Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Liebmann, Heinrich** (1874 – 1939)

Titel: **Die Sätze von Lie und Gambier über Kurven eines Linienkomplexes**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse ; 1928, 9

Es werden zwei analytische Beweise der von Herrn Gambier durch infinitesimalgeometrische Konstruktion gewonnenen Ergänzungen und Berichtigungen der Lieschen Sätze über Komplexkurven mitgeteilt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1928/29, S. IV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1928. 9. Abhandlung.

Die Sätze von Lie und Gambier über Kurven eines Linienkomplexes

Von
Heinrich Liebmann
in Heidelberg

Vorgelegt
in der Sitzung vom 28. Juni 1928

Berlin und Leipzig 1928

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Die Sätze von Lie und Gambier über Kurven eines Linienkomplexes.

Sophus Lie hat zuerst bewiesen, daß alle von einem Punkt ausgehenden Kurven eines linearen Komplexes die Nullebene des Punktes daselbst zur gemeinsamen Schmiegungsebene haben und dieselbe Torsion besitzen.[1]) Geht man zu nichtlinearen Linienkomplexen über und betrachtet alle Komplexkurven, die von einem Linienelement ausgehn, so haben sie zwar noch die Schmiegungsebene gemein (die Tangentialebene des dem Punkt zugeordneten Komplexkegels längs der Erzeugenden, der das Linienelement angehört), nicht aber, wie Lie vermutete, die Torsion. Soll dies überall gelten, dann muß der Kegel eine Ebene, der Komplex also ein Nullsystem sein.

Diese Ergebnisse hat neuerdings Herr Gambier[2]) ganz wesentlich ergänzt, er gibt eine sehr schöne differentialgeometrische Konstruktion an, die Torsion und Krümmung der von einem Linienelement ausgehenden Komplexkurve in einfachster Weise mit der Torsion der von demselben Linienelement ausgehenden Kurven des berührenden linearen Komplexes und der sehr zweckmäßig hier eingeführten „Kegelkrümmung" des Komplexkegels verbindet.

Die folgenden Zeilen sind der Aufgabe gewidmet, auf analytischem Weg das Gambiersche schöne Ergebnis zu beweisen.

Der erste Beweis geht von spezieller Lage und spezieller Wahl der Linienkoordinaten aus, gewährt daher die einfachste analytische Einsicht; der zweite ist den doch recht oft gegen solche „spezielle Wahl" aus Gründen der Strenge oder der Eleganz ausgesprochenen Einwänden nicht ausgesetzt, aber die nachträgliche Deutung erscheint ziemlich unvermittelt.

---

[1]) Vgl. Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen III, Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen, herausgegeben von Friedrich Engel (Leipzig 1922), Seite 560—562 sowie Seite 770.

[2]) B. Gambier, Courbure et torsion des courbes d'un complexe linéaire ou non linéaire. Bulletin des sciences mathématiques L, 1826, 1, p. 43—50.

§ 1. Erster Beweis.

Als eine Nullebene des linearen Komplexes wählen wir die xy-Ebene, die Gerade $x=z=0$ soll eine Komplexgerade sein.

Dann hat der Komplex die Gleichung

$$xz'-z=a(xy'-y)+bz',$$

er ist in sogleich genauer anzugebender Weise „berührender linearer Komplex“ für alle Komplexe, deren Gleichung „in aufgelöster Form“ durch

$$xz'-z=a(xy'-y)+bz'+\frac{1}{2}\Big\{a_{11}(y')^2+2a_{12}y'z'+2a_{13}y'(xz'-z)$$
$$+a_{22}(z')^2+2a_{23}z'(xy'-y)+a_{33}(xy'-y)^2\Big\}+\ldots$$

gegeben ist.

Das heißt: Alle Komplexkegel, die von Punkten Q der Umgebung von $P_0(x=y=z=0)$ ausstrahlen, werden von den Nullebenen dieser Punkte berührt; genauer: haben mit ihnen zwei „unendlich benachbarte“ Gerade gemein, deren Winkel von derselben Ordnung ist wie der Abstand P_0Q. Für den von P_0 ausstrahlenden Kegel gilt also, daß er die Nullebene $z=0$ berührt und zwei zusammenfallende Gerade $g_0(y=z=0)$ mit ihr gemein hat.

Krümmung und Torsion einer von P_0 ausgehenden, g_0 berührenden Komplexkurve sind durch

$$xz''=axy''+bz''+a_{11}y'y''+\ldots$$
$$z''+xz'''=a(y''+xy''')+bz'''+a_{11}(y'')^2+\ldots$$

mit $x=0$ bestimmt, also durch

$$z''=0,\quad ay''+bz'''+a_{11}(y'')^2=0.$$

Hieraus liest man ab, daß alle diese Kurven dieselbe Schmiegungsebene $z=0$, ferner die Krümmung

$$\frac{1}{r}=y''$$

und die Torsion

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{z'''}{y''}=+\frac{a}{b}+\frac{a_{11}}{b}y''=\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{r}\frac{a_{11}}{b}$$

besitzen. Daher ist $1:\varrho_0$ gerade die Torsion der dem berührenden linearen Komplex ($a_{11}=0$!) angehörenden g_0 berührenden Komplexkurven. (Nebenbei erkennt man leicht, daß $1:\varrho_0$ von der Wahl von g_0 unabhängig ist.)

Nur der letzte Koeffizient bedarf noch der Deutung. Der zu P_0 gehörige Komplexkegel

$$b\frac{\zeta}{\xi}+\frac{1}{2}a_{11}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2+\ldots\quad=0$$

hat längs g_0 eine „Kegelkrümmung" $\varkappa$, das ist die Krümmung der Spur des Kegels auf der Einheitskugel im Schnittpunkt dieser Kugel mit g_0, und man findet sofort

$$\varkappa = -\frac{a_{11}}{b}$$

erhält also die Gambiersche Formel:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} - \varkappa \frac{1}{r}. -$$

Die hier gewählte Art der Begründung ist in andern Fällen oft mancher Kritik ausgesetzt worden, worauf nicht eingegangen werden soll. Jedenfalls ist sie am kürzesten und zwingt dazu, durch Deutung geometrisch erfaßt zu werden.

§ 2. Zweiter Beweis.

Es seien α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente, l, m, n die der Hauptnormale, λ, μ, ν die der Binormale, so daß durch

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{r}, \quad \frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\varrho}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\varrho}$$

die Serret-Frenetschen Formeln angedeutet sind.

Die Komplexgleichung ist

$$1)\quad f(\alpha, \beta, \gamma, y\gamma - z\beta, z\alpha - x\gamma, x\beta - y\alpha) = 0$$

und wird homogen von nullter Ordnung in α, β, γ und x, y, z. Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten nach den sechs homogenen Linienkoordinaten in der angegebenen Folge durch die Fußmarken 1 bis 6, dagegen die durch die Form der letzten drei Linienkoordinaten beeinflußten Differentiationen nach α, β, γ in üblicher Weise, so ist

$$2)\quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= f_1 + z f_5 - y f_6, \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= f_2 + x f_6 - z f_4, \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} &= f_3 + y f_4 - x f_5, \end{aligned}$$

und wegen der Homogenität

$$3)\quad \sum \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \sum x \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

Aus (1) erhält man dann durch Differentiation nach s

$$f_1 l + f_2 m + f_3 n + f_4 (yn - zm) + f_5 (zl - xm) + f_6 (xm - yn) = 0$$

oder

$$4)\quad \sum l \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

und daher

$$5)\quad \lambda : \mu : \nu = \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \beta} : \frac{\partial f}{\partial \gamma}.$$

Hiermit ist also bewiesen, daß alle von demselben Linienelement ausgehenden Komplexkurven dieselbe Schmiegungsebene besitzen. Differenziert man (4) nach s, so erhält man

$$-\sum\left(\frac{\alpha}{r}+\frac{\lambda}{\varrho}\right)\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\sum l\left(\frac{df_1}{ds}+z\frac{df_5}{ds}-y\frac{df_6}{ds}+f_5\gamma-f_6\beta\right),$$

wobei die Orientierung des begleitenden Dreikantes durch die Forderung

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}=+1$$

normiert ist.

Man erhält also wegen (3)

$$-\frac{1}{\varrho}\sum\lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\sum l\left(\frac{df_1}{ds}+z\frac{df_5}{ds}-y\frac{df_6}{ds}+f_5\gamma-f_6\beta\right)=0.$$

Der berührende lineare Komplex ist durch

$$\alpha f_1^0+\beta f_2^0+\gamma f_3^0\,(y\gamma-z\beta)f_4^0+(z\alpha-x\gamma)f_5^0+(x\beta-y\alpha)f_6^0=0$$

gegeben, wobei diese Gleichung selbstverständlich dahin zu verstehen ist, daß für den linearen Komplex die Argumente $x^0, y^0, z^0, \alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ in den f_ν festzuhalten sind, die sechs partiellen Differentialquotienten sind konstant. Da die von demselben Linienelement ausgehenden Kurven des Berührungskomplexes und des allgemeinen Komplexes betrachtet werden, kann später die Kopfmarke 0 fortgelassen werden, ohne daß ein Mißverständnis droht; (4), (5) zeigt, daß die Kurven Hauptnormale und Binormale gemein haben. Alo gilt für die Kurve des linearen Komplexes

$$-\frac{1}{\varrho_0}\sum\lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\sum l(f_5\gamma-f_6\beta)=0$$

und daher

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_0}+\left(\sum l\left(\frac{df_1}{ds}+z\frac{df_5}{ds}-y\frac{df_6}{ds}\right)\right):\sum\lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

Mit Rücksicht auf (5) ist dann

$$(6)\quad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_0}\pm\frac{\sum l\left(\frac{df_1}{ds}+z\frac{df_5}{ds}-y\frac{df_6}{ds}\right)}{\left(\sum\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei das Vorzeichen nicht allgemein festgelegt werden kann, weil (5) zur Bestimmung nicht ausreicht. Der Zähler kann auch geschrieben werden

$$Z=\begin{vmatrix} \frac{df_1}{ds}+z\frac{df_5}{ds}-y\frac{df_6}{ds} & \frac{df_2}{ds}+x\frac{df_6}{ds}-z\frac{df_4}{ds} & \frac{df_3}{ds}+y\frac{df_4}{ds}-x\frac{df_5}{ds} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

Wir wenden uns jetzt der Kegelkrümmung $\varkappa$ zu. Der Komplexkegel in x, y, z hat die Gleichung

$$f(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z,\ \zeta y - \eta z,\ \xi z - \zeta x,\ \eta x - \xi y) = 0$$

Die Tangentialebene längs der Mantellinie g_0, nämlich

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \alpha : \beta : \gamma$$

ist aus (1) durch

$$\sum (\xi - x) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

gegeben, und die Kegelkrümmung $\varkappa$ längs g_0, d. h. der Grenzwert des Winkels der Tangentialebenen längs g_0 und einer benachbarten Mantellinie g, dividiert durch den Winkel dieser Mantellinien — für den Fall, daß g in g_0 übergeht, durch

$$7) \qquad \varkappa = \frac{\begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 & \sum \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \sum \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \sum \left(\frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \left(\sum \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Bei dieser Differentiation ist

$$\sum \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dv} = 0$$

$$\sum \alpha \frac{d\alpha}{dv} = 0$$

Man kann mit Rücksicht auf (4) also

$$\frac{d\alpha}{dv} = l, \quad \frac{d\beta}{dv} = m, \quad \frac{d\gamma}{dv} = n$$

setzen, was mit

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{l}{r}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{r}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{r}$$

zusammenzuhalten ist. Man sieht jetzt, daß die Beziehung gilt

$$\frac{df_1}{ds} + z \frac{df_5}{ds} - y \frac{df_6}{ds} = \frac{1}{r} \frac{d}{dv} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)$$

Wir bilden sodann Z^2 und erhalten

$$\frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \sum \left(\frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 & \sum \alpha \frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \sum \lambda \frac{d}{dv} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \sum \alpha \frac{d}{dv} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) & 1 & 0 \\ \sum \lambda \frac{d}{dv} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Da aber

$$\sum \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

und

$$\sum \frac{da}{dr}\frac{\partial f}{\partial a} + \sum a \frac{d}{dr}\frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

aber auch

$$\sum l \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

so ist

$$\sum a \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) = 0,$$

also

$$Z^2 = \frac{1}{r^2}\left\{\sum\left(\frac{d}{dr}\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 - \left(\sum \lambda \frac{d}{dr}\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2 \sum\left(\frac{df}{\partial a}\right)^2}\left\{\sum\left(\frac{d}{dr}\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot \sum\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 - \left(\sum \frac{\partial f}{\partial a}\frac{d}{dv}\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2\right\}$$

und man erhält aus (6) und (7)

$$8) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{\varkappa}{r}$$

also GAMBIERS Formel mit der von ihm selber angegebenen und diskutierten Vorzeichenunsicherheit behaftet, die in § 1 bei der Berechnung von $\varkappa$ mehr versteckt als vermieden worden ist.

Die „allgemeine symmetrische Methode“ dieses § 2 wird man kaum so durchsichtig gestalten können, wie die Betrachtungsweise in § 1. Freilich ist dort von der Wahl einer „speziellen Lage“ reichlich Gebrauch gemacht, für gewichtige Autoritäten wohl seit SALMONS und HESSES Zeiten eine *crux* oder doch ein schlimmer Schönheitsfehler.