Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Dynamik. IV.**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1918, 17

Nach Transformation der Hamiltonschen Differentialgleichungssysteme auf die der weiteren Untersuchung zugrunde gelegte Normalform wird die spezielle Form dieser Gleichungen aufgestellt, wenn die Annahme gemacht wird, daß die Integralsysteme derselben endliche, reell und positiv vorausgesetzte Ordnungszahlen besitzen sollen. Sodann werden, ohne diese Voraussetzungen zu machen, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Differentialgleichungen im Nullpunkte der unabhängigen Variabeln verschwindende und in der Umgebung dieses Punktes eindeutige Integrale besitzen, und endlich die Bedingungen erörtert, unter denen die Differentialgleichungen Integralsysteme haben, deren Elemente mehrdeutig sind, und die Form dieser entwickelt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1919, S. XI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1918. 17. Abhandlung

Über die HAMILTONschen Differentialgleichungen der Dynamik

IV.

Von

LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

Eingegangen am 26. Dezember 1918

Heidelberg 1918
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1463

11.

Um die in dem letzten Abschnitte behandelte Reduktion eines Differentialgleichungssystems von der Form

$$
(1)\quad \begin{cases}
u\dfrac{dx_1}{du} = \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \cdots + \mu_{1n}x_n + a_1 u + \sum A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}\ldots \\
u\dfrac{dx_2}{du} = \mu_{21}x_1 + \mu_{22}x_2 + \cdots + \mu_{2n}x_n + a_2 u + \sum B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2}\ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u\dfrac{dx_n}{du} = \mu_{n1}x_1 + \mu_{n2}x_2 + \cdots + \mu_{nn}x_n + a_n u + \sum S u^s x_1^{s_1} x_2^{s_2}\ldots,
\end{cases}
$$

in welchem die Summen Σ endliche oder unendliche eindeutige Potenzreihen darstellen, die von einer additiven Konstanten frei sind und in den Variabeln lineare, mit Konstanten multiplizierte Glieder nicht enthalten, auf die in den nachfolgenden Untersuchungen der HAMILTONschen Differentialgleichungen zugrunde gelegte Normalform durchzuführen, unabhängig davon, ob die früher erhaltene Determinante

$$
(2)\qquad D = \begin{vmatrix}
\mu_{11}-M & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\
\mu_{21} & \mu_{22}-M & \ldots & \mu_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu_{n1} & \mu_{n2} & \ldots & \mu_{nn}-M
\end{vmatrix}
$$

nur verschiedene oder auch zum Teil gleiche Lösungen besitzt, multipliziere man die Differentialgleichungen (1) mit noch zu bestimmenden Konstanten $A_1, A_2, \ldots A_n$, setze

$$
(3)\qquad A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = X_1,
$$

ferner

$$(4)\begin{cases} A_1\mu_{11}+A_2\mu_{21}+\cdots+A_n\mu_{n1}=M_1A_1 \\ A_1\mu_{12}+A_2\mu_{22}+\cdots+A_n\mu_{n2}=M_1A_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1\mu_{1n}+A_2\mu_{2n}+\cdots+A_n\mu_{nn}=M_1A_n\,, \end{cases}$$

so daß sich M_1 als Lösung der Determinante $D=0$ ergibt, und bestimme die Größen $A_1, A_2, \ldots A_n$ durch das Gleichungssystem (4). Dann wird durch Addition der mit den Größen A multiplizierten Gleichungen (1) und Substitution von x_1, aus der Gleichung (3) durch $X_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt, das Differentialgleichungssystem hervorgehen:

$$(5)\begin{cases} u\dfrac{dX_1}{du}=M_1X_1+\alpha_1u+\sum A\,u^p X_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n} \\ u\dfrac{dx_2}{du}=\nu_{21}X_1+\nu_{22}x_2+\cdots+\alpha_2u+\sum B\,u^q X_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_n^{q_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u\dfrac{dx_n}{du}=\nu_{n1}X_1+\nu_{n2}x_2+\cdots+\alpha_nu+\sum S\,u^s X_1^{s_1}x_2^{s_2}\ldots x_n^{s_n}\,, \end{cases}$$

in welchem die rechte Seite der ersten Gleichung nur die abhängige Variable X_1 linear, mit einer Konstanten multipliziert, enthält, und die Summen Σ wiederum eindeutige Potenzreihen in den Variabeln $u, X_1, x_2, \ldots x_n$ sind, ähnlich gestaltet wie die oben gegebenen. Sieht man nun von der ersten Differentialgleichung ab und verfährt für die Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ mit dem in (5) übrigbleibenden System von $n-1$ Differentialgleichungen genau ebenso, wie oben mit dem System (1) geschehen, indem man die Gleichungen mit den Konstanten $B_2, B_3, \ldots B_n$ multipliziert, diese Gleichungen addiert,

$$(6)\qquad B_2x_2+B_3x_3+\cdots+B_nx_n=X_2$$

setzt und die Größen B aus den Gleichungen

$$(7)\begin{cases} B_2\nu_{22}+B_3\nu_{32}+\cdots+B_n\nu_{n2}=M_2B_2 \\ B_2\nu_{23}+B_3\nu_{33}+\cdots+B_n\nu_{n3}=M_2B_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_2\nu_{2n}+B_3\nu_{3n}+\cdots+B_n\nu_{nn}=M_2B_n \end{cases}$$

bestimmt, so daß sich M_2 als Lösung der Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} \nu_{22} - M & \nu_{32} & \dots & \nu_{n2} \\ \nu_{23} & \nu_{33} - M & \dots & \nu_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_{2n} & \nu_{3n} & \dots & \nu_{nn} - M \end{vmatrix}$$

ergibt, so folgt, wenn x_2 aus (6) durch $X_2, x_3, \dots x_n$ linear ausgedrückt, in die Summen Σ der Gleichungen (5) substituiert und

$$B_2 \nu_{21} + B_3 \nu_{31} + \dots + B_n \nu_{n1} = \rho_{21}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$u \frac{dX_2}{du} = \rho_{21} X_1 + M_2 X_2 + \beta_2 u + \sum B u^q X_1^{q_1} X_2^{q_2} x_3^{q_3} \dots,$$

in welcher nur X_1 und X_2 linear mit Konstanten multipliziert vorkommen.

Schließt man so weiter, so ergibt sich allgemein ohne Einschränkung auf die Verschiedenheit der Lösungen der Determinante (2), wenn vermöge der sukzessiv eingeführten linearen Substitutionen die Größen $x_1, x_2, \dots x_n$ durch $X_1, X_2, \dots X_n$ ersetzt und sodann diese abhängigen Variabeln wieder mit $x_1, x_2, \dots x_n$ bezeichnet werden, die Möglichkeit der Reduktion des Differentialgleichungssystems (1) auf ein System der Form

$$(8) \begin{cases} u \dfrac{dx_1}{du} = M_1 x_1 + \gamma_1 u + \sum A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots \\ u \dfrac{dx_2}{du} = \rho_{21} x_1 + M_2 x_2 + \gamma_2 u + \sum B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots \\ u \dfrac{dx_3}{du} = \sigma_{31} x_1 + \sigma_{32} x_2 + M_3 x_3 + \gamma_3 u + \sum C u^r x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u \dfrac{dx_n}{du} = \tau_{n1} x_1 + \tau_{n2} x_2 + \dots + \tau_{n\,n-1} x_{n-1} + M_n x_n + \gamma_n u + \sum S u^s x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots, \end{cases}$$

während, wie früher gezeigt worden, unter der Annahme, daß die Lösungen der Determinante (2) sämtlich verschieden sind, die Reduktion des Differentialgleichungssystems (1) auf ein System von der Gestalt führt:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned} u\frac{dx_1}{du} &= M_1 x_1 + \gamma_1 u + \sum A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}\ldots \\ u\frac{dx_2}{du} &= M_2 x_2 + \gamma_2 u + \sum B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u\frac{dx_n}{du} &= M_n x_n + \gamma_n u + \sum S u^s x_1^{s_1} x_2^{s_2}\ldots, \end{aligned}\right.$$

worin $M_1, M_2, \ldots M_n$ die n verschiedenen Lösungen der Determinante (2) sind, und auf den rechten Seiten der Gleichungen stets nur je eine der abhängigen Variabeln linear mit einer Konstanten multipliziert vorkommt.

Um endlich noch die Bedingungen aufzustellen, unter denen man von der Form des Differentialgleichungssystems (8) zu der von (9) gelangen kann, greife man zwei aufeinanderfolgende Gleichungen des ersteren heraus, z. B.

$$u\frac{dx_2}{du} = \rho_{21} x_1 + M_2 x_2 + \gamma_2 u + \sum B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}\ldots$$

$$u\frac{dx_3}{du} = \sigma_{31} x_1 + \sigma_{32} x_2 + M_3 x_3 + \gamma_3 u + \sum C u^r x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3}\ldots,$$

multipliziere, um x_2 aus der zweiten dieser Gleichungen herauszuschaffen, diese beiden Gleichungen mit $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ und setze

$$(10)\qquad \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = X_3,$$

so erhält man durch Addition derselben

$$u\frac{dX_3}{du} = (\varkappa_2\rho_{21} + \varkappa_3\sigma_{31}) x_1 + (\varkappa_2 M_2 + \varkappa_3\sigma_{32}) x_2 + \varkappa_3 M_3 x_3 + (\varkappa_2\gamma_2 + \varkappa_3\gamma_3) u$$
$$+ \varkappa_2 \sum B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}\ldots + \varkappa_3 \sum C u^r x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3}\ldots,$$

und, wenn $\varkappa_2, \varkappa_3$ so bestimmt werden, daß wie oben

$$\left(\varkappa_2 M_2 + \varkappa_3 \sigma_{32}\right) x_2 + \varkappa_3 M_3 x_3 = \mathfrak{M} X_3 = \mathfrak{M}\left(\varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3\right),$$

also

$$(11) \qquad \varkappa_2\left(M_2 - \mathfrak{M}\right) + \varkappa_3 \sigma_{32} = 0, \quad \varkappa_3\left(M_3 - \mathfrak{M}\right) = 0$$

ist, durch Substitution von x_3, durch x_2 und X_3 aus (10) ausgedrückt:

$$u \frac{d X_3}{d u} = \varphi_{31} x_1 + \mathfrak{M} X_3 + \delta_3 u + \sum D u^{\varphi} x_1^{\varphi_1} x_2^{\varphi_2} X_3^{\varphi_3} \ldots,$$

worin $\varphi_{31}, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mathfrak{M}$ und δ_3 Konstanten sind. Da aber $\varkappa_3$ von Null verschieden sein muß, so folgt aus (11)

$$\mathfrak{M} = M_3, \quad \varkappa_2\left(M_2 - M_3\right) + \varkappa_3 \sigma_{32} = 0,$$

und es ergeben sich somit endliche Werte von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$, wenn nicht $M_2 = M_3$ ist; unter dieser Einschränkung werden sich also die beiden vorgelegten Differentialgleichungen durch das System

$$u \frac{d x_2}{d u} = \rho_{21} x_1 + M_2 x_2 + \gamma_2 u + \sum B' u^{q'} x_1^{q'_1} x_2^{q'_2} X_3^{q'_3} \ldots$$

$$u \frac{d X_3}{d u} = \sigma'_{31} x_1 + M_3 X_3 + \gamma'_3 u + \sum C' u^{r'} x_1^{r'_1} x_2^{r'_2} X_3^{r'_3} \ldots$$

ersetzen lassen, deren rechte Seiten, von x_1 abgesehen, nur je eine der beiden abhängigen Variabeln x_2 und X_3 linear, mit einer Konstanten multipliziert, enthalten.

Wir werden im folgenden sagen, daß zwei Funktionen von u, welche für $u = 0$ verschwinden, in diesem Punkte von derselben Ordnung Null sind, wenn ihr Quotient für $u = 0$ endlich ist, und es soll eine für $u = 0$ verschwindende Funktion $f(u)$ die reelle und positive Ordnungszahl m besitzen oder von der endlichen Ordnung m Null werden, wenn

$$\left(\frac{f(u)}{u^m}\right)_{u=0}$$

einen endlichen Wert hat, dagegen soll $f(u)$ von einer unendlich hohen oder einer unendlich kleinen Ordnung Null genannt werden, je nachdem

$$\left(\frac{f(u)}{u^{\eta}}\right)_{u=0} = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{f(u)}{u^{\varepsilon}}\right)_{u=0} = \infty,$$

wenn $\eta \equiv \infty$ und $\varepsilon \equiv 0$ konvergieren.

Nehmen wir nun an, daß die Ordnungszahlen der Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ eines für $u=0$ verschwindenden Integralsystems der oben auf die Normalform (9) reduzierten HAMILTONschen Differentialgleichungen die reellen positiven Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ sind, die zunächst sämtlich voneinander verschieden sein sollen, und setzt man

$$(12) \qquad \left(\frac{x_1}{u^{m_1}}\right)_0 = \xi_1^0, \quad \left(\frac{x_2}{u^{m_2}}\right)_0 = \xi_2^0, \ldots \left(\frac{x_n}{u^{m_n}}\right)_0 = \xi_n^0,$$

so daß $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0$ endliche Zahlen darstellen, so kann man die Differentialgleichungen (9), welche wir der Voraussetzung

$$(13) \qquad m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_n$$

gemäß geordnet annehmen dürfen, durch die Substitutionen

$$(14) \qquad x_1 = u^{m_1}\xi_1, \quad x_2 = u^{m_2}\xi_2, \ldots x_n = u^{m_n}\xi_n$$

in ein Differentialgleichungssystem mit den abhängigen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ transformieren und durch Vergleichung der Ordnungszahlen der beiden Seiten der so erhaltenen Differentialgleichungen auf die Beschaffenheit der Ordnungszahlen (13) selbst weitere Schlüsse ziehen.

Mit Hilfe der allgemeinen Bemerkung, daß *die Ordnungszahl einer Summe von Funktionen gleicher Ordnungzzahl eben dieser Ordnungszahl gleich oder größer als diese ist, und daß die Ordnungszahl einer Summe von Funktionen verschiedener Ordnungszahl gleich der kleinsten dieser Ordnungszahlen ist*, soll nun zunächst die erste Differentialgleichung des Systems (9):

$$(15) \qquad u\frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = \gamma_1 u + \sum A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots,$$

näher untersucht werden, für welche die Ordnungszahl der linken Seite $O(L)$ wegen

$$u\frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = (m_1 - M_1)\xi_1 u^{m_1} + u^{m_1+1}\frac{d\xi_1}{du}$$

wieder m_1 ist, wenn $m_1 \neq M_1$, oder größer als m_1, wenn $m_1 = M_1$.

Um die Ordnungszahl $O(R)$ der rechten Seite der Gleichung (15) zu bestimmen, bemerke man, daß

$$(16) \qquad O\left(A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}\right) = p + m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_n p_n$$

ist, und untersuche die Beschaffenheit der einzelnen Glieder, je nachdem diese Ordnungszahl $\lesseqgtr m_1$ ist.

Für die Annahme

$$p + m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_n p_n < m_1$$

ergibt sich vermöge (13) $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ und $p < m_1$, während aus

$$p + m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_n p_n = m_1$$

die Werte $p_1 = 1, p = p_2 = \cdots = p_n = 0$, oder $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0, p = m_1$ folgen, von denen die erste Kombination durch das Glied $M_1 x_1$ bereits aus der Summe herausgenommen ist. Es besteht also zunächst unter diesen beiden Voraussetzungen die Summe Σ aus reinen u-Potenzen und es hat somit (16) die Form

$$a_1 u^{\pi_1} + a_2 u^{\pi_2} + \cdots + a_\rho u^{\pi_\rho} + a u^{m_1} + \sum_{(p+m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_np_n > m_1)} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n},$$

worin die positiven ganzen Zahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\rho < m_1$, und die Summe nur Glieder enthält, deren Ordnungszahl größer als m_1 ist; die für die Summationsindizes von Σ zu erfüllende Ungleichheit, welche wir von nun an durch $\sum\limits_{>m_1}$ in die Bezeichnung der Summe aufnehmen wollen, wird wegen (13) im allgemeinen befriedigt sein, nur, wenn $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = 0$ sind, muß die Bedingung $p + m_1 p_1 > m_1$ hinzutreten, welche wiederum allgemein erfüllt ist, wenn $p_1 > 1$, oder wenn $p_1 = 1$ oder $= 0$ ist, die Werte $p \geq 1$ oder $p > m_1$ erfordert.

Nehmen wir nun an, daß

I. $$m_1 \neq M_1, \text{ also } O(L) = m_1 \text{ ist,}$$

so wird, da dann auch $O(R) = m_1$ sein muß, $a_1 = a_2 = \cdots = a_\rho = 0$ sein müssen, und somit die Differentialgleichung (15) die Form annehmen:

$$u \frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = a u^{m_1} + \sum_{> m_1} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots, \tag{17}$$

und sich zugleich die Ordnungszahl m_1 von x_1 als ganze Zahl ergeben; ist jedoch

II. $$m_1 = M_1, \text{ wofür } M_1 \text{ reell und positiv sein muß,}$$

so wird die linke Seite dieser Differentialgleichung eine Ordnungszahl besitzen, welche größer als M_1 ist, und diese somit, da dann $a = 0$ sein muß, die Form haben:

$$u \frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = \sum_{> M_1} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots, \tag{18}$$

ohne daß sich zunächst im allgemeinen über die Natur der Ordnungszahl etwas bestimmtes aussagen läßt.

Umgekehrt ist ersichtlich, daß für eine Differentialgleichung (17) von der Form

$$u \frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = a u^\pi + \sum_{> \pi} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots, \tag{19}$$

in welcher $a \neq 0$ und π eine positive ganze Zahl ist, $O(R)$ also auch $O(L) = \pi$ ist, und somit, wenn die der Voraussetzung nach existierende Ordnungszahl von x_1 mit m_1 bezeichnet wird, also die niedrigste u-Potenz auf der linken Seite der Gleichung durch das Glied definiert ist:

$$(m_1 - M_1)\,\xi_1^0\,u^{m_1},$$

für einen komplexen Wert von M_1, da dann $m_1 \neq M_1$, $m_1 = \pi$ ist. Ist jedoch M_1 reell, so wird, wenn

1. $$M_1 > \pi \quad \text{oder} \quad M_1 = \pi + \varkappa \quad \text{und } \varkappa \text{ positiv},$$

$m_1 - M_1$ im allgemeinen von Null verschieden, also wieder $m_1 = \pi$ sein müssen, während für $m_1 = \pi + \varkappa$ das oben bezeichnete Glied der linken Seite der Gleichung wegfiele, und erst ein folgendes Glied die kleinste u-Potenz liefern würde, also $m_1 < \pi$ gegen die Voraussetzung $m_1 = \pi + \varkappa$ wäre, so daß dieser spezielle Fall mit der Existenz eines Integrales von endlicher Ordnungszahl nicht vereinbar wäre; wenn

2. $$M_1 < \pi \quad \text{oder} \quad M_1 = \pi - \varkappa,$$

so müßte wieder $m_1 = \pi$ sein, wenn nicht $m_1 = \pi - \varkappa$ ist, so daß erst ein späteres Glied die niedrigste Potenz u^π der rechten Seite liefern würde, was mit der Annahme $m_1 = \pi - \varkappa$ wohl vereinbar wäre, ohne daß sich im allgemeinen über $\varkappa$ etwas aussagen ließe; ist endlich

3. $$M_1 = \pi,$$

so würde für jeden von π verschiedenen Wert von m_1 der Faktor $m_1 - M_1$ von Null verschieden, also gegen die Annahme $m_1 = \pi$ sein müssen, während, wenn $m_1 = \pi$, der erste Posten wegfiele und erst ein späterer Posten u^π liefern müßte, also m_1 gegen die Annahme kleiner als π wäre; dieser dritte Fall würde also anzeigen, daß x_1 nicht ein Element eines mit u verschwindenden Integralsystems von endlicher Ordnungszahl sein kann. So wird die Differentialgleichung

$$u\frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = a u^\pi$$

deren allgemeines Integral, wenn $M_1 \neq \pi_1$, durch

$$x_1 = c\,u^{M_1} + \frac{a}{\pi - M_1}\,u^\pi$$

gegeben ist, für $M_1 = \pi + \varkappa$ von der π^{ten}, für $M_1 = \pi - \varkappa$ von der M_1^{ten} Ordnung Null sein, während, wenn $M_1 = \pi$, das Integral

$$x_1 = c\,u^{M_1} + a\,u^{M_1} \log u$$

nicht von einer endlichen Ordnung Null ist.

Um nun in ähnlicher Weise die Form der zweiten Differentialgleichung des Systems (9):

$$u\,\frac{d\,x_2}{d\,u} - M_2 x_2 = \gamma_2 u + \sum B\,u^q\,x_1^{q_1}\,x_2^{q_2}\,x_3^{q_3}\ldots$$

zu untersuchen, für welche wieder wegen

$$u\,\frac{d\,x_2}{d\,u} - M_2 x_2 = (m_2 - M_2)\,\xi_2\,u^{m_2} + u^{m_2+1}\,\frac{d\,\xi_2}{d\,u}$$

$O(L) = m_2$ ist, wenn $m_2 \neq M_2$, oder größer als m_2, wenn $m_2 = M_2$, bemerke man, daß sich ähnlich wie oben für die Annahme

$$q + m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 + \cdots + m_n q_n < m_2$$

$q_2 = q_3 = \cdots = q_n = 0$ und $q + m_1 q_1 < m_2$ ergibt, während aus

$$q + m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 + \cdots + m_n q_n = m_2$$

entweder $q_2 = 1$, $q = q_1 = q_3 = \cdots = q_n = 0$, oder $q_2 = q_3 = \cdots = q_n = 0$ und $q + m_1 q_1 = m_2$ folgt, also da der erstere Fall bereits berücksichtigt ist, indem das in x_2 lineare, mit einer Konstanten multiplizierte Glied schon abgesondert ist, die Ordnungszahl m_2 von x_2 durch den Ausdruck $q + m_1 q_1$ gegeben ist, wenn die entsprechenden Glieder überhaupt in der Gleichung vorkommen.

Nehmen wir nun an, daß

$$m_2 \neq M_2, \text{ also in (21) } O(L) = m_2 \text{ ist},$$

so wird auch $O(R) = m_2$ sein müssen, und die Differentialgleichung (21) die Form annehmen:

$$(22)\quad u\,\frac{d\,x_2}{d\,u} - M_2 x_2 = \sum_{(q+m_1 q_1) < m_2}^{(0,1)} \alpha\,u^q\,x_1^{q_1} + \sum_{(q+m_1 q_1 = m_2)} \beta\,u^q\,x_1^{q_1} + \sum_{> m_2} B\,u^q\,x_1^{q_1}\,x_2^{q_2}\ldots,$$

in welcher in der ersten Summe der rechten Seite die Kombination $q=0$, $q_1=1$ auszuschließen ist, und für die Kombination $q=1$, $q_1=0$ die Konstante α den Wert γ_2 annimmt.

Da, wie früher gefunden, wenn $m_1 \neq M_1$ war, die Ordnungszahl m_1, also auch $q+m_1q_1$ eine positive ganze Zahl ist, so wird, wenn die erste Summe auf der rechten Seite der Gleichung überhaupt vorkommen soll, mindestens für einen Wert $\mu_2=q+m_1q_1<m_2$ das konstante Glied der zugehörigen Summe

$$\sum_{(q+m_1q_1=\mu_2)}^{(0,1)} \alpha\,(\xi_1^0)^{q_1} = 0$$

sein müssen, worin sich der Wert ξ_1^0 aus der durch die erste Differentialgleichung (17) gegebenen Beziehung

$$(m_1-M_1)\,\xi_1^0 = a$$

ergibt. Wenn somit für keinen Wert von μ_2 diese Gleichheit erfüllt ist, so darf die erste Summe auf der rechten Seite der Gleichung (22) gar nicht vorkommen, und es wird dann einerseits die Ordnungszahl $m_2=q+m_1q_1$ von x_2 eine positive ganze Zahl sein, anderseits der Koeffizient von u^{m_2} in der zweiten Summe der rechten Seite

$$\sum_{(q+m_1q_1=m_2)} \beta\,(\xi_1^0)^{q_1}$$

von Null verschieden sein müssen, da sonst diese Summe ebenso wie die dritte auf derselben Seite befindliche von einer höheren Ordnung als der m_2^{ten} verschwinden würde, während die linke Seite der Gleichung die Ordnungszahl m_2 besitzt.

Fassen wir somit die bisher gewonnenen Resultate zusammen, so ergibt sich, daß, wenn

I. $$m_1 \neq M_1,\quad m_2 \neq M_2,$$

die Ordnungszahlen m_1 und m_2 von x_1 und x_2 positive ganze Zahlen sind, und, da in der Gleichung (17) reine u-Potenzen von niedrigerem Grade als dem m_1^{ten} nicht vorkommen durften, ferner in der Gleichung (22) für keine positive ganze Zahl $\mu_2<m_2$ die Gleichheit erfüllt sein sollte:

$$\sum_{(q+m_1 q_1=\mu_2)}^{(0,1)} \alpha (\xi_1^0)^{q_1} = 0$$

und somit die erste Summe auf der rechten Seite der Gleichung (22) wegfallen mußte, für die beiden ersten Differentialgleichungen (9) die Form

$$(23) \qquad u\frac{d x_1}{d u} = M_1 x_1 + a u^{m_1} + \sum_{>m_1} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} \ldots$$

$$(24) \qquad u\frac{d x_2}{d u} = M_2 x_2 + \sum_{(q+m_1 q_1=m_2)} \beta u^q x_1^{q_1} + \sum_{>m_2} B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \ldots,$$

worin a von Null verschieden, und, wenn ξ_1^0 aus der Gleichung

$$(25) \qquad (m_1 - M_1)\,\xi_1^0 = a$$

bestimmt wird, die Ungleichheit befriedigt sein muß:

$$(26) \qquad \sum_{(q+m_1 q_1=m_2)} \beta (\xi_1^0)^{q_1} \neq 0;$$

der Wert von $\left(\frac{x_2}{u^{m_2}}\right)_0 = \xi_2^0$ ergibt sich dann unmittelbar aus der Gleichung

$$(27) \qquad (m_2 - M_2)\,\xi_2^0 = \sum_{(q+m_1 q_1=m_2)} \beta (\xi_1^0)^{q_1}.$$

Ist

$$\text{II.} \qquad m_1 \neq M_1, \quad m_2 = M_2,$$

so wird zunächst wieder m_1 eine positive ganze Zahl, und die Form der ersten Differentialgleichung also wieder durch (23) gegeben sein. Die linke, also auch die rechte Seite der Gleichung (22) – immer unter der Voraussetzung, daß die Integrale überhaupt eine endliche Ordnungszahl besitzen –, hat eine solche, die größer als m_2 ist, und, wenn wieder die oben für das Fortfallen der ersten Summe der rechten Seite angegebenen Bedingungen erfüllt sind, dann wird auch die zweite Summe nicht von der m_2^{ten} Ordnung Null sein können, also das konstante Glied

$$\sum_{(q+m_1 q_1 = m_2 = M_2)} \beta (\xi_1^0)^{q_1} = 0$$

sein müssen, worin ξ_1^0 wieder durch die Gleichung (25) bestimmt ist, während, wenn die letztere Summe von Null verschieden ist, x_2 überhaupt nicht von einer endlichen Ordnung Null sein kann. Es wird daher die Form der Gleichung (24) übergehen in:

$$u \frac{dx_2}{du} = M_2 x_2 + \sum_{(q+m_1 q_1 = m_2 = M_2)} \beta u^q x_1^{q_1} + \sum_{>m_2} B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \dots, \tag{29}$$

worin $m_2 = M_2$ eine positive ganze Zahl ist, oder in

$$u \frac{dx_2}{du} = M_2 x_2 + \sum_{>m_2} B u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \dots. \tag{30}$$

Ist in den beiden Fällen I. und II. die oben dafür angegebene Bedingung, daß die erste Summe der rechten Seite der Gleichung (22) fortfällt, nicht erfüllt, so daß diese Summe Glieder von einer Ordnungszahl haben kann, welche $\geq m_2$ ist, so läßt sich weder über den Charakter von m_2 noch über die engere Form der Differentialgleichung (22) etwas bestimmtes aussagen.

Ist

III. $$m_1 = M_1, \quad m_2 \lesseqgtr M_2,$$

so hat die erste Differentialgleichung des Systems (9), wie oben gezeigt, die Form

$$u \frac{dx_1}{du} = M_1 x_1 + \sum_{>M_1} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots; \tag{31}$$

aber weder über die Ordnungszahlen von x_1 und x_2 noch über die engere Form der zweiten Differentialgleichung (9) läßt sich etwas näheres angeben, da in den Koeffizienten der niedrigsten u-Potenz der linken Seite der ersten Differentialgleichung wegen

$$u \frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = (m_1 - M_1) \xi_1 u^{m_1} + u^{m_1+1} \frac{d\xi_1}{du} = u^{m_1+1} \frac{d\xi_1}{du}$$

außer ξ_1^0 die weiteren in dem analytischen Ausdrucke von x_1 enthaltenen Koeffizienten der u-Potenzen eintreten.

Setzen wir nunmehr allgemein voraus, daß in dem Gleichungssystem (9) die Integrale $x_1, x_2, \ldots x_n$ für $u=0$ von endlicher Ordnung verschwinden, und daß

$$m_1 \neq M_1, \; m_2 \neq M_2, \ldots m_n \neq M_n$$

ist, so werden sich die Ordnungszahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$, welche nach den Ungleichheiten geordnet sind:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_n ,$$

als positive ganze Zahlen ergeben, und das Differentialgleichungssystem (9) die Form annehmen:

$$(32) \left\{ \begin{aligned} u \frac{dx_\varkappa}{du} = M_\varkappa x_\varkappa &+ \sum_{(p+m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_{\varkappa-1}p_{\varkappa-1}=m_\varkappa)} A_\varkappa^{(p, p_1, \ldots p_{\varkappa-1})} u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_{\varkappa-1}^{p_{\varkappa-1}} \\ &+ \sum_{>m_\varkappa} B_\varkappa^{(p, p_1, p_2, \ldots p_n)} u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \end{aligned} \right.$$

für $\varkappa = 1, 2, \ldots n$, wenn für keine positive ganze Zahl $\mu_\varkappa$, welche kleiner als $m_\varkappa$ ist:

$$(33) \qquad \sum_{(p+m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_{\varkappa-1}p_{\varkappa-1}=\mu_\varkappa)} A_\varkappa^{(p, p_1, \ldots p_{\varkappa-1})} (\xi_1^0)^{p_1} (\xi_2^0)^{p_2} \cdots (\xi_{\varkappa-1}^0)^{p_{\varkappa-1}} = 0$$

ist, worin die Größen $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_{\varkappa-1}^0$ durch die Gleichungen gegeben sind:

$$(34) \left\{ \begin{aligned} (m_1 - M_1) \xi_1^0 &= A^{(p)}_{p=m_1} \\ (m_2 - M_2) \xi_2^0 &= \sum_{(p+m_1p_1=m_2)} A_2^{(p, p_1)} (\xi_1^0)^{p_1} \\ (m_3 - M_3) \xi_3^0 &= \sum_{(p+m_1p_1+m_2p_2=m_3)} A_3^{(p, p_1, p_2)} (\xi_1^0)^{p_1} (\xi_2^0)^{p_2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m_{\varkappa-1} - M_{\varkappa-1}) \xi_{\varkappa-1}^0 &= \sum_{(p+m_1p_1+\cdots+m_{\varkappa-2}p_{\varkappa-2}=m_{\varkappa-1})} A_{\varkappa-1}^{(p, p_1, \ldots p_{\varkappa-2})} (\xi_1^0)^{p_1} (\xi_2^0)^{p_2} \ldots (\xi_{\varkappa-2}^0)^{p_{\varkappa-2}} ; \end{aligned} \right.$$

sind diese Bedingungen erfüllt, so folgt daraus, daß, weil die Ordnungszahl der linken sowie der rechten Seite der Differentialgleichung $m_\varkappa$ sein soll, dann

$$(35) \qquad \sum_{(p+m_1 p_1+m_2 p_2+\cdots+m_{\varkappa-1} p_{\varkappa-1} = m_\varkappa)} A_\varkappa^{(p, p_1, \dots p_{\varkappa-1})} (\xi_1^0)^{p_1} (\xi_2^0)^{p_2} \cdots (\xi_{\varkappa-1}^0)^{p_{\varkappa-1}}$$

von Null verschieden sein muß.

Nachdem wir in den Gleichungen (32) die notwendige Form der Differentialgleichungen des Systems (9) erkannt haben unter der Voraussetzung, daß die Ordnungszahlen der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ den Ungleichheiten (13) genügten, möge noch ergänzend mit einigen Worten der Fall behandelt werden, in welchem

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_\lambda < m_{\lambda+1} \leqq m_{\lambda+2} \leqq m_{\lambda+3}, \cdots$$

ist.

Für die erste Differentialgleichung (15) des Systems (9) werden den obigen Schlüssen analog sich aus der Ungleichheit

$$p+m_1 p_1+m_2 p_2+\cdots+m_n p_n = p+m_1(p_1+p_2+\cdots+p_\lambda)+m_{\lambda+1} p_{\lambda+1}+\cdots<m_1$$

wieder wie früher

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_\lambda = p_{\lambda+1} = \cdots = p_n = 0 \text{ und } p < m_1$$

ergeben, dieser Ungleichheit also wie oben nur reine mit Konstanten multiplizierte u-Potenzen entsprechen, deren Exponenten $< m_1$ sind, während die Gleichung

$$p + m_1 (p_1 + p_2 + \cdots + p_\lambda) + m_{\lambda+1} p_{\lambda+1} + \cdots = m_1$$

nur die beiden Fälle liefert:

$$p = m_1, \; p_1 = p_2 = \cdots = p_\lambda = p_{\lambda+1} = \cdots = 0$$

und

$$p = 0, \; p_1 + p_2 + \cdots + p_\lambda = 1;$$

da aber der letztere Fall eine reine u-Potenz ausschließt, während, wenn eine der Größen $p_1, p_2, \dots p_\lambda$ den Wert 1 und dann die andren den Wert Null annehmen, die Größen $x_2, x_3, \dots x_\lambda$ aber linear mit Konstanten multipliziert in der ersten Differentialgleichung nicht vorkommen, und $M_1 x_1$ aus der Gesamtsumme bereits herausgenommen ist, so werden, da dieselben Schlüsse für die ersten λ Differentialgleichungen des Systems (9) gelten, unter der Voraussetzung, daß $m_\rho \neq M_\rho$, diese die Form haben:

$$u \frac{d x_\rho}{d u} = M_\rho x_\rho + A_\rho^{(m_1)} u^{m_1} + \sum_{>m_1} A_\rho^{(p, p_1, \dots p_n)} u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \qquad (\rho = 1, 2, \dots \lambda).$$

Ist für einen der Werte von ρ: $m_\rho = M_\rho$, so muß

$$A_\rho^{(m_1)} = 0$$

sein.

Gehen wir jedoch nicht wie bisher von dem Differentialgleichungssystem (9) sondern von dem System (8) aus, so wird, um die Form der zweiten Differentialgleichung desselben festzustellen, die Bemerkung genügen, daß die erste Summe der rechten Seite der Gleichung (22) in diesem Falle durch den Ausdruck

$$\sum_{(q+m_1 q_1 < m_2)} \alpha u^q x_1^{q_1}$$

zu ersetzen sein wird, wenn für die Kombination $q=0$, $q_1=1$ der Wert der Konstanten $\alpha = \rho_{21}$, für die Kombination $q=1$, $q_1=0$: $\alpha = \gamma_2$ ist, und es wird die Form der zweiten Differentialgleichung also wieder durch die Gleichung (24) gegeben sein, wenn die Bedingung

$$\sum_{(q+m_1 q_1 = \mu_2)} \alpha \left(\xi_1^0\right)^{q_1} = 0$$

für keinen Wert von $\mu_2 < m_2$ erfüllt ist.

Nachdem wir oben die Form der HAMILTONschen Differentialgleichungen (9) näher ermittelt haben, für welche die Elemente eines dem Werte $u=0$ entsprechenden, selbst verschwindenden Integralsystems von einer endlichen Ordnung Null werden, und zwar unter der Bedingung, daß die Ordnungszahlen $m_1 \neq M_1$, $m_2 \neq M_2, \dots m_n \neq M_n$, gehen wir nunmehr zur weiteren Untersuchung der Integrale des transformierten Differentialgleichungssystems

(23), (24), ... (32), und zunächst der ersten dieser Differentialgleichungen:

$$u\frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = a u^{m_1} + \sum_{>m_1} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots \tag{36}$$

über, in welcher a von Null verschieden, und $m_1, m_2, \ldots m_n$, wie oben gezeigt, positive ganze Zahlen waren.

Setzt man

$$x_1 = u^{m_1}\xi_1,\ x_2 = u^{m_2}\xi_2, \ldots x_n = u^{m_n}\xi_n\,,$$

also

$$u\frac{dx_1}{du} - M_1 x_1 = u^{m_1}\left(u\frac{d\xi_1}{du} + (m_1 - M_1)\,\xi_1\right)$$

und

$$\sum_{>m_1} A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots = \sum_{>m_1} A u^{p+m_1p_1+m_2p_2+\cdots} \xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2} \ldots,$$

so geht (36) durch Division mit u^{m_1} über in:

$$u\frac{d\xi_1}{du} + (m_1 - M_1)\,\xi_1 = a + \sum_{(\pi \geqq 0)} A u^{\pi} \xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2} \ldots, \tag{37}$$

worin die positiven ganzen Zahlen $\pi, p_1, p_2, \ldots$ in der Summe Σ keiner weiteren Beschränkung unterliegen, als in der gegebenen Funktion der rechten Seite der Gleichung (36) vorzukommen, und für $u=0$ das Integral ξ_1 nach (37) den von Null verschiedenen Wert annimmt:

$$\xi_1^0 = \frac{a}{m_1 - M_1}\,; \tag{38}$$

ähnlich gehen die Werte $\xi_2^0, \xi_3^0, \ldots$ aus den Gleichungen (34) hervor.

Setzt man ferner

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \eta_1,\ \xi_2 - \xi_2^0 = \eta_2, \ldots \xi_n - \xi_n^0 = \eta_n\,,$$

so geht die Gleichung (37) vermöge der Beziehung (38) in die Differentialgleichung

$$(39)\quad u\frac{d\eta_1}{du}+(m_1-M_1)\eta_1=\sum_{(\pi\geq 0)} A u^{\pi}(\xi_1^0+\eta_1)^{p_1}(\xi_2^0+\eta_2)^{p_2}\cdots(\xi_n^0+\eta_n)^{p_n}$$

über, worin, da die $x_1, x_2, \ldots$ endliche Ordnungszahlen für $u=0$ besitzen sollen, dies auch für $\xi_1-\xi_1^0$, $\xi_2-\xi_2^0, \ldots$, also auch für die verschwindenden Werte von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ der Fall sein wird. Ist nun der kleinste Wert von π auf der rechten Seite der Gleichung (39) μ_1, also der Koeffizient von u^{μ_1} durch die Summe

$$(40)\qquad \sum A(\xi_1^0)^{p_1}(\xi_2^0)^{p_2}\cdots(\xi_n^0)^{p_n}=c$$

dargestellt, welche auch den Wert 0 annehmen kann, so wird die Gleichung (39) in

$$(41)\qquad u\frac{d\eta_1}{du}+(m_1-M_1)\eta_1=c u^{\mu_1}+\sum_{>\mu_1} B u^{\mu}\eta_1^{q_1}\eta_2^{q_2}\ldots\eta_n^{q_n}$$

übergehen, und die Ordnungszahl der rechten Seite der Gleichung μ_1 sein, wenn $c \neq 0$, oder größer als μ_1, wenn $c=0$ ist. Im ersteren Falle wird somit, wie ähnlich schon oben für die Gleichung (19) gezeigt worden, die Ordnungszahl von η_1 die ganze positive Zahl μ_1 sein, wenn sie nicht gleich M_1-m_1 ist, während, wenn letzteres der Fall ist, jene kleiner als μ_1 sein muß; ist aber $M_1-m_1=\mu_1$, so würde daraus zu schließen sein, daß η_1 nicht von endlicher Ordnung Null sein kann, was gegen die Voraussetzung wäre, oder daß die oben angegebene Größe c wieder gegen die Annahme den Wert Null haben müßte — für den Fall, daß $c \neq 0$, ist also die Ordnungszahl von η_1 gleich der ganzen positiven Zahl μ_1 oder gleich M_1-m_1, wenn nicht $M_1-m_1=\mu_1$ ist, also M_1 den positiven ganzzahligen Wert $m_1+\mu_1$ hat. Ist die durch die Gleichung (40) definierte Konstante gleich Null, so ist die Ordnungszahl der rechten Seite der Gleichung (44) größer als μ_1, und dasselbe findet im allgemeinen für die Ordnungszahl von η_1 selbst statt.

Stellen wir dieselben Betrachtungen für die folgenden Differentialgleichungen des Systems (24)...(32) an, so ergibt sich, daß unter der Voraussetzung, daß

$$m_1 < m_2 < m_3 \cdots,$$

ferner

(42) $$m_1 \mp M_1,\ m_2 \mp M_2,\ m_3 \mp M_3, \ldots$$

(43) $$\mu_1 + m_1 \mp M_1,\ \mu_2 + m_2 \mp M_2,\ \mu_3 + m_3 \mp M_3, \ldots,$$

die Ordnungszahlen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ der Funktionen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ positive ganze Zahlen sind; daß ferner, wenn

$$\eta_1 = u^{\mu_1} \zeta_1,\ \eta_2 = u^{\mu_2} \zeta_2,\ \eta_3 = u^{\mu_3} \zeta_3, \ldots$$

und

$$\zeta_1 = \zeta_1^0 + \vartheta_1,\ \zeta_2 = \zeta_2^0 + \vartheta_2,\ \zeta_3 = \zeta_3^0 + \vartheta_3, \ldots$$

gesetzt wird, die Ordnungszahlen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ der Funktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$, welche den Gleichungen (39) ähnlich gestalteten Differentialgleichungen genügen, wiederum positive ganze Zahlen sind, wenn noch die Bedingungen hinzutreten:

(44) $$\nu_1 + \mu_1 + m_1 \mp M_1,\ \nu_2 + \mu_2 + m_2 \mp M_2,\ \nu_3 + \mu_3 + m_3 \mp M_3, \ldots$$

usw.

Da aber unter der Voraussetzung, daß alle diese Bedingungen erfüllt sind, sich die Entwicklungsformen ergeben:

$$x_1 = u^{m_1}(\xi_1^0 + \eta_1) = \xi_1^0 u^{m_1} + u^{m_1+\mu_1}\zeta_1 = \xi_1^0 u^{m_1} + \zeta_1^0 u^{m_1+\mu_1} + u^{m_1+\mu_1}\vartheta_1 = \cdots$$

und die ähnlichen für $x_2, x_3, \ldots$, so folgt aus der Ganzzahligkeit der Exponenten der u-Potenzen, daß sich die für $u=0$ verschwindenden Integrale $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in der Umgebung dieses Punktes zunächst formal als eindeutige Potenzreihen entwickeln lassen, deren Konvergenz sogleich näher untersucht werden soll.

Die vorstehenden Sätze, welche sich auf die Eindeutigkeit der Integrale der HAMILTONschen Differentialgleichungen (9) beziehen, waren unter der Voraussetzung gewonnen, daß ein System der für $u=0$ verschwindenden Integrale derselben endliche Ordnungszahlen besitze; es soll nunmehr ohne die Existenz derselben und die Kenntnis ihrer Beziehungen zu den Zahlen $M_1, M_2, \ldots M_n$

vorauszusetzen, direkt gezeigt werden, daß, wenn keine der Größen $M_1, M_2, \dots M_n$ eine positive ganze Zahl ist, jene Differentialgleichungen jedenfalls ein solches System eindeutiger, durch konvergente Potenzreihen darstellbarer Integrale von endlicher Ordnungszahl besitzen, daß dies aber auch der Fall sein kann, wenn die M zum Teil positiv ganz sind.

Setzen wir nämlich mit Benutzung der früher gebrauchten Bezeichnungen die Differentialgleichungen (9) in die Form

$$(45)\quad u\frac{dx_\rho}{du} - M_\rho x_\rho = \gamma_\rho u + (u, x_1, x_2, \dots x_n)_2^{(\rho)} + (u, x_1, x_2, \dots x_n)_3^{(\rho)} + \cdots$$
$$(\rho = 1, 2, \dots n),$$

und suchen diesen Gleichungen formal durch die Potenzreihen zu genügen:

$$(46)\quad \begin{cases} x_1 = c_{11}u + c_{12}u^2 + c_{13}u^3 + \cdots \\ x_2 = c_{21}u + c_{22}u^2 + c_{23}u^3 + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}u + c_{n2}u^2 + c_{n3}u^3 + \cdots, \end{cases}$$

so erhält man die zu befriedigenden Beziehungen

$$(47)\quad \begin{cases} (1-M_\rho)c_{\rho 1}u + (2-M_\rho)c_{\rho 2}u^2 + (3-M_\rho)c_{\rho 3}u^3 + \cdots \\ = \gamma_\rho u + (u, c_{11}u + c_{12}u^2 + \cdots, c_{21}u + c_{22}u^2 + \cdots, \dots\dots)_2^{(\rho)} \\ + (u, c_{11}u + c_{12}u^2 + \cdots, c_{21}u + c_{22}u^2 + \cdots, \dots\dots)_3^{(\rho)} + \cdots \\ \qquad (\rho = 1, 2, \dots n) \end{cases}$$

und somit durch Identifizierung der Koeffizienten gleich hoher u-Potenzen

$$(1-M_\rho)c_{\rho 1} = \gamma_\rho$$
$$(\sigma - M_\rho)c_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}(c_{11}, c_{21}, c_{31}, \dots c_{n1}, c_{12}, c_{22}, c_{32}, \dots c_{n2}, \dots$$
$$\dots, c_{1\sigma-1}, c_{2\sigma-1}, c_{3\sigma-1}, \dots c_{n\sigma-1})$$
$$(\rho = 1, 2, \dots n,\ \sigma = 2, 3, 4, \dots)$$

oder durch sukzessive Berechnung der c

$$c_{1\mu} = \psi_{1\mu}, \; c_{2\mu} = \psi_{2\mu}, \ldots c_{n\mu} = \psi_{n\mu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{48}$$

worin die ψ ganze Funktionen der Koeffizienten der Differentialgleichungen sind mit Nennern, welche die Form haben:

$$\prod_r (1 - M_r)(2 - M_r) \cdots (\mu - M_r),$$

so daß also der Wert der Größen (48) nur unendlich groß werden kann, wenn einzelne der Größen M positive ganze Zahlen sind. Durch Substitution der Größen (48) in die hypothetisch aufgestellten Potenzreihen (46) erhalten wir somit für $x_1, x_2, \ldots x_n$ unendliche Reihen, welche dem Differentialgleichungssystem formal Genüge leisten.

Sind nun die Konvergenzbereiche der Potenzreihen der rechten Seite der ρ^{ten} Differentialgleichung des Systems (45) die um die Nullpunkte von $u, x_1, x_2, \ldots x_n$ gelegten Kreise mit den Radien $r_\rho, r_{\rho 1}, r_{\rho 2}, \ldots, r_{\rho n}$, so wird sich, wenn der Koeffizient des Gliedes $u^\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ mit

$$A^{(\rho)}_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

bezeichnet wird, bekanntlich eine endliche positive Größe $M^{(\rho)}$ angeben lassen von der Beschaffenheit, daß

$$\text{mod. } A^{(\rho)}_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} < \frac{M^{(\rho)}}{r_\rho^\alpha \, r_{\rho 1}^{\alpha_1} \, r_{\rho 2}^{\alpha_2} \cdots r_{\rho n}^{\alpha_n}} \tag{49}$$

ist; wenn man ferner in die rechten Seiten der Gleichungen (48) statt der Koeffizienten der Potenzreihen auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen ihre absoluten Beträge und für diese vermöge der der Ungleichheit (49) analogen Beziehungen ihre oberen Grenzen setzt, außerdem in den Nennern der $\psi_{\rho\mu}$ die Moduln der Ausdrücke

$$1 - \lambda_r, \; 2 - \lambda_r, \; 3 - \lambda_r, \ldots$$

durch den kleinsten ihrer Moduln m ersetzt, so folgt, daß, wenn die Größen $\psi_{1\mu}, \psi_{2\mu}, \psi_{3\mu}, \ldots$ in $\Psi_{1\mu}, \Psi_{2\mu}, \Psi_{3\mu}, \ldots$ übergehen und man

$$(50)\qquad C_{1\mu} = \Psi'_{1\mu},\ C_{2\mu} = \Psi'_{2\mu}, \ldots C_{n\mu} = \Psi'_{n\mu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzt, die oben formal angesetzten Reihen (46) konvergieren, wenn man die Konvergenz der Reihen

$$(51)\left\{\begin{array}{l} X_1 = C_{11}\,u + C_{12}\,u^2 + C_{13}\,u^3 + \cdots \\ X_2 = C_{21}\,u + C_{22}\,u_2 + C_{23}\,u^3 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

innerhalb eines bestimmten Konvergenzkreises um $u=0$ nachweisen kann. Bildet man aber den rechten Seiten der Differentialgleichungen (45) entsprechend das Gleichungssystem

$$(52)\left\{\begin{array}{l} m\,Y_1 = \dfrac{M^{(1)}}{r_1}\,u + \left(\dfrac{M^{(1)}}{r_1^2}\,u^2 + \dfrac{M^{(1)}}{r_{11}^2}\,Y_1^2 + \cdots + \dfrac{M^{(1)}}{r_{1n}^2}\,Y_n^2 \right.\\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{M^{(1)}}{r_1\,r_{11}}\,u\,Y_1 + \cdots + \dfrac{M^{(1)}}{r_{1n-1}\,r_{1n}}\,Y_{n-1}\,Y_n\right) + \cdots \\ m\,Y_2 = \dfrac{M^{(2)}}{r_2}\,u + \left(\dfrac{M^{(2)}}{r_2^2}\,u^2 + \dfrac{M^{(2)}}{r_{21}^2}\,Y_1 + \cdots + \dfrac{M^{(2)}}{r_{2n}^2}\,Y_n^2 \right.\\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{M^{(2)}}{r_2\,r_{21}}\,u\,Y_1 + \cdots + \dfrac{M^{(2)}}{r_{2n-1}\,r_{2n}}\,Y_{n-1}\,Y_n\right) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}\right.$$

so ist unmittelbar zu sehen, daß sich aus diesen n algebraischen Gleichungen die Größen $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, welche für $u=0$ verschwinden, als eindeutige konvergente Potenzreihen von u in der Form ergeben:

$$(53)\left\{\begin{array}{l} Y_1 = \varkappa_{11}\,u + \varkappa_{12}\,u^2 + \varkappa_{13}\,u^3 + \cdots \\ Y_2 = \varkappa_{21}\,u + \varkappa_{22}\,u^2 + \varkappa_{23}\,u^3 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}\right.$$

da die Funktionaldeterminante der Gleichungen (52) nach $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ für $u=0$ von Null verschieden ist. Setzt man nun zur Bestimmung der Koeffizienten $\varkappa_{\alpha\beta}$ diese konvergenten Reihen in die Gleichungen (52) ein, so erhält man die den Gleichungen (47) analogen Gleichungen

$$(54)\left\{\begin{aligned} & m\left(\varkappa_{11}u+\varkappa_{12}u^2+\cdots\right)=\frac{M^{(1)}}{r_1}u+\left(\frac{M^{(1)}}{r_1^2}u^2+\frac{M^{(1)}}{r_{11}^2}\left(\varkappa_{11}u+\varkappa_{12}u^2+\cdots\right)^2\right.\\ &\qquad+\frac{M^{(1)}}{r_1 r_{11}}u\left(\varkappa_{11}u+\varkappa_{12}u^2+\cdots\right)+\cdots\\ &\qquad\left.+\frac{M^{(1)}}{r_{1\,n-1}r_{1n}}\left(\varkappa_{n-1\,1}u+\varkappa_{n-1\,2}u^2+\cdots\right)\left(\varkappa_{n1}u+\varkappa_{n2}u^2+\cdots\right)\right)+\cdots\end{aligned}\right.$$

und die ähnlichen, und durch Identifizierung der Koeffizienten gleich hoher u-Potenzen Gleichungen von der Form

$$(55)\qquad m\,\varkappa_{1\mu}=\Phi_{1\mu},\ m\,\varkappa_{2\mu}=\Phi_{2\mu},\ \ldots,$$

worin, wie durch Zusammenstellung mit den obigen Bestimmungsgleichungen (47) und (48) der Größen $c_{1\mu}, c_{2\mu}, \ldots$ unmittelbar hervorgeht, die Größen $\frac{\Phi_{\alpha\mu}}{m}$ aus $\psi_{\alpha\mu}$ entstehen, wenn man statt der Koeffizienten der Differentialgleichungen, wie oben angegeben, ihre absoluten Beträge und sodann die oberen Grenzen dieser setzt, und es folgt somit nach (55) und (50)

$$\frac{\Phi_{\alpha\mu}}{m}=\Psi_{\alpha\mu},\ \text{also}\ \ \varkappa_{\alpha\mu}=C_{\alpha\mu},$$

so daß sich aus der Konvergenz der Reihen (53) die der Reihen (51), also auch die der Reihen (46) ergibt. Wir finden somit,

daß das System der Differentialgleichungen (9), wenn keine der Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist, ein um $u=0$ herum durch konvergente eindeutige Potenzreihen darstellbares Integralsystem besitzt, dessen Elemente für $u=0$ sämtlich verschwinden, und daher auch endliche Ordnungszahlen besitzen, welche positive ganze Zahlen sind. Die für die Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ aufgestellte Bedingung ist jedoch nur eine hinreichende, nicht eine notwendige für die Existenz solcher Integrale.

Daß es aber unter der eben erwähnten Voraussetzung nur ein solches für $u=0$ verschwindendes Integralsystem der Differentialgleichungen (9) gibt, welches durch konvergente eindeutige Potenzreihen von u darstellbar ist, ergibt sich leicht daraus, daß, wenn wir die Elemente zweier solcher Integralsysteme mit

$$x_1, x_2, \ldots x_n \quad \text{und} \quad x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots x_n+y_n$$

bezeichnen, aus der ρ^{ten} Differentialgleichung des Systems (9) die beiden Gleichungen hervorgehen:

$$u\frac{dx_\rho}{du} = M_\rho x_\rho + \gamma_\rho u + \sum A u^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots$$

$$u\frac{d(x_\rho+y_\rho)}{du} = M_\rho (x_\rho+y_\rho) + \gamma_\rho u + \sum A u^p (x_1+y_1)^{p_1} (x_2+y_2)^{p_2} \ldots$$

und aus diesen durch Subtraktion

$$u\frac{dy_\rho}{du} = M_\rho y_\rho + \sum A' u^q x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots, \tag{56}$$

worin die Summe Σ keinen von jeder der Größen $y_1, y_2, \ldots y_n$ freien Posten enthält. Da sich nun unter der oben gemachten Voraussetzung $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots x_n+y_n$, also auch $y_1, y_2, \ldots y_n$ als eindeutige konvergente Potenzreihen von u ohne konstante Glieder darstellen lassen, so wird, wenn y_μ diejenige unter den Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ ist, welche die kleinste Ordnungszahl σ besitzt und durch

$$y_\mu = \gamma_\sigma u^\sigma + \gamma_{\sigma+1} u^{\sigma+1} + \cdots \tag{57}$$

dargestellt sei, der Wert von y_μ in die μ^{te} Differentialgleichung des Systems (56) eingesetzt die Beziehung ergeben:

$$u\left(\sigma\gamma_\sigma u^{\sigma-1} + (\sigma+1)\gamma_{\sigma+1} u^\sigma + \cdots\right)$$
$$= M_\mu\left(\gamma_\sigma u^\sigma + \gamma_{\sigma+1} u^{\sigma+1} + \cdots\right) + B_1 u^{\sigma+1} + B_2 u^{\sigma+2} + \cdots,$$

weil aus der Summe Σ in (56) durch das Glied $M_\mu y_\mu$ bereits das in y_μ lineare und mit einer Konstanten multiplizierte Glied abgesondert ist. Hieraus würde aber $M_\mu = \sigma$ folgen, was, da σ eine positive ganze Zahl ist, der Voraussetzung widerspricht, und wir finden somit,

daß, wenn keine der Größen $M_1, M_2, \dots M_n$ eine positive ganze Zahl ist, das Differentialgleichungssystem (9) stets ein und *nur* ein für $u=0$ verschwindendes Integralsystem besitzt, welches durch konvergente eindeutige Potenzreihen darstellbar ist.

Es bleibt somit noch der Fall zu erledigen, in welchem einige der Größen $M_1, M_2, \dots M_n$ positive ganze Zahlen sind, und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß diese Größen $M_1, M_2, \dots M_\varkappa$ $(\varkappa \leq n)$, und zugleich $M_1 < M_2 < \dots < M_\varkappa$ seien, während $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \dots M_n$ beliebige reelle oder komplexe Größen sind, die nicht positiv ganz sein sollen. Machen wir unter der Voraussetzung, daß $M_1 \neq 1$ ist, auf das Differentialgleichungssystem (9) in der Form (45) die Substitution

$$x_\rho = -\left(\frac{\gamma_\rho}{M_\rho - 1} + y_\rho\right) u \,, \tag{58}$$

so erhält man das System

$$\left.\begin{aligned} u\frac{d y_\rho}{d u} = (M_\rho - 1)\, y_\rho + \delta_\rho u + (u, y_1, y_2, \dots y_n)_2^{(\rho)} \\ + (u, y_1, y_2, \dots y_n)_3^{(\rho)} + \cdots \qquad (\rho = 1, 2, \dots n)\,, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

worin die δ_ρ Konstanten, und für $\rho = 1, 2, \dots \varkappa$ die konstanten Koeffizienten von y_ρ auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen die um eine Einheit verringerten ganzen Zahlen $M_1, M_2, \dots M_\varkappa$ sind, während in den folgenden Gleichungen diese Koeffizienten wieder nicht ganze Zahlen sein werden. Macht man in (59) die (58) analoge Substitution

$$y_\rho = -\left(\frac{\delta_\rho}{M_\rho - 2} + z_\rho\right) u \,, \tag{60}$$

so daß man auf das Differentialgleichungssystem geführt wird:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{d z_\rho}{d u} = (M_\rho - 2)\, z_\rho + \varepsilon_\rho u + (u, z_1, z_2, \dots z_n)_2^{(\rho)} \\ + (u, z_1, z_2, \dots z_n)_3^{(\rho)} + \cdots \qquad (\rho = 1, 2, \dots n)\,, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

und fährt so fort, bis man auf eine oder auf eine Anzahl λ von Differentialgleichungen mit einem konstanten Koeffizienten der ersten Potenz der abhängigen Variabeln auf der rechten Seite geführt wird, welcher der Einheit gleich ist, so daß das Differentialgleichungssystem lautet:

$$
(62)\left\{\begin{aligned}
u\frac{dt_1}{du} &= t_1 + \eta_1 u + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(1)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(1)} + \cdots \\
u\frac{dt_2}{du} &= t_2 + \eta_2 u + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(2)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(2)} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u\frac{dt_\lambda}{du} &= t_\lambda + \eta_\lambda u + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(\lambda)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(\lambda)} + \cdots \\
u\frac{dt_{\lambda+1}}{du} &= \mu_{\lambda+1} t_{\lambda+1} + \eta_{\lambda+1} u + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(\lambda+1)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(\lambda+1)} + \cdots \\
u\frac{dt_{\lambda+2}}{du} &= \mu_{\lambda+2} t_{\lambda+2} + \eta_{\lambda+2} u + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(\lambda+2)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(\lambda+2)} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u\frac{dt_n}{du} &= \mu_n t_n + \eta_n u + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(n)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(n)} + \cdots ,
\end{aligned}\right.
$$

worin $\lambda < n$, und die Konstanten $\mu_{\lambda+1}, \mu_{\lambda+2}, \ldots \mu_n$ von der positiven Einheit verschiedene reelle oder komplexe Zahlen sind, so ist leicht zu sehen,

daß das Differentialgleichungssystem (62) also auch (9) um $u=0$ herum kein dort verschwindendes eindeutiges Integralsystem besitzen kann, wenn eine der Größen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda$ von Null verschieden ist; daß dies jedoch möglich ist, wenn diese sämtlich verschwinden.

Denn wäre für ein positives ganzzahliges m_ρ

$$t_\rho = c_{\rho m_\rho} u^{m_\rho} + c_{\rho m_\rho+1} u^{m_\rho+1} + \cdots ,$$

so müßten die Entwicklungen in die erste Differentialgleichung eingesetzt dieselbe identisch befriedigen oder

$$u\left(m_1 c_{1m_1} u^{m_1-1} + (m_1+1) c_{1m_1+1} u^{m_1} + \cdots\right) = c_{1m_1} u^{m_1} + c_{1m_1+1} u^{m_1+1} + \cdots$$
$$+ \eta_1 u + \left(u, c_{1m_1} u^{m_1} + c_{1m_1+1} u^{m_1+1} + \cdots, c_{2m_2} u^{m_2} + \cdots, \cdots\right)_2^{(1)} + \cdots$$

sein, woraus sich notwendig $\eta_1 = 0$ ergibt, und ebenso $\eta_2 = \cdots = \eta_\lambda = 0$.

Hat aber hiernach das System (62) die Form

$$(63)\left\{\begin{aligned}
& u\frac{dt_1}{du} = t_1 + (u, t_1, t_2, \ldots t_n)_2^{(1)} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& u\frac{dt_\lambda}{du} = t_\lambda + (u, t_1, t_2, \ldots t_n)_2^{(\lambda)} + \cdots \\
& u\frac{dt_{\lambda+1}}{du} = \mu_{\lambda+1} t_{\lambda+1} + \eta_{\lambda+1} u + (u, t_1, t_2, \ldots t_n)_2^{(\lambda+1)} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& u\frac{dt_n}{du} = \mu_n t_n + \eta_n u + (u, t_1, t_2, \ldots t_n)_2^{(n)} + \cdots
\end{aligned}\right.$$

und setzt man

$$(64)\left\{\begin{aligned}
& t_1 = u v_1,\ t_2 = u v_2, \ldots t_\lambda = u v_\lambda \\
& t_{\lambda+1} = -\left(\frac{\eta_{\lambda+1}}{\mu_{\lambda+1}-1} + v_{\lambda+1}\right) u, \ldots t_n = -\left(\frac{\eta_n}{\mu_n - 1} + v_n\right) u,
\end{aligned}\right.$$

so geht, wie leicht zu sehen, das System (63) in

$$(65)\left\{\begin{aligned}
& \frac{dv_1}{du} = c_1 + (u, v_1, \ldots v_n)_1^{(1)} + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(1)} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \frac{dv_\lambda}{du} = c_\lambda + (u, v_1, \ldots v_n)_1^{(\lambda)} + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(\lambda)} + \cdots \\
& u\frac{dv_{\lambda+1}}{du} = (\mu_{\lambda+1} - 1) v_{\lambda+1} + \mathfrak{f}_{\lambda+1} u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(\lambda+1)} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& u\frac{dv_n}{du} = (\mu_n - 1) v_n + \mathfrak{f}_n u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(n)} + \cdots
\end{aligned}\right.$$

über, worin $e_1, \ldots e_\lambda$, $f_{\lambda+1}, \ldots f_n$ Konstanten, und die letzten $n-\lambda$ Differentialgleichungen als konstante Koeffizienten der ersten Potenz der abhängigen Variabeln reelle oder komplexe Zahlen besitzen, welche nicht den Wert Null haben.

Nehmen wir nun an, daß

1. in (62) die Größen $\mu_{\lambda+1}, \ldots \mu_n$, also auch $\mu_{\lambda+1}-1, \ldots \mu_n - 1$ nicht positiv ganz waren, so folgt aus (65), wenn die ersten λ Gleichungen mit u multipliziert und $\mu_{\lambda+1}-1 = \nu_{\lambda+1}, \ldots \mu_n - 1 = \nu_n$ gesetzt werden:

$$(65a)\left\{\begin{aligned} & u\frac{dv_1}{du} = e_1 u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(1)} + \cdots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & u\frac{dv_\lambda}{du} = e_\lambda u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(\lambda)} + \cdots \\ & u\frac{dv_{\lambda+1}}{du} = \nu_{\lambda+1} v_{\lambda+1} + f_{\lambda+1} u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(\lambda+1)} + \cdots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & u\frac{dv_n}{du} = \nu_n v_n + f_n u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(n)} + \cdots, \end{aligned}\right.$$

worin keiner der konstanten Koeffizienten der ersten Potenz der abhängigen Variabeln auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen eine positive ganze Zahl ist, und es folgt somit aus dem oben bewiesenen Satze, daß dann

das Differentialgleichungssystem (65a), also auch das transformierte HAMILTONsche System ein und nur ein in $u=0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem besitzt.

Waren aber

2. in den Differentialgleichungen (62) einige der Größen $\mu_{\lambda+1}, \ldots \mu_n$, also auch $\mu_{\lambda+1}-1, \ldots \mu_n - 1$ positive ganze Zahlen, und nehmen wir an, daß $\mu_{\lambda+1}-1$ die kleinste dieser Zahlen sei, ohne schon den Wert 1 zu haben, so setze man

$$v_1 = (w_1 + e_1)\,u,\ v_2 = (w_2 + e_2)\,u, \ldots v_\lambda = (w_\lambda + e_\lambda)\,u$$

$$v_{\lambda+1} = -\left(\frac{f_{\lambda+1}}{\mu_{\lambda+1}-2} + w_{\lambda+1}\right)u, \ldots v_n = -\left(\frac{f_n}{\mu_n - 2} + w_n\right)u$$

und erhält dann das System

$$u \frac{d w_1}{d u} = - w_1 + g_1 u + (u, w_1, \dots w_n)_2^{(1)} + \cdots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u \frac{d w_\lambda}{d u} = - w_\lambda + g_\lambda u + (u, w_1, \dots w_n)_2^{(\lambda)} + \cdots$$

$$u \frac{d w_{\lambda+1}}{d u} = (\mu_{\lambda+1} - 2) w_{\lambda+1} + g_{\lambda+1} u + (u, w_1, \dots w_n)_2^{(\lambda+1)} + \cdots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u \frac{d w_n}{d u} = (\mu_n - 2) w_n + g_n u + (u, w_1, \dots w_n)_2^{(n)} + \cdots,$$

worin der konstante Koeffizient der ersten Potenz der abhängigen Variabeln in der $\lambda+1^{\text{ten}}$ Differentialgleichung – und in einigen weiteren derselben, wenn mehrere der μ derselben positiven ganzen Zahlen gleich waren – wieder eine um eine Einheit verringerte positive ganze Zahl ist, während die entsprechenden Koeffizienten in den ersten λ Gleichungen jetzt gleich der negativen Einheit sind. Setzt man dieses Verfahren mit den analogen Substitutionen soweit fort, bis der betreffende Koeffizient in der $\lambda+1^{\text{ten}}$ Gleichung – und in den etwa folgenden – die positive Einheit geworden ist, so ist, wie oben gezeigt, die notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit des Integralsystems die, daß die konstanten Koeffizienten von u wieder den Wert Null annehmen, und ist diese erfüllt, so gelangt man somit durch ein Substitutionssystem von der Form (64) zu einem Differentialgleichungssystem, in welchem die betr. Koeffizienten der ersten λ Differentialgleichungen negative ganze Zahlen, die der $\lambda+1$ – und etwa folgenden Gleichungen – den Wert Null hat, und die nachfolgenden Gleichungen möglicherweise zu diesen Koeffizienten positive ganze Zahlen haben. Fährt man so fort, bis das System nur noch solche um ganze Zahlen verkleinerte μ enthält, welche nicht mehr positive ganze, reelle oder komplexe Zahlen sind, so wird man, wenn stets die Bedingung erfüllt ist, daß in dem Komplex der Differentialgleichungen, in welchen der konstante Koeffizient der ersten Potenz der abhängigen Variabeln die positive Einheit ist, die konstanten Koeffizienten der unabhängigen Variabeln den Wert Null haben, zu einem System von Differentialgleichungen gelangen, in welchem keiner der Koeffizienten der abhängigen Variabeln eine positive ganze Zahl ist, und somit das gegebene Differentialgleichungssystem ein und nur ein in $u=0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem besitzen; es sind somit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür entwickelt, daß das Differentialgleichungssystem (45) in $u=0$ verschwindende und in der Umgebung dieses Punkts eindeutige Integralsysteme hat.

Es möge endlich noch bemerkt werden, daß, wenn ein Differentialgleichungssystem die Form hat:

$$(66)\left\{\begin{array}{l} u\dfrac{dt_1}{du} = t_1 + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(1)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(1)} + \cdots \\ u\dfrac{dt_2}{du} = t_2 + (u, t_1, \ldots t_n)_2^{(2)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(2)} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u\dfrac{dt_n}{du} = t_n + (u, t_1, \ldots, t_n)_2^{(n)} + (u, t_1, \ldots t_n)_3^{(n)} + \cdots, \end{array}\right.$$

dieses durch die Substitutionen

$$t_1 = u v_1,\ t_2 = u v_2, \ldots t_n = u v_n$$

wie oben in

$$(67)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv_1}{du} = e_1 + (u, v_1, \ldots v_n)_1^{(1)} + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(1)} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dv_n}{du} = e_n + (u, v_1, \ldots v_n)_1^{(n)} + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(n)} + \cdots \end{array}\right.$$

oder in

$$\begin{array}{l} u\dfrac{dv_1}{du} = e_1 u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(1)} + (u, v_1, \ldots v_n)_3^{(1)} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u\dfrac{dv_n}{du} = e_n u + (u, v_1, \ldots v_n)_2^{(n)} + (u, v_1, \ldots v_n)_3^{(n)} + \cdots \end{array}$$

übergeht, und daher, da die konstanten Koeffizienten der ersten Potenz der abhängigen Variabeln auf den rechten Seiten Null, also nicht positive ganze, von Null verschiedene Zahlen sind, dieses System, wie früher gezeigt worden, ein und nur ein für $u=0$ verschwindendes und in der Umgebung dieses Punkts eindeutiges Integralsystem besitzt.

Setzt man nun in (67)

$$v_1 = v_1^0 + V_1,\ v_2 = v_2^0 + V_2,\ \ldots\ v_n = v_n^0 + V_n,$$

worin $v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0$ beliebige konstante Größen bedeuten, so nimmt dieses System die analoge Form an:

$$\frac{dV_1}{du} = h_1 + (u, V_1, \ldots V_n)_1^{(1)} + (u, V_1, \ldots V_n)_2^{(1)} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dV_n}{du} = h_n + (u, V_1, \ldots V_n)_1^{(n)} + (u, V_1, \ldots V_n)_2^{(n)}$$

und besitzt somit ein und nur ein für $u=0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem. Da aber den Werten $V_1=0$, $V_2=0, \ldots V_n=0$ die Werte $v_1=v_1^0$, $v_2=v_2^0, \ldots v_n=v_n^0$ entsprechen, so besitzt das Differentialgleichungssystem (67) außer dem einen für $u=0$ verschwindenden eindeutigen Integralsystem noch unendlich viele in diesem Punkte eindeutige Integralsysteme, deren Elemente in $u=0$ die Werte $v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0$ annehmen; also wird, wie aus den Substitutionen $t_\rho = u v_\rho$ folgt,

das Differentialgleichungssystem (67) unendlich viele in $u=0$ verschwindende und in der Umgebung dieses Wertes eindeutige Integralsysteme besitzen.

Mit der Erledigung der Fälle, in denen von den Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ ein Teil oder alle oder keine positiv ganz ist, wird somit die Frage nach der Existenz und Zahl der für $u=0$ verschwindenden, um diesen Punkt herum eindeutigen Integralsysteme beantwortet, und es bleibt nur noch zu untersuchen, welchen Bedingungen jene Größen genügen müssen, wenn außer diesen eindeutigen Integralsystemen noch mehrdeutige, ebenfalls für $u=0$ verschwindende Integrale existieren sollen, und welches die Entwicklungsformen dieser Integrale sind — der Weg für diese

Untersuchung ist gekennzeichnet durch das früher gewonnene Resultat, daß, wenn das Differentialgleichungssystem (9) für $u=0$ verschwindende Integralsysteme von einer endlichen Ordnungszahl haben soll, diese Ordnungszahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ entweder positive ganze Zahlen oder $m_\varrho = M_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots n)$ sein müssen.

Den beiden für die Behandlung der eindeutigen Integrale gemachten Voraussetzungen entsprechend nehmen wir zunächst wieder an, daß

keine der Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ eine positive ganze Zahl ist,

in welchem Falle stets ein und nur ein für $u=0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem existiert, und fügen die Annahme hinzu, daß

die reellen Teile sämtlicher Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$, welche die als verschieden vorausgesetzten Lösungen der Determinante (2) waren, positiv und von Null verschieden sind.

Mit Rücksicht auf die ähnlichen oben für das Gleichungssystem (45) durchgeführten Betrachtungen wird es genügen, an dieser Stelle die Untersuchung für eine Differentialgleichung

$$u \frac{dx_1}{du} = M_1 x_1 + (u, x_1) \tag{68}$$

anzustellen, in welcher M_1 nicht eine positive ganze Zahl ist, sondern eine im allgemeinen reelle oder komplexe Zahl, deren reeller Teil positiv und von Null verschieden ist, und (u, x_1) eine endliche oder unendliche Potenzreihe von u und x_1 ohne konstantes Glied bedeutet, worin x_1 nicht mehr linear mit einer Konstanten multipliziert vorkommt.

Sei nun ξ_1 das, wie oben nachgewiesen, stets und allein existierende für $u=0$ verschwindende, in der Umgebung dieses Punkts eindeutige Integral von (68), und setzt man

$$x_1 = \xi_1 + y_1$$

in diese Differentialgleichung ein, so geht dieselbe, da

$$u \frac{d\xi_1}{du} = M_1 \xi_1 + (u, \xi_1)$$

ist, in

$$u \frac{d y_1}{d u} = M_1 y_1 + (u, \xi_1 + y_1) - (u, \xi_1)$$

oder, wenn für ξ_1 die eindeutige Potenzreihe von u eingesetzt wird, in

$$(69) \qquad u \frac{d y_1}{d u} = M_1 y_1 + [u, y_1]$$

über, worin die Potenzreihe $[u, y_1]$ von u und y_1 außer reinen Potenzen von y_1 mit Konstanten multipliziert nur Verbindungen von u und y_1 Potenzen enthält.

Sucht man nunmehr in der unendlichen Reihe

$$(70) \qquad y_1 = u^{M_1} \sum_{p, p_1} c_{p, p_1} \, u^{p + M_1 p_1},$$

in welcher die Summationsindizes p und p_1 positive ganze Zahlen (Null eingeschlossen) darstellen, die Konstanten c_{p,p_1} so zu bestimmen, daß y_1 zunächst formal ein Integral der Differentialgleichung (69) wird, daß also diese Reihe, ohne deren Konvergenz in Betracht zu ziehen, in (69) eingesetzt dieser genügt, so muß die Gleichung

$$\sum_{p, p_1} (p + M_1 p_1) \, c_{p, p_1} \, u^{p + M_1 (p_1 + 1)} = \left[u, \sum_{p', p'_1} c_{p', p'_1} \, u^{p' + M_1 (p'_1 + 1)} \right]$$

in u und u^{M_1} identisch erfüllt werden.

Hieraus folgt aber unmittelbar mit Rücksicht auf die oben charakterisierte Zusammensetzung von $[u, y_1]$ aus u und y_1, daß

$$(71) \qquad \bigl(p + M_1 (p_1 - 1)\bigr) \, c_{p, p_1 - 1} = f(p', p'_1),$$

worin $f(p', p'_1)$ ein mit positiven Koeffizienten versehenes, aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (69) und den Konstanten c_{p', p'_1} gebildetes ganzes Polynom bedeutet, in welchen die Indizes p', p'_1 den Bedingungen unterliegen, daß

$$p' \leq p, \quad p'_1 \leq p_1 - 1, \quad p' + p'_1 < p + (p_1 - 1)$$

ist, und c_{00} unbestimmt bleibt, da durch Substitution von (70) in (69), weil der Voraussetzung nach der reelle Teil von M_1 positiv und von Null verschieden ist, die ersten Posten auf beiden Seiten herausfallen. Es ergibt sich daher aus (71), daß

$$c_{p,p_1-1} = \varphi_{p',p'_1-1}, \tag{72}$$

worin φ_{p',p'_1-1} ein Polynom darstellt, von dem jeder Posten aus einem ganzzahligen Produkte der Koeffizienten der Differentialgleichung mit ganzen Potenzen von c_{00} besteht, dividiert durch ein Produkt von Faktoren der Form

$$p'+M_1(p'_1-1);$$

von diesen Faktoren kann aber keiner der für M_1 gemachten Voraussetzung zufolge verschwinden, und es läßt sich somit eine positive Größe K angeben von der Art, daß für alle in Frage kommenden p' und p'_1

$$\text{mod.}\,(p'+M_1(p'_1-1)) > K$$

ist.

Bezeichnet man nun wieder wie oben für das Differentialgleichungssystem (45) die Koeffizienten von $u^\alpha x_1^{\alpha_1}$ in (68) mit $A_{\alpha\alpha_1}$, so daß sich eine positive Größe m angeben läßt, für welche in den früheren Bezeichnungen

$$\text{mod.}\,A_{\alpha\alpha_1} < \frac{m}{\rho^\alpha r_1^{\alpha_1}}$$

ist, substituiert ferner für die Moduln der Koeffizienten der Differentialgleichung (68) in den Ausdrücken für die c diese oberen Grenzen und nennt die so aus den c hervorgehenden Größen C, so daß die Reihe (70) in

$$Y_1 = u^{M_1} \sum_{p,p_1} C_{p,p_1} u^{p+M_1p_1} \tag{73}$$

übergeht, so würde nach bekannter Schlußweise die Konvergenz der Reihe (73) um $u=0$ herum, da

$$\text{mod.}\,c_{p,p_1} < C_{p,p_1}$$

ist, auch die Konvergenz der Reihe (70) nach sich ziehen.

Nun ist aber, wie aus der Entstehungsweise von (73) hervorgeht, dieser Wert von Y_1 wieder das formal gebildete Integral der Differentialgleichung

$$(74)\qquad u\frac{dY_1}{du}=M_1Y_1+[u,Y_1]\,,$$

worin $[u, Y_1]$ aus (u, y_1) hervorgeht, wenn in letzterem, das nach homogenen Funktionen geordnet die Form hatte:

$$(u,y_1)=(A_{11}u\,y_1+A_{02}y_1^2)+(A_{21}u^2y_1+A_{12}u\,y_1^2+A_{03}y_1^3)+\cdots,$$

die vorher bezeichneten Substitutionen gemacht werden, also

$$[u,Y_1]=\left(\frac{m}{\rho r_1}u\,Y_1+\frac{m}{r_1^2}Y_1^2\right)+\left(\frac{m}{\rho^2r_1}u^2Y_1+\frac{m}{\rho r_1^2}u\,Y_1^2+\frac{m}{r_1^3}Y_1^3\right)+\cdots$$
$$=\frac{mY_1}{r_1}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{u}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y_1}{r_1}\right)}-1\right)$$

ist, wenn statt der etwa endlichen Reihe der homogenen Funktionen die unendliche Reihe derselben gesetzt wird, so daß die Reihe (73) ein mit $u=0$ verschwindendes, zunächst formal richtiges Integral der Differentialgleichung

$$(75)\qquad u\frac{dY_1}{du}=M_1Y_1+\frac{mY_1}{r_1}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{u}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y_1}{r_1}\right)}-1\right)$$

ist.

Die Konvergenz der Reihe (73) würde aber erwiesen sein, wenn man die Konvergenz der Reihe

$$(73a)\qquad Z_1=u^{M_1}\sum_{p,p_1}C_{p,p_1}u^{p+Mp_1}$$

feststellen könnte, welche aus (73) hervorgeht, wenn man statt der in den Nennern von C'_{p,p_1} vorkommenden Größen mod. $(p' + M_1(p_1'-1))$ die kleinste Größe K setzt. Daß aber die Reihe (73a) um $u=0$ herum konvergiert, geht daraus hervor, daß die Substitution

$$(76)\qquad z_1 = u^{M_1} \sum_{p,p_1} C''_{p,p_1} u^{p+M_1 p_1}$$

in die algebraische Gleichung

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} K z_1 - K C u^{M_1} &= \left(\frac{m}{\rho r_1} u z_1 + \frac{m}{r_1^2} z_1^2\right) \\ &+ \left(\frac{m}{\rho^2 r_1} u^2 z_1 + \frac{m}{\rho r_1^2} u z_1^2 + \frac{m}{r_1^3} z_1^3\right) + \cdots \\ &= \frac{m z_1}{r_1}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{u}{\rho}\right)\left(1-\frac{z_1}{r_1}\right)} - 1\right), \end{aligned}\right.$$

wie unmittelbar zu sehen, durch Bestimmung der C'', wie oben für die c der Gleichung (70) geschehen, für diese die Werte von C' ergibt, wenn in diesen wie oben statt der Nenner die Größe K substituiert wird, und es wäre somit die nach Potenzen von u und u^{M_1} fortschreitende Reihe (73a), also auch (70) konvergent, wenn das für $u=0$ verschwindende Integral der in z_1 quadratischen Gleichung, welche z_1 als algebraische Funktion von u und u^{M_1} definiert, um $u=0$ und $u^{M_1}=0$ herum konvergent wäre. Daß dies aber der Fall ist, geht daraus hervor, daß die Funktionaldeterminante dieser algebraischen Gleichung, da $K \neq 0$, von Null verschieden ist.

Genau dieselben Schlüsse, wie sie hier für eine Differentialgleichung durchgeführt worden, liefern den Satz,

daß, wenn in dem Differentialgleichungssystem (9) keine der voneinander verschiedenen Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ eine positive ganze Zahl ist, und diese im allgemeinen reellen oder komplexen Lösungen der Determinante (2) sämtlich positive und von Null verschiedene reelle Teile besitzen, die Differentialgleichungen außer dem für $u=0$ verschwindenden eindeutigen Integralsystem noch ein ebenfalls für

$u=0$ verschwindendes System von Integralen besitzt, welche sich nach positiven, ganzen und steigenden Potenzen von

$$u,\, u^{M_1},\, u^{M_2},\, \ldots\, u^{M_n}$$

entwickeln lassen.

Für den Fall, daß $M_1, M_2, \ldots M_n$ sämtlich rationale Zahlen sind, können die Integrale, wenn N das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner dieser Brüche ist, als Reihen aufgefaßt werden, welche nach positiven ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{N}}$ fortschreiten, stellen somit um $u=0$ herum N-deutige Funktionen dar.

Daß in dem oben betrachteten Falle unendlich viele für $u=0$ verschwindende und nach ganzen Potenzen von $u, u^{M_1}, u^{M_2}, \ldots u^{M_n}$ fortschreitende konvergente Integralsysteme existieren, geht aus der Willkürlichkeit der Konstanten C_{00} in dem Ausdrucke (73a) hervor.

Wir gehen endlich zu dem zweiten, oben behandelten Hauptfalle über, in dem $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$ positive ganze Zahlen sind, und in welchem, wie gezeigt worden, im allgemeinen – mit Ausnahme des Falles, in dem die Größen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda$ des auf (62) reduzierten Systems (45) und die weiteren ähnlichen den Wert Null annehmen – für $u=0$ verschwindende eindeutige Integralsysteme nicht existierten, und nehmen nunmehr an, daß die reellen Teile der Größen $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \ldots M_n$ positiv und von Null verschieden sind – es soll die Frage nach der Existenz für $u=0$ verschwindender, nach bestimmten Funktionen fortschreitender konvergenter Reihen aufgeworfen werden. Auch hier wird es wieder genügen, das einfachste, nur aus zwei Differentialgleichungen bestehende System (9) zu behandeln, da die Schlüsse für das allgemeine Differentialgleichungssystem genau dieselben bleiben.

Sei somit das Differentialgleichungssystem

$$(78)\left\{\begin{aligned} u\,\frac{dx_1}{du} &= M_1 x_1 + \gamma_1 u + (u, x_1, x_2)_2^{(1)} + (u, x_1, x_2)_3^{(1)} + \cdots \\ u\,\frac{dx_2}{du} &= M_2 x_2 + \gamma_2 u + (u, x_1, x_2)_2^{(2)} + (u, x_1, x_2)_3^{(2)} + \cdots \end{aligned}\right.$$

gegeben, in welchem $(u, x_1, x_2)_\varkappa$ homogene Funktionen $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades der eingeschlossenen Größen bedeuten, M_1 eine positive ganze Zahl, und der reelle Teil von M_2 positiv und von Null verschieden, und, wenn M_2 reell, nicht positiv ganz ist. Setzt man

$$M'_1 = M_1 + \varepsilon, \quad M'_2 = M_2,$$

worin ε eine sehr kleine Größe bedeutet, und bildet die Differentialgleichungen

$$(79)\left\{\begin{aligned} u\frac{dX_1}{du} &= M'_1 X_1 + \gamma_1 u + (u, X_1, X_2)_2^{(1)} + (u, X_1, X_2)_3^{(1)} + \cdots \\ u\frac{dX_2}{du} &= M'_2 X_2 + \gamma_2 u + (u, X_1, X_2)_2^{(2)} + (u, X_1, X_2)_3^{(2)} + \cdots, \end{aligned}\right.$$

so ist in denselben M'_1 nicht mehr eine positive ganze Zahl, während der reelle Teil von M'_2 wiederum positiv und von Null verschieden ist, so daß dieses Differentialgleichungssystem den in dem vorher behandelten Falle gemachten Voraussetzungen genügt, und somit ein für $u=0$ verschwindendes, nach positiven ganzen Potenzen von $u, u^{M'_1}, u^{M'_2}$ fortschreitendes Integralsystem

$$(80)\left\{\begin{aligned} X_1 &= u^{M'_1} \sum \varkappa^{(1)}_{p', p'_1, p'_2}\, u^{p' + M'_1 p'_1 + M_2 p'_2} \\ X_2 &= u^{M'_2} \sum \varkappa^{(2)}_{p'', p''_1, p''_2}\, u^{p'' + M'_1 p''_1 + M_2 p''_2} \end{aligned}\right.$$

besitzt, worin die $\varkappa$ so von $M'_1 = M_1 + \varepsilon$ und $M'_2 = M_2$ abhängen wie die c von M_1 und M_2 in dem (70) analogen Integralsystem der Differentialgleichungen (78).

Setzt man nun, um mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten von dem System (79) wieder zu (78) überzugehen:

$$(81)\qquad \frac{u^{M'_1} - u^{M_1}}{M'_1 - M_1} = t_1 \quad \text{oder} \quad u^{M'_1} = u^{M_1} + \varepsilon t_1,$$

so erhält man durch Substitution dieses Wertes in die Integrale (80)

$$\begin{aligned} X_1 &= (u^{M_1} + \varepsilon t_1) \sum \varkappa^{(1)}_{p', p'_1, p'_2}\, u^{p'} (u^{M_1} + \varepsilon t_1)^{p'_1}\, u^{M_2 p'_2} \\ X_2 &= u^{M_2} \sum \varkappa^{(2)}_{p'', p''_1, p''_2}\, u^{p''} (u^{M_1} + \varepsilon t_1)^{p''_1}\, u^{M_2 p''_2}, \end{aligned}$$

oder, da der Voraussetzung nach M_1 eine positive ganze Zahl ist:

$$(82)\left\{\begin{aligned} X_1 &= \sum K^{(1)}_{q',q'_1,q'_2}\, u^{q'}\, t_1^{q'_1}\, u^{M_2 q'_2} \\ X_2 &= \sum K^{(2)}_{q'',q''_1,q''_2}\, u^{q''}\, t_1^{q''_1}\, u^{M_2 q''_2}\,. \end{aligned}\right.$$

Läßt man nunmehr ε gegen Null konvergieren, so daß das Differentialgleichungssystem (79) in (78) übergeht, so nimmt das Integralsystem (82), das jetzt ein solches der Differentialgleichungen (78) wird, weil

$$t_1 = \left(\frac{u^{M'_1} - u^{M_1}}{M'_1 - M_1}\right)_{M'_1 = M_1} = \left(\frac{u^{M_1+\varepsilon_1} - u^{M_1}}{\varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1 = 0} = u^{M_1} \log u$$

ist, die Form an:

$$(83)\left\{\begin{aligned} x_1 &= \sum \lambda^{(1)}_{p',p'_1,p'_2}\, u^{p'} (u^{M_1} \log u)^{p'_1} (u^{M_2})^{p'_2} \\ x_2 &= \sum \lambda^{(2)}_{p'',p''_1,p''_2}\, u^{p''} (u^{M_1} \log u)^{p''_1} (u^{M_2})^{p''_2}\,, \end{aligned}\right.$$

und zwar ergeben sich mit Rücksicht darauf, daß für den vorigen Fall, auf den dieser zurückgeführt wurde, wegen der Willkürlichkeit der Konstanten c_{00} unendlich viele Integralsysteme der dort erhaltenen Form existierten, auch hier unendlich viele Integralsysteme der Form (83).

Da sich nun die für das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (78) durchgeführten Betrachtungen unmittelbar auf das allgemeine System (9) übertragen lassen, so ergibt sich der Satz,

daß, wenn in dem Differentialgleichungssystem (9) $M_1, M_2, \dots M_\varkappa$ positive ganze Zahlen sind, während $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \dots M_n$ positive, von Null verschiedene reelle Teile besitzen, im allgemeinen — mit Ausnahme der oben für die η im reduzierten Systeme angegebenen Bedingung — keine mit $u=0$ verschwindende, in der Umgebung dieses Punkts eindeutige Integralsysteme existieren, jedoch stets unendlich viele für $u=0$ verschwindende und in der Umgebung dieses Punkts in eine nach positiven ganzen Potenzen von

$$u, u^{M_1} \log u, u^{M_2} \log u, \ldots u^{M_\varkappa} \log u, u^{M_{\varkappa+1}}, u^{M_{\varkappa+2}}, \ldots u^{M_n}$$

fortschreitende konvergente Reihen entwickelbare unendlich vieldeutige Integralsysteme.

Wir wollen aber noch die gewonnenen Resultate von einem andern Gesichtspunkte aus betrachten, indem wir für die Normalform (9) der transformierten HAMILTONschen Differentialgleichungen die Frage aufwerfen, wann dieselben für $u=0$ verschwindende Integralsysteme besitzen, deren Elemente in diesem Punkte von einer endlichen Ordnungszahl Null sind.

Nachdem am Anfange dieses Abschnittes 11 nachgewiesen worden, daß, wenn mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ die reell und positiv vorausgesetzten Ordnungszahlen dieser Elemente bezeichnet werden, diese entweder positive ganze Zahlen sind – was für die in der Umgebung von $u=0$ eindeutigen Integrale der Fall war – oder daß

$$m_1 = M_1, \; m_2 = M_2, \; \ldots m_n = M_n$$

ist, in welchem Falle die sämtlichen Lösungen der Determinante (2) reell sein mußten und dann die Ordnungszahlen der Integrale waren, ergibt sich somit in Rücksicht darauf, daß, wenn

$$\left(\frac{f(u)}{u^{r+si}}\right)_{u=0} \qquad \text{für } r > 0$$

einen endlichen Wert annimmt, $r+si$ als endliche Ordnungszahl von $f(u)$ in $u=0$ betrachtet, und somit der zweite eben hervorgehobene Fall auch so charakterisiert werden kann, daß die Lösungen der Determinante (2), sie seien reell oder komplex, die Ordnungszahlen der Integrale des Differentialgleichungssystems sind, vorausgesetzt, daß deren reelle Teile positiv und von Null verschieden sind. Wir finden somit,

daß, wenn der reelle Teil auch nur *einer* der Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ negativ oder Null ist, das Differentialgleichungssystem (9) außer dem etwa existierenden eindeutigen Integralsystem kein System von Integralen besitzt, welche in $u=0$ von einer endlichen Ordnung verschwinden, was mit dem oben gefundenen Resultat übereinstimmt, daß, wenn keine der Zahlen $M_1, M_2, \ldots M_n$ positiv ganz ist – in welchem Falle ein und nur ein in $u=0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem existiert –, nur dann noch, und zwar unendlich viele, in $u=0$ verschwindende Integralsysteme existieren, deren Elemente sich in eine Potenzreihe von $u, u^{M_1}, u^{M_2}, \ldots u^{M_n}$ entwickeln lassen, also wie aus der Form (70) hervorgeht, von einer endlichen Ordnung Null werden, wenn die reellen Teile sämtlicher Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ positiv und von Null verschieden sind.

Für den Fall, daß einige der Größen M: $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$ positiv ganz sind, und die reellen Teile der übrigen $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \ldots M_n$ positiv und von Null verschieden sind, also wieder keine der Größen $M_1, M_2, \ldots M_n$ einen reellen Teil besitzt, der negativ oder Null ist, haben wir außer dem unter den früher entwickelten Bedingungen etwa existierenden eindeutigen Integralsystem noch unendlich viele Systeme von Integralen gefunden, welche für $u=0$ verschwinden und sich um diesen Punkt herum in konvergente Potenzreihen von

$$u,\ u^{M_1}\log u,\ u^{M_2}\log u, \ldots u^{M_\varkappa}\log u,\ u^{M_{\varkappa+1}},\ u^{M_{\varkappa+2}}, \ldots u^{M_{\varkappa_n}},$$

worin $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$ positive ganze Zahlen waren, entwickeln lassen – Integrale, die somit für $u=0$ nicht von einer bestimmten endlichen Ordnung verschwinden.