Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summe und Differenzen ungerader Primzahlen. I. Teil**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1917, 15

Die Untersuchungen über die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei ungeraden Primzahlen, über die der Verfasser der Klasse im Jahre 1916 berichtet hatte, werden ausgedehnt auf mehrfache Darstellungen gerader Zahlen, die sich durch Summation aus Paaren, von Primzahlfolgen mit gegebenen symmetrischen Differenzen ergeben. Zur Aufstellung asymptotischer Formeln für die Anzahlen solcher Darstellungen dient ein eigenartiger Grenzübergang; statt der Primzahlen wird nämlich zuerst die Reihe der Zahlen betrachtet, die durch keine der ersten ungeraden Primzahlen teilbar sind, im Gebiete dieser Lückenzahlen r-ter Stufe die Anzahl der Darstellungen ermittelt und schließlich die Stufenzahl als unendlich groß angenommen. Der erste Teil bezieht sich auf Folgen von zwei Primzahlen; nachdem, der Fall der Differenz 2 ausführlich behandelt ist, wird der Fall einer beliebigen Differenz in Angriff genommen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1918, S. VIII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1917. 15. Abhandlung

Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen

I. TEIL

Von

† PAUL STÄCKEL
in Heidelberg

Mit Beiträgen von W. WEINREICH
in Frankfurt a. M.

Eingegangen am 27. Dezember 1917

Heidelberg 1917
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1403

Einleitung

Der Frage Goldbachs nach den Darstellungen der geraden Zahlen als Summen von zwei ungeraden Primzahlen hatte ich die Frage an die Seite gestellt, auf wieviele Arten eine durch sechs teilbare Zahl erhalten wird, wenn als Summanden nur Primzahlzwillinge verwendet werden (diese Sitzungsberichte, 1916, 10. Abh.). Verallgemeinernd kann man Folgen von Primzahlen betrachten, bei denen die benachbarten Glieder sich um gegebene gerade Zahlen unterscheiden, und die Summen untersuchen, die entstehen, wenn bei zwei Folgen mit symmetrischen Differenzen, die eine aufsteigend, die andere absteigend genommen, die untereinander stehenden Glieder addiert werden. Eine solche Ausdehnung hätte keinen Nutzen, wenn sie rein formaler Art wäre. Es hat sich indessen herausgestellt, daß die Gesamtheit der Fragen über Summen und Differenzen von Primzahlen einer einheitlichen Behandlung fähig ist, wenn man gewisse Folgen ungerader Zahlen heranzieht, die mit dem Sieb des Eratosthenes zusammenhängen und die ich als Lückenzahlen r-ter Stufe bezeichne. Im Gebiet der Lückenzahlen lassen sich nämlich die entsprechenden Fragen in abschließender Weise beantworten, und von jedem für beliebige Stufen geltenden Satze über Summen und Differenzen von Lückenzahlen gelangt man durch einen eigenartigen Grenzübergang, der freilich noch der strengen Begründung bedarf, zu dem Seitenstück im Gebiet der Primzahlen. Wenn das geschilderte Verfahren auch als heuristisch zu bezeichnen ist, so verdienen die Ergebnisse doch Vertrauen; sie haben sich bei der numerischen Prüfung durchweg als richtig erwiesen. Vielleicht trägt die neue Auffassung dazu bei, daß der Beweis des Goldbachschen Satzes gelingt; wer hier durchdringt, wird sicherlich zugleich den ganzen Inbegriff der Fragen über Summen und Differenzen von Primzahlen bezwingen, von denen im folgenden die Rede sein soll.

Es erschien zweckmäßig, die Bezeichnungen der verallgemeinerten Problemstellung anzupassen, und es konnten daher die in der vorher erwähnten Abhandlung vom Jahre 1916 (die kurz als *Darstellung* angeführt werden soll) angewandten Bezeichnungen nicht durchweg beibehalten werden. Im besonderen erhielt der Buchstabe P eine abweichende Bedeutung, und es wurde deshalb, in Übereinstimmung mit Landau, die Anzahl der Primzahlen von 1 bis n $\pi(n)$ genannt; ferner heißt die Anzahl der Zwillingsdarstellungen statt $G_1(6\tau)$ jetzt $G^{(2)}(6n_1)$.

Die numerische Bestätigung spielt in diesem Kapitel der Zahlenlehre eine große Rolle, und ebenso ist man oft auf numerische Induktion angewiesen, um zu allgemeinen Sätzen zu gelangen. Es war daher für mich von großem Wert, daß Herr Dr. Weinreich, Bibliothekar an der Senckenbergischen Bibliothek zu Frankfurt am Main, sich erbot, bei den umfangreichen Rechnungen zu helfen. Erleichtert, ja zum Teil erst ermöglicht wurden diese Rechnungen dadurch, daß die Heidelberger Akademie ihm eine Rechenmaschine zur Verfügung stellte; es sei ihr hierfür auch an dieser Stelle der geziemende Dank ausgesprochen. Weinreich hat sich aber nicht darauf beschränkt, die numerischen Arbeiten mit Ausdauer, Sorgfalt und Geschick durchzuführen, er hat sich auch an den zahlentheoretischen Untersuchungen beteiligt und ist unabhängig von mir und auf anderem Wege zu der vorher genannten Verallgemeinerung der Zwillingsdarstellungen auf die Darstellungen mittels Primzahlfolgen und einigen darauf bezüglichen Sätzen gelangt.

§ 1

Das Sieb des ERATOSTHENES und die Lückenzahlen r-ter Stufe

ERATOSTHENES hat ein einfaches und naturgemäßes Verfahren zur Ermittelung der ungeraden Primzahlen angegeben[1]. Er geht aus von der Folge der ungeraden Zahlen, die er mit der ersten ungeraden Primzahl 3 beginnen läßt. Man streiche, so lautet seine Regel, jede dritte Zahl hinter der 3 und entferne so die Vielfachen von 3; die erste stehengebliebene Zahl 5 ist die zweite ungerade Primzahl. Man streiche nunmehr in der Folge der ungeraden Zahlen jede fünfte Zahl hinter der 5; die vorher für die Zahl 3 vollzogenen Streichungen werden dabei nicht berücksichtigt. Nachdem man die Vielfachen von 5 beseitigt hat, ist die erste stehengebliebene Zahl 7 die dritte ungerade Primzahl. Man fahre fort, in entsprechender Weise zu streichen, immer die bei den vorhergehenden Schritten vollzogenen Streichungen nicht berücksichtigend, stelle die erste von der Gesamtheit der Streichungen nicht betroffene Zahl in die Reihe der ungeraden Primzahlen und vollziehe hinter und mit ihr die nächsten Streichungen.

Wenn man das Verfahren der Siebung wirklich durchführt, so folgen, je weiter man geht, um so mehr Primzahlen auf die erste von der Gesamtheit der Streichungen nicht betroffene Zahl. Zum Beispiel erhält man nach Streichung der durch 3, 5, 7, 11 teilbaren ungeraden Zahlen hinter der fünften Primzahl 13 noch die 33 Primzahlen, die von 17 bis 167 reichen, und erst die 34ste nicht durchstrichene Zahl, 169, ist zusammengesetzt. Wird allgemein die r-te ungerade Primzahl mit p_r bezeichnet, sodaß

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = 11, \quad \ldots$$

ist, so erhält man nach Streichung der durch $p_1, p_2, \ldots, p_r$ teilbaren ungeraden Zahlen hinter der Anfangszahl p_{r+1} die zwischen

[1] Vgl. M. CANTOR, Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig 1907, S. 332.

p_{r+1} und p_{r+1}^2 liegenden Primzahlen; denn eine zusammengesetzte Zahl kleiner als p_{r+1}^2 hat mindestens einen Primteiler, der kleiner als p_{r+1} ist. Schon diese Erscheinung würde es rechtfertigen, die bei dem Verfahren der Siebung entstehenden Zahlenfolgen genauer zu erörtern. Es kommt hinzu, daß das «Sieben» in neueren Arbeiten über den GOLDBACHschen Satz eine Rolle spielt und, wie sich herausstellen wird, eine solche Untersuchung es ermöglicht, in die Lehre von den Darstellungen der geraden Zahlen als Summen oder Differenzen von ungeraden Primzahlen tiefer einzudringen.

Jeder ungeraden Zahl 1, 3, 5, ... mögen aus der Reihe der r ersten ungeraden Primzahlen $3, 5, 7, 11, \ldots, p_r$ diejenigen zugeordnet werden, durch die sie teilbar ist. Die Folge der Teilerscharen hat Lücken, denn bei den ungeraden Zahlen, die zu dem Produkt der ersten r ungeraden Primzahlen

$$P_r = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p_r \tag{1}$$

teilerfremd sind, fällt die Teilerschar weg. Die ungeraden Zahlen, bei denen solche Lücken auftreten, sollen die Lückenzahlen r-ter Stufe genannt werden. Es sind die Zahlen, die bei dem Verfahren des ERATOSTHENES stehengeblieben sind, nachdem man der Reihe nach mit $3, 5, 7, \ldots, p_r$ gesiebt hat; nur ist noch die Zahl 1 hinzuzunehmen, die der griechische Geometer ausgeschlossen hatte, weil sie keine Primzahl sei.

Um alle Lückenzahlen r-ter Stufe zu ermitteln, genügt es, den Bereich der Zahlen von 1 bis $2P_r$ zu betrachten; bedeutet nämlich v_r eine Lückenzahl dieses Bereichs, so werden durch die arithmetische Reihe $2P_r y + v_r$ lauter Lückenzahlen r-ter Stufe dargestellt, und ist umgekehrt eine Lückenzahl r-ter Stufe größer als $2P_r$ gegeben, so ist der Rest bei der Division durch $2P_r$ eine Lückenzahl r-ter Stufe, die dem Bereich der Zahlen von 1 bis $2P_r$ angehört. Man erkennt jetzt, warum die Zahl 1 zu den Lückenzahlen hinzugenommen wurde.

Der Bereich der Zahlen von 1 bis $2P_r$ möge der Hauptbereich r-ter Stufe heißen. Die Anzahl der Lückenzahlen, die dem Hauptbereich angehören, ergibt sich leicht durch den Schluß von r auf $r+1$. Weil jede Lückenzahl $(r+1)$-ter Stufe auch eine solche r-ter Stufe ist, so sind alle dem Hauptbereich $(r+1)$-ter Stufe angehörenden Lückenzahlen $(r+1)$-ter Stufe enthalten unter den Zahlen $2P_r\eta + v_r$ $(\eta = 0, 1, \ldots, p_{r+1} - 1)$, wo v_r die Lückenzahlen r-ter Stufe des Hauptbereichs r-ter Stufe durchläuft. Die Lückenzahlen $(r+1)$-ter Stufe ergeben sich, wenn man aus den Zahlen $2P_r\eta+v_r$ die durch p_{r+1} teilbaren Zahlen ausscheidet. Bei einem festen Werte von v_r ist aber von den p_{r+1} Zahlen $2P_r\eta+v_r$ eine und nur eine durch p_{r+1} teilbar; mithin entspringen beim Übergang von der r-ten zur $(r+1)$-ten Stufe aus jeder Lückenzahl r-ter Stufe $p_{r+1}-1$ Lückenzahlen $(r+1)$-ter Stufe. Nun erhält man aber für $r=1$ im Hauptbereich erster Stufe, der von 1 bis 6 reicht, als Lückenzahlen erster Stufe 1 und 5, also $2=3-1$ Lückenzahlen. Folglich ist die Anzahl der Lückenzahlen r-ter Stufe im Hauptbereich r-ter Stufe

$$P_r^{(1)} = (3-1)(5-1)(7-1)\dots(p_r-1)\,. \tag{2}$$

Der Ausdruck $P_r^{(1)}$ stimmt überein mit der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(2P_r)$, die angibt, wieviel zu $2P_r$ teilerfremde Zahlen im Hauptbereich liegen. Es schien jedoch angebracht, die Anzahl der Lückenzahlen im Hauptbereich zu bestimmen, ohne die Funktion $\varphi(n)$ heranzuziehen, weil dadurch auf die einfachste Art ein dem Verfahren des Eratosthenes anhaftender Mangel beseitigt und gleichzeitig ein Beweis für den Satz gewonnen wird, daß es Primzahlen gibt, die größer sind als irgend eine gegebene Zahl.

Jener Mangel liegt darin, daß man nicht weiß, ob bei einer der Siebungen ungestrichene Zahlen stehenbleiben, ob also das Verfahren nach einer endlichen Zahl von Schritten beendet ist. Daß dies nicht der Fall ist, folgt aber sofort aus der für alle Werte von r gültigen Ungleichheit $P_r^{(1)} \geq 2$, die zeigt, daß nach Abrechnung der Zahl 1 stets noch mindestens eine weitere Lückenzahl im Hauptbereich vorhanden ist, sodaß jeder neue Schritt zu einer neuen Primzahl führt[1].

Um nachzuweisen, daß es mindestens eine Primzahl gibt, die größer ist als p_r, benutzt Euklid (IX. Buch, Satz 20) die Lückenzahl r-ter Stufe $2P_r+1=2\cdot3\cdot5\cdots p_r+1$. Dieser Kunstgriff wird erst durch die Lehre von den Lückenzahlen aufgeklärt.

[1] Auf demselben Grundgedanken beruht der Beweis von E. Kummer, Neuer elementarer Beweis des Satzes, daß die Anzahl aller Primzahlen unendlich ist, Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1878, S. 777.

Wenn man mit 1 beginnend die Lückenzahlen r-ter Stufe der Größe nach ordnet, so lassen sich je $P_r^{(1)}$ aufeinanderfolgende Lückenzahlen in einem **Abschnitt** zusammenfassen: die Glieder eines Abschnittes entspringen aus den Gliedern des ersten Abschnittes, des **Hauptabschnittes** r-ter Stufe, durch Hinzufügen desselben Vielfachen von $2P_r$.

Der Hauptabschnitt beginnt mit der Zahl 1, es folgt die Primzahl p_{r+1}, und dann kommen die zwischen p_{r+1} und p_{r+1}^2 liegenden Primzahlen; p_{r+1}^2 ist die erste zusammengesetze Zahl des Hauptabschnittes, falls nämlich p_{r+1}^2 kleiner als $2P_r$ ist, und das gilt für $r \geq 3$. Weil mit v_r auch $2P_r - v_r$ eine Lückenzahl r-ter Stufe ist, so endet der Hauptabschnitt mit der Zahl $2P_r - 1$, und die vorletzte Zahl ist $2P_r - p_r + 1$. Hieraus folgt, daß die $p_{r+1} - 2$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen

$$2P_r - p_{r+1} + 1,\ 2P_r - p_{r+1} + 2,\ \ldots,\ 2P_r - 2$$

zusammengesetzte Zahlen sind, und weil die Folge der Primzahlen unbegrenzt ist, so **gibt es in der Reihe der ganzen Zahlen Folgen beliebiger Länge, in denen keine einzige Primzahl vorkommt.** Diesen Lehrsatz hat schon DUPRÉ (1859) ebenfalls mit elementaren Mitteln, aber auf umständlichere Art bewiesen[1], und GLAISHER (1878) hat, im Anschluß an den Kunstgriff von EUKLID, die Zahlen betrachtet:

$$2P_r + 2,\ 2P_r + 3,\ \ldots,\ 2P_r + p_{r+1} - 1\,,$$

die dasselbe leisten wie die vorher angegebenen **kleineren** Zahlen[2].

Die vorhergehenden Ausführungen mögen durch ein Beispiel erläutert werden. Man hat $2P_7 = 9\,699\,690$, und da $p_8 = 23$ ist, so sind die 21 Zahlen von 9699668 bis 9699988 und ebenso die 21 Zahlen 9699692 bis 9699712 zusammengesetzt. Die Primzahltafeln zeigen, daß dagegen die Zahlen 9699667 und 9699713 Primzahlen sind. Einer besonderen Untersuchung bedürfen

---

[1] A. DUPRÉ, Examen d'une proposition de LEGENDRE relative à la théorie des nombres. Paris 1859, S. 10. Auf diese seltene Schrift hat mich WEINREICH aufmerksam gemacht, nachdem die vorliegenden Untersuchungen bereits im wesentlichen abgeschlossen waren.

[2] J. W. L. GLAISHER, An enumeration of prime pairs, Messenger of math. (2) 8 (1878), S. 33.

immer die beiden Zahlen $2P_r \pm 1$. Im vorliegenden Falle ist $9699689 = 53 \cdot 183103$ und $9699691 = 347 \cdot 27953$. Mithin sind für $r=7$ sogar die 45 aufeinanderfolgenden Zahlen von 9699668 bis 9699712 zusammengesetzt. Das ist freilich nichts Besonderes, denn unter den Zahlen bis 100000 finden sich schon einige Folgen von 45 und mehr zusammgesetzten Zahlen; als Beispiel seien die 49 Zahlen zwischen 79699 und 79759 genannt. Ferner sind nach Glaisher[1] die 151 Zahlen zwischen 8421251 und 8421403 zusammengesetzt. Es kann übrigens auch eintreten, daß die beiden Zahlen $2P_r \pm 1$ Primzahlen sind; so sind für $r=4$ die beiden Zahlen 2311 und 2309 Primzahlen.

Bei manchen Untersuchungen ist es vorteilhaft, negative Lückenzahlen zuzulassen und die $P_r^{(1)}$ Lückenzahlen r-ter Stufe zugrunde zu legen, die dem Bereich der Zahlen von $-P_r$ bis $+P_r$ angehören. Dann werden sämtliche positive und negative Lückenzahlen r-ter Stufe durch $P_r^{(1)}$ arithmetische Reihen $2P_r y \pm v_r'$ dargestellt; die $\frac{1}{2}P_r^{(1)}$ positiven ungeraden Zahlen v_r' liegen zwischen 1 und P_r. Die Zahl Null erscheint jetzt als ein Symmetriezentrum der Lückenzahlen, insofern jeder Lückenzahl in der Entfernung v_r' hinter der Null eine solche Zahl in derselben Entfernung vor der Null entspricht. In demselben Sinne lassen sich auch die Vielfachen von $2P_r$ als Symmetriezentren auffassen.

Auch die Zahl P_r, die Mitte des Hauptbereiches, bildet ein Symmetriezentrum, denn mit $P_r - 2a$ ist $P_r + 2a$ eine Lückenzahl r-ter Stufe, weil die Summe beider Zahlen gleich $2P_r$ ist und beide gleichzeitig teilerfremd oder nicht teilerfremd zu $2P_r$ sind. Im besonderen sind die Zahlen $P_r \pm 2^\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ zu $2P_r$ teilerfremd; folglich hat man in der Mitte des Hauptabschnittes die 6 unmittelbar aufeinanderfolgenden Lückenzahlen

$$P_r-8,\; P_r-4,\; P_r-2,\; P_r+2,\; P_r+4,\; P_r+8;$$

die Zahlen $P_r \pm 6$ sind augenscheinlich keine Lückenzahlen.

Die umstehende Tafel 1 soll zur Erläuterung der vorhergehenden Betrachtungen dienen. Sie bringt für die ersten vier Stufen die Anfänge der Lückenzahlen, und zwar für $r=2$ und $r=3$ die Hauptabschnitte, für $r=4$, wo die Anzahl der Lückenzahlen des Hauptabschnittes bereits auf 480 steigt, den halben Hauptab-

[1] J. W. L. Glaisher, On long successions of composite numbers, Messenger of math. (2) 7 (1878), S. 171.

TAFEL I

Anfänge der Lückenzahlen der ersten vier Stufen

Erste Stufe

$1_{4}\quad 5_{2}\quad 7_{4}\quad 11_{2}$

Zweite Stufe

$1_{6}\quad 7_{4}\quad 11_{2}\quad 13_{4}\quad 17_{2}\quad 19_{4}\quad 23_{6}\quad 29_{2}\quad 31_{6}\quad 37_{4}$

Dritte Stufe

	4	2	6	6	2	6	6	6	4
1_{10}	23_{6}	43_{4}	67_{4}	89_{8}	109_{4}	137_{2}	157_{6}	179_{2}	197_{2}
11_{2}	29_{2}	47_{6}	71_{2}	97_{4}	113_{8}	139_{4}	163_{4}	181_{6}	199_{10}
13_{4}	31_{6}	53_{6}	73_{6}	101_{2}	$\mathbf{121}_{6}$	$\mathbf{143}_{6}$	167_{2}	$\mathbf{187}_{4}$	$\mathbf{209}_{2}$
17_{2}	37_{4}	59_{2}	79_{4}	103_{4}	127_{4}	149_{2}	$\mathbf{169}_{4}$	191_{2}	211_{10}
19_{4}	41_{2}	61_{6}	83_{6}	107_{2}	131_{6}	151_{6}	173_{6}	193_{4}	$\mathbf{221}_{2}$

Vierte Stufe

	2	4	4	2	10	6	6	6	4
1_{12}	109_{4}	233_{6}	353_{6}	463_{4}	587_{2}	$\mathbf{697}_{4}$	$\mathbf{817}_{4}$	929_{8}	$\mathbf{1037}_{2}$
13_{4}	113_{14}	239_{2}	359_{2}	467_{12}	$\mathbf{589}_{4}$	701_{2}	821_{2}	937_{4}	1039_{10}
17_{2}	127_{4}	241_{6}	$\mathbf{361}_{6}$	479_{2}	593_{6}	703_{6}	823_{4}	941_{2}	1049_{2}
19_{4}	131_{6}	$\mathbf{247}_{4}$	367_{6}	$\mathbf{481}_{6}$	599_{2}	709_{4}	827_{2}	$\mathbf{943}_{4}$	1051_{10}
23_{6}	137_{2}	251_{6}	373_{4}	487_{4}	601_{6}	$\mathbf{713}_{6}$	829_{10}	947_{2}	1061_{2}
29_{2}	139_{10}	257_{6}	$\mathbf{377}_{2}$	491_{2}	607_{4}	719_{8}	839_{2}	$\mathbf{949}_{4}$	1063_{6}
31_{6}	149_{2}	263_{6}	379_{4}	$\mathbf{493}_{6}$	$\mathbf{611}_{2}$	727_{4}	$\mathbf{841}_{10}$	953_{8}	1069_{4}
37_{4}	151_{6}	269_{2}	383_{6}	499_{4}	613_{4}	$\mathbf{731}_{2}$	$\mathbf{851}_{2}$	$\mathbf{961}_{6}$	$\mathbf{1073}_{6}$
41_{2}	157_{6}	271_{6}	389_{2}	503_{6}	617_{2}	733_{6}	853_{4}	967_{4}	$\mathbf{1079}_{2}$
43_{4}	163_{4}	277_{4}	$\mathbf{391}_{6}$	509_{12}	619_{10}	739_{4}	857_{2}	971_{6}	$\mathbf{1081}_{6}$
47_{6}	167_{2}	281_{2}	397_{4}	521_{2}	$\mathbf{629}_{2}$	743_{8}	859_{4}	977_{6}	1087_{4}
53_{6}	$\mathbf{169}_{4}$	283_{6}	401_{2}	523_{4}	631_{10}	751_{6}	863_{8}	983_{6}	1091_{2}
59_{2}	173_{6}	$\mathbf{289}_{4}$	$\mathbf{403}_{6}$	$\mathbf{527}_{2}$	641_{2}	757_{4}	$\mathbf{871}_{6}$	$\mathbf{989}_{2}$	1093_{4}
61_{6}	179_{2}	293_{6}	409_{10}	$\mathbf{529}_{4}$	643_{4}	761_{6}	877_{4}	991_{6}	1097_{6}
67_{4}	181_{10}	$\mathbf{299}_{8}$	419_{2}	$\mathbf{533}_{8}$	647_{6}	$\mathbf{767}_{2}$	881_{2}	997_{6}	1103_{6}
71_{2}	191_{2}	307_{4}	421_{10}	541_{6}	653_{6}	769_{4}	883_{4}	$\mathbf{1003}_{4}$	1109_{8}
73_{6}	193_{4}	311_{2}	431_{2}	547_{4}	659_{2}	773_{6}	887_{6}	$\mathbf{1007}_{2}$	1117_{4}
79_{4}	197_{2}	313_{4}	433_{4}	$\mathbf{551}_{6}$	661_{6}	$\mathbf{779}_{8}$	$\mathbf{893}_{6}$	1009_{4}	$\mathbf{1121}_{2}$
83_{6}	199_{12}	317_{6}	$\mathbf{437}_{2}$	557_{2}	$\mathbf{667}_{6}$	787_{6}	$\mathbf{899}_{2}$	1013_{6}	1123_{6}
89_{8}	211_{10}	$\mathbf{323}_{8}$	439_{4}	$\mathbf{559}_{4}$	673_{4}	$\mathbf{793}_{4}$	$\mathbf{901}_{6}$	1019_{2}	1129_{10}
97_{4}	$\mathbf{221}_{2}$	331_{6}	443_{6}	563_{6}	677_{6}	797_{2}	907_{4}	1021_{6}	$\mathbf{1139}_{8}$
101_{2}	223_{4}	337_{10}	449_{8}	569_{2}	683_{6}	$\mathbf{799}_{10}$	911_{8}	$\mathbf{1027}_{4}$	$\mathbf{1147}_{4}$
103_{4}	227_{2}	347_{2}	457_{4}	571_{6}	$\mathbf{689}_{2}$	809_{2}	919_{4}	1031_{2}	1151_{2}
107_{2}	229_{4}	349_{4}	461_{2}	577_{10}	691_{6}	811_{6}	$\mathbf{923}_{6}$	1033_{4}	1153_{4}

schnitt. Die zwischen den Lückenzahlen befindlichen, mit kleineren Lettern gedruckten Differenzen werden sich später als nützlich erweisen.

§ 2

Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe

Die folgenden Untersuchungen bewegen sich, wie von vornherein festgestellt werden soll, durchaus im Gebiet der positiven ganzen Zahlen mit Einschluß der Null, und nur in diesem Sinne soll von der Darstellung einer geraden Zahl $2n$ als Summe von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe gesprochen werden.

Man setze $2n = 2P_r x + 2u_r$, wo $2u_r$ dem Hauptbereich angehöre. Um Ausnahmefälle zu vermeiden, deren Erörterung für die vorliegenden Zwecke überflüssig wäre, möge x mindestens gleich 1 sein. Die beiden Lückenzahlen, deren Summe $2n$ ergibt, sollen in der Form $2P_r y + v_r$, $2P_r z + w_r$ angenommen werden, wo v_r, w_r dem Hauptabschnitt entnommen sind. Aus der Gleichung

$$(3) \qquad 2P_r x + 2u_r = 2P_r y + v_r + 2P_r z + w_r$$

folgt zunächst, daß $v_r + w_r$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt, und zwar ist $v_r + w_r$ entweder gleich $2u_r$ oder gleich $2u_r + 2P_r$. Je nachdem die erste oder die zweite Gleichung besteht, sind weiter y und z so zu wählen, daß entweder $y+z=x$ oder $y+z=x-1$ wird; wir fassen x und $x-1$ in den Ausdruck $x-\varepsilon$ zusammen.

Die Anzahl der Wertepaare v_r, w_r — die Paare v_r, w_r und w_r, v_r als verschieden angesehen, bei denen v_r von w_r verschieden ist —, für die $v_r + w_r$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt, soll das Gewicht r-ter Stufe der Zahlenklasse $2P_r x + 2u_r$ genannt und mit $g_r(2u_r)$ bezeichnet werden. Um Mißverständnisse zu verhüten, sei hervorgehoben, daß die Gewichte nicht etwa die Anzahl der Darstellungen von $2u_r$ als Summe von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe bedeuten. Ist zum Beispiel die Zahl 2 gegeben, so gestattet sie auf jeder Stufe nur eine Darstellung als Summe von zwei Lückenzahlen, nämlich $2=1+1$. Dagegen ist auf der zweiten Stufe $g_2(2)=3$, denn man hat noch $13+19=19+13=32$; damit sind die Paare v_2, w_2 erschöpft, deren

Summe bis auf ein Vielfaches von $2P_2=30$ mit 2 übereinstimmt. Man könnte aber $g_2(2)$ als die Anzahl der Darstellungen bezeichnen, bei denen man 2 oder 32 als Summe erhält, und allgemein ist $g_r(2u_r)$ die Anzahl der Darstellungen von $2u_r$ und $2u_r+2P_r$ als Summen von Lückenzahlen r-ter Stufe.

Zur Ermittelung der Gewichte gelangt man am schnellsten durch den Schluß von r auf $r+1$. Es sei $2u_{r+1}$ eine gerade Zahl des Hauptbereichs $(r+1)$-ter Stufe, und $g_{r+1}(2u_{r+1})$ bedeute die Anzahl der Paare von Lückenzahlen v_{r+1}, w_{r+1} des Hauptabschnitts $(r+1)$-ter Stufe, deren Summe mit $2u_{r+1}$ bis auf ein Vielfaches von $2P_{r+1}$ übereinstimmt. Man setze $2u_{r+1}=2P_r\xi+2u_r$, $v_{r+1}=2P_r\eta+v_r$, $w_{r+1}=2P_r\zeta+w_r$, wo $2u_r, v_r, w_r$ dem Hauptbereich r-ter Stufe angehören und die Zahlen ξ, η, ζ der Reihe $0, 1, \ldots, p_{r+1}-1$ zu entnehmen sind. Alsdann sind v_r, w_r Lückenzahlen r-ter Stufe, deren Summe bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt. Mithin gibt es $g_r(2u_r)$ Paare v_r, w_r, die man nehmen darf. Je nachdem $v_r+w_r=2u_r$ oder $=2u_r+2P_r$ ist, muß $\eta+\zeta$ mit ξ oder $\xi-1$ bis auf ein Vielfaches von p_{r+1} übereinstimmen. Für η hat man die Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p_{r+1}-1$ zu setzen, ausgenommen die Zahl η_0, für die $2P_r\eta_0+v_r$ durch p_{r+1} teilbar wird, und die Zahl η_1, für die $2P_r(\xi-\varepsilon-\eta_1)+w_r$ den Primteiler p_{r+1} erhält. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Es kann sich ereignen, daß $\eta_1=\eta_0$ ist. Dann hat mit v_{r+1}, w_{r+1} auch $2u_{r+1}$ den Primteiler p_{r+1}. Ist aber umgekehrt $2u_{r+1}$ durch p_{r+1} teilbar, so wird mit v_{r+1} auch w_{r+1} dadurch teilbar. Demnach tritt der Fall I dann und nur dann ein, wenn $2u_{r+1}$ den Primteiler p_{r+1} besitzt. Von den p_{r+1} Summen $\eta+\zeta$ ist dann nur eine zu verwerfen, und aus jeder der $g_r(2u_r)$ Darstellungen r-ter Stufe von $2u_r$ entspringen $p_{r+1}-1$ Darstellungen $(r+1)$-ter Stufe von $2u_{r+1}$. Wenn also der eine Wert von ξ, für den $2u_{r+1}$ bei gegebenem u_r durch p_{r+1} teilbar ist, mit ξ' bezeichnet wird, so ist

$$(4)\qquad g_{r+1}(2u_{r+1})=g_{r+1}(2P_r\xi'+2u_r)=g_r(2u_r)\cdot(p_{r+1}-1)\,.$$

II. Ist ξ von ξ' verschieden, so sind die beiden Summen zu verwerfen, bei denen η gleich η_0 oder η_1 ist. Mithin liefert jede Darstellung r-ter Stufe von $2u_r$ nur $p_{r+1}-2$ Darstellungen von $2u_{r+1}$, und man hat, wenn $2u_{r+1}$ nicht durch p_{r+1} teilbar ist, die Gleichung

$$(5)\quad g_{r+1}(2u_{r+1})=g_{r+1}(2P_r\xi+2u_r)=g_r(2u_r)\cdot(p_{r+1}-2)\qquad(\xi \neq \xi')\,.$$

Es bleibt übrig, die Gewichte der ersten Stufe zu bestimmen. Man findet sofort

$$g_1(2) = g_1(4) = 1 = 3-2, \quad g_1(6) = 2 = 3-1$$

und gelangt so zu der einfachen

REGEL zur Bestimmung der Gewichte r-ter Stufe. Es seien $a, b, \ldots, l$ die Primzahlen der Reihe $3, 5, \ldots, p_r$, durch die $2u_r$ teilbar ist; $a', b', \ldots, l'$ die Primzahlen derselben Reihe, durch die es nicht teilbar ist. Dann wird

$$g_r(2u_r) = (a-1)(b-1)\cdots(l-1)\cdot(a'-2)(b'-2)\cdots(l'-2)\,. \tag{6}$$

Aus den in § 1 auseinandergesetzten Symmetrieeigenschaften der Reihe der Lückenzahlen folgt die nützliche Beziehung

$$g_r(2P_r - 2u_r) = g_r(2u_r)\,; \tag{7}$$

es genügt daher, die Gewichte der $\frac{1}{2}(P_r - 1)$ Klassen $2P_r x + 2u_r$ zu bestimmen, bei denen $2u_r$ von 2 bis $P_r - 1$ geht, und dazu das zu sich selbst symmetrische Gewicht $g_r(2P_r)$.

Das größte Gewicht r-ter Stufe ist das soeben genannte

$$g_r(2P_r) = (3-1)(5-1)\cdots(p_r - 1) = P_r^{(1)}\,; \tag{8}$$

es wird nur für die Klasse $2P_r x$ erreicht. Zur Abkürzung werde eingeführt

$$P_r^{(2)} = (3-2)(5-2)\cdots(p_r - 2)\,. \tag{9}$$

Dann ist $P_r^{(2)}$ der kleinste Wert, den ein Gewicht r-ter Stufe haben kann, und dieser Wert wird für die $P_r^{(1)}$ Zahlen $2u_r$ angenommen, die zu P_r teilerfremd sind.

Wir kehren zu der Aufgabe zurück, die Anzahl der Darstellungen der geraden Zahlen $2n = 2P_r x + 2u_r$ als Summe von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe zu ermitteln. Nachdem man die Zahlen v_r, w_r gewählt hat, was auf $g_r(2u_r)$ Arten geht, ist noch die Gleichung $x-\varepsilon = y+z$ zu erfüllen. Dies geschieht, indem $y = 0, 1, 2, \ldots, x-\varepsilon$ gesetzt wird; dadurch ist z bestimmt. Je nachdem also $v_r + w_r = 2u_r$ oder $= 2u_r + 2P_r$ ist, erhält man aus dem Wertepaar v_r, w_r für $2n$ als Summe von zwei Lückenzahlen $x+1$ oder x Darstellungen.

Ein Beispiel wird willkommen sein. Es handle sich um die Darstellungen zweiter Stufe für die Zahl $92 = 30 \cdot 3 + 2$. Man hat $g_2(2) = 3$; die 3 Paare v_2, w_2 sind $1, 1$; $13, 19$; $19, 13$. Beim ersten Paar wird $3 = y + z$, sodaß man vier Darstellungen erhält: $1 + 91$; $31 + 61$; $61 + 31$; $91 + 1$. Beim zweiten Paar ist dagegen $2 = y + z$, sodaß man drei Darstellungen erhält: $13 + 79$; $43 + 49$; $73 + 19$. Beim dritten Paar ist wieder $2 = y + z$, und man findet drei Darstellungen: $19 + 73$; $49 + 43$; $79 + 13$. Die Anzahl aller Darstellungen ist 10; sie liegt zwischen $3 \cdot 3 = 9$ und $4 \cdot 3 = 12$.

Wird allgemein die Anzahl der Darstellungen der geraden Zahl $2n$ als Summe von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe mit $G_r(2n)$ bezeichnet, so liegt $G_r(2P_r x + 2u_r)$ zwischen $x \cdot g_r(2u_r)$ und $(x+1) \cdot g_r(2u_r)$. Für große Werte von $2n$ und mithin auch von x, auf die es für die folgenden Betrachtungen ankommt, ergibt sich hieraus ein einfacher asymptotischer Ausdruck für $G_r(2n)$. Weil nämlich auch $2n : 2P_r$ zwischen x und $x+1$ liegt, so ist

$$G_r(2n) \sim \frac{2n}{2P_r} \cdot g_r(2u_r)\,; \tag{10}$$

das Zeichen $\sim$, gesprochen asymptotisch gleich, besagt, daß der Quotient der linken und der rechten Seite mit wachsenden Werten von $2n$ der Grenze Eins zustrebt. Wenn der Quotient sich von Eins nur um eine Größe unterscheiden soll, die dem Betrag nach kleiner ist als eine vorgegebene, beliebig kleine positive Größe δ, so muß x größer als $1 : \delta$ sein: die Genauigkeit δ wird daher für alle Werte von $2n$ erreicht, die größer sind als $2P_r \cdot X$, wo $X - 1$ größer als $1 : \delta$ zu wählen ist. Je größer die Stufenzahl ist, um so später wird also die Genauigkeit δ erreicht.

Es ist zweckmäßig, den asymptotischen Ausdruck für $G_r(2n)$ umzugestalten, indem der erste Faktor mit dem kleinsten Gewicht $P_r^{(2)}$ multipliziert und der zweite Faktor dadurch dividiert wird. Die rechte Seite der Gleichung (10) erscheint dann als das Produkt der beständig wachsenden Funktion

$$W_r(2n) = \frac{P_r^{(2)}}{2P_r} \cdot 2n \tag{11}$$

und der die Schwankungen des Verlaufes bewirkenden Funktion

$$S_r(2n) = M(a) \cdot M(b) \cdots M(l)\,, \tag{12}$$

die sich als das Produkt der zu den ungeraden Primteilern $a, b, \ldots, l$ von $2n$ gehörenden Multiplikatoren

$$M(p) = \frac{p-1}{p-2} = 1 + \frac{1}{p-2} \tag{13}$$

darstellt. Die in der Gleichung

$$G_r(2n) \sim W_r(2n) \cdot S_r(2n) \tag{14}$$

auftretenden Funktionen $W_r(2n)$ und $S_r(2n)$ sollen die Wachstumsfunktion und die Schwankungsfunktion von $G_r(2n)$ genannt werden.

Es ist bemerkenswert, daß die Form des Multiplikators $M(p)$ von der Stufenzahl r unabhängig ist. Wohl aber entscheidet die Stufenzahl, welche Multiplikatoren in die Schwankungsfunktion aufzunehmen sind, denn auf der r-ten Stufe werden nur die r ersten ungeraden Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ wirksam. Bei genügend hoher Stufenzahl sind schließlich sämtliche ungerade Primteiler von $2n$ zu berücksichtigen, und von einer gewissen Stufenzahl an ist der geraden Zahl $2n$ stets dieselbe Schwankungsfunktion $S(2n)$ zuzuordnen, zu der alle ihre ungeraden Primteiler einen Beitrag liefern. Man gelangt um so später zur Funktion $S(2n)$, je größer die Primteiler von $2n$ sind, am spätestens also, wenn n eine Primzahl ist.

Die Werte der Schwankungsfunktionen $S_r(2n)$ sind nicht in endlichen Grenzen beschlossen, bei geeigneter Wahl von r und $2n$ läßt sich vielmehr erreichen, daß $S_r(2n)$ größer wird als jede gegebene, noch so große Zahl Σ. Man hat nämlich

$$S_r(2P_r) = \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{p_\varrho - 1}{p_\varrho - 2} = \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{(p_\varrho - 1)^2}{p_\varrho(p_\varrho - 2)} \cdot \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{p_\varrho}{p_\varrho - 1}. \tag{15}$$

Der erste Faktor nähert sich, wenn r unendlich wird, einem endlichen Grenzwerte, nämlich dem Werte $2:\varkappa$ (*Darstellung*, Gl. 25); dabei ist $\varkappa = 1{,}320$. Für den zweiten Faktor gilt nach MERTENS[1] die asymptotische Gleichung

[1] F. MERTENS, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Journ. f. Math. 78 (1874), S. 53.

$$\prod_{\varrho=1}^{r} \frac{p_\varrho}{p_\varrho - 1} \sim \tfrac{1}{2} e^{\gamma} \cdot \log p_r\,; \tag{16}$$

γ bedeutet die EULER-MASCHERONIsche Konstante 0,577215... Mithin wird

$$S_r(2P_r) \sim \frac{e^{\gamma}}{\varkappa} \cdot \log p_r \sim 1{,}350 \cdot \log p_r\,, \tag{17}$$

das heißt, $S_r(2P_r)$ wird mit wachsender Stufenzahl r schließlich größer als die gegebene Zahl Σ.

§ 3

Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei ungeraden Primzahlen

Die Multiplikatoren $M(p)$ sind bereits bei Untersuchungen aufgetreten, die HAUSSNER und BRUN über die Anzahl der Darstellungen einer geraden Zahl $2n$ als Summe von zwei ungeraden Primzahlen v und w angestellt haben; bei dieser Anzahl $G(2n)$ sollen, wie es vorher bei den Lückenzahlen geschehen ist, die Darstellungen $2n = v + w$ und $2n = w + v$ als verschieden angesehen werden, wenn v von w verschieden ist. Statt der Lückenzahlen wurden von HAUSSNER und BRUN die Zahlen betrachtet, die aus der Folge der ungeraden Zahlen durch ein einziges Aussieben mittels einer Primzahl p hervorgehen; es handelt sich also bei ihnen um die Darstellungen der geraden Zahl $2n$ als Summe von zwei ungeraden Zahlen, die der so gesiebten Folge entnommen sind. Von dem Satze, daß bei den durch p teilbaren Zahlen $2n$ die Anzahl solcher Darstellungen gegenüber den Anzahlen, die zu den benachbarten, also nicht durch p teilbaren Werten von $2n$ gehören, asymptotisch $M(p)$-mal so groß ist, gelangt man zur Schwankungsfunktion $S(2n)$, indem als wahrscheinlich hingestellt wird e r s t e n s: daß es gleichgültig sei, wie oft ein Primteiler p in $2n$ enthalten ist, und z w e i t e n s: daß die einzelnen Primteiler von $2n$ unabhängig voneinander wirken. D i e s e b e i d e n A n n a h m e n l a s s e n s i c h a l s N o t w e n d i g k e i t e n a u f z e i g e n, w e n n d i e D a r s t e l l u n g e n d e r g e r a d e n Z a h l e n a l s

Summen von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe betrachtet werden, und das ist der erste Fortschritt, der aus der Einführung der Lückenzahlen hervorgeht.

Der zweite Fortschritt besteht darin, daß man aus der im Gebiet der Lückenzahlen geltenden asymptotischen Gleichung

$$G_r(2n) \sim W_r(2n) \cdot S_r(2n) \tag{14}$$

für die Primzahlen zu einem Näherungsausdruck

$$G(2n) \sim W(2n) \cdot S(2n) \tag{18}$$

gelangt, in dem $W(2n)$ wieder eine Wachstumsfunktion, $S(2n)$ eine Schwankungsfunktion bezeichnet, und damit eine einheitliche Herleitung der asymptotischen Darstellung von $G(2n)$ gewinnt, während bisher die beiden Bestandteile des Näherungsausdrucks durch verschiedenartige Überlegungen abgeleitet wurden. Es muß sogleich hinzugefügt werden, daß auch durch die neue Herleitung kein strenger Beweis der Formel (18) erbracht wird; sie bleibt eine Vermutung. Allein wenn für die Wachstumsfunktion und die Schwankungsfunktion auf dem neuen Weg dieselben Ausdrücke erhalten werden, die sich früher auf anderen Wegen ergeben hatten und durch die numerische Prüfung bestätigt worden waren, so befestigt sich die Überzeugung von ihrer Richtigkeit.

Bei wachsender Stufenzahl zeigen die Lückenzahlen eine Erscheinung, die an die Semikonvergenz unendlicher Reihen erinnert. Die Anzahl der Primzahlen, mit denen der Hauptabschnitt r-ter Stufe beginnt, wächst mit r über alle Grenzen, gleichzeitig aber nimmt die Dichtigkeit der Primzahlen, bezogen auf den ganzen Hauptabschnitt, beständig ab und nähert sich, wie sogleich bewiesen werden wird, der Grenze Null.

Um in Übereinstimmung mit der üblichen Bezeichnung zu bleiben, soll die Zahl Eins den ungeraden Primzahlen zugerechnet und die Anzahl der ungeraden Primzahlen von 1 bis n (einschließlich) mit $\pi(n)$ bezeichnet werden[1]. Dann ist die Dichtigkeit der ungeraden Primzahlen unter den Lückenzahlen r-ter Stufe des Hauptabschnittes

[1] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 1, Leipzig 1909, S. 3, zählt $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ usw., sodaß seine Funktion $\pi(n)$ von $n=2$ ab mit der hier erklärten Funktion $\pi(n)$ übereinstimmt.

$$D_r = \frac{\pi(2P_r)}{P_r^{(1)}}. \tag{19}$$

Für D_r läßt sich ein einfacher asymptotischer Ausdruck ableiten. Man hat zunächst

$$\pi(2P_r) \sim \frac{2P_r}{\log(2P_r)}; \tag{20}$$

unter dem Zeichen log wird stets der natürliche Logarithmus verstanden. Nun ist bekanntlich[1]

$$\log(2P_r) \sim p_r, \tag{21}$$

mithin, wenn noch die Formel (16) von MERTENS benutzt wird:

$$D_r \sim e^{\gamma} \cdot \frac{\log p_r}{p_r} \sim e^{\gamma} \cdot \frac{1}{r} \sim \frac{1{,}7811}{r}, \tag{22}$$

das heißt, die Dichtigkeit der Primzahlen unter den Lückenzahlen r-ter Stufe des Hauptabschnittes ist, für große Werte von r, angenähert der Stufenzahl umgekehrt proportional.

Sätze, die für Lückenzahlen jeder Stufe gelten, lassen sich somit nicht durch Grenzübergang auf Primzahlen übertragen. Wenn man einen solchen Grenzübergang versuchen will, so ist vielmehr die Dichtigkeit der Primzahlen unter den Lückenzahlen zu berücksichtigen. Hiermit steht in Einklang, daß die Formel (10) für $r = \infty$ ihren Sinn verliert, denn die Genauigkeit δ ließ sich nur erreichen, wenn $2n$ größer als $2P_r \cdot X$ gewählt wurde, und diese Schranke wächst mit r über alle Grenzen.

In dem asymptotischen Ausdruck (14) für $G_r(2n)$ war der zweite Faktor die Schwankungsfunktion $S_r(2n) = S_r(2P_r x + 2u_r)$; dabei sollte $x > X$ sein. Wirksam sind nur die Primzahlen der Reihe $3, 5, 7, \ldots, p_r$, und $S(2n)$ unterscheidet sich daher von $S_r(2n)$ um das Produkt der Multiplikatoren, die zu den in $2n$ enthaltenen Primteilern größer als p_r gehören. Die Ausführungen am Schluß von § 2 zeigen, daß dieses Produkt, wenn die Zahl $2n$ nur der Beschränkung unterworfen wird, den Betrag x zu übersteigen, größer

[1] Vgl. etwa E. LANDAU, a. a. O., S. 45.

als jede gegebene Zahl werden kann. Die Forderung, daß $2n$ mit r über alle Grenzen wächst, ist aber schon erfüllt, wenn man verlangt, daß $\frac{x}{P_r} \sim 0$ sein soll; dieselbe Bedingung wird sich auch beim Grenzübergang von $W_r(2n)$ einstellen. In ihr liegt, daß $\frac{2n}{(2P_r)^2} \sim 0$ ist.

Jetzt läßt sich nachweisen, daß $S_r(2n)$ bei wachsenden Werten von r asymptotisch gleich $S(2n)$ wird. Die Anzahl der Primteiler von $2n$, die größer als p_r sind, ist nämlich sicher kleiner als die Zahl λ, die durch die Gleichung $2n = p_r^\lambda$ bestimmt wird. Auch im ungünstigsten Fall bleibt daher das Produkt der zu den Primteilern größer als p_r gehörigen Multiplikatoren kleiner als $M(p_r)^\lambda$. Mithin ist der Logarithmus dieses Produktes kleiner als $\lambda \log\left(1+\frac{1}{p_r-2}\right)$, also erst recht kleiner als $\frac{\lambda}{p_r-2} = \frac{\log 2n}{\log p_r \cdot (p_r-2)}$, und dieser Bruch ist kleiner als $\frac{2\log(2P_r)}{\log p_r \cdot (p_r-2)}$ und nach Gleichung (21) auch nicht größer als $\frac{2p_r}{\log p_r \cdot (p_r-2)}$, nähert sich folglich mit wachsenden Werten von r der Grenze Null. Hiermit ist bewiesen, daß das Produkt der Multiplikatoren $M(p)$, p größer als p_r, in der Grenze gegen den Wert Eins konvergiert, vorausgesetzt, daß x der Bedingung $\frac{x}{P_r} \sim 0$ unterworfen wird. Man hat mithin bei $G(2n)$ als Schwankungsfunktion

$$S(2n) = M(a) \cdot M(b) \cdots M(l)\,, \tag{23}$$

wo unter $a, b, \ldots, l$ sämtliche in $2n$ enthaltene ungerade Primzahlen zu verstehen sind.

Bei der Wachstumsfunktion $W_r(2n)$ ist für den Grenzübergang die Dichtigkeit der Primzahlen in Ansatz zu bringen, und zwar hat man, weil bei den Darstellungen einer geraden Zahl $2n$ als Summe von zwei ungeraden Primzahlen die Primzahlpaare in Betracht kommen, $W_r(2n)$ mit dem Quadrat der Dichtigkeit D_r zu multiplizieren. Auf diese Art erhält man den Ausdruck

(24) $$\frac{P_r^{(2)} D_r^2}{2 P_r} \cdot 2n .$$

Unter Benutzung der Gleichung (19) läßt er sich auf die Form bringen

$$\frac{2 P_r P_r^{(2)}}{(P_r^{(1)})^2} \cdot \left(\frac{\pi(2P_r)}{2P_r}\right)^2 \cdot 2n .$$

Der erste Faktor nähert sich mit wachsenden Werten von r einem bestimmten, endlichen Grenzwert, denn das unendliche Produkt

(25) $$\lim_{r=\infty} \frac{P_r P_r^{(2)}}{(P_r^{(1)})^2} = \prod_{\varrho=1}^{\infty} \frac{p_\varrho(p_\varrho-2)}{(p_\varrho-1)^2} = \prod_{\varrho=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p_\varrho-1)^2}\right)$$

ist konvergent (*Darstellung*, S. 19). In Übereinstimmung mit der früheren Bezeichnung sei

(26) $$\varkappa = 2 \cdot \prod_{\varrho=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p_\varrho-1)^2}\right) = 1{,}320 .$$

Für den zweiten Faktor benutze man, daß nach Gleichung (20)

$$\frac{2P_r}{\pi(2P_r)} \sim \log(2P_r)$$

ist. Nun war $2n = 2P_r x + 2u_r$. Mithin wird

$$\log(2n) = \log(2P_r) + \log\left(x + \frac{u_r}{P_r}\right)$$

und daher $\log(2n) \sim \log(2P_r)$, folglich auch

(27) $$\frac{\pi(2P_r)}{2P_r} \sim \frac{\pi(2n)}{2n},$$

sobald, wie es schon bei der Schwankungsfunktion geschah, x der Bedingung unterworfen wird, daß $\frac{x}{P_r} \sim 0$ ist. Diese Forderung ist vereinbar mit den früheren Bedingungen für x.

Mit Hilfe der Gleichungen (23) und (27) findet man schließlich

$$W(2n) = \varkappa \cdot \frac{\pi^2(2n)}{2n}, \tag{28}$$

also genau denselben Ausdruck, wie er früher (*Darstellung*, § 6) auf Grund ganz anderer Überlegungen aufgestellt wurde, und gelangt damit zu der Näherungsformel (*Darstellung*, S. 20):

$$G(2n) \sim 1{,}320 \cdot \frac{\pi^2(2n)}{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{a-1}\right)\left(1 + \frac{1}{b-1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{l-1}\right). \tag{A}$$

Die Vergleichung der wahren Werte von $G(2n)$ mit den aus der Formel (A) berechneten Näherungswerten hat gezeigt, daß im Bereich von 4000 bis 4998 der relative Wert der algebraischen Fehlersumme für die einzelnen Hunderte im Mittel zwischen 0,01 und 0,02 liegt, sodaß die Formel (A) den Verlauf der Funktion $G(2n)$ trotz der starken Schwankungen befriedigend wiedergibt (*Darstellung*, S. 21).

Der Gedanke, der zu der neuen Herleitung der Formel (A) führte, eröffnet – und das ist der dritte Fortschritt, den die Einführung der Lückenzahlen mit sich bringt – den Zugang zu einer ganzen Kette von Sätzen über die asymptotische Darstellung von Anzahlen, die sich auf die Summen und Differenzen der ungeraden Primzahlen beziehen, und auch hier haben die heuristisch gefundenen Formeln sich numerisch bestätigen lassen.

§ 4

Lückenzahlpaare gegebener Differenz

Bei der Frage nach den Paaren von Lückenzahlen r-ter Stufe, die eine gegebene gerade Zahl 2δ zur Differenz haben, tritt insofern eine Schwierigkeit ein, als aus einer Darstellung $2\delta = w_r - v_r$ sogleich unbegrenzt viele entspringen, denn mit v_r, w_r sind auch $2P_r y + v_r$, $2P_r y + w_r$ Lückenzahlen r-ter Stufe, die sich um die gerade Zahl 2δ unterscheiden. Man gelangt jedoch zu einer bestimmten Antwort, wenn man nur solche Darstellungen von 2δ als wesentlich verschieden ansieht, die nicht durch Hinzufügen oder

Wegnehmen desselben Vielfachen von $2P_r$ zum Minuendus und Subtrahendus auseinander hervorgehen, und sich also auf die eigentlichen Darstellungen beschränkt, bei denen der Subtrahendus v_r dem Hauptabschnitt r-ter Stufe angehört; dagegen muß man zulassen, daß der Minuendus auch einem der folgenden Abschnitte entnommen wird. Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen r-ter Stufe, deren sich die gerade Zahl 2δ erfreut, soll mit $H_r(2\delta)$ bezeichnet werden.

Man hat so viele eigentliche Darstellungen r-ter Stufe von 2δ, als es Lückenzahlen v_r gibt, für die $v_r+2\delta$ wieder eine Lückenzahl r-ter Stufe ist. Damit das der Fall ist, muß $v_r+2\delta$ zu P_r teilerfremd sein. Mithin ergeben sich die gesuchten Zahlen v_r, wenn man alle $P_r^{(1)}$ Lückenzahlen v_r des Hauptabschnittes vornimmt und der Reihe nach diejenigen aussondert, für die $v_r+2\delta$ durch eine der ungeraden Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ teilbar ist.

Wir beginnen mit der Primzahl 3. Ist erstens 2δ durch 3 teilbar, so hat $v_r+2\delta$ niemals den Teiler 3, und es fällt keine der Zahlen v_r weg. Ist aber zweitens 2δ nicht durch 3 teilbar, so kommt es darauf an, ob v_r von der Form $6n_1+1$ oder $6n_1+5$ ist. Eine der beiden Formen muß es haben, weil die Lückenzahlen r-ter Stufe auf die in § 1 auseinandergesetzte Art aus den Lückenzahlen erster Stufe enstehen. Hieraus folgt zugleich, was für die weiteren Darlegungen wichtig ist, daß von den $P_r^{(1)}$ Lückenzahlen r-ter Stufe des Hauptabschnittes die eine Hälfte die Form $6n_1+1$, die andere Hälfte die Form $6n_1+5$ hat. Von den beiden Zahlen $1+2\delta$ und $5+2\delta$ ist aber, wenn 2δ zu 3 teilerfremd ist, immer die eine und nur die eine durch 3 teilbar; also fällt die Hälfte der Zahlen v_r weg, und es bleiben nur $\frac{1}{2}P_r^{(1)}$ Zahlen übrig, die sämtlich einer der beiden Formen $6n_1+1$ oder $6n_1+5$ angehören. Bedenkt man jetzt, daß $M(3)=2$ war, so läßt sich das Ergebnis auch so aussprechen, daß nach Aussonderung der Lückenzahlen v_r, bei denen $v_r+2\delta$ durch 3 teilbar ist, stets

$$\tfrac{1}{2}P_r^{(1)} \cdot S_1(2\delta)$$

Lückenzahlen des Hauptabschnittes r-ter Stufe übrig bleiben.

Bei der folgenden Primzahl 5 hat man wieder zu unterscheiden, ob 2δ durch 5 teilbar ist oder nicht. Ist erstens 2δ durch 5 teilbar, so gilt das von der zweiten Stufe ab sicher nicht für $v_r+2\delta$, und es sind alle noch vorhandenen Zahlen v_r beizubehalten.

Ist aber **zweitens** 2δ nicht durch 5 teilbar, so gehen aus jeder der beiden Formen $6n_1+1$ und $6n_1+5$ je $5-1=4$ Formen der Gestalt $30n_2+v_2$ hervor, unter die die Lückenzahlen r-ter Stufe des Hauptabschnittes gleichmäßig verteilt sind. Immer nur bei einer der vier Formen ist $v_2+2\delta$ durch 5 teilbar. Es ist nämlich $v_2=6\xi+v_1$. Von den 5 an und für sich möglichen Werten $0,1,2,3,4$ darf ξ einen nicht annehmen, weil sonst v_2 durch 5 teilbar wäre, und von den übrigbleibenden vier Werten scheidet derjenige aus, für den $v_2+2\delta$ durch 5 teilbar wird. Diese beiden Werte sind voneinander verschieden, denn v_2 und $v_2+2\delta$ können nicht gleichzeitig 5 zum Teiler haben, wenn, wie vorausgesetzt, 2δ zu 5 teilerfremd ist. Hiernach kommt ein Viertel der vorhandenen Lückenzahlen v_r in Wegfall, und es bleiben davon drei Viertel übrig. Bedenkt man wiederum, daß $M(5)=4/3$ war, so läßt sich das Ergebnis so aussprechen, daß nach Aussonderung der Lückenzahlen v_r, für die $v_r+2\delta$ durch 3 oder durch 5 teilbar ist, in allen Fällen

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}P_r^{(1)}\cdot S_2(2\delta)$$

Lückenzahlen v_r übrigbleiben.

Dieselbe Schlußweise läßt sich der Reihe nach auf die Primzahlen $7, 11, \ldots, p_\varrho$, $\varrho\leq r$ anwenden. Nachdem man etwa diejenigen Lückenzahlen v_r ausgesondert hat, für die $v_r+2\delta$ durch $3,5,7,\ldots,$ $p_{\varrho-1}$ teilbar ist, sind gewisse Lückenzahlen r-ter Stufe übriggeblieben, die sich gleichmäßig auf eine Anzahl arithmetischer Reihen der Form $2P_{\varrho-1}n_{\varrho-1}+v_{\varrho-1}$ verteilen. Wenn 2δ durch p_ϱ teilbar ist, werden alle Zahlen beibehalten; wenn nicht, so betrachte man eine der Reihen und bringe deren allgemeines Glied auf die Form

$$2P_\varrho n_\varrho + 2P_{\varrho-1}\xi + v_{\varrho-1} = 2P_\varrho n_\varrho + v_\varrho\,. \tag{29}$$

Von den p_ϱ an und für sich möglichen Werten $0,1,2,\ldots,p_\varrho-1$ darf ξ einen nicht annehmen, weil sonst v_ϱ durch p_ϱ teilbar wäre, und von den übrigbleibenden $p_\varrho-1$ Werten scheidet derjenige aus, für den $v_\varrho+2\delta$ durch p_ϱ teilbar wird. Diese beiden Werte sind voneinander verschieden, denn v_ϱ und $v_\varrho+2\delta$ können nicht gleichzeitig p_ϱ zum Teiler haben, wenn — wie vorausgesetzt — 2δ zu p_ϱ teilerfremd ist. Hiernach kommt von jeder der vorhandenen arithmetischen Reihen und mithin auch von der Gesamtheit der betrachteten Lückenzahlen der $(p_\varrho-1)$-te Teil in Wegfall. Bedenkt man endlich, daß

$$M(p_\varrho) = \frac{p_\varrho-1}{p_\varrho-2}$$

ist, so läßt sich das Ergebnis so aussprechen, daß nach Aussonderung der Lückenzahlen v_r, für die $v_r+2\delta$ durch eine der Primzahlen $3, 5, 7, \ldots, p_\varrho$ teilbar ist, in allen Fällen

$$\frac{(3-2)(5-2)\cdots(p_\varrho-2)}{(3-1)(5-1)\cdots(p_\varrho-1)} P_r^{(1)} \cdot S_\varrho(2\delta)$$

Lückenzahlen übrigbleiben.

Das Verfahren erreicht sein Ende, wenn man zur Primzahl p_r gelangt ist. Der Nenner wird dann gleich $P_r^{(1)}$, hebt sich also gegen den Faktor $P_r^{(1)}$ weg, und wenn wieder die Abkürzung

(9) $$P_r^{(2)} = (3-2)(5-2)\cdots(p_r-2)$$

benutzt wird, so gilt für die Anzahl der eigentlichen Darstellungen der geraden Zahl 2δ als Differenz von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe die Formel

(30) $$H_r(2\delta) = P_r^{(2)} \cdot S_r(2\delta)\,.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Schwankungsfunktion $S_r(2n)$ auch bei der Darstellung einer geraden Zahl als Differenz von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe auftritt; gegenüber der Darstellung als Summe von zwei Lückenzahlen besteht der Unterschied, daß der erste Faktor $P_r^{(2)}$ von 2δ unabhängig und zwar eine durch die Stufenzahl r bedingte Konstante ist.

Zum Schluß soll die Formel (30) auf einige besondere Fälle angewandt werden. Für $2\delta=2$ gelangt man zu den Paaren von Lückenzahlen r-ter Stufe, die in der Reihe der ungeraden Zahlen unmittelbar aufeinanderfolgen. Für Primzahlen solcher Art habe ich den Namen von Primzahlzwillingen vorgeschlagen (*Darstellung*, S. 22) und will daher Paare von Lückenzahlen der Differenz 2 als Lückenzahlzwillinge bezeichnen. Die Anzahl der Lückenzahlzwillinge r-ter Stufe des Hauptabschnittes ist nach der Formel (30):

(31) $$H_r(2) = P_r^{(2)}\,.$$

Es ist leicht, die Formel (31) unmittelbar herzuleiten, indem man sich des Schlusses von r auf $r+1$ bedient. Alle Lückenzahlzwillinge $(r+1)$-ter Stufe im Hauptabschnitt $(r+1)$-ter Stufe sind unter den Lückenzahlzwillingen r-ter Stufe der ersten p_{r+1} Abschnitte r-ter Stufe enthalten. Damit umgekehrt ein Zwilling r-ter Stufe auch der folgenden Stufe angehört, darf keine der beiden Zahlen $2P_r\xi+v_r$, $2P_r\xi+v_r+2$ durch p_{r+1} teilbar sein, und es sind also aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ der für ξ in Betracht kommenden Werte die beiden Ausnahmewerte auszusondern, für die Teilbarkeit durch p_{r+1} eintritt; diese Werte sind voneinander verschieden, weil von zwei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen höchstens die eine durch p_{r+1} teilbar sein kann. Demnach entspringen aus jedem der $H_r(2)$ Zwillinge des Hauptabschnittes r-ter Stufe $p_{r+1}-2$ Zwillinge des Hauptabschnittes $(r+1)$-ter Stufe, und es gilt die Formel:

$$H_{r+1}(2) = H_r(2)\cdot(p_{r+1}-2)\,. \tag{32}$$

Nun ist $H_1(2)=1=3-2$, denn es gibt nur das eine Zwillingspaar erster Stufe 5, 7; folglich besteht die Formel (31) zu Recht.

Auch für $2\delta=2^{\mu}$ führt der Schluß von r auf $r+1$ leicht zum Ziel. Es gilt die entsprechende Formel

$$H_{r+1}(2^{\mu}) = H_r(2^{\mu})\cdot(p_{r+1}-2)\,, \tag{33}$$

und man hat wieder $H_1(2^{\mu})=1$, denn bei ungeradem μ ist $1+2^{\mu}$, bei geradem μ aber $5+2^{\mu}$ durch 3 teilbar. Somit wird, der Formel (30) entsprechend:

$$H_r(2^{\mu}) = P_r^{(2)} = H_r(2)\,. \tag{34}$$

Aus dem Vorhergehenden folgt noch, daß bei ungeradem μ die Lückenzahlpaare der Differenz 2^{μ} die Form $6n_1-1$, $6n_1'+1$ haben, bei ungeradem μ aber die Form $6n_1+1$, $6n_1'-1$.

Für $2\delta=6$ erhält man aus der Formel (30)

$$H_r(6) = 2\cdot P_r^{(2)} = 2\cdot H_r(2)\,, \tag{35}$$

sodaß die Differenz 6 bei den Lückenzahlen besonders häufig auftritt. Die Lückenzahlpaare der Differenz 6 lassen sich in drei Klassen teilen, je nachdem die beiden Zahlen v_r und v_r+6 benachbarte Lückenzahlen sind, also zwischen ihnen keine Lückenzahl liegt, oder mit v_r und v_r+6 auch eine der beiden Zahlen v_r+2 oder v_r+4 zu den Lückenzahlen gehört; die Zahlen v_r+2 und v_r+4 können nicht gleichzeitig dazu gehören, weil von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen stets die eine den Teiler 3 besitzt. Man wird so auf die Frage nach Abschnitten aus der Reihe der Lückenzahlen r-ter Stufe geführt, bei denen die Differenzen von je zwei benachbarten Zahlen gegebene Werte haben, eine Frage, auf die wir später eingehen werden.

§ 5

Primzahlpaare gegebener Differenz

Das in § 3 entwickelte heuristische Übertragungsprinzip führt von Sätzen über Lückenzahlen beliebiger Stufe zu entsprechenden Sätzen über Primzahlen, wenn die Dichtigkeit der Primzahlen unter den Lückenzahlen des Hauptabschnittes in Ansatz gebracht wird. Diese Dichtigkeit war für die r-te Stufe

$$D_r = \frac{\pi(2P_r)}{2P_r^{(1)}} . \tag{16}$$

Bei großen Werten von r wird man daher im Hauptabschnitt r-ter Stufe näherungsweise

$$P_r^{(2)} \cdot S_r(2\delta) \cdot \left(\frac{\pi(2P_r)}{2P_r^{(1)}}\right)^2$$

Primzahlpaare der Differenz 2δ zu erwarten haben; $S_r(2\delta)$ darf bei großen Werten von r durch $S(2\delta)$ ersetzt werden. Wenn die Anzahl der zwischen 1 und $2n$ liegenden Primzahlpaare der Differenz 2δ mit $H^{(2\delta)}(2n)$ bezeichnet wird, so ergibt sich der Näherungsausdruck

$$H^{(2\delta)}(2P_r) \sim \frac{2P_r P_r^{(2)}}{(P_r^{(1)})^2} \cdot \frac{\pi^2(2P_r)}{2P_r} \cdot S(2\delta) .$$

Wie in § 3 findet man hieraus für große Werte von r:

$$H^{(2\delta)}(2P_r) \sim \varkappa \cdot \frac{\pi^2(2P_r)}{2P_r} \cdot S(2\delta)\,. \tag{36}$$

Wenn also die beständig wachsende Funktion $H^{(2\delta)}(2n)$ einer asymptotischen Darstellung fähig sein soll, so muß man haben

$$H^{(2\delta)}(2n) \sim \varkappa \cdot \frac{\pi^2(2n)}{2n} \cdot S(2\delta) \tag{37}$$

oder auch nach der Gleichung (28)

$$H^{(2\delta)}(2n) \sim W(2n) \cdot S(2\delta)\,. \tag{38}$$

Die Wachstumsfunktion von $G(2n)$ ist demnach auch die Wachstumsfunktion bei der asymptotischen Darstellung der Anzahl der Primzahlpaare der Differenz 2δ; eine Schwankungsfunktion ist bei $H^{(2\delta)}(2n)$ nicht vorhanden, denn der Faktor $S(2\delta)$ ist unabhängig von $2n$.

Brun hatte 1915 die Vermutung ausgesprochen, daß

$$H^{(2)}(2n) \sim a \cdot \frac{2n}{\log^2 2n} \tag{39}$$

sei, was gleichwertig ist mit der aus der Gleichung (37) folgenden Formel

$$H^{(2)}(2n) \sim \varkappa \cdot \frac{\pi^2(2n)}{2n}\,. \tag{40}$$

Bei ihm bedeutet a eine noch zu bestimmende numerische Konstante. Er findet für a den Näherungswert 1,5985, indem er bei der Gleichung (39) den von Glaisher angegebenen Wert $H^{(2)}(100000) = 1225$ benutzt. Es schien daher erwünscht, eine numerische Prüfung der Formel

$$\varkappa \sim \frac{2n \cdot H^{(2)}(2n)}{\pi^2(2n)} \tag{41}$$

in größerem Umfang vorzunehmen. Die Ergebnisse findet man in den von Weinreich berechneten Tafeln 2 und 3.

In der Formel (41) sind auf der rechten Seite für $2n$ der Reihe nach diejenigen Werte eingesetzt worden, bei denen $H^{(2)}(2n)$ um eine Einheit wächst. Dies ist von $2n=2$ bis zu $2n=40850$ geschehen; hier sollen jedoch nur die Werte berücksichtigt werden, bei denen $2n$ von 9632 bis 40850 und $H^{(2)}(2n)$ von 201 bis 600 geht, und zwar wird von je 25 aufeinanderfolgenden Näherungswerten der Konstanten $\varkappa$ immer das arithmetische Mittel angegeben. Die Tafel 2 zeigt, daß von einer monotonen Annäherung an den Grenzwert 1,320 nicht geredet werden darf, vielmehr findet ein unregelmäßiges Schwanken statt; immerhin liegen die 13 Mittelwerte zwischen 1,33 und 1,35. Der Grund liegt in der großen Ungleichmäßigkeit, mit der die Primzahlzwillinge unter den ganzen Zahlen verteilt sind. Dies wird recht deutlich, wenn man die dritte Tafel betrachtet, in der die Werte von $H^{(2)}(2n)$ für die ersten 100 Vielfachen von 1000 auf Grund der Angaben von GLAISHER mitgeteilt werden. Die arithmetischen Mittel von je 25 aufeinanderfolgenden Näherungswerten für $\varkappa$ sind hier der Reihe nach

$$1{,}3543; \quad 1{,}3380; \quad 1{,}3243; \quad 1{,}3226,$$

sodaß die Annäherung an den Grenzwert 1,320 deutlich in die Erscheinung tritt.

TAFEL 2

Näherungswerte für $\varkappa$
auf Grund der Werte von $H^{(2)}(2n)$ für $2n = 9632$ bis 40850

$2n$ Anfangswert	$2n$ Endwert	$H^{(2)}(2n)$ Anfangswert	$H^{(2)}(2n)$ Endwert	Mittelwert der 25 Näherungswerte von $\varkappa$
9 632	11 120	201	225	1,373 9
11 162	13 220	226	250	1,367 9
13 340	15 272	251	275	1,339 6
15 290	17 192	276	300	1,319 3
17 210	18 524	301	325	1,330 8
18 542	20 510	326	350	1,339 1
20 552	22 094	351	375	1,350 7
22 112	23 690	376	400	1,359 1
23 744	26 684	401	425	1,343 4
26 702	28 184	426	450	1,335 7
28 280	30 494	451	475	1,339 6
30 560	32 372	476	500	1,335 8
32 414	34 034	501	525	1,346 5
34 130	35 840	526	550	1,354 9
35 900	38 450	551	575	1,348 7
38 462	40 850	576	600	1,345 8

TAFEL 3

Näherungswerte von $\varkappa$ auf Grund der Werte von $H^{(2)}(2n)$ für die ersten hundert durch tausend teilbaren Zahlen

$2n$	$\pi(2n)$	$H^{(2)}(2n)$	$\varkappa$	$2n$	$\pi(2n)$	$H^{(2)}(2n)$	$\varkappa$
1 000	168	36	1,275 5	51 000	5 222	715	1,337 2
2 000	303	62	1,350 6	52 000	5 319	729	1,339 9
3 000	430	82	1,330 4	53 000	5 408	737	1,335 6
4 000	550	104	1,375 2	54 000	5 500	748	1,335 3
5 000	669	127	1,418 8	55 000	5 590	756	1,330 6
6 000	783	144	1,409 3	56 000	5 683	767	1,329 9
7 000	900	163	1,408 6	57 000	5 782	781	1,331 6
8 000	1 007	176	1,388 5	58 000	5 873	790	1,328 4
9 000	1 117	190	1,370 5	59 000	5 963	801	1,329 1
10 000	1 229	206	1,363 8	60 000	6 057	812	1,328 0
11 000	1 335	222	1,370 2	61 000	6 145	822	1,327 9
12 000	1 438	236	1,369 5	62 000	6 232	828	1,321 8
13 000	1 547	247	1,341 7	63 000	6 320	836	1,318 6
14 000	1 652	262	1,344 0	64 000	6 413	846	1,316 5
15 000	1 754	273	1,331 1	65 000	6 493	855	1,318 2
16 000	1 862	285	1,315 2	66 000	6 591	869	1,320 3
17 000	1 960	298	1,318 7	67 000	6 675	875	1,315 8
18 000	2 064	316	1,335 2	68 000	6 774	885	1,311 5
19 000	2 158	328	1,338 2	69 000	6 854	894	1,313 1
20 000	2 262	343	1,340 7	70 000	6 935	906	1,318 7
21 000	2 360	358	1,349 8	71 000	7 033	922	1,323 5
22 000	2 464	373	1,351 6	72 000	7 128	932	1,320 7
23 000	2 564	389	1,360 9	73 000	7 218	943	1,321 3
24 000	2 668	403	1,358 8	74 000	7 301	949	1,317 4
25 000	2 762	409	1,340 3	75 000	7 393	959	1,315 9
26 000	2 860	421	1,338 2	76 000	7 484	968	1,313 5
27 000	2 961	432	1,330 4	77 000	7 567	979	1,316 5
28 000	3 055	447	1,341 0	78 000	7 652	988	1,312 7
29 000	3 153	459	1,338 9	79 000	7 746	997	1,312 7
30 000	3 245	468	1,333 3	80 000	7 837	1 008	1,313 0
31 000	3 340	479	1,331 1	81 000	7 925	1 021	1,316 8
32 000	3 432	492	1,336 7	82 000	8 017	1 033	1,317 9
33 000	3 538	511	1,347 2	83 000	8 106	1 046	1,321 3
34 000	3 638	524	1,346 1	84 000	8 190	1 054	1,319 9
35 000	3 732	540	1,357 0	85 000	8 277	1 066	1,322 6
36 000	3 824	551	1,356 5	86 000	8 362	1 077	1,324 6
37 000	3 923	560	1,346 3	87 000	8 450	1 085	1,322 0
38 000	4 017	572	1,347 0	88 000	8 543	1 099	1,325 1
39 000	4 107	583	1,348 0	89 000	8 619	1 109	1,328 6
40 000	4 203	592	1,340 5	90 000	8 713	1 117	1,324 2
41 000	4 291	600	1,336 0	91 000	8 802	1 127	1,323 7
42 000	4 392	612	1,332 5	92 000	8 887	1 137	1,324 5
43 000	4 494	624	1,328 6	93 000	8 984	1 149	1,323 9
44 000	4 579	635	1,332 6	94 000	9 070	1 161	1,326 6
45 000	4 675	646	1,330 1	95 000	9 157	1 174	1,330 1
46 000	4 761	653	1,325 2	96 000	9 252	1 182	1,325 6
47 000	4 851	665	1,328 2	97 000	9 336	1 189	1,323 2
48 000	4 946	676	1,326 4	98 000	9 418	1 204	1,330 3
49 000	5 035	689	1,331 7	99 000	9 505	1 217	1,333 6
50 000	5 133	706	1,339 8	100 000	9 592	1 225	1,331 4

Schließlich ist auch die Abhängigkeit der Anzahlen $H^{(2\delta)}(2n)$ von der mulitplikativen Zusammensetzung der Differenz 2δ einer numerischen Prüfung unterzogen worden. Wenn die Formel (38) richtig ist, so muß

$$\frac{H^{(2\delta)}(2n)}{H^{(2)}(2n)} \sim S(2\delta) \tag{42}$$

sein. Dies trifft überraschend genau zu. Nach den Zählungen WEINREICHS, der bis zur 4500sten Primzahl ging, ist

$$H^{(2)}(43\,051) = 625, \quad H^{(4)}(43\,051) = 617, \quad H^{(6)}(43\,051) = 1277;$$

hieraus folgt

$$\frac{H^{(4)}(43\,051)}{H^{(2)}(43\,051)} = 0{,}987; \quad \frac{H^{(6)}(43\,051)}{H^{(2)}(43\,051)} = 2{,}04\,,$$

während die entsprechenden Werte

$$S(4) = 1; \quad S(6) = 2$$

sind.

§ 6

Die Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen im Gebiet der Lückenzahlen r-ter Stufe

Lückenzahlzwillinge r-ter Stufe sind Paare von Zahlen $6\nu-1$, $6\nu+1$, die den Lückenzahlen r-ter Stufe entstammen. Hat man zwei solche Paare, $6\nu-1, 6\nu+1$ und $6\nu'-1, 6\nu'+1$, so gelten die Gleichungen

$$6(\nu+\nu') = (6\nu-1) + (6\nu'+1) = (6\nu+1) + (6\nu'-1)\,. \tag{43}$$

Bei den durch 6 teilbaren Zahlen gibt es also im Gebiet der Lückenzahlen r-ter Stufe Paare von Darstellungen als Summen, bei denen die beiden Summanden zu Lückenzahlzwillingen r-ter Stufe gehören, oder, wie wir kurz sagen wollen, **Zwillingsdarstellungen r-ter Stufe**. Die Anzahl $G^{(2)}(6n_1)$ solcher Darstellungen soll im folgenden untersucht werden.

Man setze $6n_1 = 2P_r x + 6t_r$, wo $6t_r$ dem Hauptbereich angehöre; um Ausnahmefälle zu vermeiden, werde angenommen, daß x mindestens gleich 1 sei. Die beiden Lückenzahlzwillinge, die $6n_1$ als Summe ergeben, mögen in der Form $2P_r y + v_r$, $2P_r y + v_r + 2$ und $2P_r z + w_r$, $2P_r z + w_r + 2$ angenommen werden, wo v_r und w_r dem Hauptabschnitt angehören. Aus den Gleichungen

$$(44)\quad \left|\begin{aligned} 2P_r x + 6t_r &= (2P_r y + v_r) + (2P_r z + w_r + 2) \\ &= (2P_r y + v_r + 2) + (2P_r z + w_r) \end{aligned}\right.$$

folgt zunächst, daß $v_r + w_r + 2$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $6t_r$ übereinstimmt, und daher ist $v_r + w_r + 2$ entweder $= 6t_r$ oder $= 6t_r + 2P_r$. Weiter sind y und z so zu wählen, daß, je nachdem einer der beiden genannten Fälle eintritt, $y + z = x - \varepsilon$ wird, wo $\varepsilon = 0, 1$ ist.

Die Anzahl der Paare von Lückenzahlzwillingen v_r, v_r+2 und w_r, w_r+2, die Paare v_r, v_r+2 und w_r, w_r+2 als verschieden angesehen, wenn v_r von w_r verschieden ist, für die $v_r + w_r + 2$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $6t_r$ übereinstimmt, soll das Zwillingsgewicht r-ter Stufe der Zahlenklasse $2P_r x + 6t_r$ genannt und mit $g_r^{(2)}(6t_r)$ bezeichnet werden.

Zur Ermittelung der Gewichte $g_r^{(2)}(6t_r)$ gelangt man wieder durch den Schluß von r auf $r+1$. Es sei $6t_{r+1}$ eine durch 6 teilbare Zahl des Hauptbereichs $(r+1)$-ter Stufe, und $g_{r+1}^{(2)}(6t_{r+1})$ bedeute die Anzahl der zu Lückenzahlzwillingen gehörenden Wertepaare v_{r+1}, w_{r+1}, für die $v_{r+1} + w_{r+1} + 2$ bis auf ein Vielfaches von $2P_{r+1}$ mit $6t_{r+1}$ übereinstimmt. Man setze $6t_{r+1} = 2P_r \xi + 6t_r$, $v_{r+1} = 2P_r \eta + v_r$, $w_{r+1} = 2P_r \zeta + w_r$, wo $6t_r, v_r, w_r$ dem Hauptbereich r-ter Stufe angehören und die Zahlen ξ, η, ζ der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1} - 1$ zu entnehmen sind. Alsdann sind auch v_r, $v_r + 2$ und $w_r, w_r + 2$ Lückenzahlzwillinge, und die Summe $v_r + w_r + 2$ unterscheidet sich von $6t_r$ um ein Vielfaches von $2P_r$. Mithin gibt es $g_r^{(2)}(6t_r)$ Paare v_r, w_r, die man nehmen darf. Ferner muß $\eta + \zeta$ bis auf ein Vielfaches von p_{r+1} mit $\xi - \varepsilon$ übereinstimmen. Für η darf man die Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1} - 1$ setzen, ausgenommen die Zahlen η_0, für die $2P_r \eta_0 + v_r$ durch p_{r+1} teilbar wird, und die Zahlen η_0', η_1, η_1', für die dasselbe der Reihe nach für $2P_r \eta_0' + v_r + 2$, $2P_r(\xi - \varepsilon - \eta_1) + w_r$, $2P_r(\xi - \varepsilon - \eta_1') + w_r + 2$ eintritt. Man beachte, daß η_0 notwendig verschieden ist von η_0' und ebenso η_1 von η_1'. Für die weitere Untersuchung sind vier Fälle zu unterscheiden.

I. Es kann sich ereignen, daß $\eta_1' = \eta_0$ ist. Dann hat mit v_{r+1}, $w_{r+1}+2$ auch $6t_{r+1}$ den Primteiler p_{r+1}. Ist aber umgekehrt $6t_{r+1}$ durch p_{r+1} teilbar, so wird mit v_{r+1} auch $w_{r+1}+2$ durch p_{r+1} teilbar, folglich ist $\eta_1' = \eta_0$. Weiter erschließt man aus der Teilbarkeit von $6t_{r+1}$ durch p_{r+1}, daß mit $v_{r+1}+2$ auch w_{r+1} durch p_{r+1} teilbar ist, mithin zieht die Gleichung $\eta_1' = \eta_0$ die Gleichung $\eta_1 = \eta_0'$ nach sich. Wenn also für einen Wert ξ' von ξ die Zahl $6t_{r+1}$ durch p_{r+1} teilbar ist, so sind von den Wertepaaren η, ζ, deren Summe mit $\xi - \varepsilon$ bis auf ein Vielfaches von p_{r+1} übereinstimmt, nur zwei unzulässig, nämlich die Paare $\eta_0, \xi-\varepsilon-\eta_0$ und $\eta_0', \xi-\varepsilon-\eta_0'$, und es gilt, falls $6t_{r+1}$ durch p_{r+1} teilbar ist, die Formel:

$$(45) \qquad g_{r+1}^{(2)}(6t_{r+1}) = g_{r+1}^{(2)}(2P_r\xi' + 6t_r) = g_r^{(2)}(6t_r)\cdot(p_{r+1}-2)\,.$$

II. Ist $\eta_1 = \eta_0$, so wird $v_{r+1}+w_{r+1}$ durch p_{r+1} teilbar, mithin besitzt die Zahl $6t_{r+1}-2$ den Teiler p_{r+1}; $6t_{r+1}$ ist dann nicht durch p_{r+1} teilbar. Ist aber umgekehrt $6t_{r+1}-2$ durch p_{r+1} teilbar, so wird mit v_{r+1} auch w_{r+1} dadurch teilbar, und man hat $\eta_1 = \eta_0$. Wenn also für einen Wert ξ'' von ξ die Zahl $6t_{r+1}-2$ durch p_{r+1} teilbar ist, so sind von den Wertepaaren η, ζ, deren Summe mit $\xi-\varepsilon$ bis auf ein Vielfaches von p_{r+1} übereinstimmt, drei unzulässig, nämlich die Paare $\eta_0, \xi-\varepsilon-\eta_0$; $\eta_0', \xi-\varepsilon-\eta_0'$; $\eta_1', \xi-\varepsilon-\eta_1'$. Da diese Paare voneinander verschieden sind, so gilt, falls $6t_{r+1}-2$ durch p_{r+1} teilbar ist, die Formel:

$$(46) \qquad g_{r+1}^{(2)}(6t_{r+1}) = g_{r+1}^{(2)}(2P_r\xi'' + 6t_r) = g_r^{(2)}(6t_r)\cdot(p_{r+1}-3)\,.$$

III. Ist $\eta_1' = \eta_0'$, so erschließt man in ähnlicher Weise, daß $6t_{r+1}+2$ durch p_{r+1} teilbar ist, und es gilt, wenn der betreffende Wert von ξ mit ξ''' bezeichnet wird, die Formel:

$$(47) \qquad g_{r+1}^{(2)}(6t_{r+1}) = g_{r+1}^{(2)}(2P_r\xi''' + 6t_r) = g_r^{(2)}(6t_r)\cdot(p_{r+1}-3)\,.$$

Es möge noch hervorgehoben werden, daß die Fälle I, II, III einander ausschließen.

IV. Ist ξ von ξ', ξ'', ξ''' verschieden oder sind die drei Zahlen $6t_{r+1}-2$, $6t_{r+1}$, $6t_{r+1}+2$ nicht durch p_{r+1} teilbar, so gibt es vier unzulässige Wertepaare η, ζ, und es gilt die Formel:

$$(48) \qquad g_{r+1}^{(2)}(6t_{r+1}) = g_{r+1}^{(2)}(2P_r\xi + 6t_r) = g_r^{(2)}(6t_r)\cdot(p_{r+1}-4)\,.$$

Es bleibt übrig, die Zwillingsgewichte für eine niedere Stufe wirklich zu bestimmen. Wir nehmen $r=2$, sodaß $6t_2$ die Werte 6, 12, 18, 24, 30 haben kann. Die Lückenzahlzwillinge zweiter Stufe sind 11, 13; 17, 19; 29, 31. Eine einfache Rechnung erweist die Richtigkeit der folgenden Tafel.

TAFEL 4
Zwillingsgewichte der zweiten Stufe

$6t_2-2$	teilbar durch 5?	$6t_2$	teilbar durch 5?	$6t_2+2$	teilbar durch 5?	Zwillingsgewicht
4	nein	6	nein	8	nein	$1=5-4$
10	ja	12	nein	14	nein	$2=5-3$
16	nein	18	nein	20	ja	$2=5-3$
22	nein	24	nein	26	nein	$1=5-4$
28	nein	30	ja	32	nein	$3=5-2$

Mithin gilt von der zweiten Stufe ab die folgende

REGEL zur Bestimmung der Zwillingsgewichte[1]. Um das Zwillingsgewicht $g_r^{(2)}(6t_r)$ zu ermitteln, stelle man fest, durch welche Primzahlen der Reihe $5, 7, \ldots, p_r$ die drei Zahlen $6t_r-2$, $6t_r$, $6t_r+2$ teilbar sind. Es sei

$6t_r-2$ teilbar durch $a_1, b_1, \ldots, l_1$;
$6t_r$ teilbar durch $a, b, \ldots, l$;
$6t_r+2$ teilbar durch $a_2, b_2, \ldots, l_2$.

Es seien ferner $a', b', \ldots, l'$ die Primzahlen der Reihe $5, 7, \ldots, p_r$, die in keiner der drei Zahlen $6t_r-2$, $6t_r$, $6t_r+2$ als Teiler enthalten sind. Dann ist:

---

[1] Weinreich ist durch numerische Induktion zu derselben Regel und der Formel für die Gewichte gelangt, nachdem er auf meine Veranlassung für die Stufe 3 die 105 Zwillingsgewichte, für die Stufe 4 die 1155 Zwillingsgewichte durch Abzählung der Wertepaare v_r, w_r, die zu einer Klasse $2P_r x+6t_r$ gehören, ermittelt hatte.

$$(49) \qquad g_r^{(2)}(6t_r) = \begin{cases} (a-2)(b-2)\cdots(l-2)\cdot(a_1-3)(b_1-3)\cdots(l_1-3) \\ \times(a_2-3)(b_2-3)\cdots(l_2-3)\cdot(a'-4)(b'-4)\cdots(l'-4)\,. \end{cases}$$

Aus den in § 1 auseinandergesetzten Symmetrie-Eigenschaften der Reihe der Lückenzahlen folgt die nützliche Beziehung

$$(50) \qquad g_r^{(2)}(2P_r-6t_r) = g_r^{(2)}(6t_r)\;;$$

es genügt daher, die Zwillingsgewichte für die $\frac{1}{6}(P_r-3)$ Klassen $2P_r x+6t_r$ zu berechnen, bei denen $6t_r$ von 6 bis P_r-3 geht, und dazu das zu sich selbst symmetrische Gewicht $g_r^{(2)}(2P_r)$.

Das Zwillingsgewicht r-ter Stufe wird am kleinsten, wenn die drei Zahlen $6t_r-2, 6t_r, 6t_r+2$ gleichzeitig zu $5, 7, \dots, p_r$ teilerfremd sind. Das findet zum Beispiel statt, wenn $6t_r=6$ ist. Mittels des Schlusses von r auf $r+1$ zeigt man leicht, daß im ganzen zu

$$(51) \qquad P_r^{(3)} = (5-3)(7-3)\cdots(p_r-3)$$

Zahlen $6t_r$ des Hauptbereichs r-ter Stufe das kleinste Zwillingsgewicht gehört. Denn beim Übergang zur $(r+1)$-ten Stufe entspringen aus drei Zahlen $6t_r-2, 6t_r, 6t_r+2$, die auf der r-ten Stufe das kleinste Gewicht lieferten, zunächst p_{r+1} Zahlentripel $2P_r\xi+6t_r-2,\ 2P_r\xi+6t_r,\ 2P_r\xi+6t_r+2$, wo $\xi=0,1,2,\dots,p_{r+1}-1$ zu setzen ist, und alle diese Zahlen sind teilerfremd zu $5, 7, \dots, p_r$. Damit sie auch zu p_{r+1} teilerfremd sind und also auf der $(r+1)$-ten Stufe das kleinste Gewicht liefern, müssen diejenigen Werte von ξ ausgeschieden werden, für die eine der drei Zahlen des Tripels durch p_{r+1} teilbar wird, und weil die drei Ausnahmewerte von ξ voneinander verschieden sind, so erhält man auf der $(r+1)$-ten Stufe im ganzen $(p_{r+1}-3)$-mal soviel Zahlen $6t_{r+1}$, die das kleinste Gewicht $(r+1)$-ter Stufe ergeben, als es auf der r-ten Stufe Zahlen $6t_r$ mit dem kleinsten Gewicht r-ter Stufe gab. Weil nun auf der zweiten Stufe $2=5-3$ solcher Zahlen vorhanden sind, so ist $P_r^{(3)}$ die gesuchte Zahl. Das kleinste Gewicht selbst wird

$$(52) \qquad P_r^{(4)} = (5-4)(7-4)\cdots(p_r-4)\,.$$

Das größte Zwillingsgewicht r-ter Stufe ist

$$(53) \qquad g_r^{(2)}(2P_r) = (5-2)(7-2)\cdots(p_r-2) = P_r^{(2)}\;;$$

es wird nur für $6t_r=2P_r$ oder die Klasse $2P_r x$ erreicht.

Nach der Bestimmung der Zwillingsgewichte kehren wir zu der Aufgabe zurück, die Anzahl der Zwillingsdarstellungen r-ter Stufe einer gegebenen Zahl $6n_1=2P_r x+6t_r$ zu untersuchen. Nachdem man auf $g_r^{(2)}(6t_r)$ Arten bewirkt hat, daß v_r+w_r+2 sich von $6t_r$ nur um ein Vielfaches von $2P_r$ unterscheidet, hat man noch die Gleichung $y+z=x-\varepsilon$ zu erfüllen, und das geht auf $x+1-\varepsilon$ Arten. Hieraus erschließt man wie in § 3, daß für große Werte von x die gesuchte Anzahl $G_r^{(2)}(6n_1)$ der Zwillingsdarstellungen von $6n_1$ die folgende asymptotische Darstellung gilt:

$$G_r^{(2)}(6n_1) \sim \frac{6n_1}{2P_r}\cdot g_r^{(2)}(6t_r)\,. \tag{54}$$

Es ist zweckmäßig, den Ausdruck für $G_r^{(2)}(6n_1)$ in ähnlicher Weise umzugestalten, wie das in § 3 mit dem Ausdruck für $G_r(2n)$ geschehen ist, indem man nämlich den ersten Faktor mit dem Minimalgewicht $P_r^{(4)}$ multipliziert und den zweiten Faktor dadurch dividiert. Die rechte Seite erscheint dann als das Produkt der W a c h s t u m s f u n k t i o n

$$W_r^{(2)}(6n_1) = \frac{P_r^{(4)}}{2P_r}\cdot 6n_1 \tag{55}$$

und der S c h w a n k u n g s f u n k t i o n

$$S_r^{(2)}(6n_1) = \left|\begin{array}{l} M'(a_1)\cdot M'(b_1)\cdots M'(l_1) \\ \times M_1(a)\cdot M_1(b)\cdots M_1(l) \\ \times M'(a_2)\cdot M'(b_2)\cdots M'(l_2)\,, \end{array}\right. \tag{56}$$

und zwar haben die M u l t i p l i k a t o r e n, die den Primteilern $a, b, \ldots, l$ von $6n_1$ zugeordnet sind, die Form

$$M_1(p) = \frac{p-2}{p-4} = 1+\frac{2}{p-4}\,, \tag{57}$$

während den Primteilern $a_1, b_1, \ldots, l_1$ von $6n_1-2$ und $a_2, b_2, \ldots, l_2$ von $6n_1+2$ Multiplikatoren der Form

$$M'(p) = \frac{p-3}{p-4} = 1+\frac{1}{p-4} \tag{58}$$

zugeordnet sind; dabei sind nur die der Reihe $5, 7, \ldots, p_r$ angehörenden Primteiler zu berücksichtigen.

Auch bei den Zwillingsdarstellungen ist die Form der Multiplikatoren von der Stufenzahl r unabhängig. Wohl aber entscheidet die Stufenzahl, welche Multiplikatoren in die Schwankungsfunktion aufzunehmen sind. Bei genügend hoher Stufe werden schließlich sämtliche ungeraden Primteiler der Zahlen $6n_1-2$, $6n_1$, $6n_1+2$ von 5 ab wirksam, und es gehört zur Zahl $6n_1$ eine Schwankungsfunktion $S^{(2)}(6n_1)$, die für alle folgenden Stufen gültig bleibt. Man gelangt um so später zur Funktion $S^{(2)}(6n_1)$, je größer die Primteiler der Zahlen $6n_1-2$, $6n_1$, $6n_1+2$ sind, am spätesten also, wenn eine der Zahlen $3n_1-1$, $3n_1+1$ eine Primzahl ist.

Über die Größe der Multiplikatoren $M(p)$, $M_1(p)$, $M'(p)$ gibt die folgende Tafel Auskunft.

TAFEL 5

Die Multiplikatoren M, M_1, M' für die ersten 12 ungeraden Primzahlen

p	$M(p)$	$M_1(p)$	$M'(p)$
3	2,000 0	—	—
5	1,333 3	3,000 0	2,000 0
7	1,200 0	1,666 7	1,333 3
11	1,111 1	1,285 7	1,142 9
13	1,090 9	1,222 2	1,111 1
17	1,066 7	1,153 8	1,076 9
19	1,058 8	1,133 3	1,066 7
23	1,047 6	1,105 3	1,052 6
29	1,037 0	1,080 0	1,040 0
31	1,034 5	1,074 1	1,037 0
37	1,028 6	1,060 6	1,030 3
41	1,025 6	1,054 1	1,027 0

Die Tafel 5 läßt erkennen, daß die Schwankungsfunktion $S^{(2)}(6n_1)$ bei weitem unregelmäßiger verläuft als die Schwankungsfunktion $S(2n)$. Auch sind die Werte von $S^{(2)}(6n_1)$ durchschnittlich größer als die Werte von $S(2n)$. Genaueren Aufschluß hierüber gibt folgende Betrachtung.

Bei den gewöhnlichen Gewichten r-ter Stufe wurden die $P_r^{(1)}$ Lückenzahlen des Hauptabschnittes paarweise zu Summen vereinigt; die Anzahl der Summen, die bis auf Vielfache von $2P_r$ übereinstimmten, gab das Gewicht der betreffenden Klasse $2P_r x + 2u_r$. Mithin ist die Summe aller Gewichte $g_r(2u_r)$ gleich $(P_r^{(1)})^2$, und weil es P_r solcher Klassen gibt, ihr Durchschnitt der P_r-te Teil. Zu den Schwankungsfunktionen gelangte man, indem die Gewichte durch das Minimalgewicht $P_r^{(2)}$ dividiert wurden; mithin ist der durchschnittliche Wert der zu den P_r geraden Zahlen des Hauptbereichs gehörigen Schwankungsfunktionen $S_r(2u_r)$ gleich

$$\frac{(P_r^{(1)})^2}{P_r\, P_r^{(2)}} = \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{(p_\varrho-1)^2}{p_\varrho(p_\varrho-2)} .$$

In der Grenze für $r=\infty$ wird nach Gleichung (26) der Durchschnittswert von $S(2n)$

(59) $$\mathfrak{M}(S(2n)) = \frac{2}{\varkappa} = 1{,}515 .$$

Bei den Funktionen $S_r^{(2)}(6n_1)$ kann man in ähnlicher Weise vorgehen. Als Summe der Zwillingsgewichte r-ter Stufe $g_r^{(2)}(6t_r)$ ergibt sich das Quadrat der Anzahl der Zwillinge im Hauptbereich r-ter Stufe, also $(P_r^{(2)})^2$. Jetzt hat man nur $\frac{1}{3}P_r$ Klassen $2P_r x + 6t_r$. Ferner wird durch das Minimalgewicht $P_r^{(4)}$ dividiert, wenn man von den Zwillingsgewichten zu den Schwankungsfunktionen übergeht. Demnach ist der durchschnittliche Wert der zu den $\frac{1}{3}P_r$ durch 6 teilbaren Zahlen des Hauptbereichs gehörigen Schwankungsfunktionen $S_r^{(2)}(6t_r)$ gleich

$$\frac{3\,(P_r^{(2)})^2}{P_r\, P_r^{(4)}} = \prod_{\sigma=2}^{r} \frac{(p_\sigma-2)^2}{p_\sigma(p_\sigma-4)} .$$

In der Grenze für $r=\infty$ wird der Durchschnittswert von $S^{(2)}(6t_r)$:

(60) $$\mathfrak{M}(S^{(2)}(6t_r)) = \prod_{\sigma=2}^{\infty} \frac{(p_\sigma-2)^2}{p_\sigma(p_\sigma-4)} .$$

Man wird so auf das unendliche Produkt geführt

(61) $$\prod_{\sigma=2}^{\infty}\left(1-\left(\frac{2}{p_\sigma-2}\right)^2\right) = 0{,}397 .$$

WEINREICH hat die Berechnung des langsam konvergierenden Produktes bis zu $p_\varrho = 1499$ durchgeführt. Die Abschätzung der Genauigkeit läßt sich in ähnlicher Weise durchführen, wie es für $\varkappa$ geschehen ist (*Darstellung*, S. 18–20); man findet, daß die dritte Dezimalstelle gesichert ist. Schließlich kommt

$$\mathfrak{M}\left(S^{(2)}(6t_r)\right) = 2{,}519 \,, \tag{62}$$

sodaß der Mittelwert von $S^{(2)}(6t_r)$ ungefähr um eine Einheit größer ist als der Mittelwert von $S(2n)$.

§ 7

Die Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen im Gebiet der Primzahlen

Während im Gebiet der Lückenzahlen alle Zwillingspaare von der Form $6n-1, 6n+1$ sind, gibt es im Gebiet der Primzahlen noch die Nebenzwillinge $1,3$ und $3,5$. Dies hat zur Folge, daß die geraden Zahlen der Formen $6n+2$ und $6n+4$ (abgesehen von 2, 4 und 8) dann und nur dann eine (doppelt zählende) Zwillingsdarstellung gestatten, wenn zufällig $6n-1, 6n+1$ ein Primzahlzwilling ist (vgl. *Darstellung*, S. 30). Die Zahl 2 gestattet keine solche Darstellung, die Zahl 4 nur die einfach zählende $4 = 1+3 = 3+1$; für die Zahl 8 die einfach zählende $8 = 3+5 = 5+3$. Die geraden Zahlen der Formen $6n+2$ und $6n+4$ sind damit erledigt, und im folgenden brauchen nur die durch 6 teilbaren Zahlen betrachtet zu werden. Bei ihnen besitzt nur die Zahl 6 eine Nebendarstellung, nämlich die doppelt zählende $6 = 1+5 = 3+3$.

Das in § 3 dargelegte Übertragungsprinzip führt zu einem Näherungsausdruck für die Anzahl $G^{(2)}(6n_1)$ der Arten, auf die sich die Zahl $6n_1$ mittels zweier Primzahlzwillinge als Summe darstellen läßt, sodaß also

$$6n_1 = (6\nu_1 - 1) + (6\nu_2 + 1) = (6\nu_1 + 1) + (6\nu_2 - 1)$$

wird, unter $6\nu_1 - 1, 6\nu_1 + 1$ und $6\nu_2 - 1, 6\nu_2 + 1$ Primzahlzwillinge verstanden. Man erhält, wie ich bereits 1916 angegeben hatte

(*Darstellung*, S. 31), das Produkt einer Wachstums- und einer Schwankungsfunktion:

$$G^{(2)}(6n_1) \sim W^{(2)}(6n_1) \cdot S^{(2)}(6n_1)\,. \tag{63}$$

Die Wachstumsfunktion $W^{(2)}(6n_1)$ ergibt sich aus der Funktion $W_r^{(2)}(6n_1)$, wenn man r wachsen läßt und gleichzeitig die Dichtigkeit der Primzahlen unter den Lückenzahlen berücksichtigt. Da jetzt die vier Primzahlen der beiden darstellenden Paare in Betracht kommen, hat man mit D_r^4 zu multiplizieren und erhält auf Grund der Gleichung (55) den Ansatz

$$W^{(2)}(6n_1) = \lim_{r=\infty} \frac{P_r^{(4)} \cdot D_r^4}{2P_r} \cdot 6n_1\,. \tag{64}$$

Unter Benutzung der Gleichung (16) läßt sich das Produkt auf der rechten Seite auf die Form bringen

$$\frac{(2P_r)^3\, P_r^{(4)}}{(P_r^{(1)})^4} \cdot \left(\frac{\pi(2P_r)}{2P_r}\right)^4 \cdot 6n_1\,.$$

Der erste Faktor nähert sich mit wachsenden Werten von r einem bestimmten endlichen Grenzwert, der mit $\varkappa^{(2)}$ bezeichnet werden soll; denn es ist

$$\lim_{r=\infty} \frac{(2P_r)^3\, P_r^{(4)}}{(P_r^{(1)})^4} = 6 \prod_{\sigma=2}^{\infty} \frac{p_\sigma(p_\sigma-4)}{(p_\sigma-2)^2} \cdot \left[2 \prod_{\varrho=1}^{\infty} \frac{p_\varrho(p_\varrho-2)}{(p_\varrho-1)^2}\right]^2.$$

Nach Gleichung (61) ist aber

$$\prod_{\sigma=2}^{\infty} \frac{p_\sigma(p_\sigma-4)}{(p_\sigma-2)^2} = 0{,}397\,,$$

während nach Gleichung (26)

$$2 \prod_{\varrho=1}^{\infty} \frac{p_\varrho(p_\varrho-2)}{(p_\varrho-1)^2} = \varkappa = 1{,}320$$

ist. Demnach wird der Grenzwert

$$\varkappa^{(2)} = 6 \cdot 0{,}397 \cdot (1{,}320)^2 = 4{,}150\,. \tag{65}$$

Für den zweiten Faktor gelten dieselben Überlegungen, wie sie in § 3 angestellt wurden, und es wird daher die Wachstumsfunktion

$$W^{(2)}(6n_1) = \varkappa^{(2)} \cdot \frac{\pi^4(6n_1)}{(6n_1)^3} \tag{66}$$

ganz entsprechend der Gleichung (28). Wenn die dort auftretende Wachstumsfunktion

$$W(2n) = \varkappa \cdot \frac{\pi^2(2n)}{2n}$$

als die Anzahl der Primzahlzwillinge $p, p+2$ des Bereiches von 1 bis $2n$ gedeutet werden konnte, so läßt sich die Wachstumsfunktion $W^{(2)}(6n_1)$ mit den Folgen der vier Primzahlen in Verbindung bringen, bei denen zwei Zwillinge in möglichst kurzem Abstand aufeinanderfolgen, nämlich im Abstand 4, sodaß also die vier Zahlen $p, p+2, p+6, p+8$ Primzahlen sind; dies gilt zum Beispiel für die Folge $11, 13, 17, 19$. Der Beweis wird im zweiten Teil dieser Abhandlung erbracht werden.

Als Schwankungsfunktion findet man sofort den Grenzwert der durch die Gleichung (56) erklärten Funktion $S_r^{(2)}(6n_1)$, der mit $S^{(2)}(6n_1)$ bezeichnet wurde; er entsteht, indem sämtliche Primteiler $5, 7, 11, \ldots$ der drei Zahlen $6n_1-2$, $6n_1$, $6n_1+2$ als wirksam angesehen werden, und ist das Produkt der Multiplikatoren M_1, die zu den Primteilern größer oder gleich 5 von $6n_1$ gehören, und der Multiplikatoren M', die zu den ungeraden Primteilern von $6n_1-2$ und $6n_1+2$ gehören.

Die Übertragung der Schwankungsfunktion $S^{(2)}(6n_1)$ von dem Gebiet der Lückenzahlen auf das Gebiet der Primzahlen setzt voraus, daß die Primzahlzwillinge unter den Lückenzahlzwillingen gleichmäßig verteilt sind, das heißt, daß die Anzahlen der Primzahlzwillinge in den $P_r^{(2)}$ Paaren arithmetischer Reihen $2P_r y + v_r$, $2P_r y + v_r + 2$, die überhaupt Primzahlzwillinge aufweisen können, asymptotisch gleich sind. Die numerische Prüfung, die WEINREICH für die Reihen $210y+v_3$ angestellt hat, ergab eine leidliche Übereinstimmung (siehe Tafel 6).

Das Endergebnis der vorhergehenden Überlegungen ist die Formel

$$G^{(2)}(6n_1) \sim 4{,}150 \cdot \frac{\pi^4(6n_1)}{(6n_1)^3} \cdot S^{(2)}(6n_1)\,. \tag{$A^{(2)}$}$$

TAFEL 6

Die Primzahlzwillinge $210y+v_3$, $210y+v_3+2$

v_3	11–2100	2100–4200	4200–6300	6300–8400	8400–10500	Summe
11	5	4	1	0	4	14
17	6	1	3	1	3	14
29	4	6	3	4	1	18
41	7	2	3	3	3	18
59	4	3	3	3	3	16
71	2	4	3	2	0	11
101	4	4	2	1	1	12
107	3	2	2	4	1	12
137	4	4	3	1	3	15
149	3	2	0	3	1	9
167	1	4	2	1	2	10
179	5	3	5	2	3	18
191	6	1	4	2	3	16
197	6	2	2	4	4	18
209	2	3	3	2	3	13
Summe	62	45	39	33	35	214

Der numerische Wert der Konstanten $\varkappa^{(2)}$ läßt sich auch auf einem Wege ermitteln, den ich im Jahre 1916 angegeben hatte. Das soll jetzt durchgeführt werden. Es wird sich herausstellen, daß man genau zu der Zahl 4,150 kommt, die mittels des Überganges von den Lückenzahlen zu den Primzahlen erhalten wurde.

Landau hatte beweisen können, daß für die Funktion $G(2n)$ die asymptotische Formel besteht

$$(67) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} G(2\nu) \sim \tfrac{1}{2}\pi^2(2n)\,.$$

Weil die Verhältnisse bei den Primzahlzwillingen ganz ähnlich liegen, hatte ich vermutet, daß die entsprechende Formel statthabe:

$$(68) \qquad \sum_{\nu_1=1}^{n_1} G^{(2)}(6\nu_1) \sim \tfrac{1}{2}H^{(2)}(6n_1)\,.$$

Dann ist nach Gleichung (40):

$$(69) \qquad \sum_{\nu_1=1}^{n_1} G^{(2)}(6\nu_1) \sim \tfrac{1}{2}\varkappa^2\cdot\frac{\pi^4(6n_1)}{(6n_1)^2}\,,$$

und wenn m_1 eine ganze Zahl der Ordnung $\sqrt{n_1}$ ist, so wird der mittlere Wert von $G^{(2)}(6r_1)$ für den Bereich $r_1 = n_1 - m_1 + 1$ bis $r_1 = n_1$ gleich

$$6\varkappa^2 \cdot \frac{\pi^4(6n_1)}{(6n_1)^3}.$$

Der mittlere Wert des Näherungsausdruckes $(A^{(2)})$ für $G^{(2)}(6n_1)$, gebildet für denselben Bereich, wird, unter a eine noch zu bestimmende numerische Konstante verstanden:

$$a \cdot \frac{\pi^4(6n_1)}{(6n_1)^3} \cdot \mathfrak{M}\left(S^{(2)}(6r_1)\right),$$

und es ist nach Gleichung (60):

$$\mathfrak{M}\left(S^{(2)}(6r_1)\right) = \prod_{\sigma=2}^{\infty} \frac{(p_\sigma - 2)^2}{p_\sigma(p_\sigma - 4)}.$$

Damit Fehlerausgleich erreicht wird, müssen die beiden mittleren Werte zusammenfallen; mithin hat man

$$a = 6 \prod_{\sigma=2}^{\infty} \frac{p_\sigma(p_\sigma - 4)}{(p_\sigma - 2)^2} \cdot \varkappa^2 \tag{70}$$

zu setzen, das heißt, es ist $a = \varkappa^{(2)} = 4{,}150$.

Um zu prüfen, welche Annäherung an die wahren Werte die Formel $(A^{(2)})$ gewährt, sind diejenigen Zahlen $6n_1$ sehr geeignet, für die $G^{(2)}(6n_1)$ ungerade Werte hat. Dies tritt nur ein, wenn es ein Zwillingspaar $p, p+2$ gibt, sodaß $6n_1 = 2p+2$ ist, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn $6n_1 = 12s$ ist und $6s-1$, $6s+1$ ein Zwillingspaar bilden. Bei großen Werten von s werden die zu den Primzahlen $6s-1$, $6s+1$ gehörenden Multiplikatoren so nahe an Eins liegen, daß sie den Näherungsausdruck nicht beeinflussen; man braucht daher nur die Primteiler von s zu berücksichtigen. Dividiert man die wahren Werte $G^{(2)}(12s)$ durch die zu den Primteilern von s gehörenden Multiplikatoren M_1, so muß, wenn die Formel $(A^{(2)})$ zu Recht besteht, der Quotient $\Omega^{(2)}(12s)$ der Wachstumsfunktion $W^{(2)}(12s)$ nahe kommen. Bei der folgenden Tafel 7 sind die neun ungeraden Werte von $G^{(2)}(12s)$ benutzt worden, die in dem Bereich $12s = 15000$ bis

16500 vorkommen. Der mittlere Wert der Quotienten $\Omega^{(2)}(12s)$ ist 12, und das ist auch genau der Wert der Wachstumsfunktion $W^{(2)}(12s)$. Im einzelnen finden allerdings erhebliche Abweichungen statt; das kann jedoch nicht überraschen, wenn man bedenkt, wie unregelmäßig die Primzahlzwillinge unter den ganzen Zahlen verteilt sind.

TAFEL 7

Ungerade Werte von $G^{(2)}(6n_1)$ im Bereich von 15000 bis 16500

s	$12s$	Primteiler	$G^{(2)}(12s)$	$\Omega^{(2)}(12s)$	$W^{(2)}(12s)$
1 258	15 096	17, 37	17	16	12
1 260	15 120	5, 7	35	7	—
1 265	15 180	5, 11, 23	41	10	—
1 293	15 516	431	9	9	—
1 313	15 756	13, 101	15	12	—
1 325	15 900	5, 53	29	9	—
1 335	16 020	5, 89	41	14	—
1 348	16 176	337	11	11	—
1 370	16 440	5, 137	23	8	—
1 372	16 464	7	23	14	—

Wie am Schluß des § 3 erwähnt wurde, habe ich bei der Näherungsformel (A) für die Funktion $G(2n)$ im Bereich von 4000 bis 4998 die 500 Näherungswerte berechnet und mit den wahren Werten verglichen. Bei der Funktion $G^{(2)}(6n_1)$, die langsamer wächst und stärker schwankt als $G(2n)$, hat eine solche Vergleichung nur dann einen Sinn, wenn man erheblich größere Werte von $6n_1$ heranzieht. Weinreich, dem die folgende Tafel 8 zu verdanken ist, hat daher die 50 Werte des Bereiches von 15606 bis 15900 gewählt. Gerade dieser Bereich wurde herausgenommen, weil in ihm die Funktion $G^{(2)}(6n_1)$ auffallend starke Schwankungen zeigte. Trotzdem kommen im allgemeinen die Näherungswerte den wahren Werten so nahe, daß man von einer befriedigenden Übereinstimmung reden darf. Für eine Reihe von Zahlen $6n_1$ sind freilich die relativen Fehler recht beträchtlich. Bei den kleinen Werten von $G^{(2)}(6n_1)$ wird man die großen Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Primzahlzwillinge unter den ganzen Zahlen für die Abweichungen verantwortlich machen dürfen. Es wäre erwünscht, wenn jemand die große Mühe auf sich

TAFEL 8

Vergleichung der Funktion $G^{(2)}$ mit dem Näherungsausdruck $A^{(2)}$ für den Bereich von 15606 bis 15900

$6n_1$	Wirksame Primteiler von $6n_1-2$	$6n_1$	$6n_1+2$	$G^{(2)}$	$S^{(2)}$	$\Omega^{(2)}$	$W^{(2)}$	$A^{(2)}$	Fehler
15 606	47, 83	17	1951	8	1,20	7	12	14	− 6
12	5, 7, 223	1301	37, 211	40	2,78	14	—	33	+ 7
18	61	19, 137	5, 11, 71	24	2,72	9	—	32	− 8
24	73, 107	7, 31	13, 601	26	2,04	13	—	24	+ 2
30	3907	5, 521	977	32	3,02	11	—	36	− 4
15 636	7817	1303	7, 1117	22	1,34	16	—	16	+ 6
42	5, 17, 23	11, 79	3911	38	2,99	13	—	36	+ 2
48	7823	163	5, 313	24	2,03	12	—	24	+ 0
54	7, 13, 43	2609	19, 103	22	1,64	13	—	20	+ 2
60	7829	5, 29	41, 191	30	3,35	9	—	40	−10
15 666	11, 89	7, 373	3917	22	1,94	11	—	23	− 1
72	5, 1567	653	17, 461	12	2,17	6	—	26	−14
78	3919	13, 67	5, 7	36	3,36	11	—	41	− 5
84	7841	1307	11, 23, 31	8	1,25	6	—	15	− 7
90	37, 53	5, 523	3923	50	3.17	16	—	38	+12
15 696	7, 19, 59	109	47, 167	14	1,52	9	—	18	− 4
702	5, 157	2617	13, 151	28	2,25	12	—	27	+ 1
08	7853	7, 11, 17	5, 1571	58	4,95	12	—	60	− 2
14	491	97	3929	14	1,02	14	—	12	+ 2
20	29, 271	5, 131	7, 1123	50	4,25	12	—	51	− 1
15 726	3931	2621	983	12	1,00	12	—	12	+ 0
32	5, 11, 13	19, 23	7867	32	3,18	10	—	38	− 6
38	7, 281	43, 61	5, 787	32	2,92	11	—	35	− 3
44	17, 463	41	7873	18	1,14	16	—	14	+ 4
50	31, 127	5, 7	11, 179	46	6,01	8	—	73	−27
15 756	7877	13, 101	7879	15	1,24	12	—	15	+ 0
62	5, 197	37, 71	7, 563	28	2,93	10	—	35	− 7
68	7883	73	5, 19, 83	26	2,22	12	—	27	− 1
74	3943	11, 239	17, 29	18	1,45	12	—	18	+ 0
80	7, 23	5, 263	13, 607	62	4,72	13	—	57	+ 5
15 786	1973	877	3947	8	1,00	8	—	12	− 4
92	5, 1579	7, 47	53, 149	52	3,59	14	—	43	+ 9
98	11, 359	2633	5, 79	30	2,32	13	—	28	+ 2
804	7901	439	7, 1129	20	1,34	15	—	16	+ 4
810	13, 19	5, 17, 31	59, 67	54	4,56	12	—	55	− 1
15 816	7907	659	11, 719	2	1,15	2	—	14	−12
22	5, 7, 113	293	23, 43	36	2,93	12	—	36	+ 0
28	41, 193	1319	5, 1583	22	2,07	11	—	25	− 3
34	1979	7, 13, 29	37, 107	26	2,29	11	—	28	− 2
40	7919	5, 11	89	36	3,90	9	—	47	−11
15 846	17, 233	19, 139	7, 283	20	1,66	12	—	20	+ 0
52	5, 317	1321	7927	24	2,01	12	—	24	+ 0
58	991	881	5, 13, 61	22	2,27	10	—	27	− 5
64	7, 11, 103	661	7933	12	1,54	8	—	19	− 7
70	3967	5, 23	31	46	3,44	13	—	42	+ 4
15 876	7937	7	17, 467	26	1,80	14	—	22	+ 4
82	5, 397	2647	11, 19	28	2,45	11	—	30	− 2
88	13, 47	331	5, 7, 227	34	3,06	11	—	37	− 3
94	29, 137	883	1987	14	1,05	13	—	13	+ 1
900	7949	5, 53	7951	29	3,12	9	—	38	− 9

nehmen wollte, für einen Bereich jenseits von 100000 eine ähnliche Prüfung durchzuführen.

Zur Tafel 8 möge noch eine Bemerkung allgemeinerer Art gemacht werden. Wenn man die Werte der Funktion $W^{(2)}(6n_1)$ berechnet, so zeigt sich eine Erscheinung, die folgendes Beispiel verdeutlicht:

$6n_1$	15 828	15 834	15 840	15 846	15 852	15 858	15 864
$W^{(2)}(6n_1)$	12,18	12,16	12,15	12,14	12,12	12,11	12,12

Warum die Wachstumsfunktion in einzelnen Bereichen kleine Abnahmen aufweist, liegt auf der Hand: der Nenner, $(6n_1)^3$, ist eine beständig zunehmende Funktion; der Zähler, $\varkappa^{(2)} \cdot \pi^4(6n_1)$, aber bleibt konstant, solange man keine neue Primzahl erreicht hat. In der Tat ist 15823 eine Primzahl, auf die als nächste erst 15859 folgt. Man erkennt gleichzeitig, daß die Abnahmen verhältnismäßig klein bleiben, weil längere Lücken in der Reihe der Primzahlen erst bei großen Werten von $6n_1$ auftreten. Ähnlich verhält es sich mit allen Wachstumsfunktionen von der Form

$$a\left(\frac{\pi(n)}{n}\right)^{\lambda} \cdot n \;;$$

a soll eine Konstante, λ eine positive ganze Zahl sein. Ich war schon bei der Berechnung von $W(2n)$ für den Bereich 4000 bis 4998 auf den angeführten Umstand aufmerksam geworden. In der Tafel, *Darstellung* S. 33–47, sind daher in der Spalte für $W(2n)$ nur ganzzahlige Werte (von 100 bis 118) angegeben worden. Es wird sich empfehlen, allgemein festzusetzen, daß die Werte von Wachstumsfunktionen auf ganze Zahlen abgekürzt und die einmal erreichten ganzzahligen Werte beibehalten werden sollen, bis durch das Abkürzen eine größere ganze Zahl erreicht wird.

§ 8
Der Verlauf der Funktion $G^{(2)}(6n_1)$

Die am Schluß dieses Paragraphen befindliche, von 6 bis 16800 reichende Tafel 9 der Funktion $G^{(2)}(6n_1)$ ist von Weinreich berechnet worden, und zwar im Zusammenhang mit der Aufstellung einer neuen Tafel der Funktion $G(2n)$, von der schon das Stück bis $2n = 3000$ fertig vorliegt. Da sich herausstellte, daß die vorhandenen, bis 5000 reichenden Tafeln nicht ganz fehlerfrei sind, entschied sich Weinreich dafür, nicht den schnellsten, sondern den sichersten Weg zu wählen, nämlich ein Verfahren, das schon Haussner vorgeschlagen, aber wegen der praktischen Schwierigkeiten nicht durchgeführt hatte[1]. Haussner sagt: «Ein noch einfacherer Weg zur Herstellung der Tabelle [für die Goldbachschen Zahlen des Bereiches von 2 bis 5000] wäre allerdings der folgende gewesen. Auf einen Papierstreifen werden alle ungeraden Zahlen von 1 bis 2499 in genau gleichen Abständen geschrieben und auf einen zweiten in umgekehrter Reihenfolge die ungeraden Zahlen von 4999 bis 1 in denselben Abständen voneinander. Die Primzahlen werden auf irgend eine Weise auf beiden Streifen hervorgehoben (durch größere Ziffern oder andere Farbe). Um nun die Zahl 5000 zu zerlegen, legt man die beiden Streifen so neben einander, daß sich die Zahl 1 des ersten Streifens und die Zahl 4999 des zweiten gegenüberstehen. Dann sind alle Primzahlen des ersten Streifens, welche Primzahlen des zweiten gegenüberstehen, die sämtlichen Zahlen x, welche zu 5000 gehören [nämlich die Primzahlen der Zerlegungen $x + y = 5000$, die kleiner als 2499 sind]. Will man irgend eine andere Zahl $2n = 5000 - 2\tau$, $\tau = 1, 2, \ldots, 2499$, zerlegen, so sind die Streifen so neben einander zu legen, daß der Zahl 1 des ersten Streifens die Zahl $4999 - 2\tau$ des zweiten gegenübersteht. Alle Primzahlen $< 2500 - \tau$ des ersten Streifens, welche Primzahlen des zweiten gegenüberstehen, sind wieder die sämtlichen Zahlen x, welche zu der Zahl $5000 - 2\tau$ gehören. Mit Hilfe der beiden Streifen lassen sich also alle geraden Zahlen bis 5000 leicht zerlegen.... Dem Verfahren stellen sich aber praktische Schwierigkeiten entgegen, sobald die Streifen einigermaßen lang sein müssen.»

Wie Weinreich zum Ziel gelangt ist, möge er selbst schildern. Zuvor sei nur noch bemerkt, daß das Verfahren ohne weiteres auf die Ermittelung der Zwillingsdarstellungen ausgedehnt werden kann.

«Zur Ersparung an Arbeit beim Auftragen aller ungeraden Zahlen und um die Streifen kürzer zu machen, schrieb ich nur

---

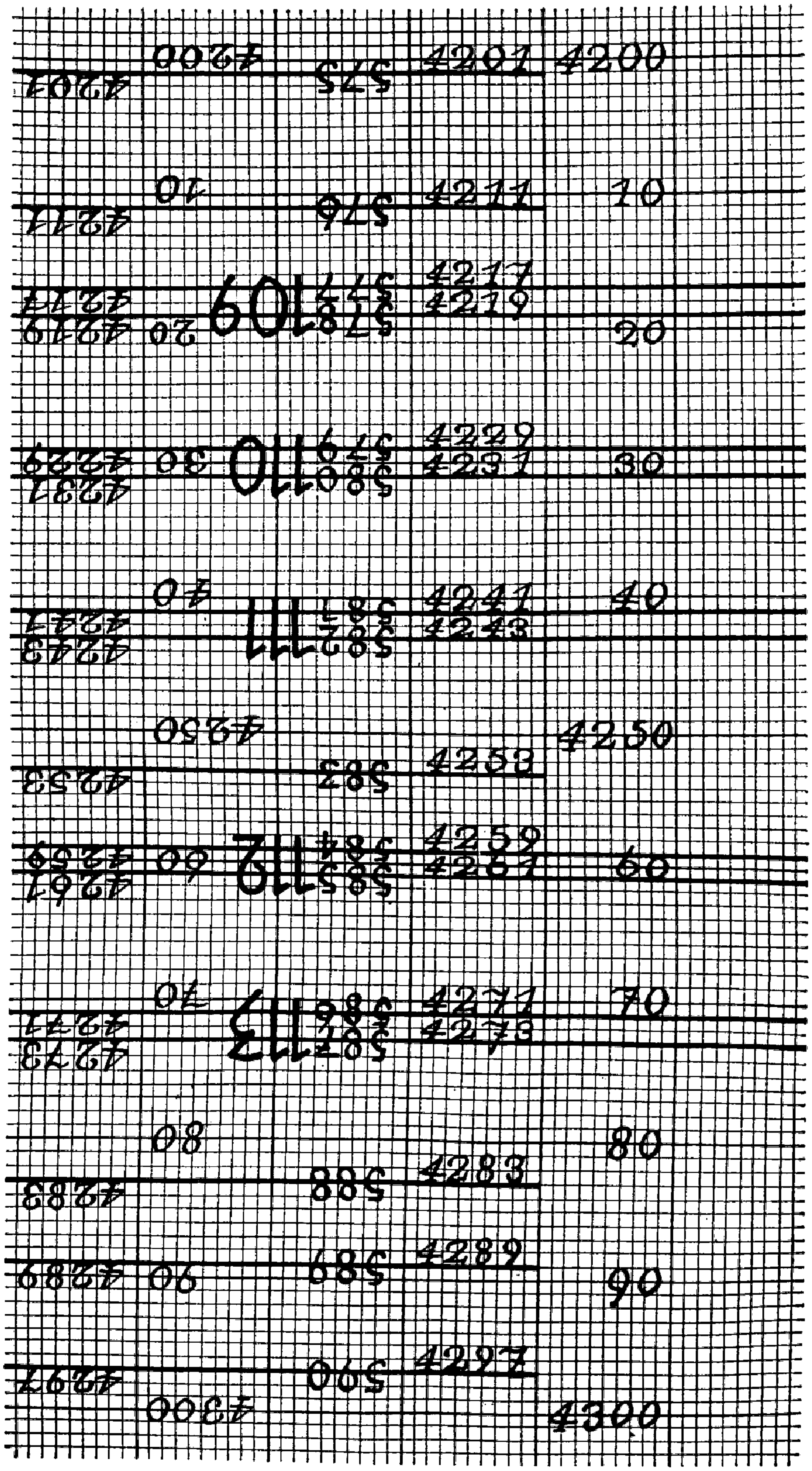
[1] R. Haussner, Tafeln für das Goldbachsche Gesetz, Nova Acta, Abhandlungen der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 72, Nr. 1, Halle 1897, S. 9.

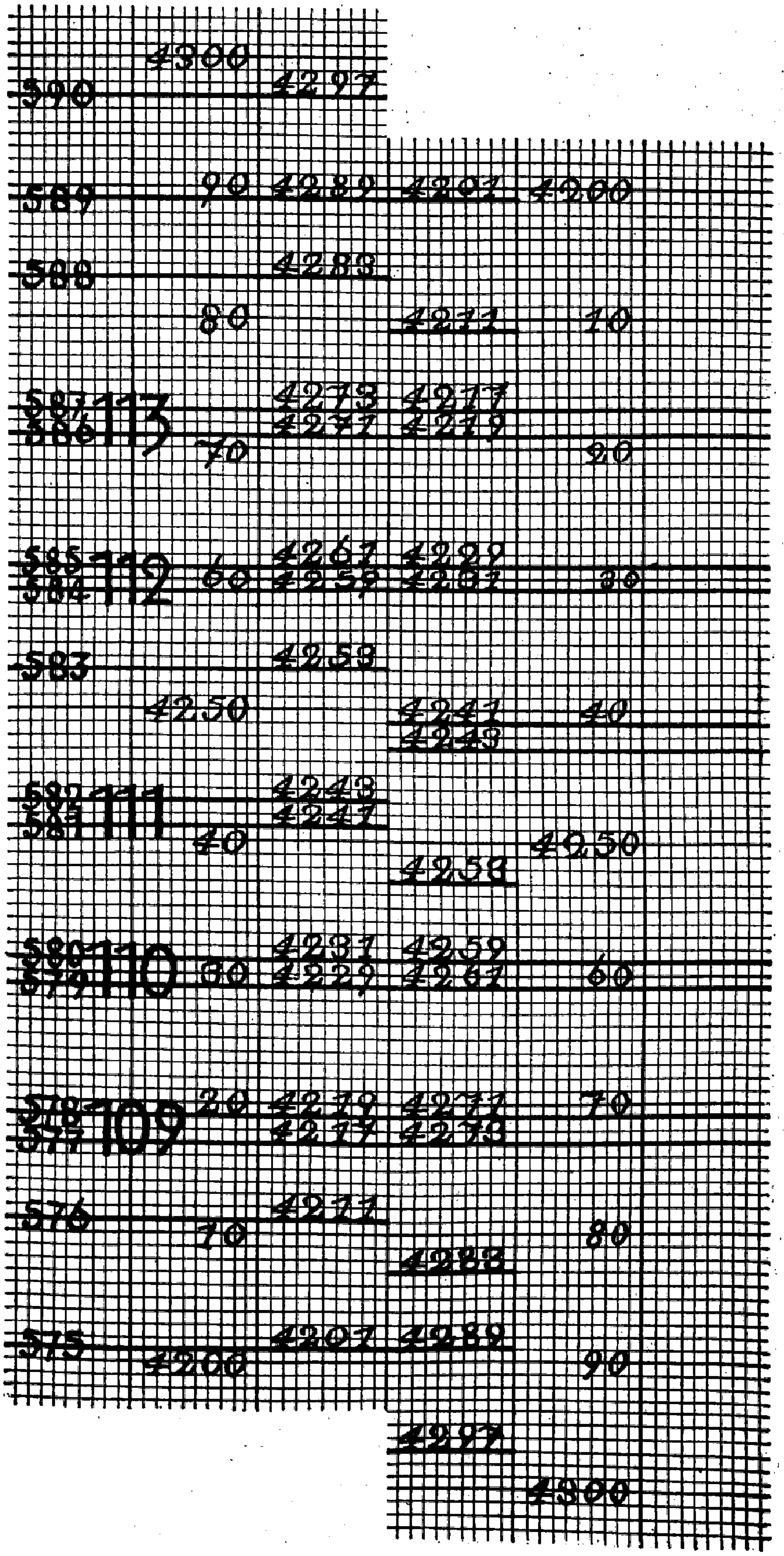
die Primzahlen auf die Linien von Millimeterpapier und schnitt die Streifen in Stücke von 30 cm Länge bei 3 cm Breite. Die Streifen wurden paarweise und der Kontrolle wegen auf folgende Weise hergestellt. Die Primzahlen, die ich VEGAS Logarithmentafel[1] entnahm, wurden auf der einen Seite eines Doppelstreifens von oben nach unten eingetragen und dann die zugehörigen Linien mit Tusche über 4 cm Breite ausgezogen; bei den Zwillingen wurden, um sie besonders hervorzuheben, die Striche über die ganze Breite von 6 cm ausgezogen[2]. Nach diesen Linien wurden auf dem andern Streifen, von oben nach unten, die zugehörigen Zahlen eingetragen und diese Zahlen mit der Primzahltafel verglichen; so waren Linien und Zahlen kontrolliert. Es ergab sich auf diese Art umstehendes Bild (siehe S. 48), das jedoch wegen des stärkeren Hervortretens der Millimeterlinien nicht so deutlich ist wie das Original.

Zur Herstellung der Tabelle wurden die Doppelstreifen auseinandergeschnitten und je zwei solcher Streifenstücke, rechts von Eins anfangend, entsprechend aneinander gelegt, sodaß die Summe der gegenüberliegenden Zahlen das gewünschte $6n_1$ ergab. Die bei einer Stellung zusammenfallenden Primzahlzwillinge wurden auf das für das betreffende $6n_1$ angelegte Blatt aufgeschrieben, und zwar alle vier beteiligten Zahlen. Dann wurde der eine Streifen um 6 mm verschoben, die neuen Koinzidenzen auf das nächste Blatt (für $6n_1+6$) aufgeschrieben, usw. Bei den höheren Werten von $6n_1$ ergab oft erst eine Verschiebung um zwei-, drei-, vier-, ... mal 6 mm eine neue Koinzidenz, die also auf das zweite, dritte, vierte, ... Blatt zu schreiben war, was sich hinreichend sicher und rasch ermöglichen ließ. Zur Kontrolle wurden die letzten oder die beiden letzten Ziffern der Zahlenpaare addiert; dies erfolgte gleichzeitig mit dem Aufschreiben ohne Mühe oder Zeitverlust und ohne Rechenfehler. Ein Eintragen auf ein falsches Blatt war, wie die Erfahrung gelehrt hat, sehr selten, weil die Streifen je drei Hunderte umfassen und infolgedessen jeweils ein Bereich von 50 aufeinander folgenden Zahlen $6n_1$ bearbeitet wurde,

[1] G. v. VEGA, Sammlung mathematischer Tafeln, herausgegeben von J. A. HÜLSSE, Leipzig 1840.

[2] Alle Primzahlen wurden eingetragen, weil die Streifen gleichzeitig zur Herstellung einer Tafel der GOLDBACHschen Funktion $G(2n)$ dienen sollten. Wenn man die Zwillingsdarstellungen ermitteln will, ist es nur nötig, die Zwillinge $6n-1$, $6n+1$ einzutragen; noch besser wäre es, die betreffenden Zahlen $6n$ hervorzuheben, ja man könnte schließlich nur die Werte n nehmen und hätte dann den Vorteil, mit einer geringeren Anzahl von Streifen auszukommen.


4201
4200
4211
10
4217
4219
20
4229
4231
30
4241
40
4243
4250
4253
4259
4261
60
4271
70
4273
80
4283
4289
90
4297
4300


4300
590
4297
589
90
4289
4201
4200
588
4283
80
4211
10
587
586
113
4273
4271
4217
4219
70
20
585
584
112
60
4261
4259
4229
4231
30
583
4253
4250
4241
4243
40
582
581
111
4243
4241
40
4250
4253
580
579
110
50
4231
4229
4259
4261
60
578
577
109
20
4219
4217
4271
4273
70
576
4211
10
80
4283
575
4200
4201
4289
90
4297
4300

innerhalb dessen die beiden letzten Ziffern nie gleich sein können. Auch ein Verwechseln eines Streifens mit einem andern war kaum zu befürchten, weil immer der zuletzt verschobene Streifen zu ersetzen war. Am wahrscheinlichsten war das Übersehen einer Koinzidenz, da die Primzahlen, die nicht Zwillingen angehören, etwas störend wirkten. Immerhin ist das Bild, das sich auch an einer gedrängten Stelle ergibt, noch ohne Mühe zu erkennen (siehe S. 49).

Zur Kontrolle wurde das Verschieben der Streifen aneinander nicht nur so lange fortgesetzt, bis der erste Zwilling größer wurde als der zweite, sondern bis ans Ende, sodaß sich die Paare wiederholten. Im ersten Teil, bis 10000, wurden alle Ergebnisse aufgeschrieben und mit denen vom Anfang verglichen; im zweiten Teil wurden die bereits aufgeschriebenen Paare beim Wiederauftreten nur durch Anhaken kenntlich gemacht.

Die Primzahlzwillinge haben auf den beiden Streifen eine verschiedene Stellung, weil die Zahlen, die auf dem rechten Streifen unten stehen, auf dem linken Streifen oben stehen, und es war daher eine ziemliche Sicherheit gegen das Übersehen eines Zwillingspaares gewährleistet; auch konnten etwa verschriebene Ziffern verbessert werden.

Die angegebenen Kontrollen hätten allein schon hingereicht, um die Anzahl der Koinzidenzen mit Sicherheit zu erhalten; trotzdem wurde eine weitere Kontrolle vorgenommen, die darauf beruht, daß man die summatorische Funktion

$$\sum_{\nu_1=1}^{n_1} G^{(2)}(6\nu_1)$$

auf zwei verschiedene Arten bilden kann. Erstens erhält man sie unmittelbar durch Addition der Funktionen $G^{(2)}(6)$ bis $G^{(2)}(6n_1)$. Zweitens ist sie auch gleich der Anzahl aller Zwillingspaare $p, p+2$ und $q, q+2$, für die $p+q+2 \leq 6n_1$ ist, und diese ergibt sich, wenn man die Ordnungszahlen aller Zwillinge $p, p+2$ addiert, bei denen p kleiner als $6n_1$ ist. Dabei sind die Nebenzwillinge 1, 3 und 3, 5 nicht mitzuzählen. Wenn man jedoch bei der Zahl 6 die doppelt zählende Nebendarstellungen $6=1+5=3+3$ zuläßt, wie es in der vorliegenden Tafel geschehen ist, so hat man, um die summatorische Funktion vollständig zu erhalten, zu der Summe der Ordnungszahlen noch zwei hinzuzuzählen.

Die Ordnungszahlen der Zwillinge (und wegen der entsprechenden Kontrolle der GOLDBACHschen Zahlen auch die der Primzahlen selber) sind auf den linken Streifen mit verschiedenfarbiger Tinte eingetragen. Die Summation wurde in Abständen von je 50 Werten $6n_1$ vorgenommen; sie erfolgte rasch und sicher mit Benützung einer Rechenmaschine. Man stellt die größte Ordnungszahl, die auf dem linken Streifen (etwa bei $q, q+2$) auftritt, in das Zählwerk ein und kurbelt sie so oft in das Resultatwerk, als auf der rechten Seite Zwillinge $p, p+2$ über dem Zwilling $q, q+2$ liegen oder mit ihm zusammenfallen. Die einen Beitrag liefernden Ordnungszahlen nehmen meistens um Eins oder wenige Einheiten ab, und das Einstellen kann daher nach dem Gefühl erfolgen, ohne daß man von dem Streifen aufschauen muß. Vor allem aber entfällt bei Benützung der Rechenmaschine das Aufschreiben der Ordnungszahlen, das bei großen Werten von $6n_1$ sehr viel Zeit erfordern würde.

Da das Aufschreiben von zwei koinzidierenden Zwillingen auf ein falsches Blatt wegen der doppelten Verschiebung der Streifen als ausgeschlossen gelten kann, so bietet dieses Verfahren der Kontrolle eine sichere Gewähr dafür, daß die Werte von $G^{(2)}(6n_1)$ richtig sind. Daß auch das Aufschreiben der Primzahlzwillinge sorgsam geschah, um Schreibfehler zu vermeiden, bedarf kaum der Erwähnung.»

Soweit der Bericht Weinreichs. Eine mit der Schreibmaschine hergestellte Abschrift der von ihm berechneten, den Bereich von 6 bis 16800 umfassenden Tafel der Zwillingsdarstellungen und der zugehörigen Anzahlen $G^{(2)}(6n_1)$ wird im Mathematischen Institut der Universität Heidelberg aufbewahrt und kann dort eingesehen werden.

Durch Weinreichs Tafel werden die Vermutungen, die ich 1916 über den Verlauf der Funktion $G^{(2)}(6n_1)$ ausgesprochen hatte, in vollem Umfang bestätigt. Wie ich angegeben hatte (*Darstellung*, S. 31), entziehen sich im ersten Tausend die Zahlen

$$96,\ 402,\ 516,\ 786,\ 906$$

einer Zwillingsdarstellung, und auch im fünften Tausend ist noch die Ausnahme

$$4206$$

vorhanden. Nach Weinreich verschwindet $G^{(2)}$ auch noch für die Zahlen

$$1116,\ 1146,\ 1266,\ 1356,\ 3246,$$

dagegen tritt von 4212 bis 16800 keine weitere Null auf. Man wird daher als gesichert ansehen dürfen, daß von einer gewissen Grenze ab jede durch 6 teilbare Zahl mindestens eine Zwillingsdarstellung zuläßt.

Der ungerade Wert 1 hat sich nur für die drei Zahlen 12, 396 und 696 ergeben. Mit dem Werte 2 verhält es sich recht eigenartig. Nachdem er bis 3846 im ganzen 56mal aufgetreten ist, kehrt er erst bei der um 6000 höheren Zahl 9846 zurück; er findet sich aber auch noch bei 12744, 15126 und 15816, obwohl die Wachstumsfunktion für die beiden letzten Zahlen schon 12 beträgt. Ob damit das Ende der Zahlen $6n_1$ erreicht ist, die nur zwei Zwillingsdarstellungen gestatten, muß dahingestellt bleiben. Der Wert 3 wird im Bereich von 6 bis 16800 im ganzen 18mal angenommen, zuletzt bei 7116, 7836 und 9276. Der Wert 4 wird im ganzen 98mal angenommen; die letzten Zahlen $6n_1$, die ihn liefern, sind 13614 und 15264.

Die Maxima und Minima, die man auf Grund der Schwankungsfunktion erwarten darf, sind deutlich ausgeprägt, wenn auch besonders die Maxima nicht selten zu klein ausfallen. Wenn man bedenkt, daß die Werte von $G^{(2)}(6n_1)$ im zweiten Zehntausend ungefähr in denselben Grenzen schwanken wie die Werte von $G(2n)$ im zweiten Tausend und hinzunimmt, daß die Primzahlzwillinge noch unregelmäßiger verteilt sind als die Primzahlen, wird man kaum mehr verlangen dürfen. Eine Ausdehnung der Tafeln über 16800 hinaus würde unter solchen Umständen nicht die Arbeit lohnen. Aussichtsreicher wäre es, für einen kleineren Bereich jenseits 100000 die Rechnung durchzuführen. Da es bis 100000 rund 10000 Primzahlen gibt (der genaue Wert ist 9592), so wird nach der Gleichung (66) die Wachstumsfunktion für 100000 rund 40, und da die Schwankungsfunktion im Mittel 2,5 ist, so wird man hier im Durchschnitt Werte von $G^{(2)}$ im Betrage von 70 erwarten dürfen.

TAFEL 9. Die Funktion $G^{(2)}$

Z. E.	H. 0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105
06	2	2	2	0	2	4	8	10	4	8	4	12	6	8	0	4	6	4	12	8	16	12	6	8	8	10	12	20	8	12	12	8	6	8	20	12
12	1	6	10	8	10	12	6	18	14	8	16	14	30	10	18	22	16	30	18	32	14	30	22	20	28	24	34	20	26	16	24	24	20	28	12	32
18	2	4	6	6	4	10	6	10	10	14	10	22	18	12	24	8	32	18	18	20	22	16	10	32	18	40	22	28	20	14	32	14	40	32	40	32
24	3	4	7	7	4	10	4	13	6	4	14	6	8	8	7	22	10	16	7	16	10	12	12	5	18	18	16	4	10	10	10	22	4	20	14	14
30	2	10	12	10	12	8	10	22	14	32	12	22	22	20	26	22	36	20	28	18	26	40	28	62	38	38	34	30	36	16	52	24	36	26	28	50
36	3	4	2	2	3	2	6	10	6	4	4	3	4	10	8	11	8	10	10	4	10	11	8	7	8	7	3	10	15	24	13	12	16	5	10	14
42	2	10	6	6	14	10	6	20	12	20	14	10	22	14	24	16	28	22	18	22	24	26	22	32	24	16	24	14	32	26	38	24	18	38	32	40
48	4	4	6	4	8	6	18	18	16	14	8	14	12	18	16	16	16	22	22	16	20	12	18	18	14	32	14	40	36	24	34	26	34	20	44	14
54	2	6	4	6	6	8	2	12	8	12	2	6	10	8	12	16	8	12	14	20	12	8	14	18	8	6	22	8	4	10	12	18	12	14	6	12
60	3	3	16	6	16	10	16	16	13	26	14	32	18	34	21	22	38	28	37	26	36	40	29	36	30	38	17	38	29	26	50	30	62	40	36	45
66	2	4	2	6	0	2	2	2	6	4	4	12	12	8	14	8	8	12	6	12	6	6	8	10	6	12	8	8	6	10	8	14	10	16	14	10
72	4	6	12	4	8	8	12	12	8	24	12	22	12	10	32	16	26	16	26	18	16	32	24	46	20	28	24	20	38	18	34	20	44	12	24	36
78	4	10	6	2	6	4	12	10	14	6	12	10	12	20	22	32	22	12	18	14	26	12	28	20	24	24	24	38	20	44	18	18	24	12	36	22
84	3	5	2	4	7	8	8	15	4	10	4	6	14	6	19	6	14	11	12	12	12	18	6	10	10	16	10	7	15	6	12	14	10	10	8	18
90	4	8	8	8	18	12	24	16	18	18	12	26	20	32	34	38	16	14	28	26	42	18	32	26	22	62	30	60	38	42	28	32	50	34	66	30
96	0	1	1	2	4	2	10	4	6	6	8	9	12	5	8	4	8	12	10	16	8	12	8	6	12	10	18	6	10	8	9	10	10	18	16	10
	1	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**	**22**	**25**	**28**	**31**	**34**	**37**	**40**	**43**	**46**	**49**	**52**	**55**	**58**	**61**	**64**	**67**	**70**	**73**	**76**	**79**	**82**	**85**	**88**	**91**	**94**	**97**	**100**	**103**	**106**
02	4	0	14	6	16	8	14	10	12	12	12	32	12	24	14	16	26	18	24	26	28	28	20	24	18	42	20	14	28	18	42	8	36	20	36	32
08	2	6	4	8	6	2	10	8	14	16	14	18	14	16	10	20	12	30	18	18	20	8	36	20	30	22	24	24	14	30	22	22	22	26	26	34
14	6	2	6	2	6	8	12	6	8	10	6	10	4	14	16	8	16	4	16	12	10	10	10	10	16	18	6	8	14	12	16	10	14	14	14	16
20	5	12	8	8	13	11	18	16	22	16	18	20	28	26	24	43	22	20	32	16	40	26	51	44	34	42	32	34	19	50	28	44	32	37	60	28
26	2	4	2	4	2	10	4	10	4	4	6	2	6	10	10	4	8	4	10	18	10	14	8	14	12	8	6	12	8	16	12	14	8	14	10	20
32	4	6	6	8	20	14	8	6	16	14	10	32	14	30	20	12	16	14	28	16	24	12	44	26	20	24	18	36	24	26	16	30	32	34	38	18
38	2	6	2	10	6	12	14	12	10	16	10	10	20	14	18	12	16	24	22	22	20	18	12	10	20	20	26	20	34	26	20	46	22	38	24	26
44	5	2	6	3	12	3	10	10	10	4	6	11	9	10	12	10	12	12	22	10	10	6	11	12	9	15	10	18	9	11	12	17	18	9	18	8
50	4	10	8	12	10	16	16	14	24	14	32	18	24	20	32	34	32	48	34	52	28	24	34	28	48	30	30	36	26	38	30	44	32	36	38	32
56	4	3	2	6	0	3	4	6	5	9	4	6	9	7	16	12	14	12	12	10	10	10	6	11	10	18	10	7	14	12	14	14	14	12	8	16
62	4	10	6	14	10	12	12	12	8	12	20	12	16	24	14	30	10	20	18	10	38	20	30	24	40	20	18	28	18	28	20	42	26	32	38	24
68	6	6	8	6	4	12	8	16	10	6	10	12	8	12	22	16	20	8	18	20	8	36	22	22	20	16	36	28	46	28	24	16	16	28	10	40
74	2	6	2	8	6	8	10	6	10	6	14	10	12	8	6	14	14	6	16	12	20	10	8	14	14	14	4	16	8	12	10	18	10	12	28	10
80	6	7	6	14	14	18	16	22	21	14	20	22	28	30	28	35	28	44	27	42	18	32	23	17	44	26	50	34	50	38	32	46	34	48	30	50
86	2	2	0	2	2	6	4	8	2	10	4	12	10	8	10	10	12	4	10	8	8	8	12	12	6	24	12	10	8	12	18	12	18	14	16	10
92	4	8	6	16	8	14	6	12	12	8	20	14	14	18	18	30	18	30	20	22	20	12	36	16	44	16	30	20	16	36	14	36	10	34	20	28
98	6	4	8	6	6	6	2	16	10	18	10	16	12	8	28	12	28	12	16	20	12	30	28	32	14	30	16	20	18	20	32	20	26	36	12	32
	2	**5**	**8**	**11**	**14**	**17**	**20**	**23**	**26**	**29**	**32**	**35**	**38**	**41**	**44**	**47**	**50**	**53**	**56**	**59**	**62**	**65**	**68**	**71**	**74**	**77**	**80**	**83**	**86**	**89**	**92**	**95**	**98**	**101**	**104**	**107**
04	5	6	2	10	6	6	8	7	11	13	8	2	8	16	8	14	8	24	9	8	16	7	22	12	10	5	9	14	10	14	10	22	10	12	14	6
10	12	6	8	8	8	20	12	32	16	26	18	16	32	28	38	22	16	26	34	32	16	54	28	40	40	20	50	28	48	48	46	30	30	42	22	52
16	3	0	4	0	2	7	8	8	6	6	3	12	4	12	4	4	8	5	14	10	20	7	12	3	6	8	6	15	12	14	12	8	14	20	16	18
22	6	6	4	16	8	14	6	16	12	8	12	12	28	18	34	16	14	26	16	28	12	18	34	24	22	26	42	24	18	14	10	46	22	38	12	34
28	2	6	6	4	14	10	10	12	4	18	14	12	22	16	16	16	24	12	26	18	20	20	10	26	16	28	16	26	20	18	22	14	42	30	42	30
34	4	6	8	8	4	8	8	8	6	6	12	12	10	12	10	20	10	14	6	14	8	12	18	12	14	14	10	10	10	14	6	12	4	14	14	16
40	8	9	15	9	12	14	13	26	9	26	15	34	16	24	30	26	36	34	32	39	31	28	34	46	28	36	27	26	56	28	56	32	34	42	26	50
46	6	2	4	0	4	2	6	8	4	4	0	10	2	10	8	16	10	12	14	10	14	6	8	10	12	12	6	8	10	16	14	14	2	14	10	8
52	8	6	10	6	10	14	14	16	14	16	12	12	24	14	28	18	24	12	14	26	20	34	22	28	26	32	26	20	36	24	34	24	20	42	34	32
58	8	2	6	8	12	8	14	10	14	10	12	18	8	24	12	20	16	18	28	16	28	18	18	16	18	28	26	38	28	26	26	22	38	18	32	24
64	2	5	5	10	8	9	3	10	8	9	10	12	17	9	16	11	10	10	10	24	10	14	14	11	8	10	8	10	10	7	10	10	11	24	17	14
70	6	6	12	14	18	10	22	20	12	26	16	44	22	28	22	14	44	30	48	24	46	26	26	30	28	44	30	38	30	34	42	52	50	28	52	38
76	3	4	2	2	4	4	2	6	2	5	12	9	12	7	7	12	6	7	4	4	8	12	8	10	16	10	14	8	9	18	3	17	16	12	12	8
82	6	8	12	6	16	4	10	18	10	18	10	12	18	18	26	10	34	22	24	22	14	28	28	28	22	34	24	28	24	18	42	22	36	20	18	34
88	10	4	10	4	8	2	16	6	16	10	12	20	8	22	20	36	16	24	14	16	28	20	42	24	32	34	20	22	20	26	16	22	22	22	44	22
94	4	4	6	6	12	8	8	12	8	8	4	10	16	12	12	10	10	14	12	6	8	14	12	12	8	10	18	12	16	4	16	14	10	4	12	18
100	13	6	10	9	18	16	23	10	24	20	16	34	15	42	22	26	25	20	46	23	38	25	46	20	32	38	25	56	32	48	27	27	62	41	48	30