Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Loewy, Alfred** (1873 – 1935)

Titel: **Über einen Fundamentalsatz für Matrizen oder lineare homogene Differentialsyssteme**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1918, 5

Das Hauptergebnis des Aufsatzes ist der grundlegende Satz: Jede Matrix n-ten Grades mit Koeffizienten aus einem Rationalitätsbereich, der nicht nur Konstante enthält, läßt sich in eine vom Verfasser sogenannte Begleitmatrix des gleichen Grades überführen. Oder, anders ausgedrückt: In einem nicht nur aus Konstanten gebildeten Rationalitätsbereich ist ein System von n linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung stets einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter und nicht niedrigerer Ordnung mit einer unbekannten Funktion äquivalent. Das Theorem verliert seine Gültigkeit, wenn der Rationalitätsbereich bloß Konstante enthält.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1918, S. XVI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1918. 5. Abhandlung

Über einen Fundamentalsatz für Matrizen oder lineare homogene Differentialsysteme

Von

ALFRED LOEWY
Freiburg i. B.

Eingegangen am 12. April 1918

Vorgelegt von P. STÄCKEL

Heidelberg 1918
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1420

EINLEITUNG.

Den Gegenstand unserer Untersuchung bildet eine Matrix $\mathfrak{M}$ n-ten Grades

$$\mathfrak{M}: \left\| \begin{matrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

deren Elemente m_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ einem Rationalitätsbereich Σ[1]) angehören. Aus diesem sollen alle im folgenden auftretenden Konstanten und Funktionen entnommen sein. Den letzteren wird noch die Bedingung auferlegt, daß eine jede von ihnen eine in demselben Gebiete S der Ebene eindeutige und bis auf isolierte Punkte überall in S reguläre analytische Funktion der unabhängigen Variablen x zu sein hat[2]).

Die Matrix m-ten Grades

$$\mathfrak{B}: \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_m \end{matrix} \right\|$$

[1]) Wegen der Definition eines Rationalitätsbereiches vgl. z. B. meinen Aufsatz, Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Math. Annalen Bd. **62** (1906), S. 90.

[2]) Hierdurch wird nicht etwa gefordert, daß die Gesamtheit der singulären Stellen, die für alle Funktionen aus Σ in Frage kommen, ein System isolierter Punkte bilden soll, z. B. definieren die rationalen Funktionen einer Variablen x einen Rationalitätsbereich der gewünschten Beschaffenheit und die in ihm enthaltenen Funktionen $\frac{1}{x-a}$ haben jeden Punkt a der Ebene zur singulären Stelle.

soll eine in der durch $\mathfrak{M}$ bestimmten Art enthaltene Begleitmatrix oder kürzer eine Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ heißen, wenn eine Matrix $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P}: \quad \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{mn} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{Vmatrix}$$

n-ten Grades vom Range m mit Elementen $p_{ik}\left(i=1, 2, \ldots, m;\right.$ $\left.k=1, 2, \ldots, n\right)$ aus dem Rationalitätsbereich Σ existiert, so daß zwischen unseren quadratischen Matrizen die symbolische Gleichung[1])

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{M}$$

besteht; $\mathfrak{P}'$ bedeutet dabei diejenige Matrix, die aus $\mathfrak{P}$ erhalten wird, wenn man jedes Element p_{ik} von $\mathfrak{P}$ durch seinen Differentialquotienten ersetzt. $\mathfrak{B}_n$ ist die aus $\mathfrak{B}$ durch Zufügen von Nullen abgeleitete Matrix n-ten Grades

$$\mathfrak{B}_n: \quad \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Der lineare homogene Differentialausdruck

$$B \equiv b_1 z_1 + b_2 \frac{d z_1}{dx} + \cdots + b_m \frac{d^{m-1} z_1}{d x^{m-1}} + \frac{d^m z_1}{d x^m}$$

[1]) Über diese Gleichung vgl. den § 10 (Der Artbegriff bei Matrizenkomplexen verschiedenen Grades) in der Arbeit, Über Matrizen- und Differentialkomplexe, Math. Annalen Bd. 78 (1917), S. 43 und 44.

sowie jeder Differentialausdruck

$$fB = f \cdot b_1 z_1 + f \cdot b_2 \frac{dz_1}{dx} + \cdots + f \cdot b_m \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + f \cdot \frac{d^m z_1}{dx^m},$$

der sich von B nur um den vorderen Faktor $f(x)$ unterscheidet, wobei $f(x)$ eine beliebige Funktion aus dem Rationalitätsbereich Σ bedeutet, heißt eine Sequente[1]) von $\mathfrak{M}$ oder des durch $\mathfrak{M}$ gegebenen linearen homogenen Differentialsystems. Das letztere schreiben wir unter Einführung von n unbestimmten Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ symbolisch[2]) $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathfrak{M}(y)$. Die Matrix $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir auch als die Begleitmatrix des Differentialausdruckes B oder fB.

Je nachdem $m < n$ oder $m = n$ ist, soll $\mathfrak{B}$ eine subordinierte oder eine koordinierte Begleitmatrix von $\mathfrak{M}$ heißen.

Zu jeder Matrix $\mathfrak{M}$ gibt es, wie auch immer der zugrunde liegende Rationalitätsbereich sein möge, Begleitmatrizen, deren Konstruktion in § 1 besprochen wird. Über diese Begleitmatrizen soll vorzüglich der folgende Fundamentalsatz bewiesen werden: Besteht der Rationalitätsbereich Σ nicht aus lauter Konstanten, so gibt es zu jeder Matrix $\mathfrak{M}$ auch koordinierte Begleitmatrizen, d. h. Matrizen $\mathfrak{B}$, die den höchsten möglichen Grad $m = n$ wirklich erreichen. Nun gilt die folgende Definition: Zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$ des gleichen Grades n heißen von derselben Art oder, noch schärfer, gegenseitig von derselben Art, wenn es eine Matrix $\mathfrak{Q}$ von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereich Σ gibt, so daß die symbolische Gleichung[3])

$$(2) \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{Q} = -\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}\mathfrak{A}$$

---

[1]) Diese Bezeichnung habe ich schon in meinem Aufsatz, Über lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie, Jahrg. 1913, 17. Abh., verwandt. Vgl. a. a. O. besonders § 4.

[2]) Vgl. hierzu den zitierten Annalenaufsatz, Bd. 78, Seite 8, § 3.

[3]) Wegen dieser Gleichung vgl. den zitierten Annalenaufsatz, Bd. 78, § 2, S. 5 u. 6.

besteht. Mithin kann man den zu beweisenden Satz auch so aussprechen: Besteht der Rationalitätsbereich Σ nicht aus lauter Konstanten, so kann zu jeder Matrix $\mathfrak{M}$ eine Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ des gleichen Grades gefunden werden, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ gegenseitig von derselben Art sind. Hat man die Matrix $\mathfrak{M}$ in eine Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ des gleichen Grades transformiert, so kann man diese in der nämlichen Weise weiter behandeln, wie ich es in meinem Aufsatz[1]) in den Göttinger Nachrichten allgemein für Begleitmatrizen auseinandergesetzt habe.

Wesentlich für das mitgeteilte Resultat ist, daß der Rationalitätsbereich Σ nicht aus lauter Konstanten besteht, sondern wirkliche Funktionen der Variablen x enthält. Unser Satz gilt nämlich nicht, wenn der Rationalitätsbereich Σ nur aus Konstanten besteht. In diesem Falle kann man nicht stets Begleitmatrizen vom Grade $m=n$ erzielen. Vielmehr ist dann, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll, das Maximum für den Grad einer Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ durch den Grad der reduzierten charakteristischen Funktion von $-\mathfrak{M}$ bestimmt, und zwar besteht zwischen den zwei genannten Matrizen der folgende Zusammenhang: Ist $\mathfrak{B}$ die Begleitmatrix vom höchsten Grade m, die unter Zugrundelegung eines Rationalitätsbereiches mit konstanten Koeffizienten zu einer Matrix $\mathfrak{M}$ mit konstanten Koeffizienten gehört, so ist $b_1+b_2\varrho+b_3\varrho^2+\cdots+b_m\varrho^{m-1}+\varrho^m$ die reduzierte charakteristische Funktion der Matrix $-\mathfrak{M}$, d. h. $-\mathfrak{M}$ genügt der Matrizengleichung

$$b_1+b_2(-\mathfrak{M})+b_3(-\mathfrak{M})^2+\cdots+b_m(-\mathfrak{M})^{m-1}+(-\mathfrak{M})^m=0$$

und keiner Gleichung von niedrigerem Grade; die reduzierte charakteristische Funktion einer Matrix mit konstanten Koeffizienten besitzt aber bekanntlich nur unter besonderen Bedingungen den gleichen Grad wie die vorgelegte Matrix.

Betrachtet man das durch die Matrix $\mathfrak{M}$ oder durch ihr Differentialsystem $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathfrak{M}(y)$ bestimmte Gleichungssystem

---

[1]) Die Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1917.

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + \cdots + m_{1n}y_n = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} + m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + \cdots + m_{2n}y_n = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} + m_{n1}y_1 + m_{n2}y_2 + \cdots + m_{nn}y_n = 0\,, \end{cases}$$

so erhält man aus dem mitgeteilten Theorem den folgenden grundlegenden, bisher noch nicht bewiesenen Satz:

Besteht der Rationalitätsbereich Σ nicht aus lauter Konstanten, so existieren in Σ stets n Funktionen $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ von folgender Beschaffenheit: Die lineare homogene Differentialgleichung $B=0$ von der niedrigsten Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die durch die aus $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ und aus dem Integralsystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Gleichungen (3) gebildete Funktion

$$(4)\qquad z_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n$$

befriedigt wird, besitzt die Ordnung n. Anders ausgedrückt: In einem nicht nur aus Konstanten gebildeten Rationalitätsbereich ist ein System von n linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n unbekannten Funktionen stets *einer* linearen homogenen Differentialgleichung n-ter und nicht niedrigerer Ordnung mit einer unbekannten Funktion äquivalent.

Durch diesen Satz ist die Behandlung des Differentialgleichungssystems (3) auf die Untersuchung einer einzigen gleichwertigen Differentialgleichung $B=0$ n-ter Ordnung zurückgeführt, der die Funktion z_1 genügt. Durch Differentiation von (4) und Beseitigung der rechter Hand auftretenden Abgeleiteten mittels des Systems (3) kann man, da nach unserem Satz $z_1, \dfrac{dz_1}{dx}, \dfrac{d^2z_1}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}}$ linear unabhängig sind und erst $z_1, \dfrac{dz_1}{dx}, \dfrac{d^2z_1}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^nz_1}{dx^n}$ in Dependenz stehen, eine jede der Funktionen $y_i\,(i=1,2,\ldots,n)$

linear und homogen durch $z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}}$ ausdrücken. Aus unserem Resultat folgt z. B., daß die PICARD-VESSIOTsche Theorie der Rationalitätsgruppe einer einzigen linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung unmittelbar auf ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem mit n Funktionen übertragen werden kann.

Anders wieder liegen die Verhältnisse, wenn das System (3) konstante Koeffizienten besitzt und ein Rationalitätsbereich Σ, der nur Konstante enthält, zugrunde gelegt wird. Alsdann kann die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der die Funktion (4) genügt, wie auch immer die Koeffizienten $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ aus Σ gewählt werden, niemals eine Ordnung besitzen, die den Grad der reduzierten charakteristischen Funktion von $-\mathfrak{M}$ oder, was das Gleiche ist, von $\mathfrak{M}$ überschreitet.

Da es sich bei dem Haupttheorem um einen reinen Matrizensatz handelt, soll im folgenden von der Integralexistenz nur im § 3 Gebrauch gemacht werden, wo wir von Differentialgleichungen sprechen. § 1 ist der Darlegung der Beziehung gewidmet, die zwischen einer beliebigen Matrix und ihren Begleitmatrizen oder, anders ausgedrückt, zwischen einem Differentialsystem $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathfrak{M}(y)$ und seinen Sequenten besteht. § 2 beweist das oben besprochene Haupttheorem über die Existenz koordinierter Begleitmatrizen. Im § 3 betrachten wir schließlich das Differentialgleichungssystem $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathfrak{M}(y) = 0$ und den Zusammenhang, der zwischen seinen Lösungen und den Integralen der durch Nullsetzen einer seiner Sequenten B entstehenden linearen homogenen Differentialgleichung $B=0$ stattfindet. Der Inhalt des § 3 läßt sich auch so ausdrücken: Er gilt der linearen homogenen Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der ein Ausdruck

$$z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n \tag{4}$$

genügt, wobei $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ Funktionen aus Σ sind und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ alle Lösungssysteme des Differentialgleichungssystems (3) $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathfrak{M}(y) = 0$ durchlaufen.

§ 1.

Wir beweisen zunächst den folgenden Doppelsatz, der uns das Verfahren lehrt, durch das eine jede Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ oder, was das Gleiche ist, eine jede Sequente B von $\mathfrak{M}$ gefunden wird:

(α) $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ seien irgend n Größen aus dem Rationalitätsbereich Σ. Aus ihnen bilde man sukzessiv für $i=1, 2, \ldots, m$ die neuen Größen

$$p_{i+1,k} = p'_{ik} - \sum_{s=1}^{s=n} p_{is} m_{sk} \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{5}$$

wobei p'_{ik} die Differentialquotienten der p_{ik} bedeuten. Mit Hilfe von n unbestimmten Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ konstruiere man die $m+1$ Linearfunktionen

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n, \\ z_2 = p_{21} y_1 + p_{22} y_2 + \cdots + p_{2n} y_n, \\ \vdots \\ z_m = p_{m1} y_1 + p_{m2} y_2 + \cdots + p_{mn} y_n, \\ z_{m+1} = p_{m+1,1} y_1 + p_{m+1,2} y_2 + \cdots + p_{m+1,n} y_n \end{array}\right| \tag{6}$$

und führe diesen Prozeß so weit, daß, während $z_1, z_2, \ldots, z_m$ linear unabhängig sind, $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ in linearer Abhängigkeit stehen. Werden die zuletzt genannten Funktionen durch die Relation

$$s_1 z_1 + s_2 z_2 + \cdots + s_m z_m + s_{m+1} z_{m+1} = 0 \tag{7}$$

oder, da $s_{m+1} \neq 0$ ist, durch

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_m z_m + z_{m+1} = 0 \tag{7*}$$

verknüpft, wobei $b_i = \dfrac{s_i}{s_{m+1}}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ ist, so hat man in dem linearen homogenen Differentialausdruck

$$B = b_1 z_1 + b_2 \frac{d z_1}{d x} + b_3 \frac{d^2 z_1}{d x^2} + \cdots + b_m \frac{d^{m-1} z_1}{d x^{m-1}} + \frac{d^m z_1}{d x^m}$$

eine Sequente von $\mathfrak{M}$ oder, anders ausgedrückt, so ist die zu Beginn des Aufsatzes hingeschriebene Matrix $\mathfrak{B}$ eine Begleitmatrix von $\mathfrak{M}$, d. h. es existiert eine Matrix $\mathfrak{P}$ des Ranges m, so daß die Gleichung besteht (1) $\mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{M}$; die Koeffizienten von $\mathfrak{P}$ können gleich den eingeführten Größen $p_{ik}(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$ gewählt werden.

(β) Durch das in (α) angegebene Verfahren werden *alle* Begleitmatrizen von $\mathfrak{M}$ bestimmt. Ist nämlich $\mathfrak{B}$ eine vorgegebene Begleitmatrix von $\mathfrak{M}$ nach der zu Anfang dieses Aufsatzes aufgestellten Definition, so existieren stets n Funktionen $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ des Rationalitätsbereiches Σ, daß, wenn man aus ihnen nach (5) die Größen $p_{i+1,k}(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$ bildet und weiter nach (6) die Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ einführt, die Relation

$$(7^*) \qquad b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_m z_m + z_{m+1} = 0$$

besteht; die Größen $p_{ik}(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$, deren Existenz wir behaupteten, können gleich den Elementen p_{ik} der nach Voraussetzung vorhandenen Matrix $\mathfrak{P}$ gewählt werden, die der Gleichung (1) $\mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{M}$ genügt; weiter sind $b_i(i=1,2,\ldots,m)$ die in der vorgegebenen Begleitmatrix auftretenden Elemente; schließlich ist

$$(8) \qquad p_{m+1,k} = -b_1 p_{1k} - b_2 p_{2k}, \ldots, -b_m p_{mk} \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Von den eingeführten $m+1$ Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{m+1}$ sind die m ersten linear unabhängig.

Zum Beweis der in Satz (α) enthaltenen Aussagen bemerken wir zunächst, daß $n+1$ Linearfunktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ stets in Dependenz stehen. Daher können sich unter den durch die Relation (6) definierten Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ höchstens $m<n$ unabhängige finden.

Aus den beim Satz (α) eingeführten Größen p_{ik} $(i=1,2,\ldots,m;$ $k=1,2,\ldots,n)$ bilden wir die Matrix $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P}:\quad \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Diese hat den Rang m, da die Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ linear unabhängig sind.

Weiter bilden wir aus den im Satz (α) bei der Relation (7^*) auftretenden Größen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ die Matrix $\mathfrak{B}_n$:

$$\mathfrak{B}_n:\quad \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Wir komponieren die Matrizen $\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{P}$ und beachten für die m-te Zeile, daß infolge der Abhängigkeit der $m+1$ Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ nach (6) und (7^*) die Gleichungen

$$b_1 p_{1k} + b_2 p_{2k} + \cdots + b_m p_{mk} + p_{m+1,k} = 0$$

oder

$$p_{m+1,k} = -b_1 p_{1k} - b_2 p_{2k} - \cdots - b_m p_{mk} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

bestehen. Alsdann erhält man für die Matrix $\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}$ die Darstellung

$$\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}:\quad \begin{Vmatrix} -p_{21} & -p_{22} & \cdots & -p_{2n} \\ -p_{31} & -p_{32} & \cdots & -p_{3n} \\ \vdots \\ -p_{m+1,1} & -p_{m+1,2} & \cdots & -p_{m+1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Die Größen $p_{i+1,k}\,(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$ sind nach den Aussagen des Satzes (α) durch die Gleichungen (5) definiert. Infolgedessen erhält man aus der für $\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}$ gewonnenen Darstellung unmittelbar die gewünschte Matrizengleichung (1) $\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}=-\mathfrak{P}'+\mathfrak{P}\mathfrak{M}$; diese besagt, daß die aus $\mathfrak{B}_n$ durch Streichen der Nullen in den letzten $n-m$ Zeilen und $n-m$ Spalten hervorgehende Matrix $\mathfrak{B}$, wie bewiesen werden soll, eine Begleitmatrix von $\mathfrak{M}$ ist.

Wir beweisen nunmehr den Inhalt des Satzes (β). Für ihn ist $\mathfrak{B}$ nach Voraussetzung eine Begleitmatrix von $\mathfrak{M}$, d. h. es existiert eine Matrix $\mathfrak{P}$ des Ranges m, in deren ersten m Zeilen Elemente $p_{ik}\,(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$ aus dem Rationalitätsbereich Σ stehen und deren letzte $n-m$ Zeilen Nullen enthalten, so daß $\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}=-\mathfrak{P}'+\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ ist; dabei bedeutet $\mathfrak{B}_n$ die aus $\mathfrak{B}$ durch Ränderung hervorgehende Matrix, die erhalten wird, wenn man der Matrix $\mathfrak{B}$ $n-m$ Zeilen und ebensoviel Spalten, die nur Nullen enthalten, unten und rechts beifügt. Zu den $n\cdot m$ Größen p_{ik} der Matrix $\mathfrak{P}$ führen wir noch durch Definition die weiteren Größen $p_{m+1,k}\,(k=1,2,\ldots,n)$ ein, die wir festlegen durch die Gleichungen

$$p_{m+1,k}=-b_1\,p_{1k}-b_2\,p_{2k}-\cdots-b_m\,p_{mk}\qquad (k=1,2,\ldots,n)\,.$$

Bildet man nun die Matrix $\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}$, so erhält man für diese genau dieselbe Darstellung, wie sie oben beim Beweis des Satzes (α) ausführlich hingeschrieben wurde. Auf Grund der Aussagen des Satzes (β) besteht nach Voraussetzung, wie schon oben angeführt wurde, die symbolische Gleichung $\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}=-\mathfrak{P}'+\mathfrak{P}\mathfrak{B}$. Diese setzt sich, wenn man den Wert der Matrix $\mathfrak{B}_n\mathfrak{P}$ beachtet, um in die gewöhnlichen Gleichungen:

$$(5)\qquad p_{i+1,k}=p'_{ik}-\sum_{s=1}^{s=n}p_{is}\,m_{sk}\qquad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)\,.$$

Weiter besagen die auf Grund unserer Definition der Größen $p_{m+1,k}$ bestehenden Gleichungen

$$b_1\,p_{1k}+b_2\,p_{2k}+\cdots+b_m\,p_{mk}+p_{m+1,k}=0\qquad (k=1,2,\ldots,n)\,,$$

daß, wenn man die Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ nach (6) einführt, diese durch die Relation (7*) verknüpft sind, wie beim Satz (β) bewiesen werden soll. Schließlich ergibt sich aus der Tatsache, daß die Matrix $\mathfrak{P}$ den Rang m hat, die lineare Unabhängigkeit der Funktion $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Hiermit ist Satz (β) in seinem ganzen Inhalt bewiesen.

Die Definition der Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ einer Matrix $\mathfrak{M}$ kommt darauf hinaus, daß die Matrix $\mathfrak{B}$ in der durch die Matrix $\mathfrak{M}$ bestimmten Art enthalten sein soll[1]); daher gilt der Satz:

Eine Matrix $\mathfrak{B}$ n-ten Grades von der besonderen Form

$$\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_m \end{matrix}\right\|$$

ist dann und nur dann Begleitmatrix einer Matrix $\mathfrak{M}$ vom n-ten Grade, wenn $\mathfrak{M}$ von derselben Art ist mit einer Matrix $\mathfrak{F}$ n-ten Grades der Form

$$\left\|\begin{matrix} \mathfrak{B} & 0 \\ \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{22} \end{matrix}\right\|;$$

dabei bedeuten $\mathfrak{F}_{21}$ und $\mathfrak{F}_{22}$ Matrizen mit $n-m$ Zeilen und m bezw. $n-m$ Spalten.

Wir erinnern noch an die folgende Definition:

Eine Matrix $\mathfrak{M}$ vom n-ten Grade heißt reduzibel, wenn sie mit einer Matrix $\mathfrak{R}$ n-ten Grades mit Koeffizienten aus Σ von derselben Art ist und $\mathfrak{R}$ die Form hat

$$\mathfrak{R}:\quad \left\|\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & \ldots r_{1m} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ r_{21} & r_{22} & \ldots r_{2m} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots r_{mm} & 0 & 0 & 0 \\ r_{m+1,1} & r_{m+1,2} & \ldots r_{m+1,m} & r_{m+1,m+1} & r_{m+1,m+2} & \ldots r_{m+1,n} \\ r_{m+2,1} & r_{m+2,2} & \ldots r_{m+2,m} & r_{m+2,m+1} & r_{m+2,m+2} & \ldots r_{m+2,n} \\ \vdots & & & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots r_{nm} & r_{n,m+1} & r_{n,m+2} & \ldots r_{nn} \end{matrix}\right\|,$$

---

1) Wegen dieser Definition und des sich anschließenden Satzes vgl. meinen auch oben zitierten Annalenaufsatz, Bd. 78, § 10, S. 44.

wobei $m \geqq 1$, aber $< n$ ist, also $\mathfrak{N}$ sich symbolisch schreiben läßt

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{N}_{11} & 0 \\ \mathfrak{N}_{21} & \mathfrak{N}_{22} \end{vmatrix}.$$

Aus dem angegebenen Satz und der für die Reduzibilität gültigen Definition folgt, daß, wenn man eine Begleitmatrix einer irreduziblen Matrix nach (a) bildet, diese denselben Grad wie die ursprüngliche Matrix besitzen muß. Anders liegt es bei einer reduziblen Matrix $\mathfrak{M}$. Diese läßt sich stets in eine Matrix

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{M}_{11} & 0 \\ \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{22} \end{vmatrix}$$

transformieren, wobei $\mathfrak{M}_{11}$ eine irreduzible Matrix ist[1]). Bestimmt man nun nach (a) eine Begleitmatrix $\mathfrak{S}_{11}$ von $\mathfrak{M}_{11}$, so besitzt diese infolge der Irreduzibilität von $\mathfrak{M}_{11}$ den gleichen Grad wie $\mathfrak{M}_{11}$, und $\mathfrak{M}_{11}$ und $\mathfrak{S}_{11}$ sind gegenseitig von derselben Art. Alsdann ist die Matrix $\mathfrak{M}$ mit einer Matrix

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{S}_{11} & 0 \\ \mathfrak{M}^*_{21} & \mathfrak{M}_{22} \end{Vmatrix}$$

von derselben Art. Folglich ist nach dem zuletzt angeführten Satz die Matrix $\mathfrak{S}_{11}$ von niedrigerem als n-tem Grade eine Begleitmatrix von $\mathfrak{M}$. Eine reduzible Matrix besitzt also stets Begleitmatrizen niedrigeren Grades. Mithin hat man den Satz:

---

[1]) Entweder ist die oben angegebene Matrix $\mathfrak{N}_{11}$ irreduzibel oder sonst kann man sie durch wiederholte Transformation in die Form

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{M}_{11} & 0 \\ \mathfrak{N}^*_{21} & \mathfrak{N}^*_{22} \end{Vmatrix}$$

bringen, wobei $\mathfrak{M}_{11}$ irreduzibel ist. Alsdann ist $\mathfrak{M}$ von derselben Art mit einer Matrix

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{M}_{11} & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}^*_{21} & \mathfrak{N}^*_{22} & 0 \\ \mathfrak{N}_{31} & \mathfrak{N}_{32} & \mathfrak{N}_{33} \end{Vmatrix},$$

wobei $\mathfrak{N}_{31}, \mathfrak{N}_{32}, \mathfrak{N}_{33}$ aus $\mathfrak{N}_{21}$ und $\mathfrak{N}_{22}$ hervorgehen. Die neue Matrix kann man in der Form des Textes schreiben

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{M}_{11} & 0 \\ \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{22} \end{vmatrix}.$$

Eine Matrix ist dann und nur dann irreduzibel, wenn alle ihre Begleitmatrizen den gleichen Grad wie sie selbst haben.

§ 2.

Durch die Betrachtungen des § 1 sind wir zum Beweis des in der Einleitung angegebenen Satzes vorbereitet. Wir haben gesehen, daß zu jeder Matrix $\mathfrak{M}$ Begleitmatrizen existieren, deren Konstruktion in dem Doppelsatz (α) und (β) gelehrt wurde. Für irreduzible Matrizen ist gezeigt, daß alle Begleitmatrizen den Grad n der ursprünglichen Matrix besitzen. Bei reduziblen Matrizen ist aber noch nicht bekannt, ob neben Begleitmatrizen niedrigeren Grades auch noch solche vom Grade n existieren. Wir beweisen:

Enthält der Rationalitätsbereich Σ nicht nur ausschließlich Konstante, so besitzt eine jede Matrix $\mathfrak{M}$ vom n-ten Grade auch eine Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ des gleichen Grades, d. h. die Matrix $\mathfrak{M}$ ist mit einer Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ gegenseitig von derselben Art.

Da der zu beweisende Satz für irreduzible Matrizen richtig ist, können wir uns darauf beschränken, ihn für reduzible Matrizen zu beweisen. $\mathfrak{M}$ sei eine solche vom n-ten Grade. Wir transformieren die Matrix $\mathfrak{M}$ in

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{M}_{11} & 0 \\ \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{22} \end{Vmatrix},$$

wobei $\mathfrak{M}_{11}$ eine irreduzible Matrix bedeute. $\mathfrak{M}_{11}$ habe den Grad f, $\mathfrak{M}_{22}$ den Grad g, $f+g=n$. Infolge ihrer Irreduzibilität kann die Matrix $\mathfrak{M}_{11}$ in eine Begleitmatrix $\mathfrak{S}_{11}$ vom gleichen Grade f übergeführt werden. Da der zu beweisende Satz für irreduzible Matrizen zutrifft, wollen wir ihn für Matrizen von niedrigerem als n-tem Grade als richtig annehmen. Alsdann haben wir, um ihn allgemein zu beweisen, nur zu zeigen, daß er auch noch für Matrizen des n-ten Grades richtig ist. Infolge unserer Annahme läßt sich die Matrix $\mathfrak{M}_{22}$ in eine Begleitmatrix $\mathfrak{S}_{22}$ vom gleichen Grade g transformieren. Hiernach existieren Matrizen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ der Grade f bezw. g von nicht verschwindenden Determinanten mit Koeffizienten aus Σ, so daß

$$\mathfrak{S}_{11} = -\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_1^{-1} + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{M}_{11} \mathfrak{P}_1^{-1}$$
$$\mathfrak{S}_{22} = -\mathfrak{P}_2' \mathfrak{P}_2^{-1} + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{M}_{22} \mathfrak{P}_2^{-} \quad ;$$

ist. Alsdann wird die Matrix $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}: \left\| \begin{matrix} \mathfrak{M}_{11} & 0 \\ \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{22} \end{matrix} \right\|$$

durch die Matrix $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P}: \left\| \begin{matrix} \mathfrak{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{P}_2 \end{matrix} \right\|$$

transformiert in eine neue Matrix $\mathfrak{S}$ der Form $\mathfrak{S} = -\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} + \mathfrak{P}\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-1}$; dabei hat $\mathfrak{S}$ die Gestalt

$$\mathfrak{S}: \left\| \begin{matrix} \mathfrak{S}_{11} & 0 \\ \mathfrak{S}_{21} & \mathfrak{S}_{22} \end{matrix} \right\| ,$$

und es ist $\mathfrak{S}_{21} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{M}_{21} \mathfrak{P}_1^{-1}$.

Wir führen n unabhängige Variable $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein und betrachten das zu $\mathfrak{S}$ zugehörige Differentialsystem; da $\mathfrak{S}_{11}$ und $\mathfrak{S}_{22}$ Begleitmatrizen sind, schreibt sich dieses folgendermaßen:

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} - y_3, \quad \ldots, \quad \frac{dy_{f-1}}{dx} - y_f, \quad \frac{dy_f}{dx} + s_{f1} y_1 + s_{f2} y_2 + \cdots + s_{ff} y_f,$$

$$\frac{dy_{f+1}}{dx} + s_{f+1,1} y_1 + s_{f+1,2} y_2 + \cdots + s_{f+1,} \; y_f - y_{f+2},$$

$$\frac{dy_{f+2}}{dx} + s_{f+2,1} y_1 + s_{f+2,2} y_2 + \cdots + s_{f+2,f} y_f - y_{f+3}, \ldots,$$

$$\frac{dy_{f+g-1}}{dx} + s_{f+g-1,1} y_1 + s_{f+g-1,2} y_2 + \cdots + s_{f+g-1,f} y_f - y_{f+g},$$

$$\frac{dy_{f+g}}{dx} + s_{f+g,1} y_1 + s_{f+g,2} y_2 + \cdots + s_{f+g,f} y_f + s_{f+g,f+1} y_{f+1} + s_{f+g,f+2} y_{f+2} + \cdots$$
$$+ s_{f+g,n} y_n .$$

Wir wählen aus dem Rationalitätsbereich Σ irgend f Funktionen $q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1f}$ und bilden mit ihnen die neue Funktion

$$z_1 = q_{11} y_1 + q_{12} y_2 + \cdots + q_{1f} y_f + y_{f+1} . \tag{9}$$

Aus z_1 leiten wir $z_2, z_3, \ldots$ nach dem im Satz (α) des § 1 beschriebenen Verfahren ab, um auf diese Weise von z_1 ausgehend eine Sequente des Differentialsystems $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathfrak{S}(y)$ zu gewinnen. Infolge der besonderen Form, die das Differentialsystem $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathfrak{S}(y)$ sowie die durch Gleichung (9) eingeführte Funktion z_1 besitzen, nehmen $z_2, z_3, \ldots, z_g$, wie man aus den beim Satz (α) angegebenen Definitionsgleichungen (5) ersieht, die folgende Gestalt an:

$$(10)\left\{\begin{aligned} z_2 &= q_{21}\,y_1 + q_{22}\,y_2 + \cdots + q_{2f}\,y_f + y_{f+2}\,, \\ z_3 &= q_{31}\,y_1 + q_{32}\,y_2 + \cdots + q_{3f}\,y_f + y_{f+3}\,, \\ &\;\vdots \\ z_g &= q_{g1}\,y_1 + q_{g2}\,y_2 + \cdots + q_{gf}\,y_f + y_{f+g}\,. \end{aligned}\right.$$

Die eingeführten Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_g$ sind sicher linear unabhängig, da bei ihrer Bildung der Reihe nach die vorher nicht benützten Funktionen $y_{f+1}, y_{f+2}, \cdots, y_{f+g}$ auftreten. Wir bilden nun weiter, indem wir uns immer des gleichen, im Satze (α) des § 1 beschriebenen Verfahrens bedienen:

$$\begin{aligned} z_{g+1} &= q_{g+1,1}\,y_1 + q_{g+1,2}\,y_2 + \cdots + q_{g+1,f}\,y_f + q_{g+1,f+1}\,y_{f+1} + \cdots + q_{g+1,n}\,y_n\,, \\ z_{g+2} &= q_{g+2,1}\,y_1 + q_{g+2,2}\,y_2 + \cdots + q_{g+2,f}\,y_f + q_{g+2,f+1}\,y_{f+1} + \cdots + q_{g+2,n}\,y_n\,, \\ &\;\vdots \\ z_{g+h} &= q_{g+h,1}\,y_1 + q_{g+h,2}\,y_2 + \cdots + q_{g+h,f}\,y_f + q_{g+h,f+1}\,y_{f+1} + \cdots + q_{g+h,n}\,y_n\,, \\ z_{g+h+1} &= q_{g+h+1,1}\,y_1 + q_{g+h+1,2}\,y_2 + \cdots + q_{g+h+1,f}\,y_f + q_{g+h+1,f+1}\,y_{f+1} + \cdots + q_{g+h+1,n}\,y_n; \end{aligned}$$

mit der Einführung der Funktionen $z_{g+1}, z_{g+2}, \ldots, z_{g+h+1}$ gehen wir soweit, daß $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$ linear unabhängig, hingegen $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h+1}$ in Dependenz sind. Zunächst ist $h \geq 0$. Weiter ist $h \leq f$; denn höchstens $n = f+g$ lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ können unabhängig sein.

Außer den $g+h$ unabhängigen Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$ denken wir uns noch $n-(g+h)$ weitere lineare homogene Funktionen $\zeta_{g+h+1}, \zeta_{g+h+2}, \ldots, \zeta_n$ von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit Koeffizienten aus Σ eingeführt, so daß

$$z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}, \zeta_{g+h+1}, \zeta_{g+h+2}, \ldots, \zeta_n$$

insgesamt n linear unabhängige Linearfunktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind. Alsdann transformiert sich das Differentialsystem $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathfrak{S}(y)$ in ein neues mit den Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}, z_{g+h+1}, \ldots, z_n$, das mit dem alten von derselben Art ist und die Matrix $\mathfrak{B}$ haben möge. Da $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$ eine Begleitmatrix der Matrix $\mathfrak{S}$ bestimmen, hat $\mathfrak{B}$ die Form

$$\mathfrak{B}: \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{matrix} \right\|;$$

hierbei wird die Begleitmatrix $\mathfrak{B}_{11}$ durch das Differentialsystem

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \frac{dz_3}{dx} = z_4, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{g+h-1}}{dx} = z_{g+h},$$

$$\frac{dz_{g+h}}{dx} + v_{g+h,1}\, z_1 + v_{g+h,2}\, z_2 + \cdots + v_{g+h,g+h}\, z_{g+h}$$

gegeben und die zuletzt eingeführten Funktionen $v_{g+h,1}, v_{g+h,2}, \ldots, v_{g+h,g+h}$ werden durch die Relation

$$v_{g+h,1}\, z_1 + v_{g+h,2}\, z_2 + \cdots + v_{g+h,g+h}\, z_{g+h} + z_{g+h+1} = 0$$

geliefert, die zwischen den in Abhängigkeit befindlichen Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h+1}$ besteht.

Die zwei Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{B}$ der Form

$$\mathfrak{S}: \left\| \begin{matrix} \mathfrak{S}_{11} & 0 \\ \mathfrak{S}_{21} & \mathfrak{S}_{22} \end{matrix} \right\|$$

und

$$\mathfrak{B}: \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{matrix} \right\|$$

sind von derselben Art, und $\mathfrak{S}_{11}$ ist irreduzibel. Alsdann bestehen nach einem früher von mir bewiesenen Satz[1]) zwischen den f zum Differentialsystem $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathfrak{S}_{11}(y)$ gehörigen Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_f$

[1]) Vgl. den schon oben zitierten Aufsatz in den Math. Annalen Bd. 78, S. 20.

und den $g+h$ Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$, die bei dem Differentialsystem $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\mathfrak{B}_{11}(z)$ auftreten, entweder f linear unabhängige oder überhaupt keine linearen homogenen Relationen.

Wir behandeln zunächst den Fall, daß f Relationen bestehen. Nach der Gleichung (9) und dem sich ihr anschließenden System (10) sind $z_1, z_2, \ldots, z_g$ lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_{f+g}$. Mithin lassen sich die f zwischen $y_1, y_2, \ldots, y_f$ und $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$ bestehenden Relationen in solche zwischen $y_1, y_2, \ldots, y_{f+g}, z_{g+1}, z_{g+2}, \ldots, z_{g+h}$ überführen. Auch diese Relationen sind unabhängig; denn man kann von ihnen zu den f früheren unabhängigen Relationen zurückgelangen, da sich jede der Funktionen $y_{f+i}\,(i=1, 2, \ldots, g)$ durch die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_f$ und $z_i\,(i=1, 2, \ldots, g)$ ausdrücken läßt, wie aus den zur Bildung von $z_1, z_2, \ldots, z_g$ verwandten Gleichungen (9) und (10) unmittelbar hervorgeht. Wäre nun $h<f$, so könnte man aus den f unabhängigen, zwischen $y_1, y_2, \ldots, y_{f+g}, z_{g+1}, z_{g+2}, \ldots, z_{g+h}$ bestehenden Relationen die h Funktionen $z_{g+1}, z_{g+2}, \ldots, z_{g+h}$ eliminieren und würde dann $f-h>0$ Relationen zwischen den unabhängigen Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_{f+g}$ erhalten. Da dies unmöglich ist, muß $h>f$ sein. Es kann aber nur $h \leq f$ sein. Mithin hat man $h=f$. Folglich besitzt die Matrix $\mathfrak{B}_{11}$ in dem untersuchten Fall den Grad $g+h=g+f=n$ und ist daher mit $\mathfrak{S}$ von derselben Art. Nun waren aber die Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ von derselben Art. Infolgedessen ist wegen der Transitivität des Artbegriffes bei Matrizen gleichen Grades die vorgelegte Matrix $\mathfrak{M}$ mit der Begleitmatrix $\mathfrak{B}_{11}$ von derselben Art. Hiermit ist unser Satz in dem behandelten Falle bewiesen.

Sind $y_1, y_2, \ldots, y_f, z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$ linear unabhängig, so muß zunächst $h=0$ sein. Die Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$ hängen nämlich linear und homogen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ab und nur höchstens $n=f+g$ Linearfunktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ können linear unabhängig sein. Mithin hat man $f+g+h \leq n$, woraus sich infolge der Gleichung $f+g=n$ ergibt, daß $h=0$ ist. Da $y_1, y_2, \ldots, y_f, z_1, z_2, \ldots, z_g$ insgesamt n linear unabhängige Funktionen sind, können wir das Differentialsystem $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathfrak{S}(y)$ durch Einführung der Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_g$ und Beibehaltung von $y_1, y_2, \ldots, y_f$ in ein neues Differentialsystem überführen. Dieses besitzt dann eine zerfallende Matrix $\mathfrak{Z}$

$$\mathfrak{Z}: \begin{Vmatrix} \mathfrak{S}_{11} & 0 \\ 0 & \mathfrak{V}_{11} \end{Vmatrix};$$

hierbei sind $\mathfrak{S}_{11}$ und $\mathfrak{V}_{11}$ Begleitmatrizen, die bestimmt werden durch die Differentialsysteme

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \ldots, \quad \frac{dy_{f-1}}{dx} = y_f, \quad \frac{dy_f}{dx} = s_{f1}\,y_1 + s_{f2}\,y_2 + \cdots + s_{ff}\,y_f$$

und

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \ldots, \quad \frac{dz_{g-1}}{dx} = z_g, \quad \frac{dz_g}{dx} = v_{g1}\,z_1 + v_{g2}\,z_2 + \cdots + v_{gg}\,z_g.$$

Unter q_{11} eine Funktion des Rationalitätsbereiches Σ verstanden, führen wir eine Funktion

$$u_1 = q_{11}\,y_1 + z_1 \tag{11}$$

ein. Aus u_1 leiten wir nach dem im Satz (a) des § 1 beschriebenen Verfahren $u_2, u_3, \ldots$ ab, um auf diese Weise eine Sequente des zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Differentialsystems zu gewinnen. Infolge der besonderen Form dieses Differentialsystems und der durch (11) eingeführten Funktion u_1 nehmen $u_2, u_3, \ldots$ die folgende Gestalt an, wie man aus den beim Satz (a) angegebenen Definitionsgleichungen (5) ableitet:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} u_2 &= q_{21}\,y_1 + q_{22}\,y_2 + z_2, \\ u_3 &= q_{31}\,y_1 + q_{32}\,y_2 + q_{33}\,y_3 + z_3, \\ &\vdots \\ u_g &= q_{g1}\,y_1 + q_{g2}\,y_2 + \cdots + q_{gf}\,y_f + z_g, \\ u_{g+1} &= q_{g+1,1}\,y_1 + q_{g+1,2}\,y_2 + \cdots + q_{g+1,f}\,y_f + v_{g1}\,z_1 + v_{g2}\,z_2 + \cdots + v_{gg}\,z_g; \end{aligned}\right.$$

aus der Matrix $\mathfrak{Z}$ berechnet man noch nach den Gleichungen (5) die Werte:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} q_{i+1,1} &= q'_{i1} + q_{if}\,s_{f1} && (i = 1, 2, \ldots, g), \\ q_{i+1,k} &= q'_{ik} + q_{i,k-1} + q_{if}\,s_{fk} && (i = 1, 2, \ldots, g;\ k = 2, 3, \ldots, f); \end{aligned}\right.$$

dabei ist voraussetzungsgemäß $q_{ik} = 0$, wenn $k > i$ $(k = 2, 3, \ldots, f)$. Nun sind zwei Fälle möglich, nämlich erstens: q_{11} ist eine solche

Funktion aus Σ, daß $u_1, u_2, \ldots, u_{g+1}$ in Dependenz stehen, oder zweitens: für q_{11} ist wenigstens eine derartige Funktion bekannt, daß $u_1, u_2, \ldots, u_{g+1}$ linear unabhängig sind. Angenommen, q_{11} sei eine solche Funktion, für die der zweite Fall vorliegt. Alsdann erhält man durch Fortsetzen des Verfahrens, das zu den Gleichungen (12) führte, ebenso wie bei dem erledigten Fall – bei ihm handelte es sich um die Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_{g+h}$, für die wir $h=f$ nachwiesen – $f+g$ Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_{g+f}$, daß diese unabhängig sind und erst $u_1, u_2, \ldots, u_{g+f}, u_{g+f+1}$ in linearer Dependenz stehen. Die zwischen den zuletzt genannten Funktionen bestehende Relation möge lauten:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_{f+g} u_{f+g} + u_{f+g+1} = 0 \,.$$

Alsdann ist die Matrix $\mathfrak{Z}$ und daher auch die ursprünglich vorgelegte Matrix $\mathfrak{M}$ von derselben Art mit der Begleitmatrix des Differentialsystems

$$\frac{du_1}{dx} - u_2, \quad \frac{du_2}{dx} - u_3, \ldots, \quad \frac{du_{f+g-1}}{dx} - u_{f+g}, \quad \frac{du_{f+g}}{dx} + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_{f+g} u_{f+g} \,,$$

womit unser Satz für diesen Fall bewiesen ist.

Mithin bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, bei dem für q_{11} bloß eine solche Funktion aus Σ bekannt ist, so daß $u_1, u_2, \ldots, u_{g+1}$ in Dependenz stehen. Wegen der Unabhängigkeit von $y_1, y_2, \ldots, y_f, z_1, z_2, \ldots, z_g$ muß die $u_1, u_2, \ldots, u_{g+1}$ verknüpfende Relation dann lauten:

$$(14) \qquad v_{g1} u_1 + v_{g2} u_2 + \cdots + v_{gg} u_g + u_{g+1} = 0 \,,$$

wie aus (11) und (12) folgt; denn sonst würden die Koeffizienten von $z_1, z_2, \ldots, z_g$ nicht einzeln verschwinden. Die Relation (14) wird ersichtlich nur durch die Matrix $\mathfrak{V}_{11}$ bestimmt und ist unabhängig von der Wahl der Funktion q_{11}.

Aus (14) in Verbindung mit (11) und (12) ergibt sich

$$(15)\left\{\begin{aligned} &v_{g1}(q_{11} y_1) + v_{g2}(q_{21} y_1 + q_{22} y_2) + v_{g3}(q_{31} y_1 + q_{32} y_2 + q_{33} y_3) + \cdots \\ &+ v_{gg}(q_{g1} y_1 + q_{g2} y_2 + \cdots + q_{gf} y_f) + (q_{g+1,1} y_1 + q_{g+1,2} y_2 + \cdots + q_{g+1,f} y_f) = 0. \end{aligned}\right.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$Y_1 = q_{11} y_1, \; Y_2 = q_{21} y_1 + q_{22} y_2, \; \ldots, \; Y_i = q_{i1} y_1 + q_{i2} y_2 + \cdots + q_{if} y_f, \; \ldots,$$
$$Y_{g+1} = q_{g+1,1} y_1 + q_{g+1,2} y_2 + \cdots + q_{g+1,f} y_f.$$

Hierdurch geht die Gleichung (15) über in

$$(16) \qquad v_{g1} Y_1 + v_{g2} Y_2 + \cdots + v_{gg} Y_g + Y_{g+1} = 0.$$

Nun ist

$$(17)\left\{\begin{aligned} \frac{dY_i}{dx} &= q'_{i1} y_1 + q'_{i2} y_2 + \cdots + q'_{if} y_f + q_{i1} y'_1 + q_{i2} y'_2 + \cdots + q_{if} y'_f \\ &= Y_{i+1} + q_{i1}(y'_1 - y_2) + q_{i2}(y'_2 - y_3) + \cdots + q_{if-1}(y'_{f-1} - y_f) \\ &\quad + q_{if}\left(\frac{dy_f}{dx} + s_{f1} y_1 + s_{f2} y_2 + \cdots + s_{ff} y_f\right), \end{aligned}\right.$$

wie sich aus den Gleichungen (13) ergibt.

Wir wenden die Formel (17) für $i = 1$ an und erhalten $\frac{dY_1}{dx} = Y_2 + L_1$, wobei L_1 eine lineare homogene Funktion von $y'_1 - y_2, y'_2 - y_3, \ldots, y'_{f-1} - y_f, \frac{dy_f}{dx} + s_{f1} y_1 + s_{f2} y_2 + \cdots + s_{ff} y_f$ bedeutet. Differentiiert man dann $\frac{dY_1}{dx} = Y_2 + L_1$ weiter und führt für die bei den aufeinanderfolgenden Differentiationen rechter Hand der Reihe nach auftretenden Ableitungen $\frac{dY_i}{dx}$ $(i = 2, 3, \ldots)$ aus Formel (17) Y_{i+1} ein, so gewinnt man die folgenden Relationen: Zunächst, wie schon angegeben, $\frac{dY_1}{dx} = Y_2 + L_1$, dann weiter $\frac{d^2 Y_1}{dx^2} = Y_3 + L_2$, $\frac{d^3 Y_1}{dx^3} = Y_4 + L_3$, $\ldots$, $\frac{d^g Y_1}{dx^g} = Y_{g+1} + L_g$; hierbei bedeuten $L_1, L_2, \ldots, L_g$ lineare homogene Funktionen von $y'_1 - y_2$,

$y_2' - y_3, \ldots, y_{f-1}' - y_f, \dfrac{dy_f}{dx} + s_{f1} y_1 + s_{f2} y_2 + \cdots + s_{ff} y_f$ und ihren Ableitungen. Aus der Gleichung (16) ergibt sich nunmehr

$$(18)\left\{\begin{aligned} v_{g1} Y_1 + v_{g2} \frac{dY_1}{dx} + \cdots + v_{gg} \frac{d^{g-1} Y_1}{dx^{g-1}} + \frac{d^g Y_1}{dx^g} = v_{g2} L_1 + v_{g3} L_2 + \cdots \\ + v_{gg} L_{g-1} + L_g. \end{aligned}\right.$$

Wir wählen die willkürlichen Funktionen $y_2, y_3, \ldots, y_f$ gleich $y_1', y_2', \ldots, y_{f-1}'$, also $y_i = \dfrac{d^{i-1} y_1}{dx^{i-1}}$; alsdann geht die rechte Seite von (18) über in eine lineare homogene Funktion des Differentialausdruckes

$$\frac{d^f y_1}{dx^f} + s_{f1} y_1 + s_{f2} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + s_{ff} \frac{d^{f-1} y_1}{dx^{f-1}}$$

und seiner Ableitungen. Unsere Wahl ist nämlich so getroffen, daß $y_1' - y_2, y_2' - y_3, \ldots, y_{f-1}' - y_f$ verschwinden.

Zur Abkürzung setzen wir

$$S = s_{f1} y_1 + s_{f2} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + s_{ff} \frac{d^{f-1} y_1}{dx^{f-1}} + \frac{d^f y_1}{dx^f}.$$

Nunmehr können wir die Relation (18) auch schreiben

$$(19)\left\{\begin{aligned} v_{g1}(q_{11} y_1) + v_{g2} \frac{d(q_{11} y_1)}{dx} + \cdots + v_{gg} \frac{d^{g-1}(q_{11} y_1)}{dx^{g-1}} + \frac{d^g (q_{11} y_1)}{dx^g} \\ = \mu_0 S + \mu_1 \frac{dS}{dx} + \cdots + \mu_h \frac{d^h S}{dx^h}; \end{aligned}\right.$$

dabei ist $Y_1 = q_{11} y_1$ gesetzt und beachtet worden, daß die rechte Seite eine lineare homogene Funktion von S und von seinen Ableitungen ist. Wir nehmen nun an, daß der Rationalitätsbereich Σ nicht aus lauter Konstanten besteht und wählen für q_{11} irgendeine Funktion $f(x)$ aus Σ, die keine Konstante ist, und ihre Potenzen f^2, f^3, f^{g+1}. Alsdann erhält man aus (19) die $g+1$ Gleichungen

$$(20)\left\{\begin{aligned}
&v_{g1}(fy_1)+v_{g2}\frac{d(fy_1)}{dx}+\cdots+v_{gg}\frac{d^{g-1}(fy_1)}{dx^{g-1}}+\frac{d^g(fy_1)}{dx^g}\\
&\qquad\qquad=\mu_{00}S+\mu_{10}\frac{dS}{dx}+\cdots+\mu_{h0}\frac{d^hS}{dx^h},\\
&v_{g1}(f^2y_1)+v_{g2}\frac{d(f^2y_1)}{dx}+\cdots+v_{gg}\frac{d^{g-1}(f^2y_1)}{dx^{g-1}}+\frac{d^g(f^2y_1)}{dx^g}\\
&\qquad\qquad=\mu_{01}S+\mu_{11}\frac{dS}{dx}+\cdots+\mu_{h1}\frac{d^hS}{dx^h},\\
&\vdots\\
&v_{g1}(f^{g+1}y_1)+v_{g2}\frac{d(f^{g+1}y_1)}{dx}+\cdots+v_{gg}\frac{d^{g-1}(f^{g+1}y_1)}{dx^{g-1}}+\frac{d^g(f^{g+1}y_1)}{dx^g}\\
&\qquad\qquad=\mu_{0g}S+\mu_{1g}\frac{dS}{dx}+\cdots+\mu_{hg}\frac{d^hS}{dx^h}.
\end{aligned}\right.$$

Für die in (19) rechts auftretenden Größen $\mu_i\,(i=0,1,2,\ldots,h)$, die von der Wahl des q_{11} abhängen, haben wir $\mu_{i0},\mu_{i1},\ldots,\mu_{ig}$ $(i=0,1,2,\ldots,h)$ gesetzt. Die $g+1$ Gleichungen (20) lassen sich als ein lineares unhomogenes Gleichungssystem für die Größen $v_1, v_2, \ldots, v_g, 1$ ansehen. Die Determinante lautet

$$\begin{vmatrix}
fy_1 & \frac{dfy_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{g-1}fy_1}{dx^{g-1}} & \frac{d^gfy_1}{dx^g}\\
f^2y_1 & \frac{df^2y_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{g-1}f^2y_1}{dx^{g-1}} & \frac{d^gf^2y_1}{dx^g}\\
\vdots & & & & \\
f^{g+1}y_1 & \frac{df^{g+1}y_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{g-1}f^{g+1}y_1}{dx^{g-1}} & \frac{d^gf^{g+1}y_1}{dx^g}
\end{vmatrix};$$

diese ist nach einem bekannten Determinantensatz gleich $y_1^{g+1}\cdot W(f,f^2,\ldots,f^{g+1})$, wobei $W(f,f^2,\ldots,f^{g+1})$ die WRONSKIsche Determinante der Funktionen $f,f^2,\ldots,f^{g+1}$ bedeutet. Da die Funktionen $f,f^2,\ldots,f^{g+1}$ nicht in linearer Dependenz $c_1f+c_2f^2+\cdots+c_{g+1}f^{g+1}=0$ mit konstanten Koeffizienten stehen, verschwindet $W(f,f^2,\ldots,f^{g+1})$ nicht. Da demnach $y_1^{g+1}W(f,f^2,\ldots,f^{g+1})$ nicht Null ist, lassen sich aus dem linearen unhomogenen Gleichungssystem (20) die $g+1$ Größen $v_{g1}, v_{g2}, \ldots, v_{gg}, 1$ eindeutig bestimmen. Im besonderen findet man für die letztere:

$$1 = \begin{vmatrix} f y_1 & \dfrac{d(f y_1)}{dx} & \cdots & \dfrac{d^{g-1}(f y_1)}{dx} & \mu_{00} S + \mu_{10} \dfrac{dS}{dx} + \cdots + \mu_{h0} \dfrac{d^h S}{dx^h} \\ f^2 y_1 & \dfrac{d(f^2 y_1)}{dx} & \cdots & \dfrac{d^{g-1}(f^2 y_1)}{dx} & \mu_{01} S + \mu_{11} \dfrac{dS}{dx} + \cdots + \mu_{h1} \dfrac{d^h S}{dx^h} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ f^{g+1} y_1 & \dfrac{d(f^{g+1} y_1)}{dx} & \cdots & \dfrac{d^{g-1}(f^{g+1} y_1)}{dx^{g-1}} & \mu_{0g} S + \mu_{1g} \dfrac{dS}{dx} + \cdots + \mu_{hg} \dfrac{d^h S}{dx^h} \end{vmatrix}$$

$$: y_1^{g+1} W(f, f^2, \ldots, f^{g+1}).$$

Entwickelt man die auf der rechten Seite im Zähler stehende Determinante nach den Elementen der letzten Spalte, so erhält man eine Gleichung der Form

$$(21) \qquad 1 = \left(Q_0 S + Q_1 \frac{dS}{dx} + \cdots + Q_h \frac{d^h S}{dx^h}\right) : y_1^{g+1} W(f, f^2, \ldots, f^{g+1});$$

dabei hängen $Q_0, Q_1, \ldots, Q_h$ ganz und rational ab von den Funktionen μ_{ik} $(i=0,1,2,\ldots,h;\ k=0,1,2,\ldots,g)$, von der Funktion $f(x)$ und ihren Ableitungen sowie von der Unbestimmten y_1 und ihren Ableitungen. Bedient man sich der Integralexistenz, so sieht man die Unmöglichkeit der Gleichung (21) folgendermaßen ein: η sei ein Integral der linearen homogenen Differentialgleichung

$$S = s_{f1} y_1 + s_{f2} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + s_{ff} \frac{d^{f-1} y_1}{dx^{f-1}} + \frac{d^f y_1}{dx^f} = 0.$$

Setzt man in (21) für die Unbestimmte y_1 die Funktion η, so verschwindet auf der rechten Seite der Formel (21) der Zähler, während der Nenner $\eta^{g+1} W(f, f^2, \ldots, f^{g+1})$ ungleich Null ist. Man erhält mithin die unrichtige Gleichung $1=0$. Diese zeigt, daß unsere Annahme unmöglich ist. Wählt man also in (11) für q_{11} der Reihe nach die Funktionen $f, f^2, \ldots, f^{g+1}$, so kommt man mindestens einmal zu einem Funktionensystem $u_1, u_2, \ldots, u_{g+1}$, das n i c h t in linearer Dependenz ist. Da dies dem bereits erledigten vorigen Fall entspricht, ist unser Satz endgültig bewiesen.

Will man die Unmöglichkeit der Gleichung (21) ohne die Integralexistenz zeigen, so kann dieser Nachweis nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn Professor A. HURWITZ, dem ich hierfür verbindlichst danke, folgendermaßen geführt werden: Die Gleichung (21) soll für jede Wahl der Unbestimmten y_1 richtig sein, also auch im besonderen, wenn für y_1 eine ganze rationale Funktion von x gewählt wird. Man setze:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{f+h} x^{f+h}, \\
y_1' &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + (f+h)\, a_{f+h} x^{f+h-1}, \\
y_1'' &= 2a_2 + 3\cdot 2 a_3 x + \cdots + (f+h)\cdot(f+h-1)\, a_{h+f} x^{f+h-2}, \\
&\;\vdots \\
y_1^{(f+h)} &= (f+h)!\, a_{h+f}.
\end{aligned}
$$

Jede der zur Bildung der rechten Seite von (21) verwandten Funktionen besitzt nach Voraussetzung als Funktion des Rationalitätsbereiches innerhalb ein und desselben Gebietes S der Ebene nur eine endliche Anzahl von Singularitäten, also trifft dies auch für die endliche Gesamtheit der benützten Funktionen zu. Unter den Stellen, an denen alle diese Funktionen gleichzeitig regulär sind, wähle man eine solche x_0, für die $W(f, f^2, \ldots, f^{g+1}) \neq 0$ ist. Da die genannte Funktion nicht identisch verschwindet, ist dies möglich. Über die Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_{f+h}$ verfüge man so, daß man für $x = x_0$ erhält $y_1 = w_0, y_1' = w_1, y_1'' = w_2, \ldots, y_1^{(f+h)} = w_{f+h}$, unter $w_0, w_1, \ldots, w_{f+h}$ beliebig gewählte Größen verstanden. Durch diese Bestimmung gehen

$$
\begin{aligned}
S &= s_{f1} y_1 + s_{f2} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + s_{ff} \frac{d^{f-1} y_1}{dx^{f-1}} + \frac{d^f y_1}{dx^f}, \\
\frac{dS}{dx} &= s_{f1}^{(1)} y_1 + s_{f2}^{(1)} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + s_{f\,f+1}^{(1)} \frac{d^f y_1}{dx^f} + \frac{d^{f+1} y_1}{dx^{f+1}}, \\
\frac{d^2 S}{dx^2} &= s_{f1}^{(2)} y_1 + s_{f2}^{(2)} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + s_{f\,f+2}^{(2)} \frac{d^{f+1} y_1}{dx^{f+1}} + \frac{d^{f+2} y_1}{dx^{f+2}}, \\
&\;\vdots \\
\frac{d^h S}{dx^h} &= s_{f1}^{(h)} y_1 + s_{f2}^{(h)} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + s_{f,f+h}^{(h)} \frac{d^{f+h-1} y_1}{dx^{f+h-1}} + \frac{d^{f+h} y_1}{dx^{f+h}}
\end{aligned}
$$

über in

$$\begin{aligned}
\overline{S} &= s_{f1}(x_0)\,w_0 + s_{f2}(x_0)\,w_1 + \cdots + s_{ff}(x_0)\,w_{f-1} + w_f\,, \\
\frac{d\overline{S}}{dx} &= s_{f1}^{(1)}(x_0)\,w_0 + s_{f2}^{(1)}(x_0)\,w_1 + \cdots + s_{ff+1}^{(1)}(x_0)\,w_f + w_{f+1}\,, \\
\frac{d^2\overline{S}}{dx^2} &= s_{f1}^{(2)}(x_0)\,w_0 + s_{f2}^{(2)}(x_0)\,w_1 + \cdots + s_{ff+2}^{(2)}(x_0)\,w_{f+1} + w_{f+2}\,, \\
&\vdots \\
\frac{d^h\overline{S}}{dx^h} &= s_{f1}^{(h)}(x_0)\,w_0 + s_{f2}^{(h)}(x_0)\,w_1 + \cdots + s_{ff+h}^{(h)}(x_0)\,w_{f+h-1} + w_{f+h} \text{ [1]}.
\end{aligned}$$

Die willkürlichen Unbestimmten $w_f, w_{f+1}, \ldots, w_{f+h}$ wähle man nun derart, daß $\overline{S}, \frac{d\overline{S}}{dx}, \ldots, \frac{d^h\overline{S}}{dx^h}$ verschwinden. Dann nimmt die rechte Seite von (21) für $x = x_0$ den Wert 0 an, und man kommt wiederum zu der unmöglichen Gleichung $1 = 0$.

§ 3.

Wir kehren zu der Begleitmatrix des § 1 zurück. $\mathfrak{B}$ sei eine Begleitmatrix von $\mathfrak{M}$; es bestehe also die zu Anfang des Aufsatzes in der Einleitung angegebene Relation:

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{M}\,.$$

Es sei (y) die spezielle Matrix

$$\left\Vert \begin{matrix} y_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ y_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\Vert$$

und entsprechend $\left(\frac{dy}{dx}\right) = y'$ die durch Differentiation der Elemente

[1] Die hier auftretenden Konstanten $s_{fi}^{(k)}(x_0)$ gehören natürlich im allgemeinen nicht dem Rationalitätsbereich Σ an.

der ersten Spalte aus ihr hervorgehende Matrix. Dann folgt aus (1) durch rechtshändige Multiplikation mit (y) und Addition von $\mathfrak{P}(y') = \mathfrak{P}(y')$ die Relation

$$\mathfrak{B}_n \mathfrak{P}(y) + \mathfrak{P}'(y) + \mathfrak{P}(y') = \mathfrak{P}\mathfrak{M}(y) + \mathfrak{P}(y') . \tag{22}$$

Wir betrachten die ersten m in § 1 unter (6) angegebenen Gleichungen

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} z_1 = p_{11}\, y_1 + p_{12}\, y_2 + \cdots + p_{1n}\, y_n , \\ z_2 = p_{21}\, y_1 + p_{22}\, y_2 + \cdots + p_{2n}\, y_n , \\ \vdots \\ z_m = p_{m1}\, y_1 + p_{m2}\, y_2 + \cdots + p_{mn}\, y_n . \end{array} \right.$$

Wir führen die n reihige spezielle Matrix $(z)_n$

$$\left\| \begin{array}{cccc} z_1 & 0 & \ldots & 0 \\ z_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ z_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|$$

ein und bezeichnen mit $\left(\frac{dz}{dx}\right)_n = (z')_n$ die durch Differentiation der Elemente aus ihr hervorgehende Matrix. Dann schreiben sich die Gleichungen (23) symbolisch $(z)_n = \mathfrak{P}(y)$, und die Relation (22) geht über in

$$\mathfrak{B}_n (z)_n + (z')_n = \mathfrak{P}\left(\mathfrak{M}(y) + (y')\right) ; \tag{24}$$

dabei wurde beachtet, daß sich aus $(z)_n = \mathfrak{P}(y)$ durch Differentiation $(z')_n = \mathfrak{P}'(y) + \mathfrak{P}(y')$ ergibt.

Wählt man für die bisher unbestimmten Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Integrale des Differentialsystems $\mathfrak{M}(y) + (y') = 0$, so geht (24) über in $\mathfrak{B}_n (z)_n + (z')_n = 0$. Da sowohl $\mathfrak{B}_n (z)_n$ als auch $(z')_n$ in den letzten $n-m$ Zeilen nur Nullen enthalten, kann man statt $\mathfrak{B}_n (z)_n + (z')_n = 0$ auch schreiben $\mathfrak{B}(z) + (z') = 0$, unter (z) und (z') die aus $(z)_n$ und $(z')_n$ durch Streichen der letzten $n-m$ Zeilen hervorgehenden Matrizen verstanden. Die erhaltene Gleichung $\mathfrak{B}(z)+(z')=0$ besagt, daß $z_1, z_2, \ldots, z_m$ Integrale des Differentialgleichungssystems $\mathfrak{B}(z)+(z')=0$ sind, wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n$ solche von $\mathfrak{M}(y)+(y')=0$ bedeuten.

Nach den Gleichungen (5) ist

$$(25)\quad \left|\begin{aligned} z_{i+1} &= p_{i+1,1}\, y_1 + p_{i+1,2}\, y_2 + \cdots + p_{i+1,n}\, y_n \\ &= p'_{i1}\, y_1 + p'_{i2}\, y_2 + \cdots + p'_{in}\, y_n \\ &- \sum_{s=1}^{s=n} p_{is}\left(m_{s1}\, y_1 + m_{s2}\, y_2 + \cdots + m_{sn}\, y_n\right). \end{aligned}\right.$$

Genügen nun $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dem Differentialsystem $\mathfrak{M}(y)+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0$, so geht (25) über in

$$z_{i+1} = p'_{i1}\, y_1 + p'_{i2}\, y_2 + \cdots + p'_{in}\, y_n + p_{i1}\, y'_1 + p_{i2}\, y'_2 + \cdots + p_{in}\, y'_n = z'_i.$$

Man hat daher $z_{i+1}=z_1^{(i)}$, wobei $z_1^{(i)}$ die i-te Abgeleitete von z_1 bedeutet $(i=1, 2, \ldots, m-1)$.

Es mögen $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ Funktionen sein, die, für $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gesetzt, das Differentialsystem $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)+\mathfrak{M}(y)=0$ vollständig integrieren, d. h. es sei die Determinante n-ten Grades $|y_{ik}|$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ ungleich Null. $z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{mk}$ seien die $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$ entsprechenden Funktionen, die sich aus den Gleichungen (23) ergeben, wenn man $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$ ersetzt. Dann sind, wie bewiesen, erstens $z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{mk}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ Integrale des Differentialsystems $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)+\mathfrak{B}(z)=0$, zweitens ist $z_{i+1,k}=z_{1,k}^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, m-1)$, wobei $z_{1,k}^{(i)}$ die i-te Abgeleitete von $z_{1,k}$ bedeutet. Bildet man weiter die Matrix

$$(26)\quad \left\|\begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & & & \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{1s}\, y_{s1} & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{1s}\, y_{s2} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{1s}\, y_{sn} \\ \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{2s}\, y_{s1} & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{2s}\, y_{s2} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{2s}\, y_{sn} \\ \vdots & & & \\ \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{ms}\, y_{s1} & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{ms}\, y_{s2} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{ms}\, y_{sn} \end{matrix}\right\|,$$

so hat diese den Rang m; denn sie ergibt sich durch Komposition der Matrix

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{matrix}$$

vom Range m mit der Matrix $\|y_{ik}\|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ n-ten Grades von nicht verschwindender Determinante. Man kann also unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ stets m solche $l_1, l_2, \ldots, l_m$ finden, daß $z_{1l}, z_{2l}, \ldots, z_{ml}$ $(l = l_1, l_2, \ldots, l_m)$ ein vollständiges Lösungssystem von $\mathfrak{B}(z) + \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ bilden. d. h. daß sie Integrale sind, für die die Determinante $|z_{il}|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ l = l_1, l_2, \ldots, l_m)$ m-ten Grades ungleich Null ist. Da $z_{i+1,k} = z_{1k}^{(i)}$ ist, sind dann $z_{1l_1}, z_{1l_2}, \ldots, z_{1l_m}$ ein Fundamentalsystem der durch das Differentialsystem $\mathfrak{B}(z) + \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung $B = 0$ oder, ausführlich geschrieben: $b_1 z_1 + b_2 \frac{dz_1}{dx} + b_3 \frac{d^2 z_1}{dx^2} + \cdots + b_m \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \frac{d^m z_1}{dx^m} = 0$, der Sequente, die durch die Matrix $\mathfrak{B}$ bestimmt ist.

Wir haben daher den Satz:

$\mathfrak{B}$ sei eine Begleitmatrix einer gegebenen Matrix $\mathfrak{M}$. Die zwei Matrizen seien miteinander durch die Relation (1) $\mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{M}$ verknüpft. Durchlaufen dann $y_1, y_2, \ldots, y_n$ alle Lösungen des Differentialgleichungssystems $\sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} y_i + \frac{dy_i}{dx} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, symbolisch geschrieben $\mathfrak{M}(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, und entnimmt man die Größen p_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ der Matrix $\mathfrak{P}$, so umfassen die Funktionen

$$z_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \cdots + p_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

alle Integrale des Differentialgleichungssystems $\mathfrak{B}(z) + \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ und auch keine anderen Funktionen. Da $\mathfrak{B}$ eine Begleitmatrix ist, lautet das zuletzt hingeschriebene Differentialgleichungssystem ausführlich:

$$\frac{dz_i}{dx} - z_{i+1} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m-1), \ \frac{dz_m}{dx} + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_m z_m = 0,$$

und z_{i+1} ist die i-te Abgeleitete von $z_1 (i = 1, 2, \ldots, m-1)$. Weiter liefert die Funktion z_1 alle Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung

$$B = b_1 z_1 + b_2 \frac{dz_1}{dx} + b_3 \frac{d^2 z_1}{dx^2} + \cdots + b_m \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \frac{d^m z_1}{dx^m} = 0,$$

und z_1 umfaßt auch keine anderen Funktionen als die Integrale dieser aus der Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ hervorgehenden Sequente $B = 0$.

Umgekehrt gilt:

Es seien $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ Funktionen des Rationalitätsbereiches Σ, $z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n$, und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Integrale des Differentialgleichungssystems $\sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} y_k + \frac{dy_i}{dx} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ oder, symbolisch geschrieben, $\mathfrak{M}(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$. Die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der die Funktion

$$z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n$$

genügt, ist eine Sequente B von $\mathfrak{M}$. Diese Differentialgleichung niedrigster Ordnung findet man auf folgende Weise: Man differentiere $z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n$ und beseitige rechter Hand die Abgeleiteten

$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ durch das Differentialgleichungssystem $\mathfrak{M}(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$. Das sich dann ergebende Gleichungssystem

$$(G) \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n, \\ \frac{dz_1}{dx} = p_{21} y_1 + p_{22} y_2 + \cdots + p_{2n} y_n, \\ \frac{d^2 z_1}{dx^2} = p_{31} y_1 + p_{32} y_2 + \cdots + p_{3n} y_n, \\ \vdots \\ \frac{d^m z_1}{dx^m} = p_{m+1,1} y_1 + p_{m+1,2} y_2 + \cdots + p_{m+1,n} y_n \end{array} \right.$$

führe man soweit, daß die von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linear und homogen abhängigen Funktionen $z_1, \frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}$ unabhängig sind, aber bei Hinzunahme von $\frac{d^m z_1}{dx^m}$ in Dependenz stehen. Lautet die zwischen ihnen bestehende Gleichung

$$B = b_1 z_1 + b_2 \frac{dz_1}{dx} + b_3 \frac{d^2 z_1}{dx^2} + \cdots + b_m \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \frac{d^m z_1}{dx^m} = 0,$$

so ist dies die gesuchte lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der die Funktion z_1 genügt. Bildet man aus B die Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ und aus den Koeffizienten p_{ik} $(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$ der ersten m linear unabhängigen Gleichungen von (G) die Matrix $\mathfrak{P}$, so ist (1) $\mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{M}$.

Sind $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ ein vollständiges Lösungssystem von $\mathfrak{M}(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, d. h. ein solches von nicht verschwindender Determinante $|y_{ik}|$, so hat die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der z_1 genügt, die Funktionen

$$z_{1k} = p_{11} y_{1k} + p_{12} y_{2k} + \cdots + p_{1n} y_{nk} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

zu Integralen. Bildet man nun die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \dfrac{dz_{11}}{dx} & \dfrac{dz_{12}}{dx} & \cdots & \dfrac{dz_{1n}}{dx} \\ \dfrac{d^2 z_{11}}{dx^2} & \dfrac{d^2 z_{12}}{dx^2} & \cdots & \dfrac{d^2 z_{1n}}{dx^2} \\ \dfrac{d^{m-1} z_{11}}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-1} z_{12}}{dx^{m-1}} & \cdots & \dfrac{d^{m-1} z_{1n}}{dx^{m-1}} \end{matrix} \right\|,$$

so hat diese nach den Gleichungen (G) den Wert

$$\left\| \begin{matrix} \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{1s} y_{s1} & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{1s} y_{s2} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{1s} y_{sn} \\ \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{2s} y_{s1} & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{2s} y_{s2} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{2s} y_{sn} \\ \vdots & & & \\ \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{ms} y_{s1} & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{ms} y_{s2} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{s=n} p_{ms} y_{sn} \end{matrix} \right\|$$

und mithin den Rang m; denn sie entsteht durch Komposition der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

die infolge der Unabhängigkeit der ersten m Gleichungen von (G) den Rang m hat, mit der Matrix $\|y_{ik}\|$ $(i, k=1,2,\ldots,n)$ von nicht verschwindender Determinante. Demnach umfaßt $z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n$, wenn die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jedes Integralsystem von $\mathfrak{M}(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ durchlaufen, m linear unabhängige Funktionen; folglich muß die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, der z_1 genügt, mindestens von der Ordnung m sein. Da die aus dem System (G) durch Elimination hervorgehende lineare homogene Differentialgleichung die Ordnung m besitzt und offenbar auch durch $z_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n$ befriedigt wird, wenn die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jedes Integralsystem von $\mathfrak{M}(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ durchlaufen, ergibt sich zunächst, daß die aus (G) durch den Eliminationsprozeß abgeleitete Gleichung die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ ist, der z_1 genügt. Es ist noch zu zeigen, daß diese eine Sequente von $\mathfrak{M}$ ist. Zu dem Zweck betrachten wir zunächst die durch das Gleichungssystem (G) eingeführten Koeffizienten; diese erfüllen nach der Art der Bildung von (G), die in Differentiation und in Beseitigung von $\frac{dy_i}{dx}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ durch $\mathfrak{M}(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ bestand, die Relationen

$$(5) \qquad p_{i+1,k} = p'_{ik} - \sum_{s=1}^{s=n} p_{is}\, m_{sk} \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n).$$

Will man nun ausgehend von $z_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n$, unter $y_1, y_2, \ldots, y_n$ willkürliche Funktionen verstanden, eine Sequente des Differentialsystems $\mathfrak{M}(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)$ bilden, wie dies in § 1 beschrieben ist, so hat man einfach zu setzen

$$z_i = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \cdots + p_{in}y_n \qquad (i=1,2,\ldots)$$

und soweit zu gehen, daß $z_1, z_2, \ldots, z_l$ linear unabhängig sind, $z_1, z_2, \ldots, z_{l+1}$ in Dependenz stehen. Werden diese durch die Relation $b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_l z_l + z_{l+1} = 0$ verbunden, so ist

$$B \equiv b_1 z_1 + b_2 \frac{dz_1}{dx} + \cdots + b_l \frac{d^{l-1}z_1}{dx^{l-1}} + \frac{d^l z_1}{dx^l}$$

eine Sequente der Matrix $\mathfrak{M}$. Daher hat die lineare homogene Differentialgleichung $B=0$, wie im vorigen Satze bewiesen, alle in $z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n$ enthaltenen Funktionen und auch keine anderen zu Integralen, wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jedes Integralsystem von $\mathfrak{M}(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ durchlaufen. Infolgedessen hat $B=0$ dieselben Integrale wie die durch Elimination aus dem System (G) gewonnene Differentialgleichung, und beide müssen mithin identisch sein. Insbesondere ist daher $l=m$. Da B eine Sequente von $\mathfrak{M}$ ist, besteht auch noch die Relation (1) $\mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{M}$; dabei geht $\mathfrak{B}_n$ durch Beifügen von Nullen aus der durch B definierten Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ hervor und $\mathfrak{P}$ bedeutet die aus den Elementen p_{ik} $(i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$ gebildete Matrix. Hiermit sind alle in unserem Satz gemachten Aussagen bewiesen.

Enthält der Rationalitätsbereich Σ eine wirkliche Funktion von x, so kann man, wie im § 2 bewiesen wurde, durch geeignete Wahl der Größen $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ eine Begleitmatrix $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ des höchsten Grades n und daher auch eine Sequente B der höchsten Ordnung n gewinnen. Verfügt man über $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ derart, so besitzt die mit der Sequente B übereinstimmende lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die durch $z_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n$ befriedigt wird, ebenfalls die höchste Ordnung n. Anders ausgedrückt: Man kann erreichen, daß $z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}}$ bei dem Gleichungssystem (G) unabhängig sind, also die Determinante $|p_{ik}|$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ nicht verschwindet[1]). Hiermit ist auch das zweite in der Einleitung angegebene Resultat bewiesen.

[1]) Infolgedessen ist nachgewiesen, daß die von Herrn L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin, 1908, S. 156 ff. betrachtete Determinante $|r_{ik}|$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ nicht für jede Wahl der $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1n}$ identisch verschwinden kann, wenn der Rationalitätsbereich eine Funktion von x enthält. Ein identisches Verschwinden der Determinante $|r_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ für jede Wahl der $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1n}$ kann nur eintreten, wenn der Rationalitätsbereich bloß aus Konstanten besteht und die reduzierte charakteristische Funktion der Matrix $-\mathfrak{M}$ [bei Herrn Schlesinger ist die Matrix $-\mathfrak{M}$ mit $A = \|a_{ik}\|$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet] einen Grad $m < n$ hat. Auch hier kann nicht zwischen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eine homogene lineare Relation mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereich bestehen; denn eine solche würde das Verschwinden

der Determinante $|y_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ einer jeden Integralmatrix nach sich ziehen, was unmöglich ist. Lautet im Falle des Rationalitätsbereiches mit konstanten Koeffizienten die reduzierte charakteristische Funktion von $-\mathfrak{M}$: $b_1 + b_2\,\varrho + b_3\,\varrho^2 + \cdots + b_m\,\varrho^{m-1} + \varrho^m = 0$, so genügt, wenn $c_1, c_2, \ldots, c_n$ willkürliche Konstante und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Integrale von $\mathfrak{M}(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ bedeuten, jede Funktion $z_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ derselben festen linearen homogenen Differentialgleichung

$$b_1 z_1 + b_2 \frac{d z_1}{d x} + b_3 \frac{d^2 z_1}{d x^2} + \cdots + b_m \frac{d^{m-1} z_1}{d x^{m-1}} + \frac{d^m z_1}{d x^m} = 0,$$

die aus der reduzierten charakteristischen Funktion hervorgeht. Mithin besteht zwischen $m+1$ Elementen eines jeden partikulären Lösungssystems des gegebenen Differentialgleichungssystems $\mathfrak{M}(y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ eine Relation mit konstanten Koeffizienten, die sich mit der Wahl des Lösungssystems ändert. In diesem Sinne ist die Angabe bei Herrn SCHLESINGER a. a. O. S. 158, Zeile 16—21 zu präzisieren.