Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Loewy, Alfred** (1873 – 1935)

Titel: **Über die Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1917, 8

Signatur UB Heidelberg: L 1431-10-50

Während die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdrucks in irreduzible Faktoren keine eindeutige ist hatte der Verfasser eine Zerlegung solcher Ausdrücke in aufeinander folgende größte, vollständig reduzible Faktoren eingeführt, die zu einer eindeutig bestimmten gemacht werden kann. Sie soll als eine hintere Zerlegung bezeichnet werden; denn man kann, wie in der vorliegenden Abhandlung gezeigt wird, auch eine Zerlegung in aufeinander folgende vordere größte, vollständig reduzible Faktoren definieren. Die neue Zerlegung hat ähnliche Eigenschaften wie die alte. Bei beiden Zerlegungen ist die Anzahl der auftretenden Faktoren die gleiche, und es besteht zwischen ihnen noch ein weiterer bemerkenswerter Zusammenhang. Zum Schluß wird die Bedeutung der neuen Zerlegung für Differentialausdrücke, die gegenseitig von derselben Art sind, dargelegt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1917 , S. XXIII - XXIV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1917. 8. Abhandlung

Über die Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren

Von
†
ALFRED LOEWY † L 1431 10/50

Eingegangen am 15. Juni 1917

Vorgelegt von P. STÄCKEL

Heidelberg 1917
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1379

Am Schluß meiner Arbeit „Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen“ (Math. Annalen Bd. 62, S. 112), in der ich den Begriff der vollständigen Reduzibilität bei Differentialgleichungen eingeführt habe, zeige ich, daß jeder lineare homogene Differentialausdruck in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegbar ist und daß diese Zerlegung im Gegensatz zu derjenigen in irreduzible Faktoren eindeutig gemacht werden kann. Neben diese alte Zerlegung eines Differentialausdruckes, die ich künftig eine Zerlegung in aufeinanderfolgende **hintere** größte vollständig reduzible Faktoren nennen will, soll hier eine neue Zerlegung gestellt werden, die ich als Zerlegung in aufeinanderfolgende **vordere** größte vollständig reduzible Faktoren bezeichnen werde. Für diese neue Zerlegung gilt der im folgenden abgeleitete Satz II; er zeigt, daß diese Zerlegung ähnlichen Charakter wie die alte hintere Zerlegung besitzt, für die das bereits früher bewiesene, hier als Satz I wiederholte Theorem besteht. Bei beiden Zerlegungen ist auffallenderweise die Anzahl der Faktoren die gleiche, und es besteht auch noch ein weiterer bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den zwei Zerlegungen; hiervon handelt Satz III. Schließlich wird in Satz IV die Bedeutung der neuen Zerlegung für Differentialausdrücke dargelegt, die gegenseitig von derselben Art sind.

Unseren Untersuchungen liegt ein fester Rationalitätsbereich Σ zugrunde, wie ich ihn in der zitierten Arbeit in den Math. Annalen Bd. **62**, S. 90 oder in meinem Aufsatz „Über lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten“ in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie, Jahrg. 1913, 17. Abhandlung, S. 3 definiert habe. Alle im folgenden auftretenden Differentialausdrücke sind ausnahmslos linear und homogen; sie haben stets Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ, diesem gehören auch alle im folgenden verwandten Funktionen der unabhängigen Variablen x an, auf ihn beziehen sich endlich auch Reduzibilität und Irreduzibilität.

Den folgenden Betrachtungen schicke ich eine Definition des Begriffes der Ähnlichkeit zweier Differentialausdrücke voraus; dabei befreie ich sie von der Voraussetzung der Integralexistenz, die ich früher (Math. Annalen Bd. **62**, S. 95) für sie benützt habe:

Zwei lineare homogene Differentialausdrücke P und Q sollen ähnlich heißen, wenn es zwei nur von der unabhängigen Variablen x abhängige, dem Rationalitätsbereiche Σ angehörige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gibt, von denen keine gleich Null ist, so daß die symbolische Relation[1]

$$Pf = gQ \tag{1}$$

besteht.

Die durch (1) definierte Beziehung der Ähnlichkeit ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Der reflexive Charakter, d. h. die Ähnlichkeit eines jeden Differentialausdruckes P mit sich selbst, folgt aus der Relation $P1 = 1P$. Daß die Beziehung symmetrisch ist, ersieht man aus der Relation

$$Q\left(\frac{1}{f}\right) = \left(\frac{1}{g}\right)P\,, \tag{2}$$

die sich aus (1) unmittelbar ableiten läßt. Ist der Differentialausdruck P außer mit Q weiter noch mit einem Differentialausdruck R ähnlich, d. h. existieren auch nicht verschwindende Funktionen $h(x)$ und $k(x)$ des Rationalitätsbereiches Σ, so daß

[1] Sind A und B zwei lineare homogene Differentialausdrücke:

$$A \equiv a_0 \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + a_m y$$

$$B \equiv b_0 \frac{d^n y}{dx^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_n y\,,$$

so ist bekanntlich

$$AB \equiv a_0 \frac{d^m B}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} B}{dx^{m-1}} + \cdots + a_m B\,.$$

Ist $f(x)$ eine bloße Funktion von x, so ist unter Af der sich aus AB ergebende Differentialausdruck zu verstehen, wenn man für B den Differentialausdruck $f(x)y$ nullter Ordnung nimmt; entsprechend ist fB der sich aus AB ergebende Differentialausdruck, wenn man A gleich dem Differentialausdruck $f(x)y$ nullter Ordnung wählt. Im besonderen ist also für $f(x) = 1$ sowohl unter 1 A als auch unter A 1 der Differentialausdruck A zu verstehen.

$$(3) \qquad Ph = kR \text{ ist,}$$

so folgt aus (2) und (3) die Relation

$$Q\left(\frac{1}{f}\right)h = \left(\frac{1}{g}\right)kR$$

oder

$$(4) \qquad Q\left(\frac{h}{f}\right) = \left(\frac{k}{g}\right)R\,.$$

Da $\frac{h(x)}{f(x)}$ und $\frac{k(x)}{g(x)}$ Funktionen des Rationalitätsbereiches Σ sind, besagt (4), daß Q und R ähnlich sind, also ist unsere Beziehung transitiv.

Aus der Definition (1) folgt unmittelbar, daß zwei ähnliche Differentialausdrücke P und Q dieselbe Ordnung haben. Weiter ersieht man aus (1), daß, wenn y_Q ein Integral der Differentialgleichung $Q=0$ ist, so ist $f(x)\cdot y_Q$ ein solches der Differentialgleichung $P=0$; aus (2) oder aus der Symmetrie folgt, daß durch jedes Integral y_P von $P=0$ ein Integral $\frac{y_P}{f(x)}$ von $Q=0$ bestimmt wird. Stehen umgekehrt zwei Differentialgleichungen $P=0$ und $Q=0$ in einer solchen Beziehung, daß man jedes Integral y_P von $P=0$ aus einem Integral y_Q von $Q=0$ durch bloße Multiplikation mit einer dem Rationalitätsbereiche Σ angehörigen Funktion $f(x)$ finden kann, also $y_P = f(x)\cdot y_Q$, und ist auch stets, wenn y_Q ein Integral von $Q=0$ ist, $f(x)\cdot y_Q$ ein Integral von $P=0$, so haben die Differentialgleichungen $P=0$ und $Q=0$ die gleiche Ordnung. Weiter wird die Differentialgleichung $Pf=0$ durch alle Integrale von $Q=0$ befriedigt, d. h. Pf muß durch Q hinten[1] teilbar sein; da Pf und Q dieselbe Ordnung haben, existiert eine Funktion $g(x)$ des Rationalitätsbereiches, so daß die Gleichung (1) besteht. Hiermit ist die Übereinstimmung der früher gegebenen Definition

---

[1] Ist der Differentialausdruck A zerlegt in das symbolische Produkt $A = A_1 A_2 \cdots A_k$, so nenne ich den letzten Faktor A_k einen hinteren Teiler von A, den ersten A_1 einen vorderen Teiler von A; die mittleren Teiler von A werden nicht verwandt. Bisher wurden in der Literatur nur die hinteren Teiler berücksichtigt.

der Ähnlichkeit mit der jetzigen für den Fall der Integralexistenz gezeigt.

Die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes Q in seine aufeinanderfolgenden **hinteren** größten vollständig reduziblen Faktoren war in der oben zitierten Arbeit in den Math. Annalen (S. 112) definiert:

$$(5) \qquad Q = V_\lambda \, V_{\lambda-1} \cdots V_2 \, V_1;$$

dabei ist V_1 ein hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu Q gehört, d. h. V_1 ist vollständig reduzibel, V_1 ist hinterer Teiler von Q und wird durch jeden irreduzibeln Differentialausdruck, der Q von hinten teilt, ebenfalls von hinten geteilt, weiter ist V_2 ein hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2$ gehört, V_3 hat die nämliche Bedeutung für $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3$ usw.

Ist

$$(6) \qquad Q = W_{\lambda'} \, W_{\lambda'-1} \cdots W_2 \, W_1$$

eine zweite Zerlegung von Q in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren, so unterscheiden sich W_1 und V_1 nur um einen bloß die unabhängige Variable x enthaltenden Faktor; denn dies ist allgemein für zwei hintere größte vollständig reduzible Differentialausdrücke der Fall, die zu dem nämlichen Differentialausdruck gehören. Man hat also

$$(7) \qquad W_1 = f_1 V_1,$$

wobei $f_1(x)$ eine bloße Funktion von x ist. Führt man (7) in (6) ein und setzt die rechten Seiten von (5) und (6) gleich, so ergibt sich

$$(8) \qquad W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2 f_1 = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2.$$

Der Differentialausdruck $W_2 f_1$ ist infolge der Relation $W_2(f_1) = (1) W_2 f_1$ mit W_2 ähnlich; hieraus schließt man, daß er ebenso wie W_2 und also auch wie V_2 ein hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu dem Differentialausdruck (8) gehört. Hieraus folgt die Existenz einer bloßen Funktion von x, $f_2(x)$, so daß

$$W_2 f_1 = f_2 V_2 \tag{9}$$

wird. Führt man (9) in die linke Seite von (8) ein, so erhält man

$$W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 f_2 = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3. \tag{10}$$

Da $W_3 f_2$ mit W_3 ähnlich ist, ergibt sich, daß $W_3 f_2$ ein hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu (10) gehört; die gleiche Eigenschaft hat aber auch V_3. Mithin folgt die Existenz einer bloßen Funktion von x, $f_3(x)$, so daß

$$W_3 f_2 = f_3 V_3 \tag{11}$$

ist. Allgemein ergibt sich, indem man diese Schlußweise fortsetzt, ein System von Relationen

$$W_i f_{i-1} = f_i V_i \quad (i = 1, 2, \cdots, \lambda), \tag{12}$$

und man sieht, daß $\lambda = \lambda'$ sein muß. In (12) sind $f_0 = 1$, und $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$ bloße Funktionen von x, also Differentialfunktionen nullter Ordnung, die dem Rationalitätsbereich Σ angehören.

In den Gleichungen (12) hat man den schon früher für die Zerlegung eines Differentialausdruckes in hintere größte vollständig reduzible Faktoren von mir aufgestellten

Satz I. **Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck Q in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt wird, so enthält jede Zerlegung gleichviele größte vollständig reduzible Faktoren, und diese sind bei irgend zwei Zerlegungen stets der Reihe nach einander so zugeordnet, daß zwei zugeordnete größte vollständig reduzible Differentialausdrücke ähnlich sind.**

Verlangt man von der Zerlegung (5), daß der Koeffizient der höchsten Ableitung bei $V_1, V_2, \cdots, V_{\lambda-1}$ gleich der Einheit, bei V_λ gleich dem Koeffizienten der höchsten Ableitung von Q sein soll, so sind die Differentialausdrücke $V_1, V_2, \cdots, V_\lambda$, also auch die Zerlegung (5), **eindeutig bestimmt.**

Ehe wir uns zu der neuen Zerlegung eines Differentialausdruckes in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren wenden, machen wir einige Bemerkungen über adjungierte Differentialausdrücke. Ist Q irgend ein linearer homogener Differentialausdruck, so soll unter $\hat{Q}$ der ihm adjungierte Differentialausdruck verstanden werden.

Ist

$$Q = q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n y ,$$

so ist der adjungierte Differentialausdruck:

$$\hat{Q} = \frac{d^n(q_0 y)}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(q_1 y)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}(q_2 y)}{dx^{n-2}} \cdots (-1)^n q_n y .$$

Die Beziehung ist eine symmetrische, d. h. der adjungierte Differentialausdruck von $\hat{Q}$ ist Q.

Wir verwenden im folgenden ein bekanntes Theorem von Herrn FROBENIUS[1], das besagt: Ist $Q = RS$, so ist $\hat{Q} = \hat{S}\hat{R}$. Mit seiner Hilfe beweisen wir zunächst den folgenden Satz (a), der später noch verallgemeinert werden wird:

Satz (a): Ist ein Differentialausdruck T vollständig reduzibel, so hat sein adjungierter $\hat{T}$ die gleiche Eigenschaft.

Der lineare homogene Differentialausdruck T sei vollständig reduzibel, d. h. T sei kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Differentialausdrücken. Diese seien mit $J_1, J_2, \cdots J_g$ bezeichnet und derart gewählt, was stets möglich ist, daß die Ordnung von T gleich der Summe der Ordnungen von $J_1, J_2, \cdots, J_g$ ist. Nun kann man T in den Formen darstellen:

$$T = A_1 N_1 = A_2 N_2 = \ldots = A_g N_g , \tag{13}$$

wobei N_1 ein kleinstes gemeinsames Vielfache von $J_2, J_3, \cdots, J_g$, N_2 ein kleinstes gemeinsames Vielfache von $J_1, J_3, \cdots, J_g$ usw.,

---

[1] FROBENIUS, Journ. f. r. u. ang. Math. **76**, 263 (1873), vgl. auch die Darstellung bei LUDW. SCHLESINGER, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, S. 55ff., Leipzig 1895.

N_g ein kleinstes gemeinsames Vielfache von $J_1, J_2, \cdots, J_{g-1}$ ist, $A_1, A_2, \cdots, A_g$ bedeuten irreduzible Differentialausdrücke, die mit J_1 bezw. J_2 usw. bezw. J_g von derselben Art sind. Nach dem zitierten FROBENIUSschen Satz wird

$$\hat{T} = \hat{N}_1 \hat{A}_1 = \hat{N}_2 \hat{A}_2 = \cdots = \hat{N}_g \hat{A}_g \,, \quad \text{d. h.} \tag{14}$$

der Differentialausdruck $\hat{T}$ ist durch jeden der Differentialausdrücke $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_g$, also auch durch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von ihnen, das wir mit V bezeichnen wollen, von hinten teilbar. Mithin existiert ein Differentialausdruck S, für den

$$\hat{T} = S\,V \quad \text{wird.} \tag{15}$$

Da $A_1, A_2, \cdots, A_g$ irreduzible Differentialausdrücke sind, trifft das gleiche auch für $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_g$ zu; denn wäre $\hat{A}_i$, wobei i eine der Zahlen $1, 2, \cdots, g$ bedeutet, reduzibel, so würde nach dem erwähnten FROBENIUSschen Satz auch der zu $\hat{A}_i$ adjungierte Differentialausdruck A_i, der irreduzibel ist, reduzibel sein müssen. Da $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_g$ irreduzibele Differentialausdrücke sind, ist ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches V ein vollständig reduzibler Differentialausdruck. Da dieses durch jeden der Differentialausdrücke $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_g$ hinten teilbar ist, existieren Differentialausdrücke $L_1, L_2, \cdots, L_g$, so daß $V = L_1 \hat{A}_1$, $V = L_2 \hat{A}_2, \cdots,$ $V = L_g \hat{A}_g$ wird. Aus diesen Gleichungen folgt nach (15)

$$\hat{T} = S L_1 \hat{A}_1, \quad \hat{T} = S L_2 \hat{A}_2, \cdots, \quad \hat{T} = S L_g \hat{A}_g \,. \tag{16}$$

Nun war nach (14) $\hat{T} = \hat{N}_1 \hat{A}_1$, $\hat{T} = \hat{N}_2 A_2, \cdots,$ $\hat{T} = \hat{N}_g \hat{A}_g$.

Folglich ergeben sich die Relationen:

$$\hat{N}_1 = S L_1, \;\; \hat{N}_2 = S L_2, \;\; \cdots, \;\; \hat{N}_g = S L_g \,. \tag{17}$$

Aus ihnen erhält man durch Übergang zu den adjungierten Differentialausdrücken:

$$N_1 = \hat{L}_1 \hat{S}, \;\; N_2 = \hat{L}_2 \hat{S}, \cdots \;\; N_g = \hat{L}_g \hat{S} \,. \tag{18}$$

Da T als Ordnung die Summe der Ordnungen von $J_1, J_2, \cdots, J_g$ hat, besitzen offenbar $N_1, N_2, \cdots, N_g$ als kleinste gemeinsame Vielfache von $J_2, J_3, \cdots, J_g$ bezw. $J_1, J_3, \cdots, J_g$ usw. bezw.

$J_1, J_2, \cdots, J_{g-1}$ keinen allen gemeinsamen Teiler; daher muß sich $\hat{S}$ in den Formeln (18) auf eine bloße Funktion von x reduzieren, also $\hat{S}=g(x)$, woraus auch $S=g(x)$ folgt. Mithin unterscheidet sich $\hat{T}$, wie aus (15) hervorgeht, von einem kleinsten gemeinsamen Vielfachen V der irreduziblen Differentialausdrücke $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_g$ nur um einen Faktor $g(x)$, der eine bloße Funktion von x ist, d. h. $\hat{T}$ selbst ist kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Differentialausdrücken und also vollständig reduzibel. Hiermit ist die von uns ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Definition. Hat man einen Differentialausdruck Q, so heißt M ein **vorderer** größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu Q gehört, wenn M erstens vollständig reduzibel ist, zweitens M den Differentialausdruck Q vorn teilt und drittens M durch jeden irreduziblen Differentialausdruck, der Q vorn teilt, ebenfalls vorn geteilt wird.

Die Existenz eines solchen Differentialausdruckes M ergibt sich folgendermaßen: Wir bilden den zu Q adjungierten Differentialausdruck $\hat{Q}$ und betrachten einen hinteren größten vollständig reduziblen Differentialausdruck, der zu $\hat{Q}$ gehört; ein solcher sei T. Alsdann ist $\hat{Q}=Q_1 T$. Hieraus erhält man durch Übergang zu den adjungierten Differentialausdrücken

$$Q=\hat{T}\hat{Q}_1. \tag{19}$$

Wir behaupten, daß $\hat{T}$ ein vorderer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu Q gehört. Aus der vollständigen Reduzibilität von T folgt nach dem zuletzt bewiesenen Satze (a) diejenige von $\hat{T}$, weiter teilt $\hat{T}$, wie (19) zeigt, den Differentialausdruck Q vorn und schließlich hat $\hat{T}$ auch die dritte Eigenschaft, die für einen vorderen größten vollständig reduziblen Differentialausdruck von Q stattfinden sollte. Ist nämlich C ein irreduzibler Differentialausdruck, der Q vorn teilt, also $Q=CR$, so teilt C auch $\hat{T}$ vorn. Zunächst folgt aus $Q=CR$ die weitere Relation $\hat{Q}=\hat{R}\hat{C}$. Da C irreduzibel sein soll, trifft dies auch für $\hat{C}$ zu, und man hat in $\hat{C}$ einen irreduziblen hinteren Teiler von $\hat{Q}$ vor sich. Ein solcher muß aber einen hinteren größten vollständig reduziblen Differentialausdruck T, der zu $\hat{Q}$ gehört, hinten teilen, so daß eine Relation $T=T_1\hat{C}$ besteht. Aus dieser folgt $\hat{T}=C\hat{T}_1$,

d. h. $\hat{T}$ ist, wie wir zeigen wollen, durch C vorn teilbar. Da $\hat{T}$ demnach die drei gewünschten Eigenschaften besitzt, ist die Existenz eines vorderen größten vollständig reduziblen Differentialausdruckes, der zu Q gehört, erwiesen.

Nunmehr erklären wir die Zerlegung

$$Q = R_1 R_2 \cdots R_\mu \tag{20}$$

eines Differentialausdruckes Q in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren. Hierunter soll verstanden werden, daß R_1 ein vorderer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu Q gehört, daß R_2 die entsprechende Bedeutung in bezug auf $R_2 R_3 \cdots R_\mu$ hat, R_3 in bezug auf $R_3 R_4 \cdots R_\mu$ usw. Wir nennen R_1 einen ersten vorderen, R_2 einen zweiten vorderen usw., R_μ einen μten vorderen größten vollständig reduziblen Differentialausdruck, der zu Q gehört.

Es gilt nun der folgende

Satz (b). Ist R_i ein $i$ter **vorderer** größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu Q gehört, so ist der zu R_i adjungierte Differentialausdruck $\hat{R}_i$ ein $i$ter **hinterer** größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu $\hat{Q}$ gehört.

Mit anderen Worten:

Ist

$$Q = R_1 R_2 \cdots R_\mu \tag{20}$$

eine Zerlegung von Q in aufeinanderfolgende **vordere** größte vollständig reduzible Faktoren, so ist

$$\hat{Q} = \hat{R}_\mu \hat{R}_{\mu-1} \cdots \hat{R}_1 \tag{21}$$

eine Zerlegung von $\hat{Q}$ in aufeinanderfolgende **hintere** größte vollständig reduzible Faktoren.

Für $\mu = 1$ ist in dem voraufgehenden Satze (b) der Satz (a) als Spezialfall enthalten; denn ist bei der Zerlegung (20) und also auch bei (21) $\mu = 1$, so bedeutet dies, daß mit Q auch $\hat{Q}$ vollständig reduzibel ist.

Zum Beweise unseres Satzes (b) bedenken wir, daß aus der vollständigen Reduzibilität von R_1 nach Satz (a) auch diejenige von $\hat{R}_1$ folgt. Wäre nun nicht $\hat{R}_1$, sondern ein Differentialausdruck T von höherer Ordnung ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu $\hat{Q}$ gehört, so müßte T durch $\hat{R}_1$ hinten teilbar sein, also

$$T = U\hat{R}_1 . \tag{22}$$

Dann wäre, wie unter (19) gezeigt, $\hat{T}$ ein erster vorderer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu Q gehört, und man hätte nach (19) eine Relation $Q = \hat{T}\hat{Q}_1$ oder nach (22) die weitere

$$Q = R_1 \hat{U} \hat{Q}_1 . \tag{23}$$

Sei nun J ein irreduzibler Differentialausdruck, der den Differentialausdruck (22) $T = U\hat{R}_1$, aber nicht $\hat{R}_1$ hinten teilt; ein solcher Differentialausdruck J existiert sicher, wenn der vollständig reduzible Differentialausdruck T eine höhere Ordnung als $\hat{R}_1$ hat. Für ein derartig bestimmtes J würde es also einen Differentialausdruck H geben, so daß $U\hat{R}_1 = HJ$, aber niemals $\hat{R}_1$ gleich KJ würde. Mithin wäre nach (23) $Q = \hat{J}\hat{H}\hat{Q}_1$, d. h. Q wäre durch den irreduziblen Differentialausdruck $\hat{J}$ vorn teilbar. Da sich aber $\hat{R}_1$ niemals in die Form KJ bringen lassen sollte, kann R_1 nicht durch $\hat{J}$ vorn teilbar sein. Mithin ist R_1 im Widerspruch mit unserer Voraussetzung kein erster vorderer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu Q gehört. Folglich kann T nicht von höherer Ordnung als $\hat{R}_1$ sein, und es muß sich in (22) U auf eine Differentialfunktion nullter Ordnung, also eine bloße Funktion von x, reduzieren. Da sich demnach T und $\hat{R}_1$ nur um einen Faktor unterscheiden, der eine bloße Funktion von x ist, haben wir in $\hat{R}_1$ ebenso wie in T einen ersten hinteren größten vollständig reduziblen Differentialausdruck, der zu $\hat{Q}$ gehört. Die Fortsetzung des Beweisverfahrens ist unmittelbar klar. Da R_2 ein erster vorderer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu $R_2 R_3 \cdots R_\mu$ gehört, kann R_2 in bezug auf $R_2 R_3 \cdots R_\mu$ dem gleichen Schlußverfahren wie R_1 in bezug auf $R_1 R_2 \cdots R_\mu$ unterworfen werden. Folglich ist $\hat{R}_2$ ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu $\hat{R}_\mu \hat{R}_{\mu-1} \cdots \hat{R}_2$ gehört; also ist nach (21) $\hat{R}_2$ ein zweiter hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu $\hat{Q}$ gehört. Operiert man auf diese Weise der Reihe nach mit $R_3 R_4 \cdots R_\mu$, $R_4 R_5 \cdots R_\mu$ usw. fort, so erhält man den ganzen Inhalt unseres Satzes (b).

Infolge der Symmetrie gilt natürlich das (b) entsprechende Theorem:

Satz (b'). Ist R_i ein $i$ter **hinterer** größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu Q gehört, so ist der zu R_i adjungierte Differentialausdruck $\hat{R}_i$ ein $i$ter **vorderer** größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu $\hat{Q}$ gehört.

Jetzt können wir uns zum Beweise des dem Satze I analogen Theorems wenden:

Satz II. Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck Q in aufeinanderfolgende **vordere** größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt wird

$$Q = R_1 R_2 \cdots R_\mu, \tag{20}$$

so enthält jede Zerlegung gleichviele größte vollständig reduzible Faktoren, und diese sind bei irgend zwei Zerlegungen stets der Reihe nach einander so zugeordnet, daß zwei zugeordnete größte vollständig reduzible Differentialausdrücke ähnlich sind.

Zum Beweise sei außer (20) auch noch

$$Q = S_1 S_2 \cdots S_{\mu'}, \tag{24}$$

eine zweite Zerlegung von Q in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren. Durch Übergang zu den adjungierten Differentialausdrücken erhält man aus (20) und (24)

$$\hat{Q} = \hat{R}_\mu \hat{R}_{\mu-1} \cdots \hat{R}_2 \hat{R}_1 \quad \text{und} \tag{21}$$

$$\hat{Q} = \hat{S}_{\mu'} \hat{S}_{\mu'-1} \cdots \hat{S}_2 \hat{S}_1. \tag{25}$$

Nach dem Satze (b) sind (21) und (25) Zerlegungen von $\hat{Q}$ in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren.

Daher kann man auf (21) und (25) den Satz I anwenden. Nach ihm ist $\mu=\mu'$, und es gibt nach (12) Funktionen $g_i(x)$ des Rationalitätsbereiches Σ, die nur von x abhängen, so daß

$$\hat{S}_i g_{i-1} = g_i \hat{R}_i \quad (i=1, 2, \cdots, \mu)$$

oder durch Übergang zu den adjungierten Ausdrücken

$$R_i g_i = g_{i-1} \; S_i \quad (i=1, 2, \cdots, \mu)$$

wird, wobei $g_0 = 1$ ist. Die letzten Gleichungen besagen, daß zwei Differentialausdrücke R_i und S_i, die dem gleichen Index i $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ entsprechen, stets ähnlich sind; hiermit ist unser Satz bewiesen.

Satz III. Ist

$$(5) \qquad Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2 V_1$$

irgend eine Zerlegung des Differentialausdruckes Q in aufeinanderfolgende **hintere** größte vollständig reduzible Faktoren und

$$(20) \qquad Q = R_1 R_2 \cdots R_{\mu-1} R_\mu$$

eine solche in aufeinanderfolgende **vordere** größte vollständig reduzible Faktoren, so ist $\lambda=\mu$; die Anzahl der Faktoren ist also bei beiden Zerlegungen die gleiche. Weiter existieren für jedes $i=1, 2, \cdots, \lambda-1$ Differentialausdrücke F_i und G_i[1], so daß

$$(26) \qquad V_i V_{i-1} \cdots V_1 = F_i R_{\lambda-i+1} R_{\lambda-i+2} \cdots R_\lambda \quad (i=1, 2, \cdots, \lambda-1)$$

und

$$(27) \qquad R_1 R_2 \cdots R_i = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_{\lambda-i+1} G_i \quad (i=1, 2, \cdots, \lambda-1)$$

wird. $R_{\lambda-i+1} R_{\lambda-i+2} \cdots R_\lambda$ ist also ein hinterer Teiler von $V_i V_{i-1} \cdots V_1$, während $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_{\lambda-i+1}$ ein vorderer Teiler von $R_1 R_2 \cdots R_i$ ist. Für $i=\lambda$ reduzieren sich (26) und (27) gleichmäßig auf $R_1 R_2 \cdots R_\lambda = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_1$ mit $F_\lambda = G_\lambda = 1$.

---

[1] Im speziellen können F_i und G_i auch Differentialausdrücke nullter Ordnung, also bloße Funktionen der unabhängigen Variablen x werden.

Da V_1 ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu Q gehört, muß V_1 durch den vollständig reduziblen Differentialausdruck R_μ, der nach (20) ein hinterer Teiler von Q ist, ebenfalls hinten teilbar sein. Also existiert ein Differentialausdruck F_1, so daß

$$V_1 = F_1 R_\mu \tag{28}$$

wird. Führt man den Wert von V_1 aus (28) in (5) ein und beachtet hierbei die Gleichung (20), so erhält man die Relation:

$$V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 F_1 = R_1 R_2 \cdots R_{\mu-1}. \tag{29}$$

Da V_2 nach Voraussetzung ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2$ gehört, teilt ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu dem Differentialausdruck (29) $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 F_1$ gehört, notwendig $V_2 F_1$, wie sich folgendermaßen ergibt: Ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu (29) gehört, sei mit X_1 bezeichnet. Dann ist (29) durch X_1 und F_1, also auch durch ihr hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches W hinten teilbar. Dieses Vielfache W läßt sich in die Form bringen $W = LF_1$, wobei der Differentialausdruck L infolge der vollständigen Reduzibilität von X_1 ebenfalls vollständig reduzibel ist. Da (29), wie schon bemerkt, durch $W = LF_1$ hinten teilbar ist, muß das Produkt $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2$ durch L hinten teilbar sein. Nun wär V_2 ein erster größter hinterer vollständig reduzibler Differentialausdruck, der zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2$ gehört, und L ein hinterer vollständig reduzibler Teiler des genannten Produktes. Mithin muß V_2 durch L, also $V_2 F_1$ durch $LF_1 = W$ teilbar sein. Folglich muß $V_2 F_1$ auch durch den hinteren Teiler X_1 von W hinten teilbar sein, so daß sich eine Relation ergibt

$$V_2 F_1 = X_2 X_1. \tag{30}$$

Da X_1 ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu dem Ausdruck (29) gehört, und da (29) durch den vollständig reduziblen Differentialausdruck $R_{\mu-1}$ hinten teilbar ist, muß auch X_1 durch $R_{\mu-1}$ teilbar sein. Folglich trifft das gleiche auch für den Differentialausdruck (30) $X_2 X_1 = V_2 F_1$ zu, und es muß ein Differentialausdruck F_2 existieren, so daß $V_2 F_1 = F_2 R_{\mu-1}$ wird. Aus der letzten Relation ergibt sich $V_2 F_1 R_\mu = F_2 R_{\mu-1} R_\mu$ oder nach (28)

(31) $$V_2 V_1 = F_2 R_{\mu-1} R_\mu .$$

Führt man (31) in die Zerlegung (5) ein und beachtet (20), so schließt man, daß

(32) $$V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 F_2 = R_1 R_2 \cdots R_{\mu-2}$$

wird. Da V_3 ein erster hinterer größter vollständig reduzibler Differentialausdruck ist, der zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3$ gehört, zieht man aus (32) die entsprechende Folgerung wie aus (29). Demnach muß $V_3 F_2$ durch den vollständig reduziblen Differentialausdruck $R_{\mu-2}$ hinten teilbar sein, d. h. es existiert ein Differentialausdruck F_3, so daß $V_3 F_2 = F_3 R_{\mu-2}$ wird oder nach (31)

(33) $$V_3 V_2 V_1 = F_3 R_{\mu-2} R_{\mu-1} R_\mu .$$

Derart fortfahrend beweist man sukzessiv, wie es in den Relationen (28), (31) und (33) bereits für $i = 1, 2, 3$ geschehen ist, die Existenz von Differentialfunktionen F_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, \mu)$, so daß die Relationen

(34) $$V_i V_{i-1} \cdots V_1 = F_i R_{\mu-i+1} R_{\mu-i+2} \cdots R_\mu \; (i = 1, 2, \cdots, \mu)$$

bestehen.

Für $i = \mu$ lautet (34)

$$V_\mu V_{\mu-1} \cdots V_1 = F_\mu R_1 R_2 \cdots R_\mu$$

oder nach (20) $V_\mu V_{\mu-1} \cdots V_1 = F_\mu Q$. Da Q nach (5) gleich $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_1$ ist, hat man die neue Gleichung

$$V_\mu V_{\mu-1} \cdots V_1 = F_\mu V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_1 .$$

Aus dieser folgt, daß

(35) $$\mu \geqq \lambda \text{ ist.}$$

Geht man von (5) und (20) zu den adjungierten Differentialausdrücken über, so hat man in

$$(36) \qquad \hat{Q} = \hat{V}_1 \hat{V}_2 \cdots \hat{V}_\lambda$$

eine Zerlegung von $\hat{Q}$ in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren und in

$$(21) \qquad \hat{Q} = \hat{R}_\mu \hat{R}_{\mu-1} \cdots \hat{R}_1$$

eine solche in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren vor sich. Wendet man auf (36) und (21) das bereits in Formel (34) bewiesene Resultat an, so ergibt sich die Existenz von Differentialausdrücken H_i $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$, für die die Gleichungen

$$(37) \qquad \hat{R}_i \hat{R}_{i-1} \cdots \hat{R}_1 = H_i \hat{V}_{\lambda-i+1} \hat{V}_{\lambda-i+2} \cdots \hat{V}_\lambda \quad (i = 1, 2, \cdots, \lambda)$$

bestehen; weiter ist (35) entsprechend $\lambda \geq \mu$. Aus (35) und der letzten Relation ersieht man, daß $\lambda = \mu$ ist. Durch Übergang zu den adjungierten Differentialausdrücken erhält man aus (37)

$$R_1 R_2 \cdots R_i = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_{\lambda-i+1} \hat{H}_i \,.$$

Setzt man den Differentialausdruck $\hat{H}_i = G_i$, so stellt die letzte Gleichung die zu beweisende Relation (27) dar. Da $\mu = \lambda$ ist, hat man in (34) die weiter zu beweisende Gleichung (26). Für $\lambda = \mu$ ergibt sich aus (5) und (20) $R_1 R_2 \cdots R_\lambda = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_1$, also $G_\lambda = F_\lambda = 1$. Hiermit ist unser Theorem III in allen seinen Teilen bewiesen.

Ebenso wie die Zerlegung (5) von Q in hintere kann auch die Zerlegung (20) von Q in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren zu einer eindeutig bestimmten gemacht werden. Verlangt man, daß der Koeffizient der höchsten Ableitung bei $R_1, R_2, \cdots, R_{\mu-1}$ gleich 1 und bei R_μ gleich dem Koeffizienten der höchsten Ableitung von Q sein soll, so ist die Zerlegung (20) völlig eindeutig bestimmt. Offenbar existiert eine solche Zerlegung. Ist dann $Q = S_1 S_2 \cdots S_\mu$ eine zweite Zerlegung von Q in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren, so gibt es, wie beim Beweise des Satzes II nachgewiesen wurde, eine Funktion $g(x)$, daß $R_1 g = S_1$ ist. Soll nun der Koeffizient der höchsten Ableitung bei R_1 und bei S_1 übereinstimmen, so muß $g = 1$, also $R_1 = S_1$ sein. Man schließt dann weiter, daß $R_2 = S_2, \cdots, R_\mu = S_\mu$ wird.

In den Math. Annalen (zuerst im Bd. **70**, S. 551 und dann auf neue Art im Bd. **72**, S. 210, auch übergegangen in die Dissertation von H. Blumberg, Über algebraische Eigenschaften von linearen homogenen Differentialausdrücken, Göttingen 1912, S. 28) habe ich den folgenden Satz bewiesen: Sind A und A_1 zwei Differentialausdrücke derselben Art und ist A zerlegbar in $A = BC$, so läßt sich A_1 zerlegen in $A_1 = B_1 C_1$, wobei B mit B_1 und C mit C_1 von derselben Art sind. Aus diesem Satze ergibt sich leicht, daß, wenn

$$Q = R_1 R_2 \cdots R_\lambda \tag{20}$$

eine Zerlegung des Differentialausdruckes Q in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren ist, ein Differentialausdruck Q^*, der mit Q von derselben Art ist, in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt werden kann

$$Q^* = R_1^* R_2^* \cdots R_\lambda^*, \tag{38}$$

so daß zwei größte vollständig reduzible Differentialausdrücke R_i und R_i^* mit gleichem Index i $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$ stets von derselben Art sind. Ist

$$Q^* = U_1 U_2 \cdots U_\lambda$$

irgend eine beliebige andere Zerlegung von Q^* in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren, so sind nach Satz II U_i und R_i^* von derselben Art (ja sogar ähnlich); mithin sind wegen der Transitivität des Artbegriffes auch R_i und U_i von derselben Art. Folglich hat man den

Satz IV. Wie auch immer zwei lineare homogene Differentialausdrücke, die von derselben Art sind, in **vordere** größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt werden, stets enthält eine jede solche Zerlegung gleich viele größte vollständig reduzible Faktoren, und diese sind immer der Reihe nach einander so zugeordnet, daß zwei zugeordnete Differentialausdrücke von derselben Art sind.

Den entsprechenden Satz für die hintere Zerlegung habe ich bereits in den Math. Annalen Bd. **70**, S. 559 veröffentlicht.

Folgendes kann noch bemerkt werden: Zerlegt man Q oder einen Differentialausdruck aus der Klasse jener Differentialausdrücke, die mit Q von derselben Art sind, in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren, so ergibt sich nach Satz III die gleiche Anzahl von Faktoren, wie wenn man einen beliebigen Differentialausdruck der Klasse in hintere größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt.

Zur Erläuterung des Voraufgehenden behandeln wir noch kurz als Beispiel den linearen homogenen Differentialausdruck

$$\varphi(y) = c_0 \frac{d^m y}{dx^m} + c_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + c_{m-1} \frac{dy}{dx} + c_m y$$

mit konstanten Koeffizienten für einen Rationalitätsbereich, der nur Konstante enthält. Die zugehörige charakteristische Funktion

$$\varphi(\varrho) = c_0 \varrho^m + c_1 \varrho^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\varrho + c_m$$

sei in dem zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche zerlegt in

$$\varphi(\varrho) = \varphi_1(\varrho) \cdot [\varphi_2(\varrho)]^2 \cdot [\varphi_3(\varrho)]^3 \cdots [\varphi_k(\varrho)]^k ,$$

wobei $\varphi_1(\varrho), \varphi_2(\varrho), \cdots, \varphi_k(\varrho)$ teilerfremde Polynome bedeuten und $[\varphi_i(\varrho)]^i$ das Produkt aller genau in der $i$ten Potenz auftretenden Teiler von $\varphi(\varrho)$ sein soll. Hat $\varphi(\varrho)$ keinen $i$fachen Teiler, so bleibe $[\varphi_i(\varrho)]^i$ einfach fort. Man bilde die Polynome

$$\begin{aligned} R_1(\varrho) &= \varphi_1(\varrho) \cdot \varphi_2(\varrho) \cdots \varphi_k(\varrho)\,^{1)} , \\ R_2(\varrho) &= \varphi_2(\varrho) \cdot \varphi_3(\varrho) \cdots \varphi_k(\varrho) , \\ &\vdots \\ R_{k-1}(\varrho) &= \varphi_{k-1}(\varrho) \cdot \varphi_k(\varrho) , \\ R_k(\varrho) &= \varphi_k(\varrho) \end{aligned}$$

[1]) $R_1(\varrho)$ ist kleinstes gemeinsames Vielfaches aller irreduzibeln Faktoren von $\varphi(\varrho)$ und kann daher als ein erster größter vollständig reduzibler Teiler des Polynoms $\varphi(\varrho)$ angesprochen werden.

und führe die ihnen entsprechenden linearen homogenen Differentialausdrücke $R_1(y)$, $R_2(y)$, $\cdots$, $R_k(y)$ ein. Dann ist, wie man leicht sieht,

$$\varphi(y) = R_1 R_2 \cdots R_{k-1} R_k$$

eine Zerlegung des linearen homogenen Differentialausdruckes $\varphi(y)$ in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren, und

$$\varphi(y) = R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1$$

eine solche in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren. Weiter ist stets der Differentialausdruck $R_1 R_2 \cdots R_i$ durch $R_k R_{k-1} \cdots R_{k-i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots k)$ vorn teilbar. Aus der Vertauschbarkeit der linearen homogenen Differentialausdrücke mit konstanten Koeffizienten folgt dann unmittelbar, wie es unserem Satz III entspricht, daß $R_i R_{i-1} \cdots R_2 R_1$ stets durch $R_{k-i+1} R_{k-i+2} \cdots R_{k-1} R_k$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ hinten teilbar sein muß.