Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Dynamik. II.**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1917, 10

Bevor in Fortsetzung der im ersten Teile für die Irreduktibilität von Differentialgleichungssystemen ausgeführten Untersuchungen auf die Diskussion der Integrale der Hamiltonschen Differentialgleichungen näher eingegangen wird, soll zunächst die Frage erörtert werden, welche Form diese in die Jacobi-Weierstraßsche Normalform transformierten Differentialgleichungen der Dynamik annehmen, wenn die Integrale des Energieprinzips und des Prinzips der Flächen zu deren Reduktion benutzt werden. Sodann wird die Beschaffenheit der Integrale nach Transformation der Differentialgleichungen in die Normalform mittels der Koeffizienten der Energie und deren nach den Parametern genommenen Differentialquotienten für den Fall untersucht, daß die Abel-Weierstraßsche, in unbestimmten Konstanten lineare Hilfsfunktion einer algebraischen Gleichung mit nur verschiedenen Lösungen genügt, und endlich für den Fall gleicher Lösungen derselben den Differentialgleichungen eine für die Untersuchung der Integrale geeignete Normalform gegeben.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1917 , S. XXVIII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1917. 10. Abhandlung

Über die HAMILTONschen Differentialgleichungen der Dynamik

II.

Von

LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

Eingegangen am 14. Juli 1917

Heidelberg 1917
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1384

5.

Zur Aufstellung der HAMILTONschen Gleichungen, die wir im folgenden zunächst nur unter der Voraussetzung, daß sie algebraische Differentialgleichungen darstellen, näher untersuchen wollen, muß die Annahme gemacht werden, daß die Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten und den freien Parametern $p_1, p_2, \dots p_\mu$ durch algebraische Gleichungen gegeben sind, welche die Zeit t nicht explizite enthalten, während die in den Koordinaten, also auch in den Parametern ausgedrückte Kräftefunktion U von t abhängen darf. Indem dann die lebendige Kraft T des Systems die Form annimmt

$$T = \tfrac{1}{2}\Delta_{11} q_1^2 + \tfrac{1}{2}\Delta_{22} q_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\Delta_{\mu\mu} q_\mu^2 + \Delta_{12} q_1 q_2 + \cdots + \Delta_{\mu-1\,\mu} q_{\mu-1} q_\mu ,$$

worin die Δ algebraische, von t unabhängige Funktionen der Parameter $p_1, p_2, \dots p_\mu$, und die q durch

$$q_s = \frac{\partial T}{\partial p_s'}$$

definiert sind, ist mit Hilfe dieser homogenen Funktion zweiten Grades der q die Energie $E = T - U$ in der Form gegeben

$$E = \tfrac{1}{2}\Delta_{11} q_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\Delta_{\mu\mu} q_\mu^2 + \Delta_{12} q_1 q_2 + \cdots + \Delta_{\mu-1\,\mu} q_{\mu-1} q_\mu - U(t, p_1, \dots p_\mu) .$$

Nehmen wir nunmehr weiter an, daß auch die Kräftefunktion die Zeit t nicht explizite enthält, so gilt bekanntlich das Energieprinzip $E = h$, worin h eine Konstante bedeutet, und es ist somit

$$\tfrac{1}{2}\Delta_{11} q_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\Delta_{\mu\mu} q_\mu^2 + \Delta_{12} q_1 q_2 + \cdots + \Delta_{\mu-1\,\mu} q_{\mu-1} q_\mu - U(p_1, \dots p_\mu) = h ,$$

oder, wenn $H = -T - U$ gesetzt wird,

$$H - \sum_{1}^{\mu} p_s' \frac{\partial H}{\partial p_s'} = h$$

ein Integral der HAMILTONschen Differentialgleichungen

$$\frac{dp_\rho}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_\rho}, \quad \frac{dq_\rho}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu).$$

Ist nun die von t freie Kräftefunktion U eine algebraische Funktion der rechtwinkligen Koordinaten, also auch der obigen Voraussetzung gemäß eine von t freie algebraische Funktion der Parameter, so wird sich bekanntlich mittels der linearen Substitution mit willkürlichen konstanten Koeffizienten

$$(1) \qquad v = a_{11}\Delta_{11} + \cdots + a_{\mu\mu}\Delta_{\mu\mu} + a_{12}\Delta_{12} + \cdots + a_{\mu-1\mu}\Delta_{\mu-1\mu} + aU$$

eine mit Adjungierung von $p_1, \ldots p_\mu$ irreduktible algebraische Gleichung

$$(2) \quad G(v, p_1, \ldots p_\mu) = g_0(p_1, \ldots p_\mu)v^\nu + g_1(p_1, \ldots p_\mu)v^{\nu-1} + \cdots + g_\nu(p_1, \ldots p_\mu) = 0$$

aufstellen lassen von der Beschaffenheit, daß sich durch eine Lösung v_1 derselben, welche den in dem Ausdrucke der Energie enthaltenen Zweigen der Δ und U entsprechen soll, die Koeffizienten der q-Potenzen in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft des Systems und die Kräftefunktion in der Form darstellen

$$\Delta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(v_1, p_1, \ldots p_\mu), \quad U = g(v_1, p_1, \ldots p_\mu),$$

worin $g_{\alpha\beta}$ und g ganze Funktionen $\nu-1^{\text{ten}}$ Grades von v_1 mit in $p_1, \ldots p_\mu$ und den a rationalen Koeffizienten bedeuten, und somit das Energieprinzip die Form annimmt

$$(3) \quad E = \tfrac{1}{2} g_{11} q_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2} g_{\mu\mu} q_\mu^2 + g_{12} q_1 q_2 + \cdots + g_{\mu-1\mu} q_{\mu-1} q_\mu - g = h,$$

während die HAMILTONschen Differentialgleichungen in

$$(4)\begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = g_{1\rho}q_1 + g_{2\rho}q_2 + \cdots + g_{\mu\rho}q_\mu \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = -\frac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial p_\rho}q_1^2 - \cdots - \frac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial p_\rho}q_\mu^2 - \dfrac{\partial g_{12}}{\partial p_\rho}q_1 q_2 - \cdots \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial g_{\mu-1\mu}}{\partial p_\rho}q_{\mu-1}q_\mu + \dfrac{\partial g}{\partial p_\rho} \end{cases}$$

übergehen, worin $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ist.

Mit Hilfe des Integrals (3) dieses Differentialgleichungssystems $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung kann man nun durch Einführung der Energiekonstanten h eine der abhängigen Variabeln z. B. q_μ eliminieren, und somit zu einem Differentialgleichungssystem $2\mu-1^{\text{ter}}$ Ordnung gelangen, dessen Form zunächst festgestellt werden soll.

Leitet man aus (3) den Ausdruck

$$(5) \qquad q_\mu = h_1 q_1 + h_2 q_2 + \cdots + h_{\mu-1}q_{\mu-1} + w_1$$

her, worin die h_α wieder ganze Funktionen $\nu-1^{\text{ten}}$ Grades von v_1 mit in $p_1, \ldots p_\mu$ und den a rationalen Koeffizienten sind, und w_1 durch den Ausdruck definiert ist

$$(6) \quad w_1^2 = h_{11}^{(1)}q_1^2 + \cdots + h_{\mu-1\,\mu-1}^{(1)}q_{\mu-1}^2 + h_{12}^{(1)}q_1 q_2 + \cdots + h_{\mu-2\,\mu-1}^{(1)}q_{\mu-2}q_{\mu-1} + h^{(1)},$$

in welchem die $h_{\alpha\beta}^{(1)}$ und $h^{(1)}$ denselben Charakter haben, so wird w_1 eine Lösung der Gleichung

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu}\left\{w^2 - h_{11}^{(\alpha)}q_1^2 - \cdots - h_{\mu-1\,\mu-1}^{(\alpha)}q_{\mu-1}^2 - h_{12}^{(\alpha)}q_1 q_2 - \cdots - h_{\mu-2\,\mu-1}^{(\alpha)}q_{\mu-2}q_{\mu-1} - h^{(\alpha)}\right\} = 0$$

sein, in welcher die Größen $h^{(\alpha)}$ aus den $h^{(1)}$ hervorgehen, wenn statt v_1 irgend eine andere Lösung v_α der Gleichung (2) substituiert wird, oder der Gleichung

$$(7) \qquad w^{2\nu} + k_2 w^{2\nu-2} + k_4 w^{2\nu-4} + \cdots + k_{2\nu} = 0$$

genügen, worin die $k_{2\delta}$ ganze Funktionen δ^{ten} Grades der q-Verbindungen in zweiter Dimension mit in $p_1, \ldots p_\mu$ rationalen Koeffizienten sind.

Die HAMILTONschen Differentialgleichungen (4) nehmen dann durch Substitution des Wertes (5) für q_μ nach (6) die Form an

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = G_{1\rho}q_1 + G_{2\rho}q_2 + \cdots + G_{\mu-1\rho}q_{\mu-1} + G_{\mu\rho}w_1 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\[2ex] \dfrac{dq_\sigma}{dt} = G_{11}^{(\sigma)}q_1^2 + \cdots + G_{\mu-1\,\mu-1}^{(\sigma)}q_{\mu-1}^2 + G_{12}^{(\sigma)}q_1q_2 + \cdots + G_{\mu-2\,\mu-1}q_{\mu-2}q_{\mu-1} \\ \qquad + \left(G_1^{(\sigma)}q_1 + G_2^{(\sigma)}q_2 + \cdots + G_{\mu-1}^{(\sigma)}q_{\mu-1}\right)w_1 + G^{(\sigma)} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots \mu-1), \end{cases}$$

worin die G vermöge (2) wieder ganze Funktionen $\nu-1^{\text{ten}}$ Grades von v_1 mit in $p_1, \ldots p_\mu$ und den a rationalen Koeffizienten sind.

Um nun dieses Differentialgleichungssystem $2\mu-1^{\text{ter}}$ Ordnung wieder auf eine dem System (4) entsprechende Form zu bringen, setze man

$$(9)\qquad u = a_1 v + a_2 w\,,$$

worin a_1 und a_2 zwei unbestimmte Konstanten bedeuten, und es werden dann, da sich für jedes Wertesystem von $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ zu jeder der ν-Lösungen $v_1, v_2, \ldots v_\nu$ der Gleichung (2) vermöge (6) zwei absolut gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Werte von w ergeben, die sämtlichen Werte von u für alle Kombinationen der v_α und w_α in der Form darstellbar sein

$$u_\alpha^+ = a_1 v_\alpha + a_2 w_\alpha\,, \qquad u_\alpha^- = a_1 v_\alpha - a_2 w_\alpha\,,$$

und somit der Gleichung genügen

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu}\left(u^2 - 2a_1 v_\alpha u + a_1^2 v_\alpha^2 - a_2^2 w_\alpha^2\right) = 0$$

oder vermöge (6)

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu}\Big(u^2 - 2a_1 v_\alpha u + a_1^2 v_\alpha^2 - a_2^2\big[h_{11}^{(\alpha)}q_1^2 + \cdots + h_{\mu-1\,\mu-1}^{(\alpha)}q_{\mu-1}^2 + h_{12}^{(\alpha)}q_1q_2 + \cdots$$
$$+ h_{\mu-2\,\mu-1}^{(\alpha)}q_{\mu-2}q_{\mu-1} + h^{(\alpha)}\big]\Big) = 0\,.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung, welche in u vom $2\nu^{\text{ten}}$ Grade ist, sind, von den q abgesehen, ganze rationale symmetri-

sche Funktionen der Lösungen der Gleichung (2), deren Koeffizienten nur von den $p_1, \dots p_\mu$ und den a rational abhängen, und werden sich also auch rational in eben diesen Größen ausdrücken lassen, wobei die Größen $q_1, \dots q_\mu$, welche in jedem Faktor des Produktes vom 2ten Grade enthalten sind, eintreten werden. Um die Zusammensetzung der Koeffizienten der u-Gleichung aus den p und q festzustellen, bilde man vermöge (6) die $2\lambda^{\text{te}}$ Potenzsumme

$$\begin{aligned} S_{2\lambda} = \sum_1^\nu{}_\alpha \left\{ (a_1 v_\alpha + a_2 w_\alpha)^{2\lambda} + (a_1 v_\alpha - a_2 w_\alpha)^{2\lambda} \right\} &= 2 a_1^{2\lambda} \sum_1^\nu{}_\alpha v_\alpha^{2\lambda} \\ + 2 (2\lambda)_2 a_1^{2\lambda-2} a_2^2 \sum_1^\nu{}_\alpha v_\alpha^{2\lambda-2} \left(h_{11}^{(\alpha)} q_1^2 + \dots + h_{\mu-2\,\mu-1}^{(\alpha)} q_{\mu-2} q_{\mu-1} + h^{(\alpha)} \right) &+ \dots \\ + 2 a_2^{2\lambda} \sum_1^\nu{}_\alpha \left(h_{11}^{(\alpha)} q_1^2 + \dots + h_{\mu-2\,\mu-1}^{(\alpha)} q_{\mu-2} q_{\mu-1} + h^{(\alpha)} \right)^\lambda &= F_\lambda (q_1, q_2, \dots q_{\mu-1}), \end{aligned}$$

welche eine ganze Funktion λ^{ten} Grades in den Größen $q_1^2, \dots q_{\mu-1}^2$, $q_1 q_2, \dots q_{\mu-2} q_{\mu-1}$ mit in den p rationalen Koeffizienten darstellt, und ebenso folgt

$$S_{2\lambda-1} = F_{\lambda-1} (q_1, q_2, \dots q_{\mu-1})$$

als ganze Funktion $\lambda-1^{\text{ten}}$ Grades in jenen q-Verbindungen 2ter Dimension mit ebenso in den p beschaffenen Koeffizienten, während sich nach (9) und (2)

$$S_1 = 2 a_1 \sum_1^\nu{}_\alpha v_\alpha = -2 a_1 \frac{g_1 (p_1, \dots p_\mu)}{g_0 (p_1, \dots p_\mu)}$$

ergibt. Die algebraische Gleichung $2\nu^{\text{ten}}$ Grades in u hat somit die Form

$$(10)\quad u^{2\nu} + 2 a_1 \frac{g_1 (p_1, \dots p_\mu)}{g_0 (p_1, \dots p_\mu)} u^{2\nu-1} + \varphi_{10} u^{2\nu-2} + \varphi_{11} u^{2\nu-3} + \varphi_{20} u^{2\nu-4} + \varphi_{21} u^{2\nu-5} + \dots = 0,$$

in welcher die Koeffizienten $\varphi_{\varkappa 0}, \varphi_{\varkappa 1}$ ganze Funktionen $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades der Größen $q_1^2, \dots q_{\mu-1}^2, q_1 q_2, \dots q_{\mu-2} q_{\mu-1}$ mit in $p_1, \dots p_\mu$, den a der Gleichung (1) sowie den neu hinzugekommenen a_1 und a_2 rationalen Koeffizienten sind.

Da sich nun die Lösungen v_1 und w_1 der Gleichungen (2) und (7) wiederum wie oben durch die Lösung

$$u_1 = a_1 v_1 + a_2 w_1$$

der Gleichung (10) ganz und vom Grade $2\nu-1$ ausdrücken lassen mit Koeffizienten, welche rational aus den Koeffizienten jener Gleichungen, also rational aus

$$q_1^2, \dots q_{\mu-1}^2, q_1 q_2, \dots q_{\mu-2} q_{\mu-1}, p_1, \dots p_\mu$$

zusammengesetzt sind, so werden die aus (4) durch Elimination von q_μ vermöge des Energieintegrals hervorgegangenen $2\mu-1$ HAMILTONschen Differentialgleichungen (8) in $p_1, \dots p_\mu, q_1, \dots q_{\mu-1}$ die Form annehmen

$$(11)\begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = R_{1\rho}(u_1, q_1^2, \dots q_1 q_2, \dots p_1, \dots p_\mu) q_1 + \dots + R_{\mu-1\rho}(u_1, q_1^2, \dots q_1 q_2, \dots p_1, \dots p_\mu) q_{\mu-1} \\ \qquad + R_\rho(u_1, q_1^2, \dots q_{12}, \dots p_1, \dots p_\mu) \qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu) \\ \dfrac{dq_\sigma}{dt} = P_{1\sigma}(u_1, q_1^2, \dots q_1 q_2, \dots p_1, \dots p_\mu) q_1 + \dots + P_{\mu-1\sigma}(u_1, q_1^2, \dots q_1 q_2, \dots p_1, \dots p_\mu) q_{\mu-1} \\ \qquad + P_\sigma(u_1, q_1^2, \dots q_1 q_2, \dots p_1, \dots p_\mu) \qquad (\sigma = 1, 2, \dots \mu-1), \end{cases}$$

worin die R und P ganze Funktionen vom $2\nu-1^{\text{ten}}$ Grade in der Lösung u_1 der Gleichung (10) mit in $q_1^2, \dots q_1 q_2, \dots p_1, \dots p_\mu$ rationalen Koeffizienten sind.

Es ist somit das vermöge des Energieprinzips reduzierte HAMILTONsche Differentialgleichungssystem $2\mu-1^{\text{ter}}$ Ordnung in den abhängigen Variabeln $p_1, \dots p_\mu, q_1, \dots q_{\mu-1}$, wiederum dem System (4) analog in eine solche Form gebracht, daß die rechten Seiten ganze Funktionen $2\nu-1^{\text{ten}}$ Grades einer durch die Gleichung (10) definierten algebraischen Funktion der p und q sind mit Koeffizienten, welche rational aus den p und q in der oben angegebenen Weise und aus den $a_{\alpha\beta}$, a, a_1 und a_2 zusammengesetzt sind.

6.

Um die Benutzung des Flächenprinzips für die Reduktion der HAMILTONschen Differentialgleichungen auf ein System niederer Ordnung darzustellen, mögen einige Bemerkungen bezüglich dieses Prinzips vorausgeschickt werden.

Geht man unter der Annahme einer Kräftefunktion U, welche außer den Koordinaten x_i, y_i, z_i von n-Punkten eines Systems auch die Zeit t explizite enthalten darf, und der Bedingungsgleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots f_m = 0$ für einen bestimmten Wert von i von den beiden LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen erster Art aus

$$m_i x_i'' = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}$$

$$m_i y_i'' = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial y_i},$$

in denen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ die LAGRANGEschen Multiplikatoren bedeuten, so folgt aus diesen

$$m_i (x_i y_i'' - y_i x_i'') = x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \left(x_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right) + \cdots$$
$$+ \lambda_m \left(x_i \frac{\partial f_m}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right),$$

und, wenn

$$x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad x_i \frac{\partial f_\rho}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots m)$$

oder

$$U = F(x_1, y_1, z_1, \ldots x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, x_i^2 + y_i^2, z_i, x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}, \ldots x_n, y_n, z_n, t)$$

und die Funktionen $f_1, \ldots f_m$ in derselben Weise zusammengesetzt sind,

$$m_i (x_i y_i'' - y_i x_i'') = 0 \quad \text{oder} \quad m_i (x_i y_i' - y_i x_i') = c_i,$$

worin c_i eine Konstante bedeutet.

Für einen anderen, von i verschiedenen Index $\varkappa$ wird sich ebenso für die entsprechende Form der Kräftefunktion und der Bedingungsgleichungen

$$m_\varkappa (x_\varkappa y'_\varkappa - y_\varkappa x'_\varkappa) = c_\varkappa$$

ergeben, und die Zusammenstellung der vier Gleichungen

$$m_i x''_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots$$

$$m_i y''_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \cdots$$

$$m_\varkappa x''_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial x_\varkappa} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\varkappa} + \cdots$$

$$m_\varkappa y''_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial y_\varkappa} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_\varkappa} + \cdots$$

wird zu der Beziehung

$$(1) \qquad m_i (x_i y'_i - y_i x'_i) + m_\varkappa (x_\varkappa y'_\varkappa - y_\varkappa x'_\varkappa) = c_{i\varkappa}$$

führen, wenn die Kräftefunktion

$$U = F\left(x_i^2 + y_i^2, z_i, x_\varkappa^2 + y_\varkappa^2, z_\varkappa, x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t\right),$$

und die Bedingungsgleichungen dieselbe Gestalt haben.

Aber diese Form der Kräftefunktion und der Bedingungsgleichungen ist nicht die notwendige für das Bestehen der Beziehung (1), da sie nur die Bedingung dafür ergibt, daß diese Beziehung dadurch erfüllt wird, daß jeder einzelne der beiden Summanden konstant ist. Allgemein ergibt sich aus jenen vier Differentialgleichungen

$$m_i (x_i y''_i - y_i x''_i) + m_\varkappa (x_\varkappa y''_\varkappa - y_\varkappa x''_\varkappa) = \left(x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)$$

$$+ \left(x_\varkappa \frac{\partial U}{\partial y_\varkappa} - y_\varkappa \frac{\partial U}{\partial x_\varkappa}\right) + \lambda_1 \left(x_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + x_\varkappa \frac{\partial f_1}{\partial y_\varkappa} - y_\varkappa \frac{\partial f_1}{\partial x_\varkappa}\right) + \cdots,$$

und daher wieder die Beziehung (1), wenn U der partiellen Differentialgleichung genügt

$$x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + x_\varkappa \frac{\partial U}{\partial y_\varkappa} - y_\varkappa \frac{\partial U}{\partial x_\varkappa} = 0 ,$$

und $f_1, f_2, \ldots$ den analogen Differentialgleichungen, oder

$$U = F\left(x_i^2 + y_i^2, z_i, x_\varkappa^2 + y_\varkappa^2, z_\varkappa, x_i x_\varkappa + y_i y_\varkappa, x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t\right)$$

und die ähnlichen Formen für die Bedingungsgleichungen, von welchen die oben gefundenen Formen spezielle Fälle sind.

So wird allgemein die Form der Kräftefunktion

$$U = F\left(x_1^2+y_1^2, z_1, x_2^2+y_2^2, z_2, \ldots x_n^2+y_n^2, z_n, x_1x_2+y_1y_2, x_1x_3+y_1y_3, \ldots x_{n-1}x_n+y_{n-1}y_n, t\right)$$

und die ähnliche für die Bedingungsgleichungen die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen des Integrals der LAGRANGEschen Differentialgleichungen

$$\sum_1^n {}_\varrho\, m_\rho \left(x_\rho y'_\rho - y_\rho x'_\rho\right) = c$$

bilden, welches das Flächenintegral genannt wird.

Nachdem an diese Herleitung des Flächenprinzips für rechtwinklige Koordinaten erinnert worden, um den Weg zu kennzeichnen, auf dem wir zu den analogen Integralen für die HAMILTONschen Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \frac{dp_\rho}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_\rho}, \quad \frac{dq_\rho}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu)$$

gelangen, müßten wir zunächst wieder für die Existenz dieser Differentialgleichungen annehmen, daß die Gleichungen, welche die rechtwinkligen Koordinaten mit den Parametern verbinden, die Zeit t nicht explizite enthalten, die Energie somit, von der Kräftefunktion abgesehen, in bezug auf die q eine homogene Funktion zweiten Grades ist. Legen wir jedoch nunmehr die Form der

HAMILTONschen Differentialgleichungen für eine beliebige Funktion E von $t, p_1, \dots p_\mu, q_1, \dots q_\mu$ zugrunde, so folgt aus den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dq_\varkappa}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\varkappa}, \quad \frac{dq_\lambda}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\lambda}$$

durch Multiplikation mit p_λ und $p_\varkappa$ und Subtraktion

$$p_\varkappa \frac{dq_\lambda}{dt} - p_\lambda \frac{dq_\varkappa}{dt} = p_\lambda \frac{\partial E}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial E}{\partial p_\lambda},$$

oder, weil nach (2)

$$\frac{d}{dt}(p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa) = \left(p_\varkappa \frac{dq_\lambda}{dt} - p_\lambda \frac{dq_\varkappa}{dt}\right) + \left(q_\lambda \frac{dp_\varkappa}{dt} - q_\varkappa \frac{dp_\lambda}{dt}\right)$$

$$= \left(p_\varkappa \frac{dq_\lambda}{dt} - p_\lambda \frac{dq_\varkappa}{dt}\right) + \left(q_\lambda \frac{\partial E}{\partial q_\varkappa} - q_\varkappa \frac{\partial E}{\partial q_\lambda}\right)$$

oder

$$\frac{d}{dt}(p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa) - p_\lambda \frac{\partial E}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial E}{\partial p_\lambda} + q_\lambda \frac{\partial E}{\partial q_\varkappa} - q_\varkappa \frac{\partial E}{\partial q_\lambda}$$

ist, die Beziehung

$$p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa = c, \tag{3}$$

worin c eine Konstante, wenn E der partiellen Differentialgleichung genügt

$$p_\lambda \frac{\partial E}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial E}{\partial p_\lambda} + q_\lambda \frac{\partial E}{\partial q_\varkappa} - q_\varkappa \frac{\partial E}{\partial q_\lambda} = 0$$

oder

$$E = F(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2, q_\varkappa^2 + q_\lambda^2, p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda, p_1, \dots p_\mu, q_1, \dots q_\mu, t) \tag{4}$$

ist, worin $p_\varkappa, q_\varkappa, p_\lambda, q_\lambda$ nur in den hervorgehobenen Verbindungen vorkommen.

Bedeutet aber E die Energie, ist also, von der Kräftefunktion abgesehen, eine homogene Funktion zweiten Grades der q, so ist die für das Bestehen der Gleichung (3) notwendige und hinreichende Form der Energie

$$(4a)\quad \begin{cases} E = (q_\varkappa^2 + q_\lambda^2)\, f(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2) + (p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda)^2 f_1(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2) \\ \quad + (p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda) \sum_{\varrho=1}^{\mu}{}^{(\varrho=\varkappa,\, \varrho=\lambda)} q_\varrho \varphi_\varrho (p_\varkappa^2 + p_\lambda^2) - U(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2) \\ \quad + \omega(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2, q_1, \dots q_{\varkappa-1}, q_{\varkappa+1}, \dots q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \dots q_\mu), \end{cases}$$

worin für die Summation Σ die Werte $\varrho = \varkappa$, $\varrho = \lambda$ auszuschließen sind, in jede der Funktionen f, φ, U, ω die Zeit t sowie die übrigen p mit Ausnahme von $p_\varkappa$ und p_λ beliebig eintreten dürfen, und die ω-Funktion homogen vom zweiten Grade in bezug auf die darin enthaltenen q ist.

Stellen wir zunächst wieder unter der Voraussetzung, daß E eine beliebige Funktion der p, q und t ist, die Gleichungen

$$\frac{dq_\varkappa}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\varkappa}, \quad \frac{dq_\lambda}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\lambda},$$

aus welchen sich die Beziehung (3) ergab, wenn E die Form (4) hatte, mit dem System zusammen

$$\frac{dq_\mu}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dq_\nu}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\nu},$$

worin μ und ν von $\varkappa$ und λ verschieden sind, und welche die Beziehung liefern

$$(5)\qquad p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu = c_1,$$

wenn

$$(6)\qquad E = F_1(p_\mu^2 + p_\nu^2, q_\mu^2 + q_\nu^2, p_\mu q_\mu + p_\nu q_\nu, p_1, \dots q_1, \dots t)$$

ist, so wird sich aus dem System jener vier Differentialgleichungen die Beziehung

$$(7) \qquad (p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa) + (p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu) = c_2$$

ergeben, worin c_2 wiederum eine Konstante ist, wenn die Energie die Form (4) und (6) besitzt, also

$$(8) \quad E = F_2(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2, q_\varkappa^2 + q_\lambda^2, p_\mu^2 + p_\nu^2, q_\mu^2 + q_\nu^2, p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda, p_\mu q_\mu + p_\nu q_\nu, p_1, \ldots q_1, \ldots t)$$

ist, worin die $p_\varkappa, p_\lambda, q_\varkappa, q_\lambda, p_\mu, p_\nu, q_\mu, q_\nu$ nur in den hervorgehobenen Verbindungen vorkommen, und diese Form von E wird für die Existenz der Gleichung (7) wieder nur dann die notwendige Bedingung liefern, wenn die linke Seite derselben in zwei konstante Summanden zerfallen soll.

Addiert man jedoch jene vier mit $-p_\lambda, p_\varkappa, -p_\nu, p_\mu$ multiplizierten Differentialgleichungen, so ergibt sich allgemein als notwendige Bedingung für die Existenz der Beziehung (7) für E die partielle Differentialgleichung

$$p_\lambda \frac{\partial E}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial E}{\partial p_\lambda} + p_\nu \frac{\partial E}{\partial p_\mu} - p_\mu \frac{\partial E}{\partial p_\nu} + q_\lambda \frac{\partial E}{\partial q_\varkappa} - q_\varkappa \frac{\partial E}{\partial q_\lambda}$$
$$+ q_\nu \frac{\partial E}{\partial q_\mu} - q_\mu \frac{\partial E}{\partial q_\nu} = 0,$$

deren Integral durch die Form

$$(9) \quad \begin{cases} E = \varphi(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2, q_\varkappa^2 + q_\lambda^2, p_\mu^2 + p_\nu^2, q_\mu^2 + q_\nu^2, p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda, p_\mu q_\mu + p_\nu q_\nu, \\ \qquad\qquad p_\varkappa q_\mu + p_\lambda q_\nu, p_1, \ldots q_1, \ldots t) \end{cases}$$

gegeben ist.

Stellt man somit aus dem Differentialgleichungssystem (2) für eine beliebige Funktion E von $p_1, \ldots p_\mu$, $q_1, \ldots q_\mu, t$ die Differentialgleichungen zusammen

$$\frac{dq_{\varkappa_1}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_{\varkappa_1}}, \quad \frac{dq_{\varkappa_3}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_{\varkappa_3}}, \ldots \frac{dq_{\varkappa_{2\nu-1}}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_{\varkappa_{2\nu-1}}}$$

$$\frac{dq_{\varkappa_2}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_{\varkappa_2}}, \quad \frac{dq_{\varkappa_4}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_{\varkappa_4}}, \ldots \frac{dq_{\varkappa_{2\nu}}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_{\varkappa_{2\nu}}},$$

worin die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{2\nu}$ sämtlich verschieden sind, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$(10) \qquad \sum_1^{\nu}{}_{\rho} \left(p_{\varkappa_{2\rho-1}} q_{\varkappa_{2\rho}} - p_{\varkappa_{2\rho}} q_{\varkappa_{2\rho-1}}\right) = c$$

ist, E in der Form

$$(11) \quad \begin{cases} E = F\left(p^2_{\varkappa_{2\rho-1}} + p^2_{\varkappa_{2\rho}}, q^2_{\varkappa_{2\rho-1}} + q^2_{\varkappa_{2\rho}}, p_{\varkappa_{2\rho-1}} q_{\varkappa_{2\sigma-1}} + p_{\varkappa_{2\rho}} q_{\varkappa_{2\sigma}}, t\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left(\rho = 1, 2, \ldots \nu,\ \sigma = 1, 2, \ldots \nu\right), \end{cases}$$

worin die übrigen p, q beliebig eintreten können, und wenn E wieder die Energie bedeutet, also, von U abgesehen, eine homogene Funktion der q darstellt, der der Form (4a) analoge Ausdruck.

Stellen wir jedoch die obigen vier Differentialgleichungen für $\mu = \varkappa$ zusammen, also

$$\frac{d q_\varkappa}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\varkappa} \qquad \frac{d q_\varkappa}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\varkappa}$$

$$\frac{d q_\lambda}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\lambda} \qquad \frac{d q_\nu}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\nu},$$

so folgt, daß

$$p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa = c, \quad \text{wenn} \quad E = F\left(p^2_\varkappa + p^2_\lambda, q^2_\varkappa + q^2_\lambda, p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda, p_1, \ldots q_1, \ldots t\right)$$

und

$$p_\varkappa q_\nu - p_\nu q_\varkappa = c_1, \quad \text{wenn} \quad E = F_1\left(p^2_\varkappa + p^2_\nu, q^2_\varkappa + q^2_\nu, p_\varkappa q_\varkappa + p_\nu q_\nu, p_1, \ldots q_1, \ldots t\right),$$

und es wird somit

$$(12) \qquad \left(p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa\right) + \left(p_\varkappa q_\nu - p_\nu q_\varkappa\right) = c_2$$

sein, wenn E diese beiden Formen zugleich hat, also

$$E = F_2\left(p_\varkappa^2 + p_\lambda^2 + p_\nu^2,\ q_\varkappa^2 + q_\lambda^2 + q_\nu^2,\ p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda + p_\nu q_\nu,\ p_1, \ldots q_1, \ldots t\right)$$

ist, worin $p_\varkappa, p_\lambda, p_\nu, q_\varkappa, q_\lambda, q_\nu$ nur in den bezeichneten Verbindungen vorkommen. Aber diese Form von E wird wieder nur die notwendige Bedingung dafür sein, daß jene Relation in zwei konstante Summanden zerfällt, während wie oben allgemein die notwendige Bedingung für die Existenz jener Beziehung durch die partielle Differentialgleichung für E

$$(p_\lambda + p_\nu)\frac{\partial E}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial E}{\partial p_\lambda} - p_\varkappa \frac{\partial E}{\partial p_\nu} + (q_\lambda + q_\nu)\frac{\partial E}{\partial q_\varkappa} - q_\varkappa \frac{\partial E}{\partial q_\lambda} - q_\varkappa \frac{\partial E}{\partial q_\nu} = 0$$

gegeben ist, deren allgemeines Integral durch

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} E = \varphi\big(&p_\lambda - p_\nu,\ q_\lambda - q_\nu,\ p_\varkappa^2 + 2\,p_\lambda p_\nu,\ q_\varkappa^2 + 2\,q_\lambda q_\nu, \\ &(p_\lambda + p_\nu)\,q_\varkappa - (q_\lambda + q_\nu)\,p_\varkappa,\ p_1, \ldots q_1, \ldots t\big) \end{aligned} \right.$$

dargestellt wird.

Das vorher gefundene Integral für E, welches jene Beziehung in zwei konstante Summanden zerlegt, muß sonach als partikuläres Integral in dem zuletzt gegebenen enthalten sein; in der Tat ist

$$p_\varkappa^2 + p_\lambda^2 + p_\nu^2 = (p_\lambda - p_\nu)^2 + (p_\varkappa^2 + 2\,p_\lambda p_\nu)$$

$$q_\varkappa^2 + q_\lambda^2 + q_\nu^2 = (q_\lambda - q_\nu)^2 + (q_\varkappa^2 + 2\,q_\lambda q_\nu)$$

$$p_\varkappa q_\varkappa + p_\lambda q_\lambda + p_\nu q_\nu = \tfrac{1}{2}(p_\lambda - p_\nu)(q_\lambda - q_\nu)$$

$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{aligned}&(p_\lambda - p_\nu)^2(q_\lambda - q_\nu)^2 + 2(p_\lambda - p_\nu)^2(q_\varkappa^2 + 2q_\lambda q_\nu) + 2(q_\lambda - q_\nu)^2(p_\varkappa^2 + 2p_\lambda p_\nu) \\ &+ 4\,(p_\varkappa^2 + 2\,p_\lambda p_\nu)(q_\varkappa^2 + 2\,q_\lambda q_\nu) - 2\left[(p_\lambda + p_\nu)\,q_\varkappa - (q_\lambda + q_\nu)\,p_\varkappa\right]^2\end{aligned}}\ .$$

Die Zusammenstellung der Beziehungen (10) und (12), sowie der zugehörigen Ausdrücke (11) und (13) für die Funktion E oder, mit der Einschränkung homogen quadratisch in den q zu sein, für die Energie liefert unmittelbar den allgemeinen Ausdruck für dieselbe als notwendige und hinreichende Be-

dingung für das Bestehen des allgemeinen, in den Parametern $p_1, \dots p_\mu$ ausgedrückten Flächenprinzips

$$\sum_{\varkappa=1,2,\dots\mu;\,\lambda=1,2,\dots\mu} (p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa) = \alpha ,$$

worin α eine Konstante bedeutet; dasselbe bildet dann ein von t freies, in den p und q bilineares Integral der HAMILTONschen Differentialgleichungen.

Besteht allgemein eine lineare Integralbeziehung zwischen $q_1, \dots q_\mu$ mit von $p_1, \dots p_\mu$ abhängigen Koeffizienten für die HAMILTONschen Differentialgleichungen zunächst wieder für eine beliebige Funktion E, nämlich

$$f_1 q_1 + f_2 q_2 + \dots + f_\mu q_\mu + f = \alpha ,$$

worin $f_1, \dots f_\mu, f$ die Zeit t nicht explizite enthalten, so folgt durch Differentiation nach t

$$f_1 \frac{dq_1}{dt} + \dots + f_\mu \frac{dq_\mu}{dt} + q_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial p_\mu} \frac{dp_\mu}{dt} \right) + \dots$$

$$+ q_\mu \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f_\mu}{\partial p_\mu} \frac{dp_\mu}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{dp_\mu}{dt} = 0 ,$$

welche wieder allgemein befriedigt wird, wenn E der partiellen Differentialgleichung genügt

$$- f_1 \frac{\partial E}{\partial p_1} - \dots - f_\mu \frac{\partial E}{\partial p_\mu} + \left(q_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} + \dots + q_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \right) \frac{\partial E}{\partial q_1} + \dots$$

$$+ \left(q_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_\mu} + \dots + q_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial p_\mu} + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \right) \frac{\partial E}{\partial q_\mu} = 0 .$$

Ist

$$f_1 = -p_2, f_2 = p_1, f_3 = -p_4, f_4 = p_3, \dots f_{2\nu-1} = -p_{2\nu}, f_{2\nu} = p_{2\nu-1}, f_{2\nu+1} = \dots = f_\mu = 0, f = 0,$$

so geht die Differentialgleichung für E in

$$p_2 \frac{\partial E}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial E}{\partial p_2} + \cdots + p_{2\nu} \frac{\partial E}{\partial p_{2\nu-1}} - p_{2\nu-1} \frac{\partial E}{\partial p_{2\nu}} + q_2 \frac{\partial E}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial E}{\partial q_2} + \cdots$$
$$+ q_{2\nu} \frac{\partial E}{\partial q_{2\nu-1}} - q_{2\nu-1} \frac{\partial E}{\partial q_{2\nu}} = 0$$

über, deren allgemeines Integral durch die Gleichung (11) gegeben war.

So wird z. B. das in den q lineare Integral der HAMILTONschen Differentialgleichungen bestehen

$$p_1^2 q_1 + p_2^2 q_2 + p_3^2 q_3 + p_4^2 q_4 = 0 ,$$

wenn

$$E = F\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3}, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_4}, p_1^2 q_1, p_2^2 q_2, p_3^2 q_3, p_4^2 q_4\right)$$

ist, und dieser Ausdruck, wenn derselbe in den q homogen quadratisch ist, die Energie darstellen können.

Nehmen wir nunmehr an, daß für das Differentialgleichungssystem (2) das Flächenprinzip in der Form gelte

$$\sum_{\varkappa=1,2,\ldots\mu;\,\lambda=1,2,\ldots\mu} (p_\varkappa q_\lambda - p_\lambda q_\varkappa) = c ,$$

so können wir eine der q-Größen z. B. q_μ linear ganz durch die übrigen q mit Koeffizienten, welche gebrochene lineare Funktionen der p sind, ausdrücken und in das Differentialgleichungssystem (4) des vorigen Abschnitts substituieren, welches sich sodann auf ein System $2\mu-1^{\text{ter}}$ Ordnung mit den abhängigen Variabeln $p_1, \ldots p_\mu, q_1, \ldots q_{\mu-1}$ reduziert, dessen rechte Seiten wiederum, wie die des ursprünglichen Systems, ganze Funktionen $\nu-1^{\text{ten}}$ Grades in v sind, und zwar die des p-Systems eine gleichartige lineare Funktion von $q_1, \ldots q_{\mu-1}$ mit in $p_1, \ldots p_\mu$ rationalen Koeffizienten bilden, zu der noch ein von den q freies

Glied hinzutritt, während die rechten Seiten des q-Systems zwar wiederum ganze, aber nicht mehr von der Kräftefunktion abgesehen homogene Funktionen zweiten Grades von $q_1, q_2, \dots q_{\mu-1}$ sein werden, da noch eine lineare Funktion dieser Größen durch die Substitution eingeführt wird.

Es möge endlich noch als Ergänzung zu den früheren Auseinandersetzungen bemerkt werden, daß, wenn man von den beiden HAMILTONschen Differentialgleichungen

$$\frac{dp_\varkappa}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_\varkappa}, \quad \frac{dp_\lambda}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_\lambda}$$

ausgeht, man durch Multiplikation mit q_λ und $q_\varkappa$ und Subtraktion zu denselben Flächenintegralen für dieselbe Form der Energie gelangt, während durch Multiplikation mit $q_\varkappa$ und q_λ sich das Integral

$$p_\lambda q_\lambda - p_\varkappa q_\varkappa = c$$

ergibt für

$$E = F(p_\lambda q_\lambda, p_\varkappa p_\lambda, p_\varkappa q_\varkappa) ;$$

die Zusammenstellung der Gleichungen des noch allein übrig bleibenden Falles

$$\frac{dp_\varkappa}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_\varkappa}, \quad \frac{dq_\varkappa}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_\varkappa}$$

würde für die sich ergebende Form der Integrale die Abhängigkeit der Energie von $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$ in der Verbindung erfordern, in welcher diese Größen im Flächenintegral selbst enthalten sind. Auf weitere hierher gehörige Untersuchungen wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen.

§ 7.

Zum Zwecke der Diskussion der Integrale der HAMILTONschen Differentialgleichungen in der Umgebung eines bestimmten Wertes von t, für welchen die Integrale $p_1, \dots p_\mu, q_1, \dots q_\mu$ gegebene Werte annehmen sollen, gehen wir wieder von dem Ausdrucke für die Energie aus

$$(1)\quad E = \tfrac{1}{2}\Delta_{11}^{(1)} q_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\Delta_{\mu\mu}^{(1)} q_\mu^2 + \Delta_{12}^{(1)} q_1 q_2 + \cdots + \Delta_{\mu-1\mu} q_{\mu-1} q_\mu - U^{(1)},$$

in welchem die $\Delta^{(1)}$ bestimmte Zweige algebraischer, von der Zeit t unabhängiger Funktionen der Parameter sind, während die Kräftefunktion $U^{(1)}$ eine algebraische Funktion der Parameter sein soll, welche auch t explizite enthalten darf.

Genügen nun die $\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}$, $\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}$, $U^{(1)}$ den mit Adjungierung von $p_1, p_2, \ldots p_\mu$, t irreduktibeln algebraischen Gleichungen mit in $p_1, \ldots p_\mu$, t ganzen Koeffizienten

$$g_0^{(\alpha\alpha)}(p_1, \ldots p_\mu)\Delta_{\alpha\alpha}^{\nu_{\alpha\alpha}} + g_1^{(\alpha\alpha)}(p_1, \ldots p_\mu)\Delta_{\alpha\alpha}^{\nu_{\alpha\alpha}-1} + \cdots + g_{\nu_{\alpha\alpha}}^{(\alpha\alpha)}(p_1, \ldots p_\mu) = 0$$

$$g_0^{(\alpha\beta)}(p_1, \ldots p_\mu)\Delta_{\alpha\beta}^{\nu_{\alpha\beta}} + g_1^{(\alpha\beta)}(p_1, \ldots p_\mu)\Delta_{\alpha\beta}^{\nu_{\alpha\beta}-1} + \cdots + g_{\nu_{\alpha\beta}}^{(\alpha\beta)}(p_1, \ldots p_\mu) = 0$$

$$g_0^{(0)}(t, p_1, \ldots p_\mu) U^{\nu_0} + g_1^{(0)}(t, p_1, \ldots p_\mu) U^{\nu_0-1} + \cdots + g_{\nu_0}^{(0)}(t, p_1, \ldots p_\mu) = 0,$$

so bilde man die ganze homogene lineare Funktion der unbestimmten Konstanten a

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} v_1 = &\sum_{\alpha=1,2,\ldots\mu} \left\{ a_{\alpha\alpha}^{(0)} \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)} + a_{\alpha\alpha}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_1} + \cdots + a_{\alpha\alpha}^{(\mu)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\mu} \right\} \\ &+ \sum_{\substack{\alpha=1,2,\ldots\mu \\ \beta=1,2,\ldots\mu}} \left\{ a_{\alpha\beta}^{(0)} \Delta_{\alpha\beta}^{(1)} + a_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_1} + \cdots + a_{\alpha\beta}^{(\mu)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\mu} \right\}_{(\beta>\alpha)} + \sum_{\rho=1,2,\ldots\mu} a^{(\rho)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}, \end{aligned} \right.$$

worin die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\rho}$, $\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho}$, $\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}$ rationale ganze Funktionen von $\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}$, $\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}$, $U^{(1)}$ sind mit in $p_1, \ldots p_\mu$, t rationalen Koeffizienten und wieder gleichartigen irreduktibeln algebraischen Gleichungen des resp. $\nu_{\alpha\alpha}^{\text{ten}}$, $\nu_{\alpha\beta}^{\text{ten}}$ und ν_0^{ten} Grades genügen werden.

Durch Substitution der Kombinationen aller Werte der Δ und U aus den obigen algebraischen Gleichungen in v_1 wird sich, wenn

$$\nu = \prod \nu_{\alpha\alpha}\, \nu_{\alpha\beta}\, \nu_0$$

gesetzt wird, v_1 als Lösung einer algebraischen Gleichung in v ergeben

$$(3)\quad G(v,t,p_1,..p_\mu)=g_0(t,p_1,..p_\mu)v^\nu+g_1(t,p_1,..p_\mu)v^{\nu-1}+\cdots+g_\nu(t,p_1,..p_\mu)=0\,,$$

worin die g ganze rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen und der unbestimmten Konstanten a sind, und man darf von dieser Gleichung voraussetzen, daß sie mit Adjungierung von $t, p_1, .. p_\mu$, a irreduktibel sei, da sie sonst denjenigen irreduktibeln Faktor der v-Gleichung darstellen möge, welcher v_1, also den Wert von v für die in dem Ausdruck der Energie enthaltenen Zweige der algebraischen Funktionen Δ und U als Lösung enthält; ist die Kräftefunktion von t unabhängig, dann wird auch die Funktion G die unabhängige Variable t nicht explizite enthalten.

Bringt man somit G in die Form

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} G(v,t,p_1,..p_\mu)=\prod_{\sigma=1}^{\nu}\Bigg\{v&-\sum_\alpha\left(a^{(0)}_{\alpha\alpha}\Delta^{(\sigma)}_{\alpha\alpha}+a^{(1)}_{\alpha\alpha}\frac{\partial\Delta^{(\sigma)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_1}+\cdots+a^{(\mu)}_{\alpha\alpha}\frac{\partial\Delta^{(\sigma)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_\mu}\right)\\ &-\sum_{\alpha,\beta}\left(a^{(0)}_{\alpha\beta}\Delta^{(\sigma)}_{\alpha\beta}+a^{(1)}_{\alpha\beta}\frac{\partial\Delta^{(\sigma)}_{\alpha\beta}}{\partial p_1}+\cdots+a^{(\mu)}_{\alpha\beta}\frac{\partial\Delta^{(\sigma)}_{\alpha\beta}}{\partial p_\mu}\right)\\ &-\sum_\rho a^{(\rho)}\frac{\partial U^{(\sigma)}}{\partial p_\rho}\Bigg\}=\prod_{\sigma=1}^{\nu}\left(v-D^{(\sigma)}\right)\end{aligned}\right.$$

für alle für den irreduktibeln Faktor G der ursprünglichen v-Gleichung in Frage kommenden Zweige der algebraischen Funktionen Δ und U, so ist zunächst unmittelbar zu sehen, daß die oben eingeführten ganzen Funktionen von $t, p_1, \ldots p_\mu$

$$g_\lambda(t, p_1, \ldots p_\mu) \qquad (\lambda=0,1,2,\ldots\nu)$$

in bezug auf die Konstanten a ganze Funktionen vom λ^{ten} Grade sind, also g_0 keine dieser Konstanten enthält, und es wird

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}=\prod_{\sigma=2}^{\nu}\left(v_1-D^{(\sigma)}\right)$$

sein, worin die $\Delta^{(\sigma)}$ und $U^{(\sigma)}$ wenigstens in ihrer Gesamtheit andere Zweige dieser algebraischen Funktionen als die in dem Energie-

ausdruck gegebenen darstellen, zugleich aber auch, wie leicht zu sehen,

$$(6)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\alpha}}\right)_{v_1} = -\prod_{\sigma=2}^{\nu}\left(v_1 - D^{(\sigma)}\right)\Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\beta}}\right)_{v_1} = -\prod_{\sigma=2}^{\nu}\left(v_1 - D^{(\sigma)}\right)\Delta^{(1)}_{\alpha\beta},\\
&\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\alpha}}\right)_{v_1} = -\prod_{\sigma=2}^{\nu}\left(v_1 - D^{(\sigma)}\right)\frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_\rho}, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\beta}}\right)_{v_1} = -\prod_{\sigma=2}^{\nu}\left(v_1 - D^{(\sigma)}\right)\frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho},\\
&\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}\right)_{v_1} = -\prod_{\sigma=2}^{\nu}\left(v_1 - D^{(\sigma)}\right)\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu).
\end{aligned}\right.$$

Die Zusammenstellung dieser Beziehungen mit (5) liefert somit für die in der Energie enthaltenen Zweige der algebraischen Funktionen die Ausdrücke

$$(7)\left\{\begin{aligned}
&\Delta^{(1)}_{\alpha\alpha} = -\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\alpha}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}, \quad \Delta^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\beta}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}, \quad \frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_\rho} = -\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\alpha}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}},\\
&\frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho} = -\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\beta}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}, \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho} = -\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu),
\end{aligned}\right.$$

so daß sich die Energie in der Form darstellen läßt

$$E = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{11}}\right)_{v_1} q_1^2 - \cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu\mu}}\right)_{v_1} q_\mu^2 - \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{12}}\right)_{v_1} q_1 q_2 - \cdots - \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu-1\,\mu}}\right)_{v_1} q_{\mu-1} q_\mu}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}} - U^{(1)},$$

und das HAMILTONsche Differentialgleichungssystem die Form annimmt:

$$(9)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}\frac{dp_\rho}{dt} = -\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\rho 1}}\right)_{v_1} q_1 - \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\rho 2}}\right)_{v_1} q_2 - \cdots - \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\rho\mu}}\right)_{v_1} q_\mu \\
&\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}\frac{dq_\rho}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{11}}\right)_{v_1} q_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\mu\mu}}\right)_{v_1} q_\mu^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{12}}\right)_{v_1} q_1 q_2 + \cdots \\
&\qquad + \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\mu-1\,\mu}}\right)_{v_1} q_{\mu-1} q_\mu - \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}\right)_{v_1} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu).
\end{aligned}\right.$$

Bemerkt man noch, daß sich aus der Gleichung $G(v, t, p_1, \ldots p_\mu) = 0$ durch Differentiation nach t

$$0 = \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial G}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial p_\mu}\frac{dp_\mu}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

oder vermöge (9):

$$(10)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}\frac{dv_1}{dt} \\
&= -\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{11}}\right)_{v_1} q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{1\mu}}\right)_{v_1} q_\mu\right) + \cdots + \frac{\partial G}{\partial p_\mu}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu 1}}\right)_{v_1} q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu\mu}}\right)_{v_1} q_\mu\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}
\end{aligned}\right.$$

ergibt, so bilden (9) und (10) ein simultanes Differentialgleichungssystem $2\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung in der unabhängigen Variabeln t und den abhängigen Variabeln $p_1, \ldots p_\mu, q_1, \ldots q_\mu$ und v_1, in welchem die rechten Seiten von (9), von der unmittelbar ersichtlichen Zusammensetzung aus den q abgesehen, ganze Funktionen $\nu-1^{\text{ten}}$ Grades von v_1 mit in $t, p_1, \ldots p_\mu$ ganzen Koeffizienten sind, $\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}$ eine ebensolche ganze Funktion vom $\nu-1^{\text{ten}}$ Grade in v_1 ist, und die rechte Seite der Gleichung (10) wieder als eine ganze Funktion ν^{ten} oder vermöge $G=0$ auch $\nu-1^{\text{ten}}$ Grades von v_1 mit in $t, p_1, \ldots p_\mu$ rationalen Koeffizienten dargestellt werden kann.

Was zunächst die Gleichung (3) betrifft, deren Koeffizienten von den Größen $t, p_1, \ldots p_\mu$ und den unbestimmten Konstanten a

abhängen, so wird im allgemeinen der Wert, welchen v_1 für ein bestimmtes Wertsystem

$$t = \tau,\ p_1 = \pi_1, \dots p_\mu = \pi_\mu$$

annimmt, und der mit $\bar{v}_1$ bezeichnet werden möge, ebenfalls von diesen unbestimmten Konstanten a abhängig sein; nur dann wird $\bar{v}_1$ einen von diesen Größen unabhängigen numerischen Wert annehmen, wenn die Ausdrücke

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial a_{\alpha\alpha}^{(0)}},\quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial a_{\alpha\beta}^{(\rho)}},\quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial a^{(\rho)}} \qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu)$$

Null sind, und also nach (2) auch

$$\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)},\ \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\rho},\ \Delta_{\alpha\beta}^{(1)},\ \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu)$$

für dieses Wertesystem verschwinden, woraus wieder folgt, daß

$$\left(v_1\right)_{t = \tau,\ p_1 = \pi_1, \dots p_\mu = \pi_\mu} = 0$$

sein muß; es wird sich somit für $\bar{v}_1$ dann und nur dann ein numerischer, von den unbestimmten Konstanten a unabhängiger Wert ergeben, wenn derselbe gleich Null ist, wofür dann auch die $\Delta^{(1)}$ sowie die nach den Parametern genommenen partiellen Differentialquotienten erster Ordnung dieser und der Kräftefunktion verschwinden.

Soll nun die Beschaffenheit derjenigen Integrale $p_1, \dots p_\mu$, $q_1, \dots q_\mu, v_1$ des Differentialgleichungssystems (9), (10) untersucht werden, welche für $t = \tau$ die Werte $\pi_1, \dots \pi_\mu, \varkappa_1, \dots \varkappa_\mu, \bar{v}_1$ annehmen, worin $\bar{v}_1$ eine einfache endliche Lösung der Gleichung

$$G\left(v_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu\right) = 0\,,$$

also

$$\left(\frac{\partial G}{\partial v_1}\right)_{\bar{v}_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu} \neq 0$$

ist, so wird die Entwicklung von $\frac{\partial G}{\partial v_1}$, nach Potenzen von $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ geordnet, ein von diesen Differenzen freies konstantes Glied besitzen, und sich somit $1:\frac{\partial G}{\partial v_1}$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen dieser Größen entwickeln lassen mit dem konstanten, von Null verschiedenen Gliede

$$\left(\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial v_1}}\right)_{\bar{v}_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu};$$

dann werden aber

$$\frac{dp_\rho}{dt}, \quad \frac{dq_\rho}{dt}, \quad \frac{dv_1}{dt}$$

in (9) und (10) in Reihen nach positiven, steigenden und ganzen Potenzen von $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$, $q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu$, $v_1-\bar{v}_1$ in der Umgebung dieser Werte von t und der abhängigen Variabeln entwickelbar sein, so daß

$$(11) \qquad \frac{dp_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho, \quad \frac{dq_\rho}{dt} = \mathfrak{Q}_\rho, \quad \frac{dv_1}{dt} = \mathfrak{V}_1$$

ist, von denen die letztere Gleichung ohne Rücksicht auf die Differentialgleichungen für p_ρ und q_ρ durch die von einem konstanten Gliede freie Potenzreihe

$$v_1-\bar{v}_1 = \mathfrak{V}_1(t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu)$$

ersetzt werden kann, da sich bekanntlich, weil $\bar{v}_1$ eine einfache endliche Lösung der Gleichung (3) sein sollte, $v_1-\bar{v}_1$ eindeutig in der Umgebung der gegebenen Werte von $t, p_1, \dots p_\mu$ entwickeln läßt. Setzt man diese Entwicklung in die ersten 2μ-Differentialgleichungen ein, so daß sich

$$\frac{dp_\rho}{dt} = \Pi_\rho, \quad \frac{dq_\rho}{dt} = K_\rho$$

ergibt, worin Π_ρ und K_ρ Reihen von demselben Charakter wie $\mathfrak{P}_\rho$ und $\mathfrak{Q}_\rho$ sind, welche nur die Variable v_1 nicht mehr enthalten, so folgt aus dem CAUCHYschen Satze, daß, wenn nicht alle Π_ρ und K_ρ für die Nullwerte der Argumente $t-\tau, p_1-\pi_1, \ldots q_1-\varkappa_1, \ldots$ verschwinden, sich p_ρ und q_ρ um $t=\tau$ herum durch eindeutige Potenzreihen in der Form darstellen lassen

$$p_\rho-\pi_\rho=\overline{\mathfrak{P}}_\rho(t-\tau),\ q_\rho-\varkappa_\rho=\overline{\mathfrak{Q}}_\rho(t-\tau),$$

und somit auch

$$v_1-\bar{v}_1=\overline{\mathfrak{V}}(t-\tau)$$

ist. In dem eben erwähnten Ausnahmefall, der offenbar für jedes Wertesystem $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ der q, wie aus den Gleichungen (7) ersichtlich ist, eintritt, wenn für die Werte $\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu$ die partiellen Differentialquotienten von G nach den a genommen, also die sämtlichen Größen

$$\Delta^{(1)}_{\alpha\alpha},\ \Delta^{(1)}_{\alpha\beta},\ \frac{\partial\Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial\Delta^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho} \qquad (\rho=1,2,\ldots\mu)$$

und somit auch $\bar{v}_1$ verschwinden, nehmen die Integrale die konstanten Werte $p_\rho=\pi_\rho$, $q_\rho=\varkappa_\rho$ an.

Entnimmt man jedoch v_1 nicht aus der Gleichung $G=0$, sondern legt nach der Reihenentwicklung des reziproken Wertes von $\frac{\partial G}{\partial v_1}$ das simultane Differentialgleichungssystem $2\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung (11) in der Form zugrunde

$$(12)\left\{\begin{aligned}
\frac{dp_\rho}{dt}&=\mathfrak{P}^{(1)}_\rho q_1+\mathfrak{P}^{(2)}_\rho q_2+\cdots+\mathfrak{P}^{(\mu)}_\rho q_\mu\\
\frac{dq_\rho}{dt}&=\mathfrak{Q}^{(11)}_\rho q_1^2+\cdots+\mathfrak{Q}^{(\mu\mu)}_\rho q_\mu^2+\mathfrak{Q}^{(12)}_\rho q_1q_2+\cdots+\mathfrak{Q}^{(\mu-1\,\mu)}_\rho q_{\mu-1}q_\mu+\mathfrak{Q}^{(0)}_\rho\\
\frac{dv_1}{dt}&=\mathfrak{V}^{(1)}q_1+\mathfrak{V}^{(2)}q_2+\cdots+\mathfrak{V}^{(\mu)}q_\mu+\mathfrak{V}^{(0)},
\end{aligned}\right.$$

worin die $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{V}$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $v_1-\bar{v}_1, t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ fortschreitende Potenzreihen bedeuten, so folgt wieder unmittelbar aus dem CAUCHYschen Satze, daß p_ρ, q_ρ, v_ρ eindeutige Potenzreihen von $t-\tau$ sein werden, welche für $t=\tau$ die Werte $\bar{v}_1, \pi_1, \dots \pi_\mu, \varkappa_1, \dots \varkappa_\mu$ annehmen, außer wenn, wie aus

$$q_\rho = \varkappa_\rho + (q_\rho - \varkappa_\rho), \quad q_\rho^2 = \varkappa_\rho^2 + 2\varkappa_\rho(q_\rho - \varkappa_\rho) + (q_\rho - \varkappa_\rho)^2$$

ersichtlich, in sämtlichen nur von $v_1-\bar{v}_1, t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, \varkappa_1, \dots \varkappa_\mu$ abhängigen Ausdrücken

$$\mathfrak{P}_\rho^{(1)}\varkappa_1 + \dots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)}\varkappa_\mu$$

$$\mathfrak{Q}_\rho^{(11)}\varkappa_1^2 + \dots + \mathfrak{Q}_\rho^{(\mu\mu)}\varkappa_\mu^2 + \mathfrak{Q}_\rho^{(12)}\varkappa_1\varkappa_2 + \dots + \mathfrak{Q}_\rho^{(\mu-1\,\mu)}\varkappa_{\mu-1}\varkappa_\mu + \mathfrak{Q}_\rho^{(0)}$$

$$\mathfrak{V}_\rho^{(1)}\varkappa_1 + \mathfrak{V}_\rho^{(2)}\varkappa_2 + \dots + \mathfrak{V}_\rho^{(\mu)}\varkappa_\mu + \mathfrak{V}_\rho^{(0)}$$

keine von $v_1-\bar{v}_1, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ freien Glieder vorkommen, in welchem Falle sich wieder konstante Integrale ergeben; ist dies zunächst für die ersten beiden dieser drei Ausdrücke der Fall, verschwinden also $\frac{dp_\rho}{dt}$ und $\frac{dq_\rho}{dt}$ für das bezeichnete Wertesystem, so folgt aus der Gleichung (9), daß auch $\frac{\partial G}{\partial t}$ für $t=\tau, p_1=\pi_1, \dots p_\mu=\pi_\mu$ den Wert Null annehmen muß, wenn auch der dritte Ausdruck verschwinden soll, und diese Bedingung wird erfüllt sein, wenn die Gleichung $G(v_1, t, p_1, \dots p_\mu) = 0$ die Zeit t nicht explizite enthält, oder die Kräftefunktion von der Zeit t unabhängig ist.

Nehmen wir nunmehr an, daß die Gleichung

$$G(v) = g_0(t, p_1, \dots p_\mu)v^\nu + g_1(t, p_1, \dots p_\mu)v^{\nu-1} + \dots + g_\nu(t, p_1, \dots p_\mu) = 0$$

für $t=\tau, p_1=\pi_1, \dots p_\mu=\pi_\mu$ wieder eine einfache, aber unendlich große Lösung hat, also

$$g_0(\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu) = 0, \; g_1(\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu) \neq 0$$

ist, und setzt man $v = \frac{1}{u}$, so ergibt sich, wenn

$$\Gamma(u) = g_\nu u^\nu + g_{\nu-1} u^{\nu-1} + \cdots + g_1 u + g_0 ,$$

die Beziehung

$$G(v) = u^{-\nu} \Gamma(u) ,$$

und hieraus

$$\frac{\partial G}{\partial v} = u^{-\nu+1} \left(\nu \Gamma(u) - u \frac{d\Gamma(u)}{du} \right)$$

$$= u^{-\nu+1} \left(g_{\nu-1} u^{\nu-1} + 2 g_{\nu-2} u^{\nu-2} + \cdots + (\nu-1) g_1 u + \nu g_0 \right) ,$$

oder für eine Lösung v_1 der Gleichung $G(v) = 0$ und die entsprechende u_1 der Gleichung $\Gamma(u) = 0$ durch Substitution von g_0 aus letzterer

$$\left(\frac{\partial G}{\partial v} \right)_{v_1} = - u_1^{-\nu+2} \left(\nu g_\nu u_1^{\nu-1} + (\nu-1) g_{\nu-1} u_1^{\nu-2} + \cdots + g_1 \right) .$$

Durch Substitution der Variabeln u in die HAMILTONschen Differentialgleichungen (9) und (10) werden diese bei Berücksichtigung der oben gemachten Bemerkung, daß $g_0(t, p_1, \ldots p_\mu)$ von den unbestimmten Konstanten a in dem Ausdruck (2) für v_1 unabhängig ist, wenn

$$(13) \left\{ \begin{aligned}
& \nu g_\nu u_1^{\nu-1} + (\nu-1) g_{\nu-1} u_1^{\nu-2} + \cdots + 2 g_2 u_1 + g_1 = H(u_1) \\
& \frac{\partial g_\nu}{\partial a_{\rho\varkappa}^{(0)}} u_1^{\nu-1} + \frac{\partial g_{\nu-1}}{\partial a_{\rho\varkappa}^{(0)}} u_1^{\nu-2} + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial a_{\rho\varkappa}^{(0)}} = K_{\rho\varkappa}^{(0)}(u_1) \\
& \frac{\partial g_\nu}{\partial a_{\varkappa\lambda}^{(\rho)}} u_1^{\nu-1} + \frac{\partial g_{\nu-1}}{\partial a_{\varkappa\lambda}^{(\rho)}} u_1^{\nu-2} + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial a_{\varkappa\lambda}^{(\rho)}} = K_{\varkappa\lambda}^{(\rho)}(u_1) \\
& \frac{\partial g_\nu}{\partial a^{(\rho)}} u_1^{\nu} + \frac{\partial g_{\nu-1}}{\partial a^{(\rho)}} u_1^{\nu-1} + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial a^{(\rho)}} = K^{(\rho)}(u_1) \\
& \frac{\partial g_\nu}{\partial t} u_1^{\nu} + \frac{\partial g_{\nu-1}}{\partial t} u_1^{\nu-1} + \cdots + \frac{\partial g_0}{\partial t} = K(u_1) \\
& \frac{\partial g_\nu}{\partial p_\rho} u_1^{\nu} + \frac{\partial g_{\nu-1}}{\partial p_\rho} u_1^{\nu-1} + \cdots + \frac{\partial g_0}{\partial p_\rho} = K_\rho(u_1)
\end{aligned} \right.$$

gesetzt wird, welche Ausdrücke sämtlich ganze Funktionen von u_1 mit in $t, p_1, p_2, \dots p_\mu$ ganzen rationalen Koeffizienten sind, in das folgende Differentialgleichungssystem übergehen:

$$
(14)\left\{
\begin{aligned}
& u_1 H(u_1) \frac{dp_\rho}{dt} = K_{\rho 1}^{(0)}(u_1) q_1 + K_{\rho 2}^{(0)}(u_1) q_2 + \dots + K_{\rho\mu}^{(0)}(u_1) q_\mu \\
& u_1 H(u_1) \frac{dq_\rho}{dt} = -\tfrac{1}{2} K_{11}^{(\rho)}(u_1) q_1^2 - \dots - \tfrac{1}{2} K_{\mu\mu}^{(\rho)}(u_1) q_\mu^2 \\
& \qquad - K_{12}^{(\rho)}(u_1) q_1 q_2 - \dots - K_{\mu-1\,\mu}^{(\rho)}(u_1) q_{\mu-1} q_\mu + K^{(\rho)} \qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu) \\
& u_1 H(u_1)^2 \frac{du_1}{dt} = -u_1 K(u_1) H(u_1) \\
& \qquad - K_1(u_1) \left(K_{11}^{(0)}(u_1) q_1 + K_{12}^{(0)}(u_1) q_2 + \dots + K_{1\mu}^{(0)}(u_1) q_\mu\right) \\
& \qquad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& \qquad - K_\mu(u_1) \left(K_{\mu 1}^{(0)}(u_1) q_1 + K_{\mu 2}^{(0)}(u_1) q_2 + \dots + K_{\mu\mu}^{(0)}(u_1) q_\mu\right),
\end{aligned}
\right.
$$

dessen Integrale zu untersuchen sind, wenn für $t = \tau$ die abhängigen Variabeln $u_1, p_1, \dots p_\mu, q_1, \dots q_\mu$ die Werte $0, \pi_1, \dots \pi_\mu, \varkappa_1, \dots \varkappa_\mu$ annehmen sollen.

Da sich nun, weil $g_1(\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu) \neq 0$ sein sollte, der reziproke Wert von $H(u_1)$ in eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $u_1, t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ fortschreitende Reihe entwickeln läßt, so kann das System (14) in die Form gesetzt werden

$$
(15)\left\{
\begin{aligned}
& u_1 \frac{dp_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \dots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu \\
& u_1 \frac{dq_\rho}{dt} = \mathfrak{Q}_\rho^{(11)} q_1^2 + \dots + \mathfrak{Q}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{Q}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \dots + \mathfrak{Q}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{Q}_\rho^{(0)} \\
& u_1 \frac{du_1}{dt} = \mathfrak{U}^{(1)} q_1 + \mathfrak{U}^{(2)} q_2 + \dots + \mathfrak{U}^{(\mu)} q_\mu + \mathfrak{U}_1^{(0)} \qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu),
\end{aligned}
\right.
$$

worin die $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ wiederum Potenzreihen von $u_1, t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ mit ganzen positiven steigenden Exponenten darstellen, und es werden die konstanten Glieder der rechten Seiten dieser Differentialgleichungen, von dem Faktor $1/g_1(\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu)$ abgesehen, durch

$$(16)\begin{cases} C_\rho^{(1)} = \sum_1^\mu{}_\sigma \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_{\rho\sigma}^{(0)}}\right)_{\tau,\pi_1,\dots\pi_\mu} \varkappa_\sigma & (\rho = 1, 2, \dots \mu) \\ C_\rho^{(2)} = \sum_1^\mu{}_\sigma \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_{\sigma\sigma}^{(\rho)}}\right)_{\tau,\pi_1,\dots\pi_\mu} \varkappa_\sigma^2 + \sum_{\sigma,\sigma_1=1,2,\dots\mu} \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_{\sigma\sigma_1}^{(\rho)}}\right)_{\tau,\pi_1,\dots\pi_\mu} \varkappa_\sigma \varkappa_{\sigma_1} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial a^{(\rho)}}\right)_{\tau,\pi_1,\dots\pi_\mu} \\ C^{(3)} = -\sum_1^\mu{}_\sigma \left(\left[\frac{\partial g_0}{\partial p_1}\frac{\partial g_1}{\partial a_{1\sigma}^{(0)}} + \frac{\partial g_0}{\partial p_2}\frac{\partial g_1}{\partial a_{2\sigma}^{(0)}} + \dots + \frac{\partial g_0}{\partial p_\mu}\frac{\partial g_1}{\partial a_{\mu\sigma}^{(0)}}\right] \varkappa_\sigma\right)_{\tau,\pi_1,\dots\pi_\mu} \end{cases}$$

gegeben sein.

Da aber g_1, wie oben hervorgehoben worden, eine homogene lineare Funktion der unbestimmten Konstanten a ist, so werden die Konstanten $C_\rho^{(1)}, C_\rho^{(2)}, C^{(3)}$, wie es in der Natur dieser Größen liegt, von jenen Substitutionskonstanten unabhängig sein, und es werden sich, wie aus dem Ausdruck für v_σ durch die $\Delta^{(\sigma)}$ und $U^{(\sigma)}$ und deren nach p_ρ genommenen Differentialquotienten, sowie aus den algebraischen Gleichungen für letztere, wie sie am Anfang dieses Abschnitts aufgestellt worden, unmittelbar folgt,

$$\frac{\partial g_1}{\partial a_{\alpha\alpha}^{(0)}} = \frac{g_1^{(\alpha\alpha)}}{g_0^{(\alpha\alpha)}}\, g_0$$

und die ähnlichen ergeben.

Zum Zwecke der Untersuchung des durch die Anfangswerte für $t=\tau$ definierten Integralsystems der Differentialgleichungen (15) werde zunächst bemerkt, daß sich aus der Gleichung $\Gamma(u_1)=0$, weil, der einfachen Lösung $\bar{v}_1=\infty$ entsprechend, $\bar{u}_1=0$ eine einfache Lösung der Gleichung $\Gamma(\bar{u}_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu)=0$ sein wird, wieder

$$u_1 = \mathfrak{P}(t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu)$$

ergeben wird, worin die Potenzreihe $\mathfrak{P}$ kein konstantes Glied besitzt, und durch Substitution dieses Wertes von u_1 in (15) das Differentialgleichungssystem

$$(17)\begin{cases} \frac{dp_\rho}{dt} = \frac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \dots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} \\ \frac{dq_\rho}{dt} = \frac{\mathfrak{Q}_\rho^{(11)} q_1^2 + \dots + \mathfrak{Q}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{Q}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \dots + \mathfrak{Q}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{Q}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}}, \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{P}_\rho$ und $\mathfrak{Q}_\rho$ den früheren Charakter haben, nur daß sie nicht mehr von u_ι abhängen, und die konstanten, von $t-\tau$, $p_1-\pi_1$, $\ldots p_\mu-\pi_\mu$ freien Glieder der Zähler der rechten Seiten wieder die oben bestimmten $C_\rho^{(1)}$ und $C_\rho^{(2)}$ sein werden.

Ist nun eine und nur eine dieser Größen $C_\rho^{(1)}, C_\rho^{(2)}$, z. B. $C_1^{(1)}$ von Null verschieden, so bilde man das Differentialgleichungssystem

$$(18)\left\{\begin{aligned}
\frac{dt}{dp_1} &= \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_1^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_1^{(\mu)} q_\mu} \\
\frac{dp_2}{dp_1} &= \frac{\mathfrak{P}_2^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_2^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_2^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}_1^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_1^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_1^{(\mu)} q_\mu}, \ldots\ldots\ldots \\
\frac{dq_1}{dp_1} &= \frac{\mathfrak{Q}_1^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{Q}_1^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{Q}_1^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{Q}_1^{(0)}}{\mathfrak{P}_1^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_1^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_1^{(\mu)} q_\mu} \\
\frac{dq_2}{dp_1} &= \frac{\mathfrak{Q}_2^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{Q}_2^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{Q}_2^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{Q}_2^{(0)}}{\mathfrak{P}_1^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_1^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_1^{(\mu)} q_\mu}, \ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

dessen rechte Seiten sich nunmehr, da $C_1^{(1)} \neq 0$ sein sollte, als Potenzreihen von $p_1-\pi_1$, $t-\tau$, $p_2-\pi_2$, $\ldots p_\mu-\pi_\mu$ darstellen lassen, deren konstante Glieder, da $\mathfrak{P}$ ein solches nicht besitzt, sämtlich Null sind, so daß sich für die Differentialgleichungen (18) für das System der Integrale, welche für $p_1=\pi_1$ die Werte $t=\tau$, $p_2=\pi_2, \ldots$ $p_\mu=\pi_\mu$, $q_1=\varkappa_1, \ldots q_\mu=\varkappa_\mu$ annehmen sollen, konstante Werte ergeben. Ist jedoch noch eine der Konstanten $C_\rho^{(1)}, C_\rho^{(2)}$ außer $C_1^{(1)}$ z. B. $C_2^{(1)}$ von Null verschieden, so wird die rechte Seite der Differentialgleichung für $\frac{dp_2}{dp_1}$ das von Null verschiedene Anfangsglied $\frac{C_2^{(1)}}{C_1^{(1)}}$ besitzen, und es werden sich somit nach dem CAUCHYschen Satze $t, p_2, p_3, \ldots q_1, q_2, \ldots$ als eindeutige Potenzreihen mit ganzen positiven Exponenten von $p_1-\pi_1$ ergeben; ist nun infolgedessen

$$t-\tau = a_n(p_1-\pi_1)^n + a_{n+1}(p_1-\pi_1)^{n+1} + \cdots,$$

also

$$p_1-\pi_1 = a_n^{-\frac{1}{n}}(t-\tau)^{\frac{1}{n}} + \alpha_2(t-\tau)^{\frac{2}{n}} + \cdots,$$

so ergibt sich

$$p_\rho - \pi_\rho = \mathfrak{p}_\rho (t-\tau)^{\frac{\lambda_\rho}{n}} + \cdots, \quad q_\rho - \varkappa_\rho = \mathfrak{q}_\rho (t-\tau)^{\frac{\mu_\rho}{n}} + \cdots,$$

woraus dann

$$u_1 = \delta_\nu (t-\tau)^{\frac{\nu}{n}} + \cdots, \text{ also } v_1 = \delta_\nu^{-1} (t-\tau)^{-\frac{\nu}{n}} + \varepsilon_1 (t-\tau)^{-\frac{\nu-1}{n}} + \cdots$$

folgt, und die Resultate bleiben dieselben, wenn zwei beliebige der Konstanten $C_\rho^{(1)}, C_\rho^{(2)}$ von Null verschieden sind.

Wir finden somit,

daß, wenn die Gleichung $G(v_1, t, p_1, \ldots p_\mu) = 0$ für $t = \tau$, $p_1 = \pi_1, \ldots p_\mu = \pi_\mu$ eine unendlich große Lösung und zwar einfach besitzt, und mindestens zwei der durch (16) bestimmten Konstanten $C_\rho^{(1)}, C_\rho^{(2)}$ von Null verschieden sind, die durch diese Anfangswerte bestimmten Integrale der HAMILTONschen Differentialgleichungen (15) durch Potenzreihen darstellbar sind, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $(t-\tau)^{\frac{1}{n}}$ fortschreiten, wenn der erste für jenes Wertesystem genommene, nicht verschwindende Differentialquotient von t nach einem der p oder q, welches einer der nicht verschwindenden Konstanten zugehört, der n^{te} ist.

Für den Fall, daß nur eine der Konstanten von Null verschieden ist, oder alle den Wert Null haben, wird das Differentialgleichungssystem (17) die Form haben

$$\begin{aligned} \frac{dp_\rho}{dt} &= \frac{r_\rho(t-\tau, p_1-\pi_1, \ldots q_1-\varkappa_1, \ldots)}{r(t-\tau, p_1-\pi_1, \ldots p_\mu-\pi_\mu)} \\ \frac{dq_\rho}{dt} &= \frac{s_\rho(t-\tau, p_1-\pi_1, \ldots q_1-\varkappa_1, \ldots)}{r(t-\tau, p_1-\pi_1, \ldots p_\mu-\pi_\mu)}, \end{aligned} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu)$$

worin die Potenzreihen r, r_ρ, s_ρ keine konstanten Glieder enthalten, die r_ρ lineare Funktionen der q, die s_ρ ganze Funktionen zweiten Grades dieser Größen sind, und die Integrale dieser Form von Differentialgleichungen werden später bei der Zulassung gleicher

endlicher Lösungen von $G(v_1, t, p_1, \dots p_\mu) = 0$ für $t = \tau$, $p_1 = \pi_1, \dots$ $p_\mu = \pi_\mu$ näher zu untersuchen sein.

Sollen ferner für $t = \tau$ die Integrale $p_1, p_2, \dots p_\delta$ unendlich groß sein, während $p_{\delta+1} = \pi_{\delta+1}, \dots p_\mu = \pi_\mu$, $q_1 = \varkappa_1, \dots q_\mu = \varkappa_\mu$ gegeben sind, und setzt man

$$p_1 = \frac{1}{P_1}, \quad p_2 = \frac{1}{P_2}, \dots p_\delta = \frac{1}{P_\delta},$$

so daß durch Wegschaffen der Nenner sich

$$G(v, t, p_1, \dots p_\mu) = G\left(v, t, \frac{1}{P_1}, \dots \frac{1}{P_\delta}, p_{\delta+1}, \dots p_\mu\right)$$
$$= \frac{1}{P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \dots P_\delta^{\lambda_\delta}} G_1(v, t, P_1, \dots P_\delta, p_{\delta+1}, \dots p_\mu)$$

ergibt, so werden die HAMILTONschen Differentialgleichungen (9) und (10) in

$$(19)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial G_1}{\partial v_1}\frac{dP_\sigma}{dt} = -P_\sigma^2 \frac{\partial G_1}{\partial a_{\sigma 1}^{(0)}} q_1 - \dots - P_\sigma^2 \frac{\partial G_1}{\partial a_{\sigma\mu}^{(0)}} q_\mu \qquad (\sigma = 1, 2, \dots \delta)\\
&\frac{\partial G_1}{\partial v_1}\frac{dp_{\sigma_1+\delta}}{dt} = \frac{\partial G_1}{\partial a_{\sigma_1+\delta 1}^{(0)}} q_1 + \dots + \frac{\partial G_1}{\partial a_{\sigma_1+\delta\mu}^{(0)}} q_\mu \qquad (\sigma_1 = 1, 2, \dots \mu - \delta)\\
&\frac{\partial G_1}{\partial v_1}\frac{dq_\rho}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial G_1}{\partial a_{11}^{(\rho)}} q_1^2 + \dots + \tfrac{1}{2}\frac{\partial G_1}{\partial a_{\mu\mu}^{(\rho)}} q_\mu^2\\
&\qquad + \frac{\partial G_1}{\partial a_{12}^{(\rho)}} q_1 q_2 + \dots - \frac{\partial G_1}{\partial a^{(\rho)}} \qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu)\\
&\left(\frac{\partial G_1}{\partial v_1}\right)^2 \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial G_1}{\partial t}\frac{\partial G_1}{\partial v_1} + \left(P_1^2 \frac{\partial G_1}{\partial P_1} - \lambda_1 P_1 G_1\right)\left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{11}^{(0)}} q_1 + \dots\right)\\
&\qquad + \dots + \left(P_\delta^2 \frac{\partial G_1}{\partial P_\delta} - \lambda_\delta P_\delta G_1\right)\left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{\delta 1}^{(0)}} q_1 + \dots\right)\\
&\qquad - \frac{\partial G_1}{\partial p_{\delta+1}}\left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{\delta+1\,1}^{(0)}} q_1 + \dots\right) - \dots - \frac{\partial G_1}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{\mu 1}^{(0)}} q_1 + \dots\right)
\end{aligned}\right.$$

übergehen, und es sind für dieses Differentialgleichungssystem die Integrale zu untersuchen, wenn für $t=\tau$ $P_1=P_2=\cdots=P_\delta=0$, $p_{\delta+1}=\pi_{\delta+1}, \cdots p_\mu=\pi_\mu, q_1=\varkappa_1, \cdots q_\mu=\varkappa_\mu$ sein sollen. Ist nun wieder $\bar{v}_1$ eine einfache endliche Lösung der Gleichung

$$G_1(\bar{v}_1, \tau, 0, 0, \ldots 0, \pi_{\delta+1}, \ldots \pi_\mu) = 0 ,$$

also

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial v_1}\right)_{\bar{v}_1, \tau, 0, 0, \ldots \pi_{\delta+1}, \ldots \pi_\mu} \neq 0 ,$$

und somit $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial v_1}\right)}$ in eine nach ganzen positiven steigenden Potenzen von $v_1-\bar{v}_1, t-\tau, P_1, \ldots P_\delta, p_{\delta+1}-\pi_{\delta+1}, \cdots p_\mu-\pi_\mu$ fortschreitende Reihe entwickelbar, so werden, da sich wiederum aus der Gleichung $G_1(v_1, t, P_1, \ldots p_{\delta+1}, \ldots)=0$ $v_1-\bar{v}_1$ als eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen der Differenzen $t-\tau, P_1-0, \ldots P_\delta-0$, $p_{\delta+1}-\pi_{\delta+1}, \cdots p_\mu-\pi_\mu$ fortschreitende Reihe ohne konstantes Glied ergibt, die rechten Seiten aller Differentialgleichungen (19) für die abhängigen Variabeln $P_1, \ldots P_\delta, p_{\delta+1}, \cdots p_\mu, q_1, \ldots q_\mu$ eine Entwicklung in ebensolche Potenzreihen zulassen, und da unmittelbar ersichtlich ist, daß die rechten Seiten der ersten δ-Differentialgleichungen keine von den Differenzen $P_1-0, \ldots P_\delta-0$ freien Glieder enthalten, so wird sich wieder genau wie oben ergeben,

daß sich $P_1, \ldots P_\delta, p_{\delta+1}, \cdots p_\mu, q_1, \cdots q_\mu$, welche für $t=\tau$ die Werte $0, \ldots 0, \pi_{\delta+1}, \ldots \pi_\mu, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\mu$ annehmen sollen, um $t=\tau$ herum in Reihen nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $t-\tau$ entwickeln lassen, wenn nicht die konstanten Glieder in der Entwicklung der rechten Seiten von $\dfrac{dp_{\delta+\sigma_1}}{dt}$ und von $\dfrac{dq_\rho}{dt}$ sämtlich Null sind; ist letzteres der Fall, dann sind die Integrale wieder konstant.

Da aber, wenn

$$P_\sigma = a_n(t-\tau)^n + a_{n+1}(t-\tau)^{n+1} + \cdots$$

ist, sich

$$p_\sigma = a_n^{-1}(t-\tau)^{-n} + b_1(t-\tau)^{-n+1} + \cdots$$

ergibt, so werden unter der gemachten Annahme alle diejenigen p_ρ, welche für $t=\tau$ unendlich werden sollen, sich in eine Potenzreihe von $t-\tau$ mit einer endlichen Anzahl ganzer negativer Potenzen entwickeln lassen.

Sollen nunmehr die Anfangswerte von $q_1, q_2, \dots q_\varepsilon$ für $t=\tau$ unendlich groß sein, und ist wieder $\bar{v}_1$ eine einfache endliche Lösung der Gleichung $G(\bar{v}_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu)=0$, so daß $v_1-\bar{v}_1$ sich in eine Potenzreihe von $t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ und der reziproke Wert von $\frac{\partial G}{\partial v_1}$ sich in eine ebensolche Reihe nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen dieser Differenzen entwickeln läßt, so werden, wenn

$$q_1=\frac{1}{Q_1},\quad q_2=\frac{1}{Q_2},\ \dots\ q_\varepsilon=\frac{1}{Q_\varepsilon}$$

gesetzt wird, also die Anfangswerte von $Q_1, \dots Q_\varepsilon$ für $t=\tau$ sämtlich Null werden sollen, die Differentialgleichungen (9) und (10) in

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dp_\rho}{dt} &= \frac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)}Q_2Q_3\dots Q_\varepsilon+\mathfrak{P}_\rho^{(2)}Q_1Q_3\dots Q_\varepsilon+\dots\mathfrak{P}_\rho^{(\varepsilon+1)}Q_1Q_2\dots Q_\varepsilon q_{\varepsilon+1}+\dots}{Q_1Q_2\dots Q_\varepsilon} \qquad (\rho=1,2,\dots\mu)\\
\frac{dQ_\sigma}{dt} &= \frac{\begin{aligned}&\mathfrak{Q}_\sigma^{(11)}Q_\sigma^2Q_2^2\dots Q_\varepsilon^2+\mathfrak{Q}_\sigma^{(22)}Q_\sigma^2Q_1^2Q_3^2\dots Q_\varepsilon^2+\dots+\mathfrak{Q}_\sigma^{(12)}Q_\sigma^2Q_1Q_2Q_3^2\dots Q_\varepsilon^2+\dots\\&+\mathfrak{Q}_\sigma^{(\varepsilon+1\,\varepsilon+2)}Q_\sigma^2Q_1^2\dots Q_\varepsilon^2q_{\varepsilon+1}q_{\varepsilon+2}+\dots+\mathfrak{Q}_\sigma^{(0)}Q_\sigma^2Q_1^2\dots Q_\varepsilon^2\end{aligned}}{Q_1^2Q_2^2\dots Q_\varepsilon^2} \qquad (\sigma=1,2,\dots\varepsilon)\\
\frac{dq_{\sigma_1}}{dt} &= \frac{\begin{aligned}&\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(11)}Q_2^2Q_3^2\dots Q_\varepsilon^2+\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(22)}Q_1^2Q_3^2\dots Q_\varepsilon^2\\&+\dots+\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(12)}Q_1Q_2Q_3^2\dots Q_\varepsilon^2+\dots+\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(0)}Q_1^2\dots Q_\varepsilon^2\end{aligned}}{Q_1^2Q_2^2\dots Q_\varepsilon^2} \qquad (\sigma_1=\varepsilon+1,\varepsilon+2,\dots\mu)
\end{aligned}\right.$$

übergehen, worin die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ fortschreitende Reihen sind.

Man sieht aus dem Differentialgleichungssystem (20) unmittelbar, daß die Entwicklungen der Zähler und Nenner

der rechten Seiten nach steigenden positiven ganzen Potenzen von $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$, $Q_1-0, \dots Q_\varepsilon-0$, $q_{\varepsilon+1}-\varkappa_{\varepsilon+1}, \dots q_\mu-\varkappa_\mu$ keine konstanten Glieder haben, sich also die rechten Seiten im allgemeinen nicht in Potenzreihen nach diesen Differenzen entwickeln lassen, und der CAUCHYsche Satz somit hier nicht anwendbar ist; es ist das Problem somit wieder ein spezieller Fall des später zu behandelnden allgemeinen Differentialgleichungssystems, in welchem die Werte der ersten Differentialquotienten der p und q, nach t genommen, für die gegebenen Anfangswerte die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Nur in dem Falle, daß nur *einer* der q-Werte, z. B. q_1 für $t=\tau$ unendlich groß werden soll, werden wir aus den Differentialgleichungen (20), welche dann die Form annehmen

$$(21)\begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)} + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} Q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} Q_1 q_\mu}{Q_1} & (\rho=1,2,\dots\mu) \\[2ex] \dfrac{dQ_1}{dt} = \mathfrak{Q}_1^{(11)} + \mathfrak{Q}_1^{(22)} Q_1^2 q_2^2 + \cdots + \mathfrak{Q}_1^{(12)} Q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{Q}_1^{(0)} Q_1^2 & \\[2ex] \dfrac{dq_\sigma}{dt} = \dfrac{\mathfrak{Q}_\sigma^{(11)} + \mathfrak{Q}_\sigma^{(22)} Q_1^2 q_2^2 + \cdots + \mathfrak{Q}_\sigma^{(12)} Q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{Q}_\sigma^{(0)} Q_1^2}{Q_1^2} & (\sigma=2,3,\dots\mu), \end{cases}$$

weitere Folgerungen herleiten können.

Wäre nämlich das konstante Glied in einer der Reihen $\mathfrak{P}_\rho^{(1)}$, z. B. in $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ von Null verschieden, so würde sich $\frac{dt}{dp_1}$ in eine Potenzreihe von

$$t-\tau,\ p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu,\ Q_1,\ q_2-\varkappa_2, \dots q_\mu-\varkappa_\mu$$

entwickeln lassen, und ebenso $\frac{dp_2}{dp_1}, \dots \frac{dp_\rho}{dp_1}, \frac{dQ_1}{dp_1}$, dagegen würden die Ausdrücke für $\frac{dq_\sigma}{dp_1}$ noch Q_1 im Nenner behalten und

somit wieder eine Entwicklung in eine Potenzreihe nach den angegebenen Differenzen nicht gestatten, so daß die früher in einem analogen Falle (für eine einfache unendliche Lösung der Gleichung $G(v)=0$) gemachten Schlüsse durch Einführung der neuen unabhängigen Variabeln p_1 für das Differentialgleichungssystem (21) sich hier nicht durchführen lassen, und die Behandlung dieses Falles wieder auf das später zu behandelnde, wiederholt gekennzeichnete Problem reduziert ist, in welchem sich die rechten Seiten einiger oder aller Differentialgleichungen des Systems in der unbestimmten Form 0/0 ergeben — und dies würde, wie unmittelbar zu sehen, der Fall sein, wenn das konstante Glied auf der rechten Seite von $\frac{dQ_1}{dt}$ Null oder von Null verschieden ist.

Ist jedoch das von den oben bezeichneten Differenzen freie Glied in dem Zähler einer der rechten Seiten von $\frac{dq_\sigma}{dt}$, z. B. von $\frac{dq_2}{dt}$ von Null verschieden, so würden die Differentialgleichungen (21) ersetzt werden können durch das System

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dt}{dq_2} &= \frac{Q_1^2}{\mathfrak{Q}_2^{(11)}+\mathfrak{Q}_2^{(22)}Q_1^2q_2^2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(12)}Q_1q_2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(0)}Q_1^2}\\
\frac{dp_\rho}{dq_2} &= \frac{Q_1(\mathfrak{P}_\rho^{(1)}+\mathfrak{P}_\rho^{(2)}Q_1q_2+\cdots+\mathfrak{P}_\rho^{(\mu)}Q_1q_\mu)}{\mathfrak{Q}_2^{(11)}+\mathfrak{Q}_2^{(22)}Q_1^2q_2^2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(12)}Q_1q_2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(0)}Q_1^2} \quad (\rho=1,2,\ldots\mu)\\
\frac{dQ_1}{dq_2} &= \frac{Q_1^2(\mathfrak{Q}_1^{(11)}+\mathfrak{Q}_1^{(22)}Q_1^2q_2^2+\cdots+\mathfrak{Q}_1^{(12)}Q_1q_2+\cdots+\mathfrak{Q}_1^{(0)}Q_1^2)}{\mathfrak{Q}_2^{(11)}+\mathfrak{Q}_2^{(22)}Q_1^2q_2^2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(12)}Q_1q_2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(0)}Q_1^2}\\
\frac{dq_{\sigma_1}}{dq_2} &= \frac{\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(11)}+\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(22)}Q_1^2q_2^2+\cdots+\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(12)}Q_1q_2+\cdots+\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(0)}Q_1^2}{\mathfrak{Q}_2^{(11)}+\mathfrak{Q}_2^{(22)}Q_1^2q_2^2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(12)}Q_1q_2+\cdots+\mathfrak{Q}_2^{(0)}Q_1^2} \quad (\sigma_1=3,\ldots\mu),
\end{aligned}\right.$$

in welchem die rechten Seiten aller dieser Differentialgleichungen in Potenzreihen entwickelbar sind, welche nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen der Differenzen $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \ldots p_\mu-\pi_\mu$, Q_1-0,

$q_2-\varkappa_2, \dots q_\mu-\varkappa_\mu$ fortschreiten. Sind nun die in allen Größen $\mathfrak{Q}_{\sigma_1}^{(11)}$ enthaltenen konstanten Glieder Null, dann enthalten die Potenzreihen der rechten Seiten aller Gleichungen (22) keine konstanten Glieder und das System hat somit dann nur konstante Integrale. Ist aber z. B. das konstante Glied in $\mathfrak{Q}_3^{(11)}$ von Null verschieden – die rechten Seiten von $\frac{dt}{dq_2}, \frac{dp_\rho}{dq_2}, \frac{dQ_1}{dq_2}$ haben, da die Zähler den Faktor Q_1 besitzen, keine konstanten Glieder – so würde sich nach dem CAUCHYschen Satze $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$, Q_1, $q_{\sigma_1}-\varkappa_{\sigma_1}$ in Potenzreihen nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $q_2-\varkappa_2$ entwickeln lassen, und sich somit, wenn

$$t-\tau = a_n(q_2-\varkappa_2)^n + a_{n+1}(q_2-\varkappa_2)^{n+1} + \cdots,$$

also

$$q_2-\varkappa_2 = a_n^{-\frac{1}{n}}(t-\tau)^{\frac{1}{n}} + c(t-\tau)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

ist, die Integrale des Differentialgleichungssystems (22) um $t=\tau$ herum in der Form ergeben

$$p_\rho-\pi_\rho = a_{m_\rho}(t-\tau)^{\frac{m_\rho}{n}} + a_{m_\rho+1}(t-\tau)^{\frac{m_\rho+1}{n}} + \cdots \qquad (\rho=1,2,\dots\mu)$$

$$q_1 = b_{-\mu_0}(t-\tau)^{-\frac{\mu_0}{n}} + b_{-\mu_0+1}(t-\tau)^{\frac{-\mu_0+1}{n}} + \cdots$$

$$q_2-\varkappa_2 = a_n^{-\frac{1}{n}}(t-\tau)^{\frac{1}{n}} + c_1(t-\tau)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

$$q_3-\varkappa_3 = d_1(t-\tau)^{\frac{1}{n}} + d_2(t-\tau)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

$$q_{\sigma_1}-\varkappa_{\sigma_1} = d_{\nu_{\sigma_1}}(t-\tau)^{\frac{\nu_{\sigma_1}}{n}} + d_{\nu_{\sigma_1}+1}(t-\tau)^{\frac{\nu_{\sigma_1}+1}{n}} + \cdots \qquad (\sigma_1=4,5,\dots\mu).$$

Soll endlich die Eigenschaft derjenigen Integrale des HAMILTONschen Differentialgleichungssystems (9) und (10) ermittelt werden, welche für $t=\infty$ die Werte $p_1=\pi_1, \dots p_\mu=\pi_\mu$, $q_1=\varkappa_1, \dots q_\mu=\varkappa_\mu$ annehmen, so setze man $t=\frac{1}{T}$, so daß

$$G(v, t, p_1, \dots p_\mu) = G\left(v, \frac{1}{T}, p_1, \dots p_\mu\right) = \frac{1}{T^\lambda} G_1(v, T, p_1, \dots p_\mu)$$

wird, und es wird jenes Differentialgleichungssystem übergehen in

$$(23)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}\frac{dp_\rho}{dT} &= \frac{\left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{\rho 1}^{(0)}}\right)_{v_1} q_1 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{\rho 2}^{(0)}}\right)_{v_1} q_2 + \dots + \left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{\rho\mu}^{(0)}}\right)_{v_1} q_\mu}{T^2} \\ \frac{\partial G_1}{\partial v_1}\frac{dq_\rho}{dT} &= \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{11}^{(\rho)}}\right)_{v_1} q_1^2 + \dots - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{\mu\mu}^{(\rho)}}\right)_{v_1} q_\mu^2 - \left(\frac{\partial G_1}{\partial a_{12}^{(\rho)}}\right)_{v_1} q_1 q_2 - \dots + \left(\frac{\partial G_1}{\partial a^{(\rho)}}\right)_{v_1}}{T^2}, \end{aligned}\right.$$

und, wenn wieder angenommen wird, daß $\bar{v}_1$ eine einfache endliche Lösung von

$$G(\bar{v}_1, \infty, \pi_1, \dots \pi_\mu) = 0 \text{ also auch von } G_1(\bar{v}_1, 0, \pi_1, \dots \pi_\mu) = 0$$

ist, sich somit $v_1 - \bar{v}_1$ in eine von einem konstanten Gliede freie Potenzreihe von

$$T, p_1 - \pi_1, \dots p_\mu - \pi_\mu$$

entwickeln läßt, durch Substitution dieses Wertes von v_1 in (23) nach Entwicklung der vermöge der gemachten Voraussetzung möglichen Entwicklung des reziproken Wertes von $\frac{\partial G_1}{\partial v_1}$ in eine ebensolche Potenzreihe, das Differentialgleichungssystem die Form haben

$$(24)\left\{\begin{aligned} \frac{dp_\rho}{dT} &= \frac{\mathfrak{P}_\rho(T, p_1 - \pi_1, \dots p_\mu - \pi_\mu, q_1 - \varkappa_1, \dots q_\mu - \varkappa_\mu)}{T^2} \\ \frac{dq_\rho}{dT} &= \frac{\mathfrak{Q}_\rho(T, p_1 - \pi_1, \dots p_\mu - \pi_\mu, q_1 - \varkappa_1, \dots q_\mu - \varkappa_\mu)}{T^2} \end{aligned}\right. \quad (\rho = 1, 2, \dots \mu).$$

Hieraus ergibt sich wieder, genau wie oben, daß, wenn das konstante Glied aller Zähler Null ist, das Pro-

blem auf das später zu behandelnde reduziert ist, und daß sich wieder konstante Integrale ergeben, wenn nur einer der Zähler ein von den angegebenen Differenzen freies Glied besitzt.

Haben jedoch zwei der Zähler von jenen Differenzen freie Glieder, und seien dies z. B. die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$, so wird man wieder das Differentialgleichungssystem (24) in die Form setzen

$$\frac{dT}{dp_1} = \frac{T^2}{\mathfrak{P}_1(T, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu)}$$

$$\frac{dp_{\rho_1}}{dp_1} = \frac{\mathfrak{P}_{\rho_1}(T, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu)}{\mathfrak{P}_1(T, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu)} \qquad (\rho_1=2,3,\dots\mu)$$

$$\frac{dq_1}{dp_1} = \frac{\mathfrak{Q}_1(T, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu)}{\mathfrak{P}_1(T, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu)}$$

$$\frac{dq_{\rho_1}}{dp_1} = \frac{\mathfrak{Q}_{\rho_1}(T, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu)}{\mathfrak{P}_1(T, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu)} \qquad (\rho_1=2,3,\dots\mu),$$

deren rechte Seiten sich der Voraussetzung nach in Potenzreihen nach den angegebenen Differenzen entwickeln lassen, von denen die den Ausdruck $\frac{dq_1}{dp_1}$ darstellende Potenzreihe ein konstantes, von Null verschiedenes Glied besitzt. Da sich nunmehr nach dem CAUCHYschen Satze $T, p_2, \dots p_\mu, q_1, \dots q_\mu$ als Reihen darstellen lassen, welche nach ganzen positiven steigenden Potenzen der Differenz $p_1-\pi_1$ fortschreiten, so wird, wenn

$$T = a_n(p_1-\pi_1)^n + a_{n+1}(p_1-\pi_1)^{n+1} + \cdots,$$

also

$$p_1-\pi_1 = a_n^{-\frac{1}{n}} T^{\frac{1}{n}} + b_2 T^{\frac{2}{n}} + \cdots = a_n^{-\frac{1}{n}} t^{-\frac{1}{n}} + b_2 t^{-\frac{2}{n}} + \cdots$$

ist, das Integralsystem der Differentialgleichungen (24) die Form annehmen

$$p_{\rho_1}-\pi_{\rho_1}=b_{m_{\rho_1}}t^{-\frac{m_{\rho_1}}{n}}+b_{m_{\rho_1}+1}t^{-\frac{m_{\rho_1}+1}{n}}+\cdots$$

$$q_1-\varkappa_1=A_1t^{-\frac{1}{n}}+A_2t^{-\frac{2}{n}}+\cdots \qquad (\rho_1=2,3,\ldots\mu)$$

$$q_{\rho_1}-\varkappa_{\rho_1}=B_{n_{\rho_1}}t^{-\frac{n_{\rho_1}}{n}}+B_{n_{\rho_1}+1}t^{-\frac{n_{\rho_1}+1}{n}}+\cdots .$$

Im Hinblick auf die nachfolgenden Untersuchungen mögen noch die bisher entwickelten Sätze an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Sei für ein mechanisches Problem mit nur einem freien Parameter p die lebendige Kraft wieder in der Form gegeben

$$T=\tfrac{1}{2}\Delta(p)\,q^2 \quad \text{also} \quad E=\tfrac{1}{2}\Delta(p)\,q^2-U\,,$$

so daß für

$$\Delta(p)=p^{\frac{3}{2}},\ U=\frac{p^2}{2}+\frac{2}{5}p^{\frac{5}{2}}$$

$$E=\frac{1}{2}p^{\frac{3}{2}}q^2-\frac{p^2}{2}-\frac{2}{5}p^{\frac{5}{2}}$$

ist, so werden die zugehörigen HAMILTONschen Gleichungen lauten

$$\frac{dp}{dt}=p^{\frac{3}{2}}q,\ \frac{dq}{dt}=-\frac{3}{4}p^{\frac{1}{2}}q^2+p+p^{\frac{3}{2}}\,, \tag{25}$$

und es soll die Natur der Integrale p und q derselben untersucht werden, wenn für diese die Werte für $t=\tau$ gegeben sind.

Um die Gleichungen (25) auf die Form (9) und (10) zu bringen, hat man

$$v=a_1\Delta+a_2\frac{\partial\Delta}{\partial p}+a\frac{\partial U}{\partial p}=a_1p^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}a_2p^{\frac{1}{2}}+a\left(p+p^{\frac{3}{2}}\right)$$

zu setzen, woraus sich für v die Gleichung ergibt

$$G(v,p) = v^2 - 2apv + a^2p^2 - p\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right)^2 = 0\,,$$

welche nur für $p=0$ gleiche Lösungen besitzt.

Da nun

$$(26)\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial v} = 2v - 2ap,\ \frac{\partial G}{\partial a_1} = -2p^2\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right),\\ &\frac{\partial G}{\partial a_2} = -3p\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right),\\ &\frac{\partial G}{\partial a} = -2p(v-ap) - 2p^2\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right),\end{aligned}\right.$$

so werden die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial a_1}q,\quad \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial a_2}q^2 - \frac{\partial G}{\partial a}$$

in

$$(27)\left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} = -\frac{-2p^2\left(\frac{3}{2}a + (a+a_1)p\right)}{2p^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}a + (a+a_1)p\right)}q = p^{\frac{3}{2}}q\\ &\frac{dq}{dt} = \frac{-\frac{3}{2}p\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right)}{p^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right)}q^2 + p + \frac{p^2\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right)}{p^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}a_2 + (a+a_1)p\right)}\\ &\qquad\qquad = -\tfrac{3}{4}p^{\frac{1}{2}}q^2 + p + p^{\frac{3}{2}}\,,\end{aligned}\right.$$

also in der Tat in die Differentialgleichungen (25) übergehen. Sollen nun die Integrale für $t=\tau$ die Werte $p=1$, $q=1$ annehmen, so haben die Entwicklungen der rechten Seiten der Gleichungen (27) nach Potenzen von $t-\tau$, $p-1$, $q-1$ die konstanten Glieder 1 und 5/4; es lassen sich somit, was auch unmittelbar aus den Gleichungen (25) geschlossen werden konnte, p und q als Potenzreihen von $t-\tau$ in der Form

$$p-1 = (t-\tau) + a_2(t-\tau)^2 + \cdots$$
$$q-1 = \tfrac{5}{4}(t-\tau) + b_2(t-\tau)^2 + \cdots$$

darstellen; sollen aber für das Differentialgleichungssystem für $t=\tau$ $p=1$ und $q=0$ sein, dann werden die konstanten Glieder in der Entwicklung von

$$-\frac{\frac{\partial G}{\partial a_1}}{\frac{\partial G}{\partial v}} q^2 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\frac{\frac{\partial G}{\partial a_2}}{\frac{\partial G}{\partial v}} q^2 - \frac{\frac{\partial G}{\partial a}}{\frac{\partial G}{\partial v}}$$

in Potenzreihen von $p-1$ und q die Werte 0 und 2 annehmen, und somit wieder, wie gezeigt worden, $p-1$ und $\dot{q}$ in Potenzreihen nach $t-\tau$ entwickelbar sein.

Für das Differentialgleichungssystem (25) oder das durch die Transformation $p^{\frac{1}{2}} = P$ sich ergebende System

$$\frac{dP}{dt} = \tfrac{1}{2}P^2 q, \quad \frac{dq}{dt} = -\tfrac{3}{4}Pq^2 + P^2 + P^3 \tag{28}$$

würden sich für die dem Werte $t=\tau$ zugehörigen Integralwerte $P=0$, $q=0$ die entsprechenden konstanten Integrale, also auch $p=0$ und $q=0$ als konstante Integrale der Differentialgleichungen (25) ergeben.

Die allgemeine Untersuchung der Integrale des Differentialgleichungssystems (9) und (10) hat sich somit nunmehr noch auf den Fall zu erstrecken, daß für die gegebenen Werte $t=\tau$, $p_1=\pi_1, \cdots p_\mu=\pi_\mu$ die Gleichung

$$G(\bar{v}_1, \tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu) = 0$$

mehrfache Lösungen besitzt, also auch

$$\left(\frac{\partial G}{\partial v_1}\right)_{\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu} = 0$$

ist, und soll den Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen bilden.

Wir bemerken zunächst, daß, wenn das Wertesystem $\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu$ einer der Größen

$$(29) \qquad \Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}, \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}, \frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_\rho}, \frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho}, \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu)$$

einen unendlich großen Wert erteilt, wegen der Willkürlichkeit der unbestimmten Konstanten a auch

$$(30) \left\{ \begin{aligned} v_1 = & \sum_{\alpha=1,2,\dots\mu} \left(a^{(0)}_{\alpha\alpha} \Delta^{(1)}_{\alpha\alpha} + a^{(1)}_{\alpha\alpha} \frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_1} + \dots + a^{(\mu)}_{\alpha\alpha} \frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\alpha}}{\partial p_\mu} \right) \\ & + \sum_{\substack{\alpha=1,2,\dots\mu \\ \beta=1,2,\dots\mu}} {}_{(\beta>\alpha)} \left(a^{(0)}_{\alpha\beta} \Delta^{(1)}_{\alpha\beta} + a^{(1)}_{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial p_1} + \dots + a^{(\mu)}_{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial p_\mu} \right) \\ & + a^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_1} + \dots + a^{(\mu)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\mu} \end{aligned} \right.$$

unendlich groß sein wird, und umgekehrt, so daß, wenn wir im folgenden annehmen, daß $\bar{v}_1$ eine mehrfache endliche Lösung der Gleichung $G=0$ für das bezeichnete Wertesystem ist, oder daß die Gleichungen

$$(31) \qquad G(v_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu) = 0, \quad \frac{\partial G(v_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu)}{\partial v_1} = 0$$

für den endlichen Wert $\bar{v}_1$ zugleich bestehen, auch vorausgesetzt wird, daß keine der Größen (29) für dieses Wertesystem unendlich groß wird.

Dann kann aber aus den Gleichungen (7) unmittelbar geschlossen werden, daß für $v_1 = \bar{v}_1$, $t = \tau$, $p_1 = \pi_1, \dots p_\mu = \pi_\mu$ auch die partiellen Differentialquotienten

$$(32) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\alpha}}\right), \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\beta}}\right), \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\alpha}}\right), \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\beta}}\right), \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}\right) \quad (\rho = 1, 2, \dots \mu)$$

verschwinden, während die Quotienten

$$(33)\quad \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\alpha}}}{\frac{\partial G}{\partial v_1}}\right),\ \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\beta}}}{\frac{\partial G}{\partial v_1}}\right),\ \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\alpha}}}{\frac{\partial G}{\partial v_1}}\right),\ \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\beta}}}{\frac{\partial G}{\partial v_1}}\right),\ \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}}{\frac{\partial G}{\partial v_1}}\right),$$

in denen Zähler und Nenner ganze Funktionen von $v_1, t, p_1, \cdots p_\mu$ sind, welche für das bezeichnete Wertesystem verschwinden, für eben dieses endliche Werte annehmen, welche auch Null sein können. Bezüglich dieser Quotienten möge noch bemerkt werden, daß sich dieselben mittels der Gleichung $G=0$ in die Form setzen lassen

$$(33a)\quad \frac{\frac{\partial G}{\partial a}\cdot\frac{\partial G}{\partial v_2}\,\frac{\partial G}{\partial v_3}\cdots\frac{\partial G}{\partial v_\nu}}{\frac{\partial G}{\partial v_1}\,\frac{\partial G}{\partial v_2}\,\frac{\partial G}{\partial v_3}\cdots\frac{\partial G}{\partial v_\nu}} = \frac{\Gamma(v_1, t, p_1, \ldots p_\mu)}{D(t, p_1, \ldots p_\mu)},$$

worin der Zähler eine ganze Funktion von $v_1, t, p_1, \ldots p_\mu$ ist, der Nenner die Diskriminante der Gleichung $G=0$ darstellt, und Zähler und Nenner wieder für das angegebene Wertesystem verschwinden.

Unter der Annahme, daß $\bar{v}_1$ eine endliche mehrfache Lösung der Gleichung $G(v_1, \tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu)=0$ ist, also für das bezeichnete Wertesystem die Größen Δ in dem Ausdruck (1), deren erste Differentialquotienten nach den Parametern und $\frac{\partial U}{\partial p_\rho}$ endlich sind, werden somit die Gleichungen (31) befriedigt sein sowie die Größen (32) verschwinden, und die HAMILTONschen Differentialgleichungen (9) die Form annehmen

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}^{(1)}_\rho q_1 + \mathfrak{P}^{(2)}_\rho q_2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu)}_\rho q_\mu}{\mathfrak{P}} & (\rho=1,2,\ldots\mu) \\[2ex] \dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}^{(11)}_\rho q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu\mu)}_\rho q_\mu^2 + \mathfrak{P}^{(12)}_\rho q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu-1\,\mu)}_\rho q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{P}^{(\rho)}}{\mathfrak{P}}; \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{P}_\rho^{(1)}, \ldots \mathfrak{P}_\rho^{(11)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\rho)}, \mathfrak{P}$ ganze Funktionen von $v_1 - \bar{v}_1, t - \tau, p_1 - \pi_1, \ldots p_\mu - \pi_\mu$ sind, welche sämtlich keine konstanten Glieder besitzen, also für das bezeichnete Wertesystem verschwinden, und daher Zähler und Nenner unabhängig von den dem Werte $t = \tau$ zugehörigen Anfangswerten $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ der $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ nach ganzen Potenzen der Differenzen $v_1 - \bar{v}_1, t - \tau, p_1 - \pi_1, \ldots p_\mu - \pi_\mu, q_1 - \varkappa_1, \ldots q_\mu - \varkappa_\mu$ in endliche Reihen ohne konstante Glieder entwickelbar sein – welche die Differenzen $q_1 - \varkappa_1, \ldots q_\mu - \varkappa_\mu$ nur im ersten resp. zweiten Grade enthalten –, und diese Differentialgleichungen würden nach der vorher gemachten Bemerkung dieselbe Form beibehalten, wenn man den gemeinsamen Nenner durch die von v_1 unabhängige Diskriminante D der Gleichung $G = 0$ ersetzt, während die Koeffizienten der q in den Zählern der rechten Seiten von (34) wieder den Charakter beibehalten, ganze Funktionen von $v, t, p_1, \ldots p_\mu$ zu sein, welche für $t = \tau, p_1 = \pi_1, \ldots p_\mu = \pi_\mu$ den Wert Null annehmen.

Was nun die Form der Differentialgleichung (10) oder

$$(35)\quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{-\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\left[\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a_{11}^{(0)}}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right)_{v_1} q_1 + \cdots + \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a_{1\mu}^{(0)}}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right)_{v_1} q_\mu\right] + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\left[\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a_{\mu 1}^{(0)}}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right)_{v_1} q_1 + \cdots + \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a_{\mu\mu}^{(0)}}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right)_{v_1} q_\mu\right]}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}$$

angeht, so wird der Zähler der rechten Seite aus den vorher angegebenen Gründen für das bezeichnete Wertesystem jedenfalls endlich sein, aber auch den Wert Null annehmen können. Wäre er endlich, also auch

$$\left(\frac{\partial G}{\partial v_1}\,\frac{dv_1}{dt}\right),$$

und somit nach (31) $\left(\frac{dv_1}{dt}\right)$ unendlich, so würde, da sich aus (30)

$$\frac{dv_1}{dt} = \sum a_{\alpha\alpha}^{(0)} \frac{d}{dt} \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)} + a_{\alpha\alpha}^{(1)} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\rho} + \cdots$$

$$+ \sum a_{\alpha\beta}^{(0)} \frac{d}{dt} \Delta_{\alpha\beta}^{(1)} + a_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_1} + \cdots + a^{(1)} \frac{d}{dt} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_1} + \cdots$$

ergibt, und die Δ der Voraussetzung gemäß die Zeit t nicht explizite enthielten, aus der letzteren Gleichung, welche vermöge der HAMILTONschen Differentialgleichungen

$$\frac{dp_\rho}{dt} = \Delta_{\rho 1}^{(1)} q_1 + \Delta_{\rho 2}^{(1)} q_2 + \cdots + \Delta_{\rho\mu}^{(1)} q_\mu$$

in die Form gesetzt werden kann

$$\frac{dv_1}{dt} = \sum a_{\alpha\alpha}^{(0)} \left\{ \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_1} \left(\Delta_{11}^{(1)} q_1 + \Delta_{12}^{(1)} q_2 + \cdots\right) + \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_2} \left(\Delta_{21}^{(1)} q_1 + \Delta_{22}^{(1)} q_2 + \cdots\right) + \cdots \right\}$$

$$+ a_{\alpha\alpha}^{(1)} \left\{ \frac{\partial^2 \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_1^2} \left(\Delta_{11}^{(1)} q_1 + \Delta_{12}^{(1)} q_2 + \cdots\right) + \frac{\partial^2 \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_1 \partial p_2} \left(\Delta_{21}^{(1)} q_1 + \Delta_{22}^{(1)} q_2 + \cdots\right) + \cdots \right\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots + a^{(1)} \left\{ \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial p_1 \partial t} + \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial p_1^2} \left(\Delta_{11}^{(1)} q_1 + \Delta_{12}^{(1)} q_2 + \cdots\right) + \cdots \right\},$$

folgen, daß einer der zweiten Differentialquotienten der Δ und U, nach den Parametern genommen, oder auch, wenn die Kräftefunktion die Zeit t explizite enthält, $\frac{\partial^2 U}{\partial p_\rho \partial t}$ für das bezeichnete Wertesystem der $t, p_1, \ldots p_\mu$ unendlich groß werden müssen, da früher gezeigt worden, daß unter der Annahme der Existenz einer mehrfachen endlichen Lösung der Gleichung $G(\bar{v}_1, \tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu) = 0$ weder die Δ selbst, noch die ersten Ableitungen dieser und der Kräftefunktion nach den Parametern genommen unendlich große Werte annehmen durften. Wir finden somit,

daß, wenn die Koeffizienten Δ von $q_1^2, q_2^2, \dots q_1 q_2, \dots$ in dem Ausdrucke der lebendigen Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\Delta_{11}^{(1)} q_1^2 + \tfrac{1}{2}\Delta_{22}^{(1)} q_2^2 + \cdots + \Delta_{12}^{(1)} q_1 q_2 + \cdots$$

für das Wertesystem $\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu$ weder selbst, noch die ersten und zweiten nach den Parametern genommenen partiellen Ableitungen dieser und der Kräftefunktion, noch die zweiten Differentialquotienten letzterer nach der Zeit und den Parametern genommen unendlich groß werden, und die Gleichung $G(v_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu) = 0$ die *mehrfache* und dann notwendig *endliche* Lösung $\bar{v}_1$ hat, der Zähler der rechten Seite der Gleichung (35) für das bezeichnete Wertesystem $\bar{v}_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu$ den Wert Null haben wird.

Wie sich aber aus den Gleichungen

$$G(v, t, p_1, \dots p_\mu) = g_0(v - v_1)(v - v_2) \cdots (v - v_\nu)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1} = g_0(v_1 - v_2)(v_1 - v_3) \cdots (v_1 - v_\nu)$$

nach (30)

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\alpha\alpha}^{(0)}}\right)_{v_1} = g_0(v_1 - v_2) \cdots (v_1 - v_\nu) \frac{\partial v_1}{\partial a_{\alpha\alpha}^{(0)}} = g_0(v_1 - v_2) \cdots (v_1 - v_\nu) \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\alpha\alpha}^{(\rho)}}\right)_{v_1} = g_0(v_1 - v_2) \cdots (v_1 - v_\nu) \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\rho}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\alpha\beta}^{(0)}}\right)_{v_1} = g_0(v_1 - v_2) \cdots (v_1 - v_\nu) \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}$$

$$(\rho = 1, 2, \dots \mu)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\alpha\beta}^{(\rho)}}\right)_{v_1} = g_0(v_1 - v_2) \cdots (v_1 - v_\nu) \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}} = g_0(v_1 - v_2) \cdots (v_1 - v_\nu) \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}$$

wiederum, wie schon oben gefunden, ergibt, daß die Ausdrücke (32) für das angegebene Wertesystem wegen $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ den Wert Null annehmen, so folgt aus den analogen Gleichungen

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1} = g_0(v_1 - v_2)(v_1 - v_3)\cdots(v_1 - v_\nu)\frac{\partial v_1}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p_\rho}\right)_{v_1} = g_0(v_1 - v_2)(v_1 - v_3)\cdots(v_1 - v_\nu)\frac{\partial v_1}{\partial p_\rho},$$

oder

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1} = \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p_\rho}\right)_{v_1} = \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial p_\rho},$$

daß für das bezeichnete Wertesystem auch

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p_\rho}\right)$$

verschwinden, wenn die oben bezüglich der ersten und zweiten Differentialquotienten der Δ und U angegebenen Bedingungen festgehalten werden, da dann, wie wieder unmittelbar aus (30) zu ersehen, die Größen

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial v_1}{\partial p_\rho}\right)$$

nicht unendlich groß werden können.

Wenn somit die angegebenen Bedingungen für die Δ und U und deren ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten für das bezeichnete Wertesystem erfüllt sind, so wird der Zähler der rechten Seite der Gleichung (35) für eben dieses den Wert Null annehmen, und zwar dadurch, daß die Größen $\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)$ und $\left(\frac{\partial G}{\partial p_\rho}\right)$ verschwinden.

Es möge ferner noch bemerkt werden, daß wir der Gleichung (35), in welcher der Zähler der rechten Seite eine in $v_1, t, p_1, \ldots p_\mu$ rationale, in den q ganze homogene Funktion ersten Grades ist, die Gestalt geben können

$$(36)\quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{\begin{array}{c} -\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial a_{11}^{(0)}}\right)_{v_1} q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial a_{1\mu}^{(0)}}\right)_{v_1} q_\mu\right) + \cdots \\ + \left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu 1}^{(0)}}\right)_{v_1} q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu\mu}^{(0)}}\right)_{v_1} q_\mu\right) \end{array}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}^2},$$

worin der Zähler eine ganze Funktion von v mit in $t, p_1, \ldots p_\mu, q_1, \ldots q_\mu$ ganzen Koeffizienten (und zwar in den letzteren Größen vom ersten Grade) darstellt, welche für das Wertesystem $\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu$ unabhängig von den Anfangswerten der q den Wert Null annimmt, wenn für das gegebene Wertesystem weder die Δ selbst noch die ersten Ableitungen dieser und der Kräftefunktion nach den Parametern genommen unendlich große Werte annehmen, und es kann diese Gleichung nach (33a) auch in die Form gesetzt werden

$$(37)\quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{-\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1} D + \left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}(\Gamma_{11} q_1 + \cdots + \Gamma_{1\mu} q_\mu) + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}(\Gamma_{\mu 1} q_1 + \cdots + \Gamma_{\mu\mu} q_\mu)}{D\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}},$$

worin D die Diskriminante der Gleichung $G = 0$ und die $\Gamma_{\alpha\beta}$ ganze Funktionen von v mit in $t, p_1, \ldots p_\mu$ ganzen Koeffizienten sind.

Stellen wir nunmehr die gefundenen Resultate zusammen, so ergibt sich der folgende Satz:

Ist die lebendige Kraft in der Form gegeben

$$T = \tfrac{1}{2}\Delta_{11}^{(1)} q_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\Delta_{\mu\mu}^{(1)} q_\mu^2 + \Delta_{12}^{(1)} q_1 q_2 + \cdots + \Delta_{\mu-1\,\mu}^{(1)} q_{\mu-1} q_\mu ,$$

sei ferner U die Kräftefunktion, welche die Zeit t explizite enthalten darf, während die algebraischen Funktionen Δ der Parameter $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ von t unabhängig sind, und bildet man mit unbestimmten konstanten Koeffizienten den Ausdruck

$$v_1 = \sum_{\alpha=1,2,\ldots\mu} \left(a_{\alpha\alpha}^{(0)} \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)} + a_{\alpha\alpha}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_1} + \cdots \right)$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha=1,2,\ldots\mu \\ \beta=1,2,\ldots\mu\,(\beta>\alpha)}} \left(a_{\alpha\beta}^{(0)} \Delta_{\alpha\beta}^{(1)} + a_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_1} + \cdots \right) + a^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_1} + \cdots + a^{(\rho)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho} ,$$

welcher der irreduktibeln Gleichung ν^{ten} Grades in v

$$G(v, t, p_1, \ldots p_\mu) = 0$$

genügen möge; sei ferner ein Wertesystem

$$t = \tau,\ p_1 = \pi_1, \ldots p_\mu = \pi_\mu,\ q_1 = \varkappa_1, \ldots q_\mu = \varkappa_\mu$$

gegeben, für welches die Gleichung G=0 eine *mehrfache endliche* Lösung $\bar{v}_1$ besitzt, welche Annahme die notwendige Bedingung in sich schließt, daß keine der Größen

$$\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)},\ \Delta_{\alpha\beta}^{(1)},\ \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu)$$

für das Wertesystem $\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu$ unendlich groß wird, so werden in den HAMILTONschen Differentialgleichungen

$$
(38)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dp_\rho}{dt} &= \frac{-\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\rho 1}^{(0)}}\right)_{v_1} q_1 - \left(\frac{\partial G}{\partial a_{\rho 2}^{(0)}}\right)_{v_1} q_2 - \cdots - \left(\frac{\partial G}{\partial a_{\rho\mu}^{(0)}}\right)_{v_1} q_\mu}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\rho=1,2,\ldots\mu) \\
\frac{dq_\rho}{dt} &= \frac{\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{11}^{(\rho)}}\right)_{v_1} q_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu\mu}^{(\rho)}}\right)_{v_1} q_\mu^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial a_{12}^{(\rho)}}\right)_{v_1} q_1 q_2 + \cdots \\ &+ \left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu-1\,\mu}^{(\rho)}}\right)_{v_1} q_{\mu-1} q_\mu - \left(\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}\right)_{v_1}\end{aligned}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}} \\
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{\begin{aligned}&-\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1} + \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{11}^{(0)}}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial p_2}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{21}^{(0)}}\right) + \cdots \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu 1}^{(0)}}\right)\right] q_1 + \cdots + \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{1\mu}^{(0)}}\right)_{v_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial p_2}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{2\mu}^{(0)}}\right)_{v} \right. \\ &\left. + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu\mu}^{(0)}}\right)_{v_1}\right] q_\mu\end{aligned}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}^2}
\end{aligned}
\right.
$$

die Koeffizienten der q ganze Funktionen von $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \ldots p_\mu-\pi_\mu$ sein, welche ebenso wie die Nenner der rechten Seiten kein konstantes Glied besitzen, also Zähler und Nenner für das Wertesystem $\bar{v}_1$, τ, $\pi_1, \ldots \pi_\mu$, unabhängig von den dem Werte $t=\tau$ zugehörigen Werten von $q_1=\varkappa_1$, $q_2=\varkappa_2, \ldots q_\mu=\varkappa_\mu$, verschwinden, und der Ausdruck

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1}+\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a_{11}^{(0)}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}+\cdots+\left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu 1}^{(0)}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}\right]q_1$$

$$+\cdots\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a_{1\mu}^{(0)}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}+\cdots+\left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial a_{\mu\mu}^{(0)}}\right)_{v_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1}}\right]q_\mu$$

für jenes Wertesystem einen endlichen Wert haben, welcher auch Null sein kann, und dann stets Null sein wird und zwar dadurch, daß

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right),\ \left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right),\ \cdots\left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)$$

verschwinden, wenn *keine* der Größen

$$\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)},\ \Delta_{\alpha\beta}^{(1)},\ \frac{\partial\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho},\ \frac{\partial^2\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_\rho\partial p_\sigma},\ \frac{\partial^2\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho\partial p_\sigma},\ \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial p_\rho\partial p_\sigma},\ \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial p_\rho\partial t}$$

$$(\rho=1,2,\ldots\mu;\ \sigma=1,2,\ldots\mu)$$

für $t=\tau$, $p_1=\pi_1,\ldots p_\mu=\pi_\mu$ unendlich groß wird; der letztere Ausdruck kann auch in der Form dargestellt werden

$$\frac{-\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1}D+\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\Gamma_{11}+\cdots+\left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\Gamma_{1\mu}\right]q_1+\cdots+\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)_{v_1}\Gamma_{\mu 1}+\cdots+\left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)_{v_1}\Gamma_{\mu\mu}\right]q_\mu}{D},$$

worin D die Diskriminante der Gleichung $G=0$ ist, und die Γ wieder ganze Funktionen von v mit in $t, p_1, \ldots p_\mu$ ganzen Koeffizienten darstellen, welche

ebenfalls für das Wertesystem $\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu$, unabhängig von den Anfangswerten der q, verschwinden.

In der Form (37) und mit Benutzung der eben hervorgehobenen Eigenschaften der Zähler und Nenner der rechten Seiten derselben, welche, wenn für $t=\tau$, $p_1=\pi_1$, $p_2=\pi_2, \ldots p_\mu=\pi_\mu$ die Gleichung $G(v_1, t, p_1, p_2, \ldots p_\mu)=0$ die mehrfache endliche Lösung $\bar{v}_1$ hat, die unbestimmte Form 0/0 annehmen, sollen die HAMILTONschen Differentialgleichungen nunmehr zugrunde gelegt werden, um die Frage zu erörtern, von welcher Natur die Integrale $p_1, p_2, \ldots p_\mu, q_1, q_2, \ldots q_\mu, v_1$ in der Umgebung von $t=\tau$ sind, wenn dieselben für $t=\tau$ die Werte $p_1=\pi_1, p_2=\pi_2, \ldots p_\mu=\pi_\mu, q_1=\varkappa_1, q_2=\varkappa_2, \ldots q_\mu=\varkappa_\mu, v_1=\bar{v}_1$ annehmen sollen.

Bezüglich der Form (37) der Differentialgleichungen ist noch zu bemerken, daß dieselben die unabhängige Variable t nicht explizite enthalten, wenn die Kräftefunktion von der Zeit unabhängig ist, und daß andernfalls durch Hinzufügen der Differentialgleichung $\frac{dt}{du}=1$ das System $2\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung bekanntlich unmittelbar in ein solches $2\mu+2^{\text{ter}}$ Ordnung übergeht, in welchem die unabhängige Variable u nicht explizite vorkommt.

Es möge endlich noch hervorgehoben werden, daß, wenn für ein Wertesystem $t=\tau, p_1=\pi_1, \ldots p_\mu=\pi_\mu$ eine endliche Lösung der Gleichung

$$G(v, \tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu) = 0$$

eine mehrfache, also $\bar{v}_1=\bar{v}_2$ sein soll, sich aus dem linearen Ausdruck in den unbestimmten Koeffizienten a für v die Beziehung ergibt

$$\sum_{\alpha=1,2,\ldots\mu} \left\{ a_{\alpha\alpha}^{(0)}\left(\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}\right) + a_{\alpha\alpha}^{(1)}\left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\partial p_1}\right) + \cdots \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha=1,2,\ldots\mu \\ \beta=1,2,\ldots\mu\ (\beta>\alpha)}} \left\{ a_{\alpha\beta}^{(0)}\left(\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}\right) + a_{\alpha\beta}^{(1)}\left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_1}\right) + \cdots \right\} + a^{(1)}\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_1}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{\alpha=1,2,\ldots\mu} \left\{ a_{\alpha\alpha}^{(0)}\left(\Delta_{\alpha\alpha}^{(2)}\right) + a_{\alpha\alpha}^{(1)}\left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}^{(2)}}{\partial p_1}\right) + \cdots \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha=1,2,\ldots\mu \\ \beta=1,2,\ldots\mu\ (\beta>\alpha)}} \left\{ a_{\alpha\beta}^{(0)}\left(\Delta_{\alpha\beta}^{(2)}\right) + a_{\alpha\beta}^{(1)}\left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial p_1}\right) + \cdots \right\} + a_1^{(1)}\left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial p_1}\right) + \cdots,$$

worin die eingeklammerten Ausdrücke die Werte derselben für das gegebene Wertesystem bedeuten, und von den Funktionen

$$\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}, \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}, U^{(1)} \quad \text{und} \quad \Delta_{\alpha\alpha}^{(2)}, \Delta_{\alpha\beta}^{(2)}, U^{(2)},$$

welche Zweige der oben definierten irreduktibeln algebraischen Gleichungen für $\Delta_{\alpha\alpha}, \Delta_{\alpha\beta}, U$ bedeuten, mindestens zwei voneinander verschieden sind. Daraus folgt aber, daß, wenn z. B. $\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)} \neq \Delta_{\alpha\alpha}^{(2)}$ ist, nach der oben aufgestellten Beziehung wegen der unbestimmten Koeffizienten $(\Delta_{\alpha\alpha}^{(1)}) = (\Delta_{\alpha\alpha}^{(2)})$ sein muß, und daher die algebraische Gleichung für $\Delta_{\alpha\alpha}$ für das Wertesystem $t=\tau$, $p_1=\pi_1, \ldots$ $p_\mu=\pi_\mu$ zwei gleiche Lösungen haben, also die Diskriminante dieser Gleichung für jene Werte verschwinden wird. Wir finden daher, daß, wenn für das gegebene Wertesystem keine der Diskriminanten der Gleichungen für die Funktionen

$$\Delta_{\alpha\alpha}, \frac{\partial \Delta_{\alpha\alpha}}{\partial p_\rho}, \Delta_{\alpha\beta}, \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho}, \frac{\partial U}{\partial p_\rho} \qquad (\rho=1,2,\ldots\mu)$$

verschwindet, die Gleichung $G=0$ für diese Werte von $t, p_1, \ldots p_\mu$ keine gleichen Lösungen liefern kann, und daß umgekehrt für den Fall gleicher Lösungen mindestens eine jener Diskriminanten für dieses Wertesystem verschwinden wird.