{[y]+t} - \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right)\right\} dt + {}_0V_{[y]}\right]. \end{cases}$$

Bei den obigen Bedingungen ist das anfängliche Deckungskapital ${}_0V_{[y]}=0$. Man kann aber in unsere Formeln auch den Fall einer einmaligen Prämie $A_{[y]}$ einschließen, wenn man $P_{[y]+t}=0$ setzt und die einmalige Einlage $A_{[y]}$ als ursprüngliches Deckungskapital ${}_0V_{[y]}$ betrachtet, also ${}_0V_{[y]} = A_{[y]}$ setzt.

Nach (11*) ist

$$e^{\int\limits_0^t \mu_{[y]+t}\,dt} = \frac{1}{{}_tp_{[y]}} = \frac{l_{[y]}}{l_{[y]+t}}\;;$$

ferner ist nach der Anmerkung auf Seite 21 $e^{\int\limits_0^t \delta\,dt} = e^{\delta t} = (1+i)^t$.

Also wird (26), wenn man in üblicher Weise $\frac{1}{1+i} = v$ setzt:

$$(26^*)\quad {}_tV_{[y]} = \frac{(1+i)^t}{l_{[y]+t}}\left[\int\limits_0^t l_{[y]+t}\cdot v^t\left\{P_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right)\right\}dt + {}_0V_{[y]}\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer auf der rechten Seite von (26*) stellt offenbar den Kapitalwert dar, den bei Abschluß des Versicherungsvertrages die von der fingierten Gesellschaft von $l_{[y]}$ Personen im Zeitraume 0 bis t zu erwartenden Prämien einschließlich des Vermögens ${}_0V_{[y]}$ besitzen, minus dem Kapitalwert, den die während dieses Zeitraumes auszuzahlenden Summen zu jenem Termin haben. Durch Multiplikation mit $\frac{(1+i)^t}{l_{[y]+t}}$ erhält man den Wert des Deckungskapitals zur Zeit t, der für die einzelne der dann vorhandenen $l_{[y]+t}$ Personen durchschnittlich in Frage kommt. Die Formeln (26) und (26*) liefern also eine retrospektive Bestimmung des Deckungskapitals.

Nach unseren Versicherungsbedingungen ist p die Versicherungsdauer, und mit ihrem Ende wird die Summe T fällig. Daher wird ${}_pV_{[y]} = T$, und man erhält aus (26):

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} T &= e^{\int\limits_0^p (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \\ &\times\left[\int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\left\{P_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right)\right\}dt + {}_0V_{[y]}\right]\end{aligned}\right.$$

oder:

$$(27^*)\left\{\begin{aligned} &T\, e^{-\int\limits_0^p \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \\ &= \int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \left\{ P_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mu_{[y]+t}^{(i)} U_{[y]+t}^{(i)} + S_{[y]+t} \right) \right\} dt + {}_0V_{[y]}\,. \end{aligned}\right.$$

Die Formel (27^*) ist geeignet, die einmalige Prämie unserer Versicherungskombination zu finden. Setzt man in (27^*) ${}_0V_{[y]} = A_{[y]}$, $P_{[y]+t} = 0$, so erhält man:

$$(28)\left\{\begin{aligned} A_{[y]} &= T\, e^{-\int\limits_0^p \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \\ &+ \int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \mu_{[y]+t}^{(i)} U_{[y]+t}^{(i)} + S_{[y]+t} \right\} dt\,. \end{aligned}\right.$$

Um die Anwendbarkeit dieser allgemeinen Formel zu zeigen, spezialisieren wir sie beispielsweise folgendermaßen: Ein y-jähriger Aktiver versichere sich, daß bei seinem Tode die Summe $U_{[y]+t}^{(1)}$ fällig werde, wenn ihn der Tod im Alter $y+t$ bis $y+t+dt$ ereilt, und daß ihm bei Eintritt seiner Invalidität eine jährliche Invaliditätsrente in der Höhe c gewährt werde. Außerdem soll ihm kontinuierlich, solange er aktiv ist, stets bei Erreichen des Alters $y+t$ für das unendlich kleine Intervall dt eine Summe in der Höhe $S_{[y]+t} \cdot dt$ gutgeschrieben werden. Bei unseren Annahmen ist in (28) $T=0$ und $p=\infty$ zu setzen. Bedeuten $\mu_{[y]+t}^{(1)}$ die Sterbensintensität eines $(y+t)$-jährigen Aktiven, der sich mit y Jahren versichert hat, während seines aktiven Zustandes, $\mu_{[y]+t}^{(2)}$ seine Invaliditätsintensität und $\mathfrak{a}_{[y]}^{i}$ den Kapitalwert einer Invalidenrente 1 für einen y-jährigen, soeben invalid gewordenen Invaliden, so erhält man die einmalige Prämie der zuletzt geschilderten Versicherungskombination aus (28) in der Form:

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu^{(1)}_{[y]+t}+\mu^{(2)}_{[y]+t}\right) dt} \left\{\mu^{(1)}_{[y]+t}\, U^{(1)}_{[y]+t} + \mu^{(2)}_{[y]+t} \cdot c\, \mathbf{a}^{i}_{[y+t]} + S_{[y]+t}\right\} dt$$ [1].

Ihrer einfachen Form wegen behandeln wir noch die einmalige Prämie jener Versicherungskombination, die uns zu Formel (28) führte, für den Spezialfall, daß sämtliche n Größen $U^{(1)}_{[y]+t}$, $U^{(2)}_{[y]+t}$, ... $U^{(n)}_{[y]+t}$ unter einander gleich sind; sie mögen sämtlich gleich $U_{[y]+t}$ sein. Die sich aus (28) ergebende Prämie, die wir für unseren speziellen Fall mit $A'_{[y]}$ bezeichen wollen, nimmt, wenn man noch die Gleichung (8) berücksichtigt, den Wert an:

$$(28')\left\{\begin{aligned} A'_{[y]} &= T\, e^{-\int_0^p \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \\ &+\int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \cdot \mu_{[y]+t} \cdot U_{[y]+t} \cdot dt + \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \cdot S_{[y]+t} \cdot dt\,. \end{aligned}\right.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \cdot \mu_{[y]+t} \cdot U_{[y]+t} \cdot dt &= \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \cdot \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) \cdot U_{[y]+t} \cdot dt \\ &\quad - \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \cdot \delta \cdot U_{[y]+t} \cdot dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^p \frac{d}{dt}\left[-e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt}\right] U_{[y]+t}\, dt - \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) dt} \cdot \delta \cdot U_{[y]+t} \cdot dt$$

[1]) Würde es sich z. B. um eine steigende Invalidenrente handeln, die ursprünglich gleich c ist, und jedes Jahr bei späterer Invalidisierung um c' wächst, so daß sie bei Invalidisierung im Alter $y+t$ gleich $c+t\cdot c'$ ist, so würde in der obigen Formel einfach für c die Größe $c+tc'$ zu treten haben.

oder durch partielle Integration:

$$=\left|-e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\cdot U_{[y]+t}\right|_0^p+\int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\,\frac{dU_{[y]+t}}{dt}\,dt$$

$$-\int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\cdot\delta\cdot U_{[y]+t}\,dt$$

$$=U_{[y]}-U_{[y]+p}\cdot e^{-\int\limits_0^p(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}+\int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\left|\frac{dU_{[y]+t}}{dt}-\delta U_{[y]+t}\right|dt\,.$$

Führt man den gewonnenen Ausdruck in (28′) ein, so ergibt sich:

$$(28'')\quad\left|\begin{aligned}&A'_{[y]}=U_{[y]}+\left(T-U_{[y]+p}\right)e^{-\int\limits_0^p(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\\&+\int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\left\{\frac{d\,U_{[y]+t}}{dt}-\delta\,U_{[y]+t}+S_{[y]+t}\right\}dt\,.\end{aligned}\right.$$

Die in (28″) auftretenden beiden letzten Glieder lassen, wie sich aus der Hauptformel (28) ergibt, folgende Deutung zu:

$$\left(T-U_{[y]+p}\right)e^{-\int\limits_0^p(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}$$

ist der Preis einer Versicherung auf die Summe $T-U_{[y]+p}$, die nur bei Erleben des Alters $y+p$ in versichertem Zustande fällig wird;

$$\int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\left\{\frac{d\,U_{[y]+t}}{dt}-\delta\,U_{[y]+t}+S_{[y]+t}\right\}dt$$

ist der Preis für eine kurze Rentenversicherung auf p Jahre, bei der während der Zugehörigkeit zum Versichertenkreis für jedes Zeitmoment dt eine Auszahlung in der Höhe

$$\left(\frac{d\,U_{[y]+t}}{dt} - \delta\,U_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right) dt$$

stattfindet.

Ist $T=1$, hat ferner $U_{[y]+t}$ für alle t innerhalb der Grenzen 0 bis p stets den gleichen Wert 1 und ist schließlich $S_{[y]+t}$ immer gleich 0, so erhält man

$$(28''') \qquad A'_{[y]} = 1 - \delta\,|_p\bar{a}_{[y]}\,,$$

wobei

$$|_p\bar{a}_{[y]} = \int_0^p e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \cdot dt$$

die einmalige Prämie für eine kurze Rente ist, die nur während der p-jährigen Versicherungsdauer zahlbar ist und für jedes Zeitmoment dt den Wert dt hat. Für die gemischte Todesfallversicherung ist Formel (28''') wohl bekannt.

Wir kehren zur allgemeinen Formel (27*) zurück, nehmen kontinuierliche Prämienzahlung an und setzen in (27*) ${}_0V_{[y]}=0$; alsdann addieren wir (28) zu (27*) und erhalten durch Fortlassen der sich tilgenden Glieder:

$$(29) \qquad A_{[y]} = \int_0^p e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \cdot P_{[y]+t} \cdot dt\,.$$

Die Formel (29) gibt den Zusammenhang zwischen der einmaligen Prämie $A_{[y]}$ und der kontinuierlich für jedes Zeitmoment dt zahlbaren Prämie $P_{[y]+t} \cdot dt$.

Um noch das durch (26) gegebene Deckungskapital ${}_tV_{[y]}$ anders auszudrücken, beachten wir, daß nach (27*):

$$(30)\left\{\begin{aligned}
&T\,e^{-\int_0^p(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\\
&=\int_0^t e^{-\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\left\{P_{[y]+t}-\left(\sum_{i=1}^{i=n}\mu_{[y]+t}^{(i)}\,U_{[y]+t}^{(i)}+S_{[y]+t}\right)\right\}dt\\
&+\int_t^p e^{-\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\left\{P_{[y]+t}-\left(\sum_{i=1}^{i=n}\mu_{[y]+t}^{(i)}\,U_{[y]+t}^{(i)}+S_{[y]+t}\right)\right\}dt+{}_0V_{[y]}\,.
\end{aligned}\right.$$

Multipliziert man (30) mit $e^{\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}$, so erhält man:

$$e^{\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\cdot\left[\int_0^t e^{-\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\left\{P_{[y]+t}-\left(\sum_{i=0}^{i=n}\mu_{[y]+t}^{(i)}\,U_{[y]+t}^{(i)}+S_{[y]+t}\right)\right\}dt+{}_0V_{[y]}\right]$$

$$=e^{\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}$$

$$\times\left[T\,e^{-\int_0^p(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}+\int_t^p e^{-\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\mu_{[y]+t}^{(i)}U_{[y]+t}^{(i)}+S_{[y]+t}-P_{[y]+t}\right\}dt\right]$$

$$=T\,e^{-\int_t^p(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}$$

$$+e^{\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+u})\,du}\cdot\int_t^p e^{-\int_0^u(\delta+\mu_{[y]+u})\,du}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\mu_{[y]+u}^{(i)}U_{[y]+u}^{(i)}+S_{[y]+u}-P_{[y]+u}\right\}du$$

$$=T\,e^{-\int_t^p(\delta+\mu_{[y]+t})\,dt}+\int_t^p e^{\int_u^t(\delta+\mu_{[y]+u})\,du}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\mu_{[y]+u}^{(i)}\,U_{[y]+u}^{(i)}+S_{[y]+u}-P_{[y]+u}\right\}du\,.$$

Mithin ergibt sich aus (26):

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} {}_tV_{[y]} &= T e^{-\int\limits_t^p (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \\ &+ \int\limits_t^p e^{\int\limits_u^t (\delta+\mu_{[y]+u})\,du} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \mu_{[y]+u}^{(i)} U_{[y]+u}^{(i)} + S_{[y]+u} - P_{[y]+u} \right\} du\,. \end{aligned}\right.$$

Nach dem auf die Formel (26) folgenden Text (Seite 23) ist

$$e^{\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} = (1+i)^t \cdot \frac{l_{[y]}}{l_{[y]+t}}\,.$$

Mithin wird

$$e^{-\int\limits_t^p (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} = e^{\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} \cdot e^{-\int\limits_0^p (\delta+\mu_{[y]+t})\,dt} = \frac{l_{[y]+p}}{l_{[y]+t}} \cdot \frac{1}{(1+i)^{p-t}}$$

und

$$e^{+\int\limits_u^t (\delta+\mu_{[y]+u})\,du} = \frac{l_{[y]+u}}{l_{[y]+t}} \cdot \frac{1}{(1+i)^{u-t}}\,.$$

Also geht (31) über in

$$(31^*)\quad {}_tV_{[y]} = \frac{1}{l_{[y]+t}} \cdot \left[\frac{l_{[y]+p}T}{(1+i)^{p-t}} + \int\limits_t^p \frac{l_{[y]+u}}{(1+i)^{u-t}} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \mu_{[y]+u}^{(i)} U_{[y]+u}^{(i)} + S_{[y]+u} - P_{[y]+u} \right\} du \right].$$

Die eckige Klammer auf der rechten Seite von (31*) stellt offenbar den Barwert aller während der Versicherungsdauer noch fällig werdenden Ausgaben der Versicherungsanstalt an die zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals ${}_tV_{[y]}$ lebenden $l_{[y]+t}$ Personen minus dem Barwert der von ihnen noch zu erwartenden Prämien dar. Dividiert man durch $l_{[y]+t}$, so erhält man daher das auf die einzelne Person entfallende Deckungskapital. Durch die Formeln (31) und (31*) wird demnach das Deckungskapital in prospektiver Weise bestimmt.

Will man ${}_tV_{[y]}$ in einfachere Form bringen, so bedient man sich hierzu der Funktion $A_{[y]+z}$, die für $z=0$ in die durch (28) bestimmte Größe $A_{[y]}$ übergeht und definiert wird durch die Gleichung:

$$(28_z)\left\{\begin{aligned} A_{[y]+z} &= T e^{-\int\limits_0^{p-z}\left(\delta+\mu_{[y]+z+t}\right)dt} \\ &+ \int\limits_0^{p-z} e^{-\int\limits_0^{t}\left(\delta+\mu_{[y]+z+t}\right)dt}\left|\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+z+t}\,U^{(i)}_{[y]+z+t}+S_{[y]+z+t}\right|dt\,.\end{aligned}\right.$$

Führt man für t die neue Integrationsvariable u durch $u=t+z$ ein, so nimmt für die Grenzen $t=0$ und $t=p-z$ die Variable u die Werte $u=z$ und $u=p$ an. Gestaltet man noch das sich dann ergebende Integral $e^{-\int\limits_0^{u-z}\left(\delta+\mu_{[y]+z+t}\right)dt}$ durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen $v=z+t$ um in $e^{-\int\limits_z^{u}\left(\delta+\mu_{[y]+v}\right)dv}$, so kann man schreiben:

$$(28_z^*)\left\{\begin{aligned} A_{[y]+z} &= T e^{-\int\limits_z^{p}\left(\delta+\mu_{[y]+u}\right)du} \\ &+ \int\limits_z^{p} e^{\int\limits_u^{z}\left(\delta+\mu_{[y]+u}\right)du}\left|\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+u}\,U^{(i)}_{[y]+u}+S_{[y]+u}\right|du\,.\end{aligned}\right.$$

Mithin geht (31) über in

$$(31^{**})\qquad {}_tV_{[y]} = A_{[y]+t} - \int\limits_t^{p} e^{\int\limits_u^{t}\left(\delta+\mu_{[y]+u}\right)du}\cdot P_{[y]+u}\cdot du\,.$$

Aus dem in Formel (31*) erhaltenen Resultat entnimmt man, daß

$$A_{[y]+t} = \frac{1}{l_{[y]+t}} \left[\frac{l_{[y]+p}\, T}{(1+i)^{p-t}} + \int_t^p \frac{l_{[y]+u}}{(1+i)^{u-t}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+u}\, U^{(i)}_{[y]+u} + S_{[y]+u} \right\} du \right]$$

ist, also den Barwert der künftigen Leistungen der Versicherungsgesellschaft an einen vor t Jahren Versicherten, der gegenwärtig $y+t$ Jahre alt ist, darstellt. Da

$$\int_t^p e^{\int_u^t (\delta+\mu_{[y]+u})\,du} \cdot P_{[y]+u}\, du \text{ nach } (31^*) \text{ gleich } \frac{1}{l_{[y]+t}} \int_t^p \frac{l_{[y]+u}}{(1+i)^{u-t}} \cdot P_{[y]+u} \cdot du,$$

also gleich dem Barwert der von einem $(y+t)$-jährigen Versicherten zu erwartenden Prämien ist, hat man in Gleichung (31^{**}) das bekannte Resultat, daß das Deckungskapital ${}_tV_{[y]}$ vermehrt um den Barwert der künftig zu erwartenden Prämien gleich dem Wert der künftigen Leistungen der Versicherungsgesellschaft ist.

Ehe wir die obigen Betrachtungen im nächsten Paragraphen weiter verfolgen, leiten wir für den Fall, daß die n Auszahlungen $U^{(1)}_{[y]+t}, U^{(2)}_{[y]+t}, \ldots U^{(n)}_{[y]+t}$ sämtlich dauernd gleich der Einheit sind, den folgenden Satz ab:

Ein konstanter Aufschlag π zu allen Prämien $P_{[y]+t}$ gewährt vollkommenen Schutz gegen eine Erhöhung der rechnungsmäßigen totalen Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_tq_{[y]}$ um die Beträge $(1-{}_tq_{[y]})(1-e^{-\pi t})$ (oder allgemeiner: der totalen Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_tq_{[y]+z}$ um die Beträge $(1-{}_tq_{[y]+z})(1-e^{-\pi t})$) und gleichzeitig auch vollkommenen Schutz gegen eine Verminderung des rechnungsmäßigen Zinsfußes i um den Betrag $(1+i)\cdot(1-e^{-\pi})$.

Der ausgesprochene Satz besagt, daß zwei Betriebe, von denen der eine mit $P_{[y]+t}$, i und ${}_tq_{[y]}$ als Prämie, Zins und totaler Ausscheidewahrscheinlichkeit arbeitet, der andere hingegen hierfür die Größen $P_{[y]+t}+\pi$, $i'=i-(1+i)\cdot(1-e^{-\pi})$, ${}_tq'_{[y]}={}_tq_{[y]}+(1-{}_tq_{[y]})\cdot(1-e^{-\pi t})$ verwendet, zu jeder Zeit die gleichen Deckungskapitalien besitzen.

Zum Beweis betrachten wir die Differentialgleichung (25); diese geht bei unseren Annahmen $U^{(1)}_{[y]+t} = U^{(2)}_{[y]+t} = \cdots = U^{(n)}_{[y]+t} = 1$, wenn man außerdem noch die Relation (8) beachtet, über in:

$$(32)\qquad \frac{d\,{}_tV_{[y]}}{dt} - {}_tV_{[y]}\left(\delta+\mu_{[y]+t}\right) = P_{[y]+t} - \left(\mu_{[y]+t}+S_{[y]+t}\right).$$

Wird statt der Prämie $P_{[y]+t}$ die abgeänderte Prämie $P_{[y]+t}+\pi$ erhoben und bezeichnet man die veränderte Verzinsungs- bezw. totale Ausscheideintensität mit δ' und $\mu'_{[y]+t}$, so müssen, wie aus (32) folgt, wenn zu jeder Zeit die gleichen Deckungskapitalien vorhanden sein sollen, die zwei Gleichungen bestehen:

$$(a)\qquad \delta+\mu_{[y]+t} = \delta'+\mu'_{[y]+t}\,,$$

$$(b)\qquad P_{[y]+t}-\left(\mu_{[y]+t}+S_{[y]+t}\right) = P_{[y]+t}+\pi-\left(\mu'_{[y]+t}+S_{[y]+t}\right).$$

Aus (b) folgt:

$$(33)\qquad \mu'_{[y]+t} = \mu_{[y]+t}+\pi\,.$$

Weiter findet man aus (a) und (33):

$$(34)\qquad \delta' = \delta-\pi\,.$$

Aus der letzten Gleichung leitet man ab: $e^{\delta'}=e^{\delta-\pi}=e^{\delta}\cdot e^{-\pi}$ oder $1+i'=(1+i)\,e^{-\pi}$. Mithin wird

$$(35)\qquad i' = (1+i)\,e^{-\pi}-1\,,$$

und es ergibt sich für die Zinsverminderung $i-i'$ der oben angegebene Wert:

$$(36)\qquad i-i' = (1+i)\,(1-e^{-\pi})\,.$$

Aus (33) folgt nach Formel (11*):

$${}_tp'_{[y]} = e^{-\int_0^t \mu'_{[y]+t}\,dt} = e^{-\int_0^t \mu_{[y]+t}\,dt}\cdot e^{-\int_0^t \pi\,dt}\,,$$

oder:

$$(37)\qquad {}_tp'_{[y]} = {}_tp_{[y]}\cdot e^{-\pi t}\,.$$

Mithin wird die totale Ausscheidewahrscheinlichkeit

$$(38)\qquad {}_tq'_{[y]} = 1-{}_tp'_{[y]} = 1-(1-{}_tq_{[y]})\,e^{-\pi t}\,.$$

Aus (38) erhält man für die Vermehrung ${}_t q'_{[y]} - {}_t q_{[y]}$ der totalen Ausscheidewahrscheinlichkeiten den bereits oben auf Seite 31 mitgeteilten Wert:

$$(39) \qquad {}_t q'_{[y]} - {}_t q_{[y]} = \left(1 - {}_t q_{[y]}\right)\left(1 - e^{-\pi t}\right).$$

Weiter ist, wenn h irgendeine positive Zahl bedeutet:

$${}_h p'_{[y]+z} = \frac{l'_{[y]+z+h}}{l'_{[y]+z}} = \frac{l'_{[y]+z+h}}{l'_{[y]}} \cdot \frac{l'_{[y]}}{l'_{[y]+z}} = \frac{{}_{z+h} p'_{[y]}}{{}_z p'_{[y]}}.$$

Hieraus folgt nach (37):

${}_h p'_{[y]+z} = \dfrac{{}_{z+h} p_{[y]} \cdot e^{-\pi(z+h)}}{{}_z p_{[y]} \cdot e^{-\pi z}}$ oder: ${}_h p'_{[y]+z} = \dfrac{{}_{z+h} p_{[y]}}{{}_z p_{[y]}}\, e^{-\pi h}$. Nun ist $\dfrac{{}_{z+h} p_{[y]}}{{}_z p_{[y]}} = {}_h p_{[y]+z}$. Mithin hat man schließlich:

$$(37^*) \qquad {}_h p'_{[y]+z} = {}_h p_{[y]+z} \cdot e^{-\pi h}$$

als Verallgemeinerung von (37).

Aus (5) und (37*) ergibt sich ${}_h q'_{[y]+z} = 1 - {}_h p'_{[y]+z} = 1 - \left(1 - {}_h q_{[y]+z}\right) \cdot e^{-\pi h}$. Hieraus schließt man in Verallgemeinerung von (39), daß

$$(39^*) \qquad {}_h q'_{[y]+z} - {}_h q_{[y]+z} = \left(1 - {}_h q_{[y]+z}\right)\left(1 - e^{-\pi h}\right) \quad [1]$$

wird, wie auch in unserem obigen Satze angegeben wurde.

---

[1]) Setzt man $e^{-\pi t} = \dfrac{1}{e^{\pi t}}$ angenähert gleich $\dfrac{1}{1+\pi t}$, so wird für $h=1$ nach (39*) ${}_1 q'_{[y]+z} - {}_1 q_{[y]+z} = \left(1 - {}_1 q_{[y]+z}\right) \cdot \dfrac{\pi}{1+\pi}$ und nach (36) $i - i' = \dfrac{(1+i)\pi}{1+\pi}$. Vgl. hierzu den Hauptsatz 2 [für unser π tritt dort $(1+i)\Delta$], den G. Höckner in seinem Aufsatz „Die Zuschlagsregelung der Prämien. Berechnung der Bruttoprämien", Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des siebenten internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, 2.—7. Sept. 1912, Amsterdam 1912, Bd. I, S. 651 für die Prämienabänderung der Todesfallversicherung im Falle der gewöhnlichen diskontinuierlichen Prämienzahlung abgeleitet hat.

§ 4.

Prämien- und Deckungskapitalien unserer allgemeinen Versicherung nach der Nettomethode bei Verwendung einer auch das freiwillige Ausscheiden berücksichtigenden Ausscheideordnung.

Bisher wurden nur n Ausscheidegründe berücksichtigt. In der Praxis findet ein Versicherungsverhältnis oft durch vorzeitiges freiwilliges Ausscheiden (Storno) sein Ende. Diesem Umstande trägt man Rechnung, indem man neben die bisherige Ausscheideordnung mit n Ausscheidegründen eine solche mit $n+1$ Ausscheideursachen stellt, wobei die $(n+1)^{\text{te}}$ in der freiwilligen Aufgabe des Versicherungsverhältnisses besteht. Denkt man sich die zweite Ausscheideordnung, nämlich diejenige mit den $n+1$ Ausscheidegründen, als das Primäre, so kann man sich die erste Ausscheideordnung, nämlich diejenige mit den n Ausscheidegründen, dadurch aus der zweiten hervorgegangen denken, daß man bei der ersten Ausscheideordnung nur die n ersten Ausscheideintensitäten der zweiten Ausscheideordnung und zwar mit den gleichen Werten wie bei der zweiten wirksam sein läßt. Bedeutet $\sigma_{[y]+x}$ bei der zweiten Ausscheideordnung die Intensität für das freiwillige Ausscheiden (also die $(n+1)^{\text{te}}$ Ausscheideintensität) eines mit y Jahren in das Versicherungsverhältnis Eingetretenen beim Alter $y+x$, so sind, wenn wir die Bezeichnungen des § 1 bezüglich der Ausscheideintensitäten beibehalten, da die zwei Ausscheideordnungen in den n ersten Ausscheideintensitäten übereinstimmen, $\mu^{(1)}_{[y]+x}, \mu^{(2)}_{[y]+x}, \ldots \mu^{(n)}_{[y]+x}, \sigma_{[y]+x}$ die $n+1$ Ausscheideintensitäten der zweiten Ausscheideordnung, und für die totale Ausscheideintensität $\mu_{[y]+x}$ der ersten Tafel tritt bei der zweiten Tafel $\mu_{[y]+x}+\sigma_{[y]+x}$ als totale Ausscheideintensität. Bedeutet $\bar{l}_{[y]}$ die Anzahl der im Alter y in das Versicherungsverhältnis eingetretenen Personen der zweiten Ausscheideordnung, erlebt hiervon die Zahl $\bar{l}_{[y]+x}$ das Lebensalter $y+x$ im Versicherungsverhältnis und sind im Alter y bis $y+x$ infolge der $n+1$ Gründe $\bar{f}^{(1)}_{[y]+x}$ bezw. $\bar{f}^{(2)}_{[y]+x}$ usw. bezw. $\bar{f}^{(n+1)}_{[y]+x}$ ausgeschieden, so ist (vgl. die analoge Gleichung (1)):

$$(40) \qquad \bar{l}_{[y]+x} = \bar{l}_{[y]} - \bar{f}^{(1)}_{[y]+x} - \bar{f}^{(2)}_{[y]+x} - \cdots - \bar{f}^{(n+1)}_{[y]+x} .$$

Mithin lassen sich die n ersten Intensitäten auch neben den Gleichungen (6_1) bis (6_n) durch die Gleichungen:

$$\mu^{(i)}_{[y]+x} = -\frac{\frac{d\,\bar{l}^{(i)}_{[y]+x}}{dx}}{\bar{l}_{[y]+x}} \qquad (i=1, 2, \ldots n) \tag{41}$$

erklären; ihnen gesellt sich als Definitionsgleichung für die $(n+1)^{\text{te}}$ Ausscheideintensität zu:

$$\sigma_{[y]+x} = \frac{\frac{d\,\bar{l}^{(n+1)}_{[y]+x}}{dx}}{\bar{l}_{[y]+x}}\,. \tag{42}$$

Um den Zusammenhang zwischen der ersten Ausscheideordnung $l_{[y]+x}$ und der zweiten $\bar{l}_{[y]+x}$ zu erfassen, lassen wir für einen Augenblick den Anfangsbestand $l_{[y]}$ der ersten Ausscheideordnung mit dem Anfangsbestand $\bar{l}_{[y]}$ der zweiten zusammenfallen. Tritt nun für einen jeden, der im Laufe der Zeit aus dem Anfangsbestand $\bar{l}_{[y]}$ infolge des $(n+1)^{\text{ten}}$ Grundes ausscheidet, sofort eine Ersatzperson ein, so sind in dem dauernd derart ergänzten Bestande offenbar nur die n ersten Ausscheideursachen und zwar mit ihren unveränderten Ausscheideintensitäten $\mu^{(1)}_{[y]+z}, \mu^{(2)}_{[y]+z}, \ldots \mu^{(n)}_{[y]+z}$ wirksam. Wird daher jede aus dem Anfangsbestand $\bar{l}_{[y]}$ der zweiten Ausscheideordnung infolge des $n+1^{\text{ten}}$ Grundes ausscheidende Person sofort durch eine andere neue ersetzt, so muß die Anzahl der aus den $\bar{l}_{[y]}$ infolge der ersten n Gründe im Alter y bis $y+z$ Ausgeschiedenen $\bar{l}_{[y]} \cdot {}_zq^{(1)}_{[y]}$ bezw. $\bar{l}_{[y]} \cdot {}_zq^{(2)}_{[y]}$ usw., bezw. $\bar{l}_{[y]} \cdot {}_zq^{(n)}_{[y]}$ sein, nicht gleich $\bar{l}_{[y]} \cdot {}_z\bar{q}^{(1)}_{[y]}$, $\bar{l}_{[y]} \cdot {}_z\bar{q}^{(2)}_{[y]}$, $\ldots$ $\bar{l}_{[y]} \cdot {}_z\bar{q}^{(n)}_{[y]}$, wie es ohne Ersatz der Fall wäre; dabei bedeuten ${}_zq^{(1)}_{[y]}, {}_zq^{(2)}_{[y]}, \ldots {}_zq^{(n)}_{[y]}$ die n Ausscheidewahrscheinlichkeiten der ersten Ausscheideordnung, ${}_z\bar{q}^{(1)}_{[y]}$, ${}_z\bar{q}^{(2)}_{[y]}, \ldots {}_z\bar{q}^{(n)}_{[y]}$ die n ersten Ausscheidewahrscheinlichkeiten der zweiten Ausscheideordnung. Da man mittels der geschilderten Ergänzung die Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_zq^{(1)}_{[y]}, {}_zq^{(2)}_{[y]}, \ldots {}_zq^{(n)}_{[y]}$ der ersten Ausscheideordnung aus der zweiten ableiten kann, sich weiter ${}_hq^{(1)}_{[y]+x}$ (vgl. die Gleichungen (2_1), (3) und (4)) in der Form ausdrücken läßt:

$${}_hq^{(1)}_{[y]+x} = \frac{{}_{x+h}q^{(1)}_{[y]} - {}_xq^{(1)}_{[y]}}{1 - {}_xq_{[y]}} = \frac{{}_{x+h}q^{(1)}_{[y]} - {}_xq^{(1)}_{[y]}}{1 - \left({}_xq^{(1)}_{[y]} + {}_xq^{(2)}_{[y]} + \cdots + {}_xq^{(n)}_{[y]}\right)}\,;$$

und das Entsprechende für ${}_hq^{(2)}_{[y]+x}, \ldots {}_hq^{(n)}_{[y]+x}$ gilt, so folgt: Man kann alle Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_hq^{(1)}_{[y]+x}$,

${}_h q^{(2)}_{[y]+x}, \dots {}_h q^{(n)}_{[y]+x}$ der ersten Ausscheideordnung des § 1 aus der zweiten dieses Paragraphen finden, wenn man bei letzterer die $n+1$ Ausscheidegründe unverändert wirksam sein läßt, nur für jeden freiwillig, also aus dem $n+1^{\text{ten}}$ Grunde Ausscheidenden sofort einen Ersatzmann treten läßt.

Für die Bestimmung der Prämien und Deckungskapitalien unserer allgemeinen im § 3 betrachteten Versicherung werde jetzt die auf das freiwillige Ausscheiden Rücksicht nehmende neue Ausscheideordnung $\bar{l}_{[y]+x}$ mit $n+1$ Ausscheidegründen verwendet. Zu den bisherigen Versicherungsbedingungen trete noch die weitere hinzu, daß jedem freiwillig aus dem Versicherungsverhältnis Ausscheidenden ein Rückkaufspreis gezahlt werde; dieser belaufe sich auf $R_{[y]+t}$, wenn der Austritt im Alter $y+t$ bis $y+t+dt$ stattfindet. Für den Versicherer kommt dann neben den n Auszahlungen $U^{(1)}_{[y]+t}, U^{(2)}_{[y]+t}, \dots U^{(n)}_{[y]+t}$ an Austretende aus den ersten n Gründen noch die neue Auszahlung $R_{[y]+t}$ an die freiwillig Ausscheidenden in Frage. Für die in dem unendlich kleinen Zeitelement dt im Alter $y+t$ bis $y+t+dt$ insgesamt freiwillig ausscheidenden

$$\bar{l}^{(n+1)}_{[y]+t+dt} - \bar{l}^{(n+1)}_{[y]+t} = \frac{d\,\bar{l}^{(n+1)}_{[y]+t}}{dt} \cdot dt = \bar{l}_{[y]+t} \cdot \sigma_{[y]+t} \cdot dt \quad \text{(vgl. Formel (42))}$$

Personen beträgt der gesamte zu bezahlende Rückkaufspreis $\bar{l}_{[y]+t} \cdot \sigma_{[y]+t} \cdot R_{[y]+t} \cdot dt$. Bezeichnet man bei Zugrundelegung der neuen Tafel die Prämien mit $\bar{P}_{[y]+t}$ und die Deckungskapitalien mit ${}_t\bar{V}_{[y]}$, so tritt an die Stelle der Differentialgleichung (25) die neue:

$$(\overline{25}) \left| \begin{aligned} &\frac{d\,{}_t\bar{V}_{[y]}}{dt} - {}_t\bar{V}_{[y]}\left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) \\ &\qquad = \bar{P}_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+t}\, U^{(i)}_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t} R_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right). \end{aligned} \right.$$

Durch den Vergleich von (25) und $(\overline{25})$ sieht man, daß sich ${}_t\bar{V}_{[y]}$ aus ${}_tV_{[y]}$ ergibt, wenn man $P_{[y]+t}$ durch $\bar{P}_{[y]+t}$, ferner

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+t} U^{(i)}_{[y]+t} \quad \text{durch} \quad \sum_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+t} U^{(i)}_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t} R_{[y]+t},$$

und schließlich $\mu_{[y]+t}$ durch $\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}$ ersetzt. Mithin erhält man aus (26) das Deckungskapital ${}_t\overline{V}_{[y]}$ in retrospektiver Gestalt durch die Formel $(\overline{26})$:

$$(\overline{26})\quad \left\{ \begin{aligned} {}_t\overline{V}_{[y]} &= e^{\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot \Bigg[{}_0\overline{V}_{[y]} + \int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \\ &\times \left\{ \overline{P}_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mu_{[y]+t}^{(i)} U_{[y]+t}^{(i)} + \sigma_{[y]+t} R_{[y]+t} + S_{[y]+t} \right) \right\} dt \Bigg], \end{aligned} \right.$$

wobei die Anfangskapitalien, da es sich um ein und dieselbe Versicherung handelt, gleich sind, also ${}_0\overline{V}_{[y]} = {}_0V_{[y]}$.

Aus Formel $(\overline{31})$ ergibt sich das Deckungskapital ${}_t\overline{V}_{[y]}$ in prospektiver Gestalt:

$$(\overline{31})\quad \left\{ \begin{aligned} {}_t\overline{V}_{[y]} &= T e^{-\int\limits_t^p (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} + \int\limits_t^p e^{\int\limits_u^t (\delta+\mu_{[y]+u}+\sigma_{[y]+u})\,du} \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \mu_{[y]+u}^{(i)} U_{[y]+u}^{(i)} + \sigma_{[y]+u} R_{[y]+u} + S_{[y]+u} - \overline{P}_{[y]+u} \right\} du\,. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man die einmalige Prämie unserer Versicherungskombination bei Zugrundelegung der neuen Ausscheideordnung mit $\overline{A}_{[y]}$, so ergibt sich diese in Analogie zu Formel (28) als

$$(\overline{28})\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{A}_{[y]} &= T e^{-\int\limits_0^p (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} + \int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \\ &\times \left| \sum_{i=1}^{i=n} \mu_{[y]+t}^{(i)} U_{[y]+t}^{(i)} + \sigma_{[y]+t} R_{[y]+t} + S_{[y]+t} \right| \cdot dt\,. \end{aligned} \right.$$

Der Zusammenhang zwischen $\overline{A}_{[y]}$ und der kontinuierlich für jedes Zeitmoment dt zahlbaren Prämie $\overline{P}_{[y]+t} \cdot dt$ wird in Analogie zu Formel (29) gegeben durch

$$(\overline{29})\qquad A_{[y]} = \int\limits_0^p e^{-\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right) dt} P_{[y]+t}\cdot dt\ .$$

Führt man analog zu (28_z) die Funktion ein:

$$(\overline{28}_z)\left\{\begin{aligned} A_{[y]+z} &= T e^{-\int\limits_0^{p-z}\left(\delta+\mu_{[y]+z+t}+\sigma_{[y]+z+t}\right) dt} + \int\limits_0^{p-z} e^{-\int\limits_0^t\left(\delta+\mu_{[y]+z+t}+\sigma_{[y]+z+t}\right) dt} \\ &\times\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+z+t}\, U^{(i)}_{[y]+z+t} + \sigma_{[y]+z+t}\, R_{[y]+z+t} + S_{[y]+z+t}\right\} dt \\ &= T e^{-\int\limits_z^p\left(\delta+\mu_{[y]+u}+\sigma_{[y]+u}\right) du} + \int\limits_z^p e^{+\int\limits_u^z\left(\delta+\mu_{[y]+u}+\sigma_{[y]+u}\right) du} \\ &\times\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+u}\, U^{(i)}_{[y]+u} + \sigma_{[y]+u}\, R_{[y]+u} + S_{[y]+u}\right\}\cdot du \end{aligned}\right.$$

(vgl. (28^*_z)), so kann man (vgl. (31^{**})) ${}_tV_{[y]}$ auch in der Form schreiben:

$$(\overline{31}^{**})\qquad {}_tV_{[y]} = A_{[y]+t} - \int\limits_t^p e^{\int\limits_u^t\left(\delta+\mu_{[y]+u}+\sigma_{[y]+u}\right) du} P_{[y]+u}\cdot du\ .$$

Wir stellen neben $(\overline{25})$ die alte Formel (25); dieser kann man, indem man links und rechts $-{}_tV_{[y]}\cdot\sigma_{[y]+t}$ beifügt, die Form geben:

$$(25')\left\{\begin{aligned} &\frac{d\,{}_tV_{[y]}}{dt} - {}_tV_{[y]}\left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right) \\ &\qquad = P_{[y]+t} - \left(\sum_{i=0}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+t}\, U^{(i)}_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\cdot{}_tV_{[y]} + S_{[y]+t}\right). \end{aligned}\right.$$

Der Vergleich von $(\overline{25})$ und $(25')$ lehrt das auch sonst bekannte Resultat, daß bei Verwendung einer das freiwillige Ausscheiden berücksichtigenden Ausscheideordnung die alten Prämiensätze $P_{[y]+t}$ und die alten Deckungskapitalien ${}_tV_{[y]}$ unverändert beibehalten werden können, vorausgesetzt, daß jeder freiwillig Austretende als Rückkaufspreis das auf seine Versicherung fallende Deckungskapital erhält, also daß $R_{[y]+t} = {}_tV_{[y]}$ gewählt wird.

Wir subtrahieren (25′) von ($\overline{25}$) und setzen

$$(43) \qquad {}_tW_{[y]} = {}_tV_{[y]} - {}_tV_{[y]} \,.$$

Dann wird

$$(44) \quad \frac{d\,{}_tW_{[y]}}{dt} - {}_tW_{[y]}\left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) = P_{[y]+t} - P_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\left({}_tV_{[y]} - R_{[y]+t}\right).$$

Durch Integration der Differentialgleichung (44) erhält man:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} {}_tW_{[y]} = e^{\int_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} & \Bigg[C + \\ \int_0^t e^{-\int_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} & \cdot \left\{ P_{[y]+t} - P_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\left({}_tV_{[y]} - R_{[y]+t}\right)\right\} dt \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Die Konstante C bestimmt sich, indem man $t=0$ setzt, als ${}_0W_{[y]}$. Die Anfangsdeckungskapitalien ${}_0V_{[y]}$ und ${}_0\overline{V}_{[y]}$ sind gleich, da es sich um die nämliche Versicherung handelt. Mithin erhält man aus (43) ${}_0W_{[y]} = 0$, und es ist auch die Konstante $C = 0$. Berücksichtigt man noch die Relation (43), so findet man aus (45) die Formel:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} {}_t\overline{V}_{[y]} = {}_tV_{[y]} + e^{\int_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} & \\ \times \int_0^t e^{-\int_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} & \left\{ \overline{P}_{[y]+t} - P_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\left({}_tV_{[y]} - R_{[y]+t}\right)\right\} dt \,. \end{aligned} \right.$$

Nun ist $e^{\int\limits_0^t \delta\,dt} = (1+i)^t$, und aus (11*) schließt man, indem man beachtet, daß für unsere das Ausscheiden berücksichtigende Tafel gestrichene $\bar{l}$ verwendet werden:

$$e^{\int\limits_0^t (\mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\,dt} = \frac{1}{{}_t\bar{p}_{[y]}} = \frac{\bar{l}_{[y]}}{\bar{l}_{[y]+t}}.$$

Mithin läßt sich (46) auch schreiben:

$$(46^*)\left\{\begin{aligned} {}_t\bar{V}_{[y]} = {}_tV_{[y]} + \frac{(1+i)^t}{\bar{l}_{[y]+t}} \int\limits_0^t v^t\,\big[\bar{l}_{[y]+t}(\bar{P}_{[y]+t} - P_{[y]+t}) \\ + \bar{l}_{[y]+t}\cdot\sigma_{[y]+t}({}_tV_{[y]} - R_{[y]+t})\big]\,dt\,. \end{aligned}\right.$$

Die Formel (46*) hat die folgende versicherungstechnische Bedeutung: Das auf Grund einer auch den freiwilligen Abgang berücksichtigenden Tafel bestimmte Deckungskapital ${}_t\bar{V}_{[y]}$ setzt sich aus drei Bestandteilen zusammen: der erste ist das Deckungskapital ${}_tV_{[y]}$ einer den Abgang nicht berücksichtigenden Tafel; der zweite resultiert aus den (bis zum Termin der Bestimmung des Deckungskapitals) von allen Versicherungstreuen vereinnahmten Prämienüberschüssen $(\bar{P}_{[y]+t} - P_{[y]+t})\,dt$ aus der das Ausscheiden berücksichtigenden über die das Ausscheiden nicht berücksichtigende Tafel und den Zinsen dieser Differenzen; der dritte Bestandteil sammelt sich schließlich aus den der Versicherungsanstalt von allen (bis zum Termin der Bestimmung des Deckungskapitals) freiwillig Ausgetretenen anheimgefallenen Überschüssen ${}_tV_{[y]} - R_{[y]+t}$ des Deckungskapitals aus der den Abgang nicht berücksichtigenden Tafel über den Rückkaufspreis und den Zinsen dieser Differenzen.

Wir können das Deckungskapital ${}_t\bar{V}_{[y]}$ auch noch in anderer Weise, nämlich als Summe zweier Bestandteile deuten. Zu diesem Zwecke führen wir eine Funktion ${}_tV^{(1)}_{[y]}$ ein, die wir durch die folgende Differentialgleichung:

$$(25_1)\quad \frac{d\,{}_tV^{(1)}_{[y]}}{dt} - \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right)\,{}_tV^{(1)}_{[y]} = \overline{P}_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right)$$

und durch die Anfangsbedingung festlegen, daß für $t=0$ ${}_0V^{(1)}_{[y]}$ mit ${}_0V_{[y]}$ übereinstimmen soll, also ${}_0V^{(1)}_{[y]} = {}_0V_{[y]}$. Alsdann lehrt der Vergleich der zwei Differentialgleichungen (25) und (25_1), da für ihre Integrale auch noch die gleichen Anfangsbedingungen statthaben, daß ${}_tV^{(1)}_{[y]}$ aus ${}_tV_{[y]}$ einfach dadurch hervorgeht, daß $\overline{P}_{[y]+t}$ für $P_{[y]+t}$ tritt. Bezeichnet man also ${}_tV_{[y]}$ in seiner Abhängigkeit als Funktion von $P_{[y]+t}$ mit ${}_tV_{[y]} \equiv {}_tV_{[y]}\left(P_{[y]+t}\right)$, so ist ${}_tV^{(1)}_{[y]} \equiv {}_tV_{[y]}\left(\overline{P}_{[y]+t}\right)$. Mithin ergibt sich z. B. nach (26):

$$(26_1)\left\{\begin{aligned} &{}_tV^{(1)}_{[y]} = {}_tV_{[y]}\left(\overline{P}_{[y]+t}\right) = e^{\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}\right)dt} \\ &\times\left[\int_0^t e^{-\int_0^t\left(\delta+\mu_{[y]+t}\right)dt}\left\{\overline{P}_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + S_{[y]+t}\right)\right\}dt + {}_0V_{[y]}\right].\end{aligned}\right.$$

Schreibt man nunmehr (25_1) in der Form:

$$(25_1^*)\left\{\begin{aligned} &\frac{d\,{}_tV^{(1)}_{[y]}}{dt} - \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)\cdot{}_tV^{(1)}_{[y]} \\ &\qquad = \overline{P}_{[y]+t} - \left(\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\cdot{}_tV^{(1)}_{[y]} + S_{[y]+t}\right),\end{aligned}\right.$$

subtrahiert (25_1^*) von $(\overline{25})$ und setzt

$$(47)\qquad {}_tW^{(1)}_{[y]} = {}_t\overline{V}_{[y]} - {}_tV^{(1)}_{[y]}\,,$$

so erhält man für ${}_tW^{(1)}_{[y]}$ die Differentialgleichung:

$$(48)\quad \frac{d\,{}_tW^{(1)}_{[y]}}{dt} - \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right){}_tW^{(1)}_{[y]} = \sigma_{[y]+t}\left({}_tV^{(1)}_{[y]} - R_{[y]+t}\right).$$

Durch Integration der Differentialgleichung (48) findet man:

$$W_{[y]}^{(1)} = e^{\int\limits_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} \times \left[\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} \sigma_{[y]+t} \left({}_tV_{[y]}^{(1)} - R_{[y]+t}\right) dt + C \right].$$

Die Konstante C ergibt sich, indem man $t=0$ setzt, gleich Null; denn nach (47) wird ${}_0W_{[y]}^{(1)}=0$, da sowohl ${}_0V_{[y]}$ als auch ${}_0V_{[y]}^{(1)}$ gleich ${}_0V_{[y]}$ sind. Ersetzt man in der für ${}_tW_{[y]}^{(1)}$ gefundenen Relation die Größe ${}_tW_{[y]}^{(1)}$ durch ihren Wert nach (47) und beachtet, daß $C=0$ ist, so erhält man:

$$(49)\quad \left\{ {}_tV_{[y]} = {}_tV_{[y]}^{(1)} + e^{\int\limits_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} \times \int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} \sigma_{[y]+t} \left({}_tV_{[y]}^{(1)} - R_{[y]+t}\right) dt \right. .$$

Nun ist, wie oben gezeigt (vgl. den Text Seite 40 vor der Gleichung (46*)):

$$e^{\int\limits_0^t \left(\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t}\right) dt} = \frac{\bar{l}_{[y]}}{\bar{l}_{[y]+t}} \cdot (1+i)^t .$$

Mithin läßt sich (49) auch schreiben:

$$(49^*)\quad {}_tV_{[y]} = {}_tV_{[y]}^{(1)} + \frac{(1+i)^t}{\bar{l}_{[y]+t}} \int\limits_0^t v^t \cdot \bar{l}_{[y]+t} \cdot \sigma_{[y]+t} \left({}_tV_{[y]}^{(1)} - R_{[y]+t}\right) dt .$$

Die Formel (49*) hat die folgende versicherungstechnische Bedeutung: Das auf Grund einer auch den freiwilligen Abgang berücksichtigenden Tafel berechnete Deckungskapital ${}_t\bar{V}_{[y]}$ setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen: der erste ist das Deckungskapital ${}_tV_{[y]}^{(1)} \equiv {}_tV_{[y]}(\bar{P}_{[y]+t})$ aus einer den Abgang nicht berücksichtigenden Tafel, zu dessen Bestimmung aber die Prämiensätze $\bar{P}_{[y]+t}$ der den Abgang berücksichtigenden Tafel verwendet werden. Der zweite Bestandteil sammelt sich aus den der Versicherungsanstalt von allen (bis zum Termin der Bestimmung des Deckungskapitals) freiwillig Ausgetretenen anheimgefallenen Überschüssen ${}_tV^{(1)}_{[y]} - R_{[y]+t}$ des Deckungskapitals ${}_tV^{(1)}_{[y]} = {}_tV_{[y]}\left(P_{[y]+t}\right)$ über den Rückkaufspreis $R_{[y]+t}$ und den Zinsen dieser Differenzen.

§ 5.

Ausreichende Prämien und Deckungskapitalien unserer allgemeinen Versicherung bei Berücksichtigung des freiwilligen Ausscheidens, der drei Gattungen von Unkosten des Versicherungsbetriebes und der versprochenen Dividendenleistungen.

Wir gehen nunmehr zur Bestimmung der Deckungskapitalien und Prämien bei Berücksichtigung von Dividenden und Unkosten über. Zu Grunde liege wie im vorigen Paragraphen eine auch das freiwillige Ausscheiden berücksichtigende Ausscheideordnung mit $n+1$ Austrittsgründen. Zu den bisherigen Versicherungsbedingungen komme noch hinzu, daß jedem Versicherten kontinuierlich Dividende gezahlt oder wenigstens in den Büchern der Anstalt gutgeschrieben werde; diese belaufe sich, wenn der mit y Jahren Versicherte versicherungstreu das Alter $y+t$ erlebt, für das dem Alter $y+t$ folgende Zeitelement dt auf $\Delta_{[y]+t} \cdot dt$.

Wir betrachten weiter noch die Unkosten des Versicherungsbetriebes. Die Erwerbskosten unserer allgemeinen Versicherung mögen insgesamt α betragen. Die auf die Einheit der von dem Versicherten vereinnahmten Prämie entfallenden Inkassokosten mögen sich auf β belaufen. Schließlich soll bei unserer allgemeinen Versicherung für jedes Zeitelement dt der Betrag $\gamma \cdot dt$ an Verwaltungskosten aufgewendet werden. $B_{[y]+t} \cdot dt$ sei die von dem $(y+t)$-jährigen Versicherten für das Zeitelement dt zu bezahlende ausreichende Prämie, durch die sämtliche Ausgaben der Versicherungsanstalt ihre Deckung finden sollen. Alsdann bleibt der Anstalt nach der Begleichung der Inkasso- und Verwaltungskosten von der Prämie $B_{[y]+t} \cdot dt$, die der $(y+t)$-jährige für das Zeitelement dt zahlt, noch der Betrag $B_{[y]+t} \cdot dt - B_{[y]+t} \cdot \beta\, dt - \gamma\, dt = \left[B_{[y]+t}(1-\beta) - \gamma\right] \cdot dt$ übrig. Das sowohl die Unkosten als auch die Dividende berücksichtigende Deckungskapital unserer allgemeinen Versicherung sei für den

$(y+t)$-jährigen, mit y Jahren in das Versicherungsverhältnis Eingetretenen durch ${}_t\mathfrak{V}_{[y]}$ bezeichnet. Da derjenige Teil der von dem $(y+t)$-jährigen Versicherten für das Zeitelement dt gezahlten Prämie, der zur Verfügung der Versicherungsanstalt bleibt, $[B_{[y]+t}(1-\beta)-\gamma]\,dt$ beträgt und da zu den bisherigen Leistungen des Versicherers während des Zeitelements dt noch die Dividende hinzutritt, die sich für den $(y+t)$-jährigen Versicherten auf $\Delta_{[y]+t}\cdot dt$ stellen soll, ergibt sich für ${}_t\mathfrak{V}_{[y]}$ die Differentialgleichung:

$$(50)\left\{\begin{aligned}&\frac{d\,{}_t\mathfrak{V}_{[y]}}{dt}-{}_t\mathfrak{V}_{[y]}(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\\&=B_{[y]+t}(1-\beta)-\gamma-\left(\sum_{i=1}^{i=n}\mu^{(i)}_{[y]+t}\,U^{(i)}_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\,R_{[y]+t}+S_{[y]+t}+\Delta_{[y]+t}\right).\end{aligned}\right.$$

Die neue Differentialgleichung erhält man unmittelbar, indem man in $(\overline{25})$ für $P_{[y]+t}$ den Prämiensatz $B_{[y]+t}(1-\beta)-\gamma$, weiter für $S_{[y]+t}$ die durch den Dividendensatz erhöhte Rente $S_{[y]+t}+\Delta_{[y]+t}$, und schließlich für ${}_t\overline{V}_{[y]}$ das Deckungskapital ${}_t\mathfrak{V}_{[y]}$ treten läßt. Ist das ursprüngliche Deckungskapital bei Nichtberücksichtigung der Unkosten wie früher ${}_0V_{[y]}={}_0\overline{V}_{[y]}$, so ist als neues Anfangskapital ${}_0\mathfrak{V}_{[y]}={}_0V_{[y]}-\alpha$ zu wählen; denn die Versicherungsanstalt hat die Erwerbskosten α vorzuschießen.

Wir setzen

$$(51)\qquad {}_t\mathfrak{W}_{[y]}={}_t\mathfrak{V}_{[y]}-{}_tV_{[y]}$$

und erhalten, indem wir $(\overline{25})$ von (50) subtrahieren, die neue Differentialgleichung:

$$(52)\qquad \frac{d\,{}_t\mathfrak{W}_{[y]}}{dt}-{}_t\mathfrak{W}_{[y]}(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})=B_{[y]+t}(1-\beta)-\gamma-P_{[y]+t}-\Delta_{[y]+t}.$$

Durch Integration von (52) ergibt sich:

$$(53)\left\{\begin{aligned}&{}_t\mathfrak{W}_{[y]}=e^{\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt}\Bigg[C+\\&\int_0^t e^{-\int_0^t(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt}\{B_{[y]+t}(1-\beta)-\gamma-P_{[y]+t}-\Delta_{[y]+t}\}\,dt\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Da ${}_0\overline{V}_{[y]} = {}_0V_{[y]}$ und ${}_0\mathfrak{V}_{[y]} = {}_0V_{[y]} - \alpha$ ist, erhält man aus (51) ${}_0\dot{\mathfrak{V}}_{[y]} = -\alpha$. Setzt man in (53) $t=0$, so bestimmt man aus der Anfangsbedingung ${}_0\dot{\mathfrak{V}}_{[y]} = -\alpha$ die Konstante $C = -\alpha$. Beachtet man schließlich noch die Gleichung (51), so stellt sich ${}_t\mathfrak{V}_{[y]}$ in der Form dar:

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} {}_t\mathfrak{V}_{[y]} &= {}_t\overline{V}_{[y]} + e^{\int_0^t (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt} \Bigg[-\alpha + \\ &\int_0^t e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt} \cdot \left\{ B_{[y]+t}\,(1-\beta) - \gamma - \overline{P}_{[y]+t} - \Delta_{[y]+t} \right\} dt \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Wir setzen in der Gleichung (54) $t=p$ und beachten, daß zur Zeit $t=p$ ein Deckungskapital vorhanden sein muß, das gleich der letzten Auszahlung T ist, d. h. es muß sowohl ${}_p\overline{V}_{[y]} = T$ als auch ${}_p\mathfrak{V}_{[y]} = T$ sein. Hieraus folgt, wenn man noch durch den Faktor $e^{\int_0^p (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt}$ fortdividiert, daß

$$(55)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1-\beta) \cdot \int_0^p e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt} \cdot B_{[y]+t} \cdot dt \\ &\quad = \int_0^p \overline{P}_{[y]+t} \cdot e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt} \cdot dt \\ &\quad + \int_0^p \Delta_{[y]+t} \cdot e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt} \cdot dt \\ &+ \alpha + \gamma \cdot \int_0^p e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt} \cdot dt\,. \end{aligned} \right.$$

Nun ist (vgl. den Text auf Seite 40 vor Formel (46^*)):

$$(56)\quad \int_0^p \Delta_{[y]+t} \cdot e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot dt = \frac{1}{\bar{l}_{[y]}} \int_0^p \frac{\bar{l}_{[y]+t}}{(1+i)^t} \cdot \Delta_{[y]+t} \cdot dt$$

der Barwert der Dividenden, die einem mit y Jahren in das Versicherungsverhältnis eintretenden Versicherten bei Beginn seiner Versicherung in Aussicht stehen. Wir wollen den durch (56) definierten Gewinnanteil mit $G_{[y]}$ bezeichnen, also setzen:

$$(56^*)\qquad G_{[y]} = \int_0^p \Delta_{[y]+t} \cdot e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot dt\,.$$

Wir erinnern uns der Formel ($\overline{29}$), die uns die einmalige Nettoprämie gibt:

$$(\overline{29})\qquad \bar{A}_{[y]} = \int_0^p P_{[y]+t} \cdot e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot dt\,,$$

und verwenden weiter:

$$(57)\qquad |_z\bar{\mathbf{a}}_{[y]} = \int_0^z e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot dt = \frac{1}{\bar{l}_{[y]}} \int_0^z \frac{\bar{l}_{[y]+t}}{(1+i)^t} \cdot dt\,.$$

$|_z\bar{\mathbf{a}}_{[y]}$ ist offenbar der Wert einer kontinuierlichen kurzen Rente, die jedem Versicherten, solange er versicherungstreu bleibt, längstens während z Jahren, für jedes Zeitelement dt in der Höhe dt zufließt. Alsdann läßt sich die Gleichung (55), der die ausreichenden Prämien genügen müssen, folgendermaßen schreiben:

$$(58)\quad (1-\beta)\int_0^p e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot B_{[y]+t} \cdot dt = \bar{A}_{[y]} + G_{[y]} + \alpha + \gamma \cdot |_p\bar{\mathbf{a}}_{[y]}$$

oder auch in der Form:

$$(58^*)\left\{\begin{aligned}&\int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \cdot B_{[y]+t}\cdot dt = \bar{A}_{[y]}+G_{[y]}+a\\ &\qquad +\beta\int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \cdot B_{[y]+t}\cdot dt+\gamma\cdot {}_{|p}\bar{\mathrm{a}}_{[y]}\,.\end{aligned}\right.$$

In der letzten Gleichung ist das von selbst klare Resultat enthalten, daß der Wert aller vereinnahmten ausreichenden Prämien $B_{[y]+t}\cdot dt$ decken muß: erstens die Nettoprämie, zweitens die Dividendenanwartschaft, drittens die Erwerbskosten, viertens den Wert aller künftigen Inkassokosten, und schließlich fünftens den Wert aller künftigen Verwaltungskosten.

Der Gleichung (58*) entsprechend denken wir uns auch die Prämiensätze $B_{[y]+t}$ in fünf Bestandteile zerlegt:

$$(59)\qquad B_{[y]+t}=\bar{P}_{[y]+t}+\beta B_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^z_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}$$

oder:

$$(59^*)\qquad B_{[y]+t}(1-\beta)=\bar{P}_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^z_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}\,.$$

Hierbei ist $\bar{P}_{[y]+t}\cdot dt$ die für das Zeitelement dt vereinnahmte Nettoprämie, $\beta B_{[y]+t}\cdot dt$ die für das Zeitelement dt zu verausgabende Inkassogebühr; $\mathfrak{Z}^z_{[y]+t}\cdot dt$ soll der Erwerbskostenzuschlag oder der Zillmersche Zuschlag, $\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}\cdot dt$ der Verwaltungskostenzuschlag und $\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}\cdot dt$ der Dividendenzuschlag für das Zeitelement dt heißen, die im Alter $y+t$ von dem Versicherten zu entrichten sind. Um die drei letzten Größen geeignet zu bestimmen, führen wir den Wert von $B_{[y]+t}(1-\beta)$ aus (59*) in die Gleichung (58) ein und beachten hierbei noch die Gleichung ($\overline{29}$). Alsdann erhält man:

$$
(60)\left\{\begin{aligned}
&\int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt}\cdot \mathfrak{Z}^{z}_{[y]+t}\cdot dt\\
+&\int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt}\cdot \mathfrak{Z}^{v}_{[y]+t}\cdot dt\\
+&\int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt}\cdot \mathfrak{Z}^{d}_{[y]+t}\cdot dt = \alpha+\gamma\cdot |_p\bar{\mathrm{a}}_{[y]}+G_{[y]}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Von den Größen $\mathfrak{Z}^{z}_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^{v}_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^{d}_{[y]+t}$ verlangen wir, daß sie außer der Gleichung (59) noch die folgenden Relationen befriedigen sollen:

$$
(61)\qquad \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt}\cdot \mathfrak{Z}^{z}_{[y]+t}\cdot dt=\alpha\,,
$$

$$
(62)\qquad \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt}\cdot \mathfrak{Z}^{v}_{[y]+t}\cdot dt=\gamma\cdot |_p\bar{\mathrm{a}}_{[y]}\,,
$$

$$
(63)\qquad \int_0^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt}\cdot \mathfrak{Z}^{d}_{[y]+t}\cdot dt=G_{[y]}\,.
$$

Bestimmt man die Zuschläge mittels der Gleichungen (61) bis (63), so wird die Gleichung (60) von selbst erfüllt. Die Gleichungen (61) bis (63) besagen, daß die drei erhobenen Zuschlagsprämien dazu dienen, die Erwerbskosten α bezw. die gesamten Verwaltungskosten im Werte $\gamma\cdot|_p\bar{\mathrm{a}}_{[y]}$ bezw. den gesamten in Aussicht gestellten Dividendenanspruch $G_{[y]}$ zu decken.

Führt man in die Gleichung (54) die Zuschlagsprämien aus der Relation (59*) ein, so erhält man das Deckungskapital in der Form:

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} {}_t\mathfrak{V}_{[y]} &= {}_tV_{[y]} + e^{\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \\ &\times\left[\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \left\{\mathfrak{Z}^z_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}+\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}-\gamma-\varDelta_{[y]+t}\right\}dt-a\right]. \end{aligned}\right.$$

Die letzte Formel führt dazu, das Deckungskapital in drei Bestandteile zu zerlegen:

$$(64^*)\qquad {}_t\mathfrak{V}_{[y]} = {}_t\mathfrak{V}^z_{[y]} + {}_t\mathfrak{V}^v_{[y]} + {}_t\mathfrak{V}^d_{[y]}\ .$$

Diese definieren wir durch die Gleichungen:

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} {}_t\mathfrak{V}^z_{[y]} &= {}_tV_{[y]} + e^{\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \\ &\times\left[\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \cdot \mathfrak{Z}^z_{[y]+t}\cdot dt-a\right], \end{aligned}\right.$$

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} {}_t\mathfrak{V}^v_{[y]} &= e^{\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \\ &\times\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \cdot\left\{\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}-\gamma\right\}\cdot dt, \end{aligned}\right.$$

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} {}_t\mathfrak{V}^d_{[y]} &= e^{\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \\ &\times\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right)dt} \cdot\left\{\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}-\varDelta_{[y]+t}\right\}\cdot dt \end{aligned}\right.$$

und nennen sie das ZILLMERsche Deckungskapital, die Verwaltungskostenreserve und die Dividendenreserve.

Der Relation (61) entnimmt man, daß die Größe, welche auf der rechten Seite von (65) zu dem nach der Nettomethode bestimmten Deckungskapital ${}_t\bar{V}_{[y]}$ hinzutritt, keineswegs positiv ist; mithin ist ${}_t\mathfrak{V}^z_{[y]} \leq {}_t\bar{V}_{[y]}$. Für $t=p$, also bei Ablauf des Versicherungsverhältnisses, sind, wie aus (61) folgt, die Deckungskapitalien ${}_p\bar{V}_{[y]}$ nach der Nettomethode und ${}_p\mathfrak{V}^z_{[y]}$ nach der ZILLMERschen Methode gleich.

Vergleicht man die Formeln (65), (66) und (67) mit (26) auf Seite 37, so ersieht man, daß sich die drei Ausdrücke ${}_t\mathfrak{V}^z_{[y]}$, ${}_t\mathfrak{V}^v_{[y]}$, ${}_t\mathfrak{V}^d_{[y]}$ als retrospektive Deckungskapitalien deuten lassen. Das ZILLMERsche Deckungskapital ${}_t\mathfrak{V}^z_{[y]}$ sammelt sich bei unserer allgemeinen Versicherung, wenn mit einer für das Zeitelement dt vereinnahmten Prämie $(\bar{P}_{[y]+t} + \mathfrak{Z}^z_{[y]+t})\,dt$ statt mit der Nettoprämie $\bar{P}_{[y]+t}\,dt$ gerechnet und weiter vorausgesetzt wird, daß das zu Beginn der Versicherung vorhandene Deckungskapital statt ${}_0\bar{V}_{[y]}$ nur ${}_0\bar{V}_{[y]}-\alpha$ beträgt, also um die dem Versicherten von der Anstalt vorgeschossen zu denkenden Erwerbskosten α kleiner ist. Die Verwaltungskostenreserve ${}_t\mathfrak{V}^v_{[y]}$ kann als Deckungskapital nach der Nettomethode für eine Versicherung angesehen werden, bei der die Anstalt für das Zeitelement dt von dem $(y+t)$-jährigen Versicherten die Prämie $\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}\cdot dt$ empfängt und für jedes Zeitelement dt als Leistungen die Verwaltungskosten $\gamma\cdot dt$ aufwendet. Schließlich kann die Dividendenreserve ${}_t\mathfrak{V}^d_{[y]}$ als Deckungskapital nach der Nettomethode für eine Versicherung betrachtet werden, bei der die Anstaltsleistungen darin bestehen, daß jeder $(y+t)$-jährige Versicherte für das Zeitelement dt, das dem Alter $y+t$ folgt, die Dividende $\Delta_{[y]+t}\cdot dt$ erhält, während er für dieses Zeitelement dt als Gegenleistung die Prämie $\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}\cdot dt$ zahlt.

Verwaltungskostenreserve bezw. Dividendenreserve sind im besonderen konstant gleich Null, wenn $\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}=\gamma$ bezw. $\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}=\Delta_{[y]+t}$ für $0\leq t\leq p$.

Beachtet man die Gleichung (61), so läßt sich (65) auch schreiben:

$$(65^*)\quad {}_t\mathfrak{V}^z_{[y]} = {}_tV_{[y]} - e^{\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot \int\limits_t^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot \mathfrak{Z}^z_{[y]+t}\cdot dt\,,$$

oder:

$$(65^{**})\quad {}_t\mathfrak{V}^z_{[y]} = {}_tV_{[y]} - \int\limits_t^p e^{\int\limits_u^t(\delta+\mu_{[y]+u}+\sigma_{[y]+u})\,du} \cdot \mathfrak{Z}^z_{[y]+u}\cdot du$$

$$= {}_tV_{[y]} - \frac{1}{\bar{l}_{[y]+t}} \int\limits_t^p \frac{\bar{l}_{[y]+u}}{(1+i)^{u-t}} \cdot \mathfrak{Z}^z_{[y]+u} \cdot du\,.$$

Auf Grund der letzten Formel erscheint das ZILLMERsche Deckungskapital als Deckungskapital nach der Nettomethode, gekürzt um den Wert der noch zu erwartenden Zuschlagsprämien $\mathfrak{Z}^z_{[y]+t}\cdot dt$.

Mittels der Gleichungen (62) und (63) bringt man die Formeln (66) und (67), wenn man noch (57) und (56*) beachtet, in die Form

$$(66^*)\quad {}_t\mathfrak{V}^v_{[y]} = e^{\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot \int\limits_t^p e^{-\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \left\{\gamma - \mathfrak{Z}^v_{[y]+t}\right\}\cdot dt$$

oder:

$$(66^{**})\quad {}_t\mathfrak{V}^v_{[y]} = \int\limits_t^p e^{\int\limits_u^t(\delta+\mu_{[y]+u}+\sigma_{[y]+u})\,du} \left\{\gamma - \mathfrak{Z}^v_{[y]+u}\right\} du\,,$$

und

$$(67^*)\quad {}_t\mathfrak{V}^d_{[y]} = e^{\int\limits_0^t(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot \int\limits_t^p e^{-(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \left\{\Delta_{[y]+t} - \mathfrak{Z}^d_{[y]+t}\right\} dt$$

oder:

$$(67^{**})\ {}_{l}\mathfrak{B}^{d}_{[y]} = \int_{l}^{p} e^{\int_{u}^{l} (\delta + \mu_{[y]+u} + \sigma_{[y]+u})\, du} \left\{ \varDelta_{[y]+u} - \mathfrak{Z}^{d}_{[y]+u} \right\} du\ .$$

Der Vergleich von (66^{**}) und (67^{**}) mit $(\overline{31})$ lehrt, daß **die Formeln (66^{**}) und (67^{**}) die Verwaltungskostenreserve und die Dividendenreserve in prospektiver Form als Deckungskapitalien darstellen.**

Wählt man die drei Zuschlagsprämien $\mathfrak{Z}^{z}_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^{v}_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^{d}_{[y]+t}$ so, daß sie nur während $l \leq p$ Jahren zur Erhebung gelangen und jede von ihnen während dieser Zeit dauernd konstant ist, also $\mathfrak{Z}^{z}_{[y]+t} = \mathfrak{Z}^{z}_{[y]}$ für $t < l$ und $\mathfrak{Z}^{z}_{[y]+t} = 0$ für $t > l$, analog $\mathfrak{Z}^{v}_{[y]+t} = \mathfrak{Z}^{v}_{[y]}$ für $t < l$ und $\mathfrak{Z}^{v}_{[y]+t} = 0$ für $t > l$, schließlich $\mathfrak{Z}^{d}_{[y]+t} = \mathfrak{Z}^{d}_{[y]}$ für $t < l$ und $\mathfrak{Z}^{d}_{[y]+t} = 0$ für $t > l$, so erhält man aus (61):

$$\int_{0}^{l} e^{-\int_{0}^{t} (\delta + \mu_{[y]+t} + \sigma_{[y]+t})\, dt} \cdot \mathfrak{Z}^{z}_{[y]} \cdot dt = \alpha\ ,$$

oder nach (57):

$$\mathfrak{Z}^{z}_{[y]} \cdot |_{l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]} = \alpha, \quad \text{also} \quad \mathfrak{Z}^{z}_{[y]} = \frac{\alpha}{|_{l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}}\ .$$

Entsprechend findet man aus (62) und (63) die Werte

$$\mathfrak{Z}^{v}_{[y]} = \frac{\gamma \cdot |_{p}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}}{|_{l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}^{d}_{[y]} = \frac{G_{[y]}}{|_{l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}}\ .$$

Wählt man auch entsprechend die Nettoprämie $\bar{P}_{[y]+t} = \bar{P}_{[y]}$, solange $t < l$, und $\bar{P}_{[y]+t} = 0$, wenn $t > l$, so erhält man aus $(\overline{29})$ $\bar{P}_{[y]} = \dfrac{A_{[y]}}{|_{l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}}$.

Mithin wird die gesamte tatsächlich erhobene ausreichende Prämie:

$$B_{[y]+t} = B_{[y]} = \frac{A_{[y]} + \alpha + \gamma \cdot |_{p}\bar{\mathbf{a}}_{[y]} + G_{[y]}}{(1-\beta) \cdot |_{l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}} \qquad (t < l)$$

$$B_{[y]+t} = 0 \qquad (t > l)\ .$$

Unsere Formeln gestatten aber auch sowohl die Nettoprämie als jede der drei Zuschlagsprämien $\mathfrak{Z}^z_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}$ variabel zu wählen. Z. B. sei für die Nettoprämie $\overline{P}_{[y]+t}=\overline{P}_{[y]}+t\cdot\pi$, solange $t<l$ ist, und $\overline{P}_{[y]+t}=\pi_1$, wenn $t>l$ ist; dabei bedeuten π und π_1 gegebene Größen. Unsere Bedingungen besagen, daß die anfängliche Nettoprämie für die Zeit dt sich auf $\overline{P}_{[y]}\,dt$ stellt, daß diese linear steigt (für negatives π linear abnimmt) und zwar in der Zeiteinheit um $\pi\cdot dt$, aber daß sie von Beginn des $(l+1)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres konstant gleich $\pi_1\cdot dt$ bleibt. ($\pi=\pi_1=0$ gibt die alten obigen Bedingungen.) Aus $(\overline{29})$ erhält man zur Bestimmung von $\overline{P}_{[y]}$:

$$(\overline{68})\left\{\begin{aligned} A_{[y]} &= \int_0^l \left(\overline{P}_{[y]}+\pi t\right) e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right) dt} \cdot dt \\ &\quad + \int_l^p \pi_1 \cdot e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right) dt} \cdot dt \\ &= \overline{P}_{[y]} \cdot |_l\overline{\mathbf{a}}_{[y]} + \pi \int_0^l t \cdot e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right) dt} \cdot dt \\ &\quad + \pi_1 \cdot \int_l^p e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right) dt} \cdot dt\,. \end{aligned}\right.$$

Nun ist nach $(\overline{57})$:

$$\int_0^l t \cdot e^{-\int_0^t \left(\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t}\right) dt} \cdot dt = \int_0^l t \cdot \frac{d\,|_t\overline{\mathbf{a}}_{[y]}}{dt} \cdot dt$$

$$= l \cdot |_l\overline{\mathbf{a}}_{[y]} - \int_0^l |_t\overline{\mathbf{a}}_{[y]} \cdot dt\,,$$

wie durch partielle Integration folgt.

Wir führen noch in dem Integral

$$\int_l^p e^{-\int_0^t (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot dt$$

für t eine neue Variable u durch $u=t-l$ ein; hierdurch geht es über in

$$\int_0^{p-l} e^{-\int_0^{u+l} (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot du$$

$$= e^{-\int_0^l (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot \int_0^{p-l} e^{-\int_l^{u+l} (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot du$$

$$= e^{-\int_0^l (\delta+\mu_{[y]+t}+\sigma_{[y]+t})\,dt} \cdot \int_0^{p-l} e^{-\int_0^u (\delta+\mu_{[y]+l+u}+\sigma_{[y]+l+u})\,du} \cdot du$$

$$= \frac{1}{(1+i)^l \cdot \bar{l}_{[y]}} \cdot \int_0^{p-l} \frac{\bar{l}_{[y]+l+u}}{(1+i)^u} \cdot du\,.$$

Der letzte Ausdruck ist offenbar ${}_l|_{p-l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}$, d. h. er ist gleich dem Wert einer um l Jahre aufgeschobenen, kurzen, $p-l$ Jahre laufenden Rente, die dem Versicherten während jener Zeit in der Höhe dt für jedes Zeitelement dt zufließt.

Die Gleichung (68) läßt sich nun schreiben:

$$(69)\quad \bar{A}_{[y]} = \bar{P}_{[y]} \cdot |_l\bar{\mathbf{a}}_{[y]} + \pi \cdot l \cdot |_l\mathbf{a}_{[y]} - \pi \int_0^l |_t\bar{\mathbf{a}}_{[y]} \cdot dt + \pi_1 \cdot {}_l|_{p-l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}\,.$$

Sind π und π_1 als Funktionen von $\bar{P}_{[y]}$ gegeben, etwa $\pi = \varrho \cdot \bar{P}_{[y]}$ und $\pi_1 = \bar{P}_{[y]} + \varrho_1 \bar{P}_{[y]}$, wobei ϱ und ϱ_1 feste Zahlen bedeuten, so kann man aus (69) $\bar{P}_{[y]}$ bestimmen:

$$\bar{P}_{[y]} = \frac{\bar{A}_{[y]}}{|_l\bar{\mathbf{a}}_{[y]} + \varrho \cdot l \cdot |_l\bar{\mathbf{a}}_{[y]} - \varrho \int\limits_0^l |_t\bar{\mathbf{a}}_{[y]}\, dt + (1+\varrho_1) \cdot {}_l|_{p-l}\bar{\mathbf{a}}_{[y]}}.$$

Entsprechende Formeln leitet man für variable $\mathfrak{Z}^z_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^v_{[y]+t}$, $\mathfrak{Z}^d_{[y]+t}$ aus (61), (62) und (63) ab.

CARL WINTERS UNIVERSITÄTSBUCHHANDLUNG ABT. DRUCKEREI HEIDELBERG