Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Dynamik.**
(Ergänzung zu Abhandlung IV)

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1919, 7

In der vorliegenden Ergänzung der Abhandlung IV über die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Dynamik werden die in dieser gewonnenen Resultate über die Natur der mit der unabhängigen Variabeln verschwindenden Integralsysteme zunächst in etwas veränderter Form zusammengestellt und sodann auf Grund dieser die Frage behandelt, ob und inwieweit man sich über die Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit der Integrale in einem gegebenen Falle orientieren kann, ohne die in der Untersuchung zugrundegelegte Determinantengleichung aufzulösen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1919, S. XXIV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1919. 7. Abhandlung

Über die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Dynamik

(Ergänzung zu Abhandlung IV)

Von

† LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

Eingegangen am 28. Mai 1919

Heidelberg 1919
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1483

In der nachfolgenden Ergänzung meiner letzten Arbeit (IV) sollen zunächst zum Zwecke der Anwendung der hergeleiteten Sätze auf bestimmt vorgelegte mechanische Probleme die dort gefundenen Resultate in etwas veränderter Form ausgesprochen werden.

Wenn das Differentialgleichungssystem

$$(1)\left\{\begin{aligned} u\frac{dx_1}{du} &= \mu_{11}x_1+\mu_{12}x_2+\cdots+\mu_{1n}x_n+a_1u+(u,x_1,\ldots x_n)_2^{(1)} \\ &\qquad +(u,x_1,\ldots x_n)_3^{(1)}+\cdots \\ u\frac{dx_2}{du} &= \mu_{21}x_1+\mu_{22}x_2+\cdots+\mu_{2n}x_n+a_2u+(u,x_1,\ldots x_n)_2^{(2)} \\ &\qquad +(u,x_1,\ldots x_n)_3^{(2)}+\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u\frac{dx_n}{du} &= \mu_{n1}x_1+\mu_{n2}x_2+\cdots+\mu_{nn}x_n+a_nu+(u,x_1,\ldots x_n)_2^{(n)} \\ &\qquad +(u,x_1,\ldots x_n)_3^{(n)}+\cdots, \end{aligned}\right.$$

in welchem unter der früher für die Reduktion der HAMILTONschen Differentialgleichungen auf das System (1) gemachten Voraussetzung, daß die rechtwinkligen Koordinaten des mechanischen Problems algebraische Funktionen der freien Parameter sind, im allgemeinen angenommen werden darf, daß die Größen μ reelle algebraische Zahlen sind, und für welches die Existenz und Form eines für $u=0$ verschwindenden Integralsystems untersucht werden soll, durch die früher angegebenen linearen Transformationen in die Form gebracht wird:

$$(2)\left\{\begin{aligned} u\frac{dX_1}{du} &= M_1X_1+\gamma_1u+(u,X_1,\ldots X_n)_2^{(1)}+(u,X_1,\ldots X_n)_3^{(1)}+\cdots \\ u\frac{dX_2}{du} &= M_2X_2+\gamma_2u+(u,X_1,\ldots X_n)_2^{(2)}+(u,X_1,\ldots X_n)_3^{(2)}+\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u\frac{dX_n}{du} &= M_nX_n+\gamma_nu+(u,X_1,\ldots X_n)_2^{(n)}+(u,X_1,\ldots X_n)_3^{(n)}+\cdots, \end{aligned}\right.$$

worin $M_1, M_2, \ldots M_n$ die als verschieden vorausgesetzten Lösungen der Gleichung

$$(3) \qquad D(M) = \begin{vmatrix} \mu_{11} - M & \mu_{21} & \ldots & \mu_{n1} \\ \mu_{12} & \mu_{22} - M & \ldots & \mu_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{1n} & \mu_{2n} & \ldots & \mu_{nn} - M \end{vmatrix} = 0$$

sind, welche in reelle und rein imaginäre Teile zerlegt sein mögen:

$$M_1 = p_1 + q_1 i, \; M_2 = p_2 + q_2 i, \ldots M_n = p_n + q_n i,$$

so existiert

I. wenn $p_1, p_2, \cdots p_n$ sämtlich negativ oder Null sind,

stets ein und nur ein für $u=0$ verschwindendes und eindeutiges Integralsystem;

II. wenn $p_1, p_2, \ldots p_\varkappa$ $(\varkappa < n)$ negativ oder Null, und $p_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+2}, \cdots p_n$ positiv und von Null verschieden sind,

II. 1. für den Fall, daß keine der Größen $p_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+2}, \cdots p_n$ eine positive ganze Zahl ist,

stets ein und nur ein für $u=0$ verschwindendes und eindeutiges Integralsystem, und

II. 2. für den Fall, daß eine oder mehrere der Größen $p_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+2}, \cdots p_n$ positiv ganz sind,

im allgemeinen kein in $u=0$ verschwindendes und eindeutiges Integralsystem, mit Ausnahme des Falles, daß bei Anwendung der früher angegebenen Transformationen sich ein dem gegebenen (2) analog gestaltetes Differentialgleichungssystem ergibt, in welchem auf den rechten Seiten eines Teiles der Differentialgleichungen der Koeffizient der ersten Potenz der abhängigen Variabeln gleich der Einheit, der der unabhängigen Variabeln Null, und der Koeffizient der ersten Potenz der abhängigen Variabeln in den andern Differentialgleichungen nicht eine positive ganze Zahl ist;

III. wenn $p_1, p_2, \ldots p_n$ sämtlich positiv und von Null verschieden sind,

III. 1. für den Fall, daß keine der Lösungen M_1, $M_2, \ldots M_n$ der Gleichung (3) eine positive ganze Zahl ist,

stets ein und nur ein verschwindendes und eindeutiges Integralsystem, und außerdem unendlich viele, in $u = 0$ verschwindende, nach ganzen positiven Potenzen von

$$u,\ u^{M_1},\ u^{M_2}, \ldots u^{M_n}$$

entwickelbare Integralsysteme, die im allgemeinen unendlich vieldeutig sind und nur eine algebraische endliche Vieldeutigkeit haben, wenn $M_1, \ldots M_n$ sämtlich positive rationale Zahlen sind, und

III. 2. für den Fall, daß die Lösungen $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$ $(\varkappa < n)$ positiv ganz sind,

im allgemeinen (wieder bis auf die oben zu II. 2. angegebenen Fälle) kein in $u = 0$ verschwindendes und eindeutiges Integralsystem, aber unendlich viele verschwindende, nach positiven ganzen Potenzen von

$$u,\ u^{M_1} \log u, \ldots u^{M_\varkappa} \log u,\ u^{M_{\varkappa+1}}, \ldots u^{M_n}$$

entwickelbare Integralsysteme, die in allen Fällen unendlich vieldeutig sind, und von der logarithmischen Vieldeutigkeit abgesehen nur eine algebraische endliche Vieldeutigkeit haben, wenn $M_{\varkappa+1}, \ldots M_n$ positive rationale Zahlen sind.

Zur Ermittlung der Eigenschaften der Integralsysteme würde man somit allgemein die Gleichung (3) aufzulösen und je nach den Werten der Lösungen und der reellen Teile derselben den vorliegenden Fall in die obige Einteilung einzuordnen haben; es fragt sich nun, ob oder inwieweit sich zu dieser Einordnung die Auflösung der Gleichung (3) vermeiden läßt.

Um zunächst die Existenz und die Anzahl derjenigen Lösungen der Gleichung (3) zu ermitteln, deren reelle Teile p negativ oder Null sind, wird man nur D(M) durch Substitution von $M = p + qi$ in den reellen und imaginären Teil zu zerlegen, und, wenn

$$D(M) = P(p,q) + iQ(p,q)$$

gesetzt ist, den Überschuß der in p und q rationalen Funktion $\frac{P}{Q}$ über das unendliche Rechteck

$$p = 0, \ldots -\infty, \quad q = -\infty, \ldots +\infty$$

genommen zu bilden haben; dann ist bekanntlich

$$\mathop{\mathrm{E}}\limits_{p=-\infty}^{p=0}\left(\frac{P}{Q}\right)_{q=-\infty} + \mathop{\mathrm{E}}\limits_{q=-\infty}^{q=+\infty}\left(\frac{P}{Q}\right)_{p=0} + \mathop{\mathrm{E}}\limits_{p=0}^{p=-\infty}\left(\frac{P}{Q}\right)_{q=+\infty} + \mathop{\mathrm{E}}\limits_{q=+\infty}^{q=-\infty}\left(\frac{P}{Q}\right)_{p=-\infty} = 2m,$$

worin unter der stets zulässigen Annahme, daß die Gleichung (3) bereits von gleichen Lösungen befreit ist, m die Anzahl der innerhalb des bezeichneten unendlich großen Rechtecks gelegenen Lösungen der Gleichung

$$(4) \qquad D(M) = P(p,q) + iQ(p,q) = 0$$

ist, also aller derjenigen Lösungen von (3), deren reeller Teil p negativ oder Null ist, und worin die vier zu bildenden Überschüsse der rationalen Funktion $\frac{P}{Q}$ von p und q bekanntlich durch die rationale Operation, welche der Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Funktionen einer Variabeln analog ist, unmittelbar ermittelt werden können.

Ergibt sich nun für den Grad n der Gleichung (3) oder (4)

$$(A.) \qquad m = n,$$

sind also die reellen Teile $p_1, p_2, \ldots p_n$ sämtlich negativ oder Null, so wird der Fall (A.) in I. einzuordnen sein.

Ist

$$0 < m < n\,, \tag{B.}$$

sind also die reellen Teile $p_1, p_2, \dots p_m$ negativ oder Null, also $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n$ positiv und von Null verschieden, so wird sich dieser Fall in II. einordnen, ob aber in II.1. oder II.2. wird davon abhängen, ob keiner oder mindestens einer der positiven p-Werte eine ganze Zahl ist. Aber die letztere Frage kann entschieden werden, ohne die Gleichung (3) aufzulösen und zwar auf Grund der nachfolgenden, sehr einfachen Bemerkung:

Unter der Annahme eines reellen p und q folgt aus (4):

$$P(p,q) = 0, \quad Q(p,q) = 0\,, \tag{5}$$

umgekehrt wird aber auch für jedes reelle oder komplexe Wertepaar p und q, welches den Gleichungen (5) genügt:

$$P(p,q) + iQ(p,q) = D(p+qi) = 0\,,$$

also $p+qi$ eine Lösung der Gleichung (3) sein. Es liefern also alle reellen und komplexen Lösungspaare der Gleichungen (5) alle Lösungen der Gleichungen (3) und nur diese.

Sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$M^3 + 2M^2 - 3M - 10 = 0 \tag{6}$$

oder für $M = p+qi$:

$$(p+qi)^3 + 2(p+qi)^2 - 3(p+qi) - 10 = 0\,,$$

so folgen für reelle p und q:

$$P(p,q) = p^3 - 3pq^2 + 2p^2 - 2q^2 - 3p - 10 = 0 \tag{7}$$

$$Q(p,q) = 3p^2q - q^3 + 4pq - 3q = 0\,, \tag{8}$$

und es genügen diesen beiden Gleichungen die reellen Wertepaare $p=2,\ q=0$; $p=-2,\ q=1$; $p=-2,\ q=-1$, welche die 3 Lösungen von (6) $M_1 = 2$, $M_2 = -2+i$, $M_3 = -2-i$ liefern. Wählt man jedoch das komplexe Lösungspaar

$$p = \frac{i}{2}, \quad q = \sqrt{-\frac{15}{4} + 2i}$$

der Gleichungen (7) und (8), so folgen, da

$$-\frac{15}{4} + 2i = -\left(-2 + \frac{i}{2}\right)^2$$

ist, wieder die Lösungen

$$M = p + qi = \frac{i}{2} + \left(-2 + \frac{i}{2}\right) = 2, \; -2 + i\,.$$

Eliminiert man nun zwischen den Gleichungen (5) die Größe q und bezeichnet das Eliminationsresultat in p mit $V(p)$, so werden somit auch alle Lösungspaare der beiden Gleichungen

$$(9) \qquad V(p) = 0, \quad P(p, q) = 0$$

wiederum in der Zusammenstellung $p + iq$ alle Lösungen von (3) und nur diese liefern. Zur Einordnung des vorgelegten Problems in die beiden Unterabteilungen von II. muß man nun wissen, ob unter den Lösungen M von (3) solche existieren, für welche p eine reelle positive ganze Zahl und das zugehörige q reell ist, und man wird daher zunächst feststellen müssen, ob die erste der Gleichungen (9) ganzzahlige positive Lösungen hat und welches diese sind; setzt man dann eine derselben in die zweite Gleichung (9) ein, so kann man, da die Koeffizienten der Gleichung reell sind, unmittelbar durch den Grad der Gleichung in q, wenn derselbe ein unpaarer ist, auf die Existenz eines zugehörigen reellen Wertes von q schließen, oder, wenn derselbe ein paarer, durch den STURMschen Satz feststellen, ob dieselbe eine zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegene reelle Lösung besitzt; und da es für den Fall II. nur auf die Existenz mindestens eines solchen Lösungspaares, nicht auf die Anzahl derselben ankommt, so wird nur im ungünstigsten Falle dieses

Verfahren für alle positiven ganzen Lösungen der Gleichung $V(p)=0$ durchzuführen sein.

Um aber die Existenz und die Werte aller positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung $V(p)=0$ zu ermitteln, bemerke man, daß, wenn für die in derselben vorkommenden algebraischen Zahlen die sämtlichen Kombinationen aller Werte derselben, deren Anzahl ν sei, gesetzt werden, die Gleichung

$$(10) \qquad F(p) = V(p) \cdot V_1(p) \cdot V_2(p) \cdot \cdots \cdot V_{\nu-1}(p) = 0$$

nur rationale Koeffizienten besitzt, für welche sich die Zahl und die Werte der positiven ganzzahligen Lösungen in bekannter Weise durch rationale Operationen ermitteln läßt; jede positive ganzzahlige Lösung von $V(p)=0$ wird auch (10) genügen, und man wird daher, um alle so beschaffenen Lösungen jener Gleichung zu finden, nur die gefundenen positiven ganzen Lösungen von (10) auszuwählen haben, welche den Faktor $V(p)$ zu Null machen.

Existiert somit unter den reellen Lösungspaaren von (9) keines, für welches p eine positive ganze Zahl und q reell ist, so wird dieser Fall von (B.) zu II.1. gehören, während, wenn sich auch nur die Existenz eines solchen Lösungspaares ergibt, der Fall von (B.) in II.2. einzuordnen ist — und zur Ermittlung der beiden Fälle, also zur Behandlung des Falles (B.), worin $0 < m \leqq n$, kann die Auflösung der Gleichung (3) durch Ausführung einfacher rationaler Operationen ersetzt werden.

Ist endlich

$$(C.) \qquad m = 0\,,$$

sind also die reellen Teile $p_1, p_2, \ldots p_n$ sämtlicher Lösungen $M_1, M_2, \ldots M_n$ der Gleichung (3) positiv und von Null verschieden, so gehört dieser Fall zu III., aber ob zu III.1. oder III.2 wird davon abhängen, ob keiner der Werte $M_1, M_2, \ldots M_n$ oder mindestens einer derselben eine positive ganze Zahl ist. Wenn man somit wieder, nachdem die Gleichung (3) rational gemacht ist, ohne Auflösung derselben vermöge der oben bezeichneten Methode festgestellt hat, daß (3) keine positiven ganzzahligen Lösungen besitzt, so wird dieser Fall III.1. einzuordnen sein, und wenn sich $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$

$(\varkappa \leq n)$ als positiv ganz ergeben, der Fall III. 2. in Frage kommen, worin die in III. 1. nach Potenzen von

$$u, u^{M_1}, u^{M_2}, \ldots u^{M_n},$$

in III. 2. nach Potenzen von

$$u, u^{M_1} \log u, u^{M_2} \log u, \ldots u^{M_\varkappa} \log u, u^{M_{\varkappa+1}}, u^{M_{\varkappa+2}}, \ldots u^{M_n}$$

fortschreitenden Integralsysteme im allgemeinen in $u = 0$ verschwindende unendlich vieldeutige Funktionen sind, zu deren Entwicklung man im ersten Falle sämtliche Lösungen $M_1, M_2, \ldots M_n$ der Gleichung (3), im zweiten die Lösungen $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \ldots M_n$ derselben kennen muß.

Bemerkt man aber, daß, wenn $M_1, M_2, \ldots M_n$ positive rational-gebrochene Zahlen sind, die, auf einen gemeinsamen Nenner N gebracht, die Form haben mögen:

$$M_1 = \frac{m_1}{N}, \; M_2 = \frac{m_2}{N}, \ldots M_n = \frac{m_n}{N},$$

so würde das zu III. 1. gehörige vieldeutige Integralsystem nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{N}}$ fortschreiten und somit eine endlich vieldeutige Funktion sein, und umgekehrt müßten, wenn das Integralsystem von einer endlichen algebraischen Vieldeutigkeit sein soll, sämtliche Lösungen der Gleichung (3) rational-gebrochen sein. Dies kann aber wieder ohne Auflösung von (3) durch elementare Methoden unmittelbar festgestellt werden; denn sei die rational gemachte Gleichung (3):

$$\varphi(M) = D(M) D_1(M) \ldots D_{\rho-1}(M) = 0,$$

so werden alle rational-gebrochenen Lösungen von (3) auch $\varphi(M)$ zu Null machen, und man braucht somit nur alle so beschaffenen Lösungen von $\varphi(M)$ zu suchen und diejenigen auszuwählen, welche (3) genügen; ist aber

$$\varphi(M) = \alpha_0 M^{\rho n} + \alpha_1 M^{\rho n - 1} + \cdots + \alpha_{\rho n} = 0,$$

so führt die Substitution

$$M = \frac{M'}{\alpha_0}$$

diese Gleichung in die reine Gleichung

$$M'^{\rho n} + \alpha_1 M'^{\rho n-1} + \alpha_2 \alpha_0 M'^{\rho n-2} + \cdots + \alpha_\rho \alpha_0^{\rho n-1} = 0$$

über, deren rationale Lösungen bekanntlich ganz sein müssen, und deren ganzzahlige Lösungen sich wie früher unmittelbar ermitteln lassen. Und genau in derselben Weise lassen sich für den Fall endlicher Vieldeutigkeit im Falle III. 2. außer den ganzen Zahlen $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$ die rational-gebrochenen Zahlen $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \ldots M_n$ finden.

Ist die Forderung der endlichen Vieldeutigkeit der mehrdeutigen Integralsysteme nicht gestellt, so ist zur Feststellung der Werte $M_1, M_2, \ldots M_n$ im Falle III. 1., und $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \ldots M_n$ im Falle III. 2. die Auflösung der Gleichung (3) nicht zu umgehen.

Aus den eben angestellten Überlegungen ergibt sich die nachfolgende Zusammenstellung der gewonnenen Resultate:

Um die Natur der in $u=0$ verschwindenden Integralsysteme der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
u\frac{dx_1}{du} &= \mu_{11} x_1 + \mu_{12} x_2 + \cdots + \mu_{1n} x_n + a_1 u + (u, x_1, \ldots x_n)_2^{(1)} + \cdots \\
u\frac{dx_2}{du} &= \mu_{21} x_1 + \mu_{22} x_2 + \cdots + \mu_{2n} x_n + a_2 u + (u, x_1, \ldots x_n)_2^{(2)} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u\frac{dx_n}{du} &= \mu_{n1} x_1 + \mu_{n2} x_2 + \cdots + \mu_{nn} x_n + a_n u + (u, x_1, \ldots x_n)_2^{(n)} + \cdots,
\end{aligned}$$

in welchen die Koeffizienten $\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots \mu_{1n}, \ldots \mu_{n1}, \mu_{n2}, \ldots \mu_{nn}$ algebraische Zahlen sind, zu untersuchen, bilde man die Gleichung n^{ten} Grades in M:

$$(3) \qquad D(M) = \begin{vmatrix} \mu_{11}-M & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22}-M & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn}-M \end{vmatrix} = 0,$$

setze in derselben

$$M = p + qi,$$

so daß

$$D(M) = P(p, q) + iQ(p, q)$$

wird, berechne den Überschuß der in p und q rationalen Funktion

$$\frac{P(p, q)}{Q(p, q)}$$

über das unendlich große Rechteck $p = 0 \cdots -\infty$, $q = -\infty \cdots +\infty$ genommen, und setze

$$\mathop{E}_{p=-\infty}^{p=0}\left(\frac{P}{Q}\right)_{q=-\infty} + \mathop{E}_{q=-\infty}^{q=+\infty}\left(\frac{P}{Q}\right)_{p=0} + \mathop{E}_{p=0}^{p=-\infty}\left(\frac{P}{Q}\right)_{q=+\infty} + \mathop{E}_{q=+\infty}^{q=-\infty}\left(\frac{P}{Q}\right)_{p=-\infty} = 2m,$$

so wird, wenn

$$(I.) \qquad m = n$$

ist, stets ein und nur ein für $u = 0$ verschwindendes und eindeutiges Integralsystem existieren.

Ist

$$(II.) \qquad 0 < m < n,$$

so bilde man aus den beiden Gleichungen

$$P(p, q) = 0, \quad Q(p, q) = 0$$

das Eliminationsresultat von q

$$V(p) = 0$$

und ermittle auf dem oben angegebenen Wege, ob ein reelles Lösungspaar der beiden Gleichungen

$$V(p) = 0, \quad P(p, q) = 0$$

existiert, für welches p eine positive ganze Zahl ist;

existiert kein solches Lösungspaar, so gibt es

II. 1. stets ein und nur ein für $u=0$ verschwindendes und eindeutiges Integralsystem;

existiert aber auch nur *ein* solches Lösungspaar, dann gibt es

II. 2. kein für $u=0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem mit Ausnahme des oben näher bezeichneten Falles, daß man das gegebene Differentialgleichungssystem (2) auf ein analog gestaltetes reduzieren kann, in welchem auf den rechten Seiten eines Teiles der Differentialgleichungen der Koeffizient der ersten Potenz der abhängigen Variabeln gleich der Einheit, der der unabhängigen Variabeln Null und der Koeffizient der ersten Potenz der abhängigen Variabeln in den andern Differentialgleichungen nicht eine positive ganze Zahl ist.

Ist endlich

$$\text{(III.)} \qquad m = 0,$$

so ermittle man auf dem oben vorgezeichneten, durch rationale Operationen ausführbaren Wege, wieviele positive ganzzahlige und positive rational-gebrochene Lösungen die Gleichung (3) besitzt;

existiert keine positive ganze Lösung, aber λ positive rational-gebrochene Lösungen $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda$, so gibt es

III. 1. stets ein und nur ein verschwindendes und eindeutiges Integralsystem, und außerdem unendlich viele verschwindende, nach ganzen positiven Potenzen von

$$u, u^{M_1}, u^{M_2}, \ldots u^{M_\lambda}, u^{M_{\lambda+1}}, u^{M_{\lambda+2}}, \ldots u^{M_n}$$

entwickelbare Integralsysteme, worin $M_1, M_2, \ldots M_\lambda$ bekannte positive rational-gebrochene Zahlen, $M_{\lambda+1}, \ldots M_n$ ohne Auflösung der Gleichung (3) noch unbekannte algebraische Irrationalzahlen $n-\lambda^{\text{ten}}$ Grades sind;

existieren aber $\varkappa$ positive ganze Lösungen M_1, $M_2, \ldots M_\varkappa$ $(\varkappa \leq n)$ der Gleichung (3), und $\lambda-\varkappa$ Lösungen $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \ldots M_\lambda$, welche positiv und rational-gebrochen sind, dann gibt es

III. 2. wieder mit Ausnahme des angegebenen Falles des transformierten Systems kein in $u=0$ verschwindendes und eindeutiges Integralsystem, dagegen unendlich viele verschwindende, nach ganzen positiven Potenzen von

$$u, u^{M_1}\log u, u^{M_2}\log u, \ldots u^{M_\varkappa}\log u, u^{M_{\varkappa+1}}, \ldots u^{M_\lambda}, u^{M_{\lambda+1}}, \ldots u^{M_n}$$

entwickelbare Integralsysteme, worin $M_1, \ldots M_\varkappa$ bekannte positive ganze Zahlen, $M_{\varkappa+1}, \ldots M_\lambda$ bekannte positive rational-gebrochene Zahlen und $M_{\lambda+1}, \ldots M_n$ ohne Auflösung der Gleichung (3) noch unbekannte algebraische Irrationalitäten $n-\lambda^{\text{ten}}$ Grades sind.

Hat die Gleichung (3)

a) n positive ganzzahlige Lösungen $M_1, M_2, \ldots M_n$, dann werden die unendlich vieldeutigen Integralsysteme in III. 2. nach Potenzen von

$$u, u^{M_1}\log u, u^{M_2}\log u, \ldots u^{M_n}\log u$$

entwickelbar, also von einer unendlichen logarithmischen Vieldeutigkeit sein, während, wenn

b) jene Gleichung die positiven ganzzahligen Lösungen M_1, $M_2, \ldots M_\varkappa$ und die positiven rational-gebrochenen $M_{\varkappa+1}, M_{\varkappa+2}, \ldots M_n$ besitzt, die Elemente der vieldeutigen Integralsysteme in III. 2.

$$u, u^{M_1} \log u, \ldots u^{M_\varkappa} \log u, u^{M_{\varkappa+1}}, \ldots u^{M_n}$$

zum Teil von logarithmischer unendlicher Vieldeutigkeit, zum Teil von algebraischer endlicher Mehrdeutigkeit sind.

Sind endlich

c) die sämtlichen Lösungen $M_1, M_2, \ldots M_n$ der Gleichung (3) positive rational-gebrochene Zahlen, so setzt sich das mehrdeutige Integralsystem in III. 1. aus den Elementen

$$u, u^{M_1}, u^{M_2}, \ldots u^{M_n}$$

zusammen, ist also selbst von einer algebraischen endlichen Vieldeutigkeit.