Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über vollständige Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1921, 7

Der Nachweis von der Vollständigkeit eines als Funktion von n unabhängigen Variabeln und n willkürlichen konstanten Parametern ausgedrückten Integralen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gestaltet sich in der einfachsten Weise, wenn die Funktionaldeterminante der partiellen Differentialquotienten erster Ordnung dieser Funktion nach den Parametern genommen von Null verschieden ist. Für den Fall, daß die Determinante verschwindet und jenes Integral jedenfalls einer von den abhängigen Variabeln freien Differenzialgleichung genügt, wird das Integral ein vollständiges sein, wenn die Determinante keine Vertikalreihe enthält, für die allen Elementen verschwindende Unterdeterminanten erster Ordnung zukommen und alle Determinanten, welche aus der Funktionaldeterminante entstehen, wenn die einzelnen Vertikalreihen sukzessive durch die nach den Parametern genommenen Differentialquotienten des Integrales ersetzt werden, von Null verschieden sind.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1921, S. XVII - XVIII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1921. 7. Abhandlung

Über vollständige Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

Von

LEO KOENIGSBERGER

Eingegangen am 15. September 1921

Heidelberg 1921
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1665

Wir werden im folgenden zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$

$$f_1\left(x_1, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0, \quad f_2\left(x_1, \dots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

einander *zugehörig* nennen, wenn die Elimination zweier der ihnen gemeinsamen Größen

$$y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

zu einer in allen übrigen dieser Größen identischen Gleichung führt, wie dies z.B. bei den beiden Gleichungen

$$f\left(x_1, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0, \quad \sum_{(a)} f_a\left(x_1, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) f^a = 0$$

der Fall ist, worin von den beliebigen positiven ganzzahligen Werten a der Index $a=0$ ausgeschlossen ist, und f_a beliebige Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten.

Ferner soll ein Integral einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ein *vollständiges* genannt werden, wenn es außer dieser nur noch zugehörigen zu dieser angehört.

Ist nun die Funktion

$$y = F(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_n) \tag{1}$$

von n unabhängigen Variabeln und n willkürlichen konstanten Parametern gegeben, und ist die Funktionaldeterminante

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix}$$

der Funktionen

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

nach den Parametern $a_1, a_2, \ldots a_n$ von Null verschieden, besteht also keine von den Parametern freie Beziehung zwischen den Funktionen (α), so kann man aus den Gleichungen

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

die Werte der Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ als Funktionen von

$$(\beta) \qquad x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

herleiten, und wird durch Substitution derselben in $y = F$ jedenfalls *eine* Differentialgleichung

$$(4) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

erhalten, welche die abhängige Variable y explizite enthält. Aber es kann sonst $y = F$ *weder* noch einer von y freien Differentialgleichung

$$(5) \qquad f_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

genügen, weil eine solche eine Beziehung zwischen den Größen (α), also gegen die Voraussetzung das Verschwinden der Funktionaldeterminante D nach sich ziehen würde, *noch* eine, y explizite enthaltende, der Gleichung (4) nicht zugehörige Differentialgleichung

$$(6) \qquad f_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

befriedigen, weil die Elimination von y zwischen (4) und (6), welche möglich ist, weil die Gleichungen nicht einander zugehörig sein sollten, wieder eine Differentialgleichung der Form (5) liefern würde, welche y nicht explizite enthält, und somit eine von den Parametern freie Beziehung zwischen den Größen (a), aus denen aber die Determinante D gegen die Voraussetzung gleich Null folgte.

Es gibt somit für $y = F$ in dem Fall, daß $D \neq 0$ ist, stets eine und außer den zugehörigen nur eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, von welcher jenes ein Integral und somit ein vollständiges Integral ist.

Genügt jedoch die Funktion $F(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n)$ der Bedingung $D = 0$, so findet eine von den Parametern freie Beziehung zwischen den n Größen (a) oder weniger derselben statt, oder es ist $y = F$ ein Integral einer, die abhängige Variable y nicht explizite enthaltenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(7) \qquad f\left(x_1, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0,$$

kann aber auch mehreren solchen nicht einander zugehörigen und auch die abhängige Variable y explizite enthaltenden Differentialgleichungen genügen, worauf wir nachher zum Zwecke der Feststellung der Vollständigkeit dieses Integrals für eine jener Differentialgleichungen näher eingehen werden; zunächst genügt es, die Differentialgleichung (7) als durch Fortschaffen der Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus den Gleichungen (3) entstanden anzunehmen. Enthält die für $y = F$ bestehende Differentialgleichung (7) alle n partiellen Differentialquotienten von y, besteht also nach (3) eine von den Parametern freie identische Beziehung zwischen den Größen (a)

$$(8) \qquad f\left(x_1, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0,$$

so folgt durch Differentiation nach $a_1, a_2, \ldots a_n$ allgemein:

$$
(9)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_1}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_2}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_n}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_1}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n} + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_2}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_n}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n} = 0,
\end{array}\right.
$$

und hieraus wieder $D = 0$. Enthält jedoch die Differentialgleichung (7), also auch die Beziehung (8) nur $n-1$ (oder, wie unmittelbar zu sehen, auch weniger Ableitungen) und sei die fehlende Ableitung die nach x_ϱ genommene, so daß (8) die Form hat:

$$
(10) \qquad f\left(x_1, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}} \; \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}} \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0,
$$

so werden sich durch Differentiation von (10) nach $n-1$ Parametern $a_1, a_2, \ldots a_{\sigma-1}, a_{\sigma+1}, \ldots a_n$, worin σ ein beliebiger Index ist, die Gleichungen ergeben:

$$
(11)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_1}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1} \partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1} \partial a_1} \\
\qquad\qquad + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_n}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_1}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_{\sigma-1}} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1} \partial a_{\sigma-1}} + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1} \partial a_{\sigma-1}} \\
\qquad\qquad + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_n}} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_{\sigma-1}} = 0
\end{array}\right.
$$

$$(11)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_1}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_{\sigma+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_{\sigma+1}}+\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_{\sigma+1}}\\
&\qquad+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_n}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_{\sigma+1}}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_1}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_n}+\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_n}\\
&\qquad+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_n}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n}=0,
\end{aligned}\right.$$

und hieraus

$$(12)\quad D_{\varrho\sigma}=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial a_{\sigma-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_{\sigma-1}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_{\sigma-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_{\sigma-1}}\\
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial a_{\sigma+1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_{\sigma+1}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_{\sigma+1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_{\sigma+1}}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial a_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_n}
\end{vmatrix}=0.$$

Da aber $D_{\varrho\sigma}$ die aus D entstehende Unterdeterminante zweiter Ordnung ist, die zu dem Element $\partial^2 F/\partial x_\varrho \partial a_\sigma$ gehört oder entsteht, wenn man in D die ϱ^{te} Vertikalreihe und σ^{te} Horizontalreihe wegläßt, dasselbe aber gilt, wenn σ ein jeder der Indizes $1, 2, \ldots n$ ist, so folgt,

daß, wenn für die Funktion $F(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n)$ die Gleichung $D=0$ identisch befriedigt ist, also zwischen den Größen (a) eine von *den Parametern freie Beziehung und somit jedenfalls für $F=y$ eine von den abhängigen Variabeln freie Differentialgleichung stattfindet, auch umgekehrt allgemein, wenn diese Differentialgleichung alle n partiellen Ableitungen enthält, jedenfalls $D=0$ ist, daß jedoch, wenn nur $n-1$ Ableitungen in derselben vorkommen und zwar die nach x_ϱ genommene Ableitung fehlt, die Determinante D dadurch verschwindet, daß die Unterdeterminanten erster Ordnung von D die zu sämtlichen Gliedern der ϱ^{ten} Vertikalreihe gehören, den Wert Null haben.*

Haben aber *alle* Unterdeterminanten erster Ordnung von D, die zu den Gliedern der ϱ^{ten} Vertikalreihe gehören, den Wert Null, ist also für $\sigma=1,2,\ldots n$ die Determinante

$$D_{\varrho\sigma}=0, \tag{13}$$

so besteht zwischen den Funktionen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}\,\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n} \tag{γ}$$

in bezug auf die $n-1$ Parameter $a_1,\ldots a_{\sigma-1}, a_{\sigma+1},\ldots a_n$ als Variable eine von eben diesen Parametern freie Beziehung von der Form

$$f_1\left(x_1,\ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}, a_\sigma\right)=0, \tag{14}$$

welche im allgemeinen den Parameter a_σ noch explizite enthalten kann, so daß sich für das Verschwinden der zu allen Gliedern einer Vertikalreihe gehörigen Unterdeterminanten zwischen denselben Größen (γ) die n Beziehungen ergeben:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1\left(x_1,\ldots x_n, \dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \dfrac{\partial F}{\partial x_n}, a_1\right)=0 \\ f_2\left(x_1,\ldots x_n, \dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \dfrac{\partial F}{\partial x_n}, a_2\right)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n\left(x_1,\ldots x_n, \dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \dfrac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \dfrac{\partial F}{\partial x_n}, a_n\right)=0. \end{array}\right. \tag{15}$$

Sind nun die bezeichneten expliziten Parameter in der Tat in den einzelnen Gleichungen (15) enthalten, so würde gegen die Voraussetzung der Unabhängigkeit der n willkürlichen konstanten Parameter durch Elimination der $n-1$ Funktionen (γ) aus den n Gleichungen (15), oder schon aus einer dieser Gleichungen, wenn der explizite Parameter fehlt, eine Beziehung der Form folgen:

$$(16) \qquad f_1\left(x_1, \dots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0,$$

woraus sich für y nach (3) die Differentialgleichung ergäbe:

$$(17) \qquad f_1\left(x_1, \dots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_{\varrho-1}}, \frac{\partial y}{\partial x_{\varrho+1}}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0,$$

welche die abhängige Variable y gar nicht, und nur $n-1$ partielle Differentialquotienten enthält, was, wie wir eben gesehen, mit der Abhängigkeit der n Parameter voneinander zusammenfällt.

Dem Verschwinden der Determinante D entspricht im allgemeinen eine Differentialgleichung für $F = y$, welche y nicht explizite, aber sämtliche n partielle Ableitungen enthält; dafür, daß die Determinante D einer von y freien Differentialgleichung mit weniger als n Ableitungen entspricht, ist notwendig und hinreichend, daß D dadurch den Wert Null annimmt, daß alle Unterdeterminanten erster Ordnung von D für sämtliche Glieder einer Vertikalreihe verschwinden.

Sei nun eine für $D = 0$ durch Elimination der Parameter aus den Gleichungen (3) sich ergebende Differentialgleichung

$$(18) \qquad f\left(x_1, \dots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0,$$

und es genügte $y = F$ noch einer andern nicht zugehörigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche ebenfalls y nicht explizite enthält,

$$(19) \qquad f_1\left(x_1, \dots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0,$$

so haben die Gleichung (18) und (19) entweder keinen partiellen Differentialquotienten miteinander gemein, oder man könnte einen gemeinsamen zwischen beiden eliminieren, in jedem Falle also eine Differentialgleichung erhalten, welcher dasselbe $y=F$ genügt, welche wieder von y frei ist und höchstens $n-1$ partielle Differentialquotienten enthält, so daß, wenn $\partial y/\partial x_\varrho$ eliminiert ist, nach den obigen Auseinandersetzungen die Unterdeterminanten erster Ordnung von D, welche zu sämtlichen Elementen der ϱ^{ten} Vertikalreihe von D gehören, verschwinden müßten — da dies aber für die Elimination einer jeden Ableitung zwischen den Gleichungen (18) und (19) gelten muß,

so darf, wenn $y=F$ außer (18) nicht noch einer ebensolchen Differentialgleichung genügen soll, keine Vertikalreihe von D die Eigenschaft haben, daß alle zu den Elementen dieser gehörigen Unterdeterminanten verschwinden.

Nehmen wir nunmehr an, daß das Integral $y=F$ einer auch y explizite enthaltenden Differentialgleichung

$$(20) \qquad f_2\left(x_1, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

genügt, daß also wieder durch Elimination von $\partial y/\partial x_\varrho$ sich eine Differentialgleichung

$$(21) \qquad f_3\left(x_1, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_{\varrho-1}}, \frac{\partial y}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

ergibt, welcher dieselbe Funktion $y=F$ genügt, und also die Beziehung besteht:

$$(22) \qquad f_3\left(x_1, \ldots x_n, F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0,$$

so wird man durch Differentiation dieser Gleichung nach je $n-1$ der Parameter, z. B. $a_1, \ldots a_{\sigma-1}, a_{\sigma+1}, \ldots a_n$,

$$
(23)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_3}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial a_1}+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_1}+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_1}\\
&\qquad\qquad+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_n}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_1}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f_3}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial a_{\sigma-1}}+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_{\sigma-1}}+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_{\sigma-1}}\\
&\qquad\qquad+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_n}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_{\sigma-1}}=0\\
&\frac{\partial f_3}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial a_{\sigma+1}}+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_{\sigma+1}}+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_{\sigma+1}}\\
&\qquad\qquad+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_n}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_{\sigma+1}}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f_3}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial a_n}+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_n}+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_n}\\
&\qquad\qquad+\cdots+\frac{\partial f_3}{\partial\frac{\partial F}{\partial x_n}}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial a_n}=0,
\end{aligned}\right.
$$

und somit

$$(24)\quad \overline{D}_{\varrho\sigma}=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_1} & \frac{\partial F}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_1} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_{\sigma-1}} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial x_{\sigma-1}} & \frac{\partial F}{\partial a_{\sigma-1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_{\sigma-1}} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_{\sigma-1}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_{\sigma+1}} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_{\sigma+1}} & \frac{\partial F}{\partial a_{\sigma+1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_{\sigma+1}} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_{\sigma+1}} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1}\partial a_n} & \frac{\partial F}{\partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1}\partial a_n} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix} = 0$$

erhalten, und somit *als Bedingung dafür, daß die Gleichung* (18) *mit keiner Gleichung* (20) *das Integral* $y=F$ *gemein hat, die Bedingungen finden, daß für jeden Index* $\varrho=1,2,\ldots n$ *die Determinanten*

$$\overline{D}_{\varrho 1},\ \overline{D}_{\varrho 2},\ \ldots\ \overline{D}_{\varrho n}$$

von Null verschieden sind.

Fassen wir die eben gewonnenen Resultate zusammen, so ergeben sich

als hinreichende Bedingung dafür, daß $y=F$ *ein vollständiges Integral einer für* $D=0$ *gewonnenen, von* y *freien partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ist, die, daß für keine Vertikalreihe von* D *die zu allen Gliedern derselben gehörigen Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden, und daß für jeden Index* $\varrho=1,2,\ldots n$ *die Determinanten* $\overline{D}_{\varrho 1}, \overline{D}_{\varrho 2}, \ldots \overline{D}_{\varrho n}$ *von Null verschieden sind.*

Um also für $D=0$ zu entscheiden, ob ein gegebenes Integral $y=F$ der entsprechenden, von y freien partiellen Differentialgleichung ein vollständiges derselben sei, hat man zunächst die Unterdeterminanten erster Ordnung zu bilden, welche zu den Elementen je einer Vertikalreihe gehören; stößt man auf eine solche, die für alle ihre Elemente verschwindende Unterdeterminanten erster Ordnung liefert, so ist die gegebene Differentialgleichung unvollständig, und zwar hat sie mit einer ebenfalls von y freien Differentialgleichung das Integral $y=F$ gemein. Hat aber keine der Vertikalreihen diese Eigenschaft, so bilde man die sämtlichen Determinanten

$$\bar{D}_{\varrho 1},\ \bar{D}_{\varrho 2}, \ldots \bar{D}_{\varrho n}\ \ (\varrho = 1, 2, \ldots n);$$

verschwindet eine derselben für die gegebene Funktion F, so ist wieder die Unvollständigkeit des gegebenen Integrals erwiesen, und zwar genügt dann das gegebene Integral $y = F$ einer y enthaltenden partiellen Differentialgleichung.

Für die gegebene, von y freie Differentialgleichung wird somit, wenn $D = 0$ ist, das Integral $y = F$ ein vollständiges sein, wenn keine der Vertikalreihen von D die Eigenschaft hat, daß die zu allen ihren Elementen gehörigen Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden, und sämtliche Determinanten

$$\bar{D}_{\varrho 1},\ \bar{D}_{\varrho 2}, \ldots \bar{D}_{\varrho n}\ \ (\varrho = 1, 2, \ldots n),$$

welche aus D entstehen, indem die ϱ^{te} Vertikalreihe durch die Elemente

$$\frac{\partial F}{\partial a_1},\ \frac{\partial F}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial a_n}$$

ersetzt wird, und der Reihe nach die $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \ldots n^{\text{te}}$ Horizontalreihe fortgelassen werden, von Null verschieden sind.