Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)
Weinreich, Wilhelm (1889 – nach 1925)

Titel: **Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen**

Abhandlungen der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse ; 10 (1922)

In dieser nachgelassenen Arbeit hat Stäckel seine Untersuchungen über den Goldbach'schen Satz und über Lückenzahlen, die in vier Arbeiten in den Sitzungsberichten niedergelegt sind. (1910 A. 10, 1917 A. 15, 1918 A. 2, 14), noch einmal umgestaltet und einheitlich zusammengefaßt. Hauptzweck war dabei, die leitenden Gesichtspunkte und den harmonischen Einbau der verschiedenen recht heterogenen Teilfragen in den Gesamtfragenkomplex klarer hervortreten zu lassen. Jedoch ist auch an Resultaten noch einiges Neue hinzugekommen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1921, S. XXII)

Abhandlungen
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
10. Abhandlung

Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen

Von

P. STÄCKEL und W. WEINREICH
in Heidelberg in Frankfurt a. M.

(Eingegangen am 3. Dezember 1921)

Berlin und Leipzig 1922
Vereinigung wissenschaftlicher Verleger / Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung
Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Co.

Einleitung.

Den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen bildet das bekannte Verfahren des Eratosthenes, die Primzahlen aus der Reihe der ungeraden Zahlen auszusieben.[1]) Die Zahlen, die stehengeblieben sind, nachdem man durch die r ersten ungeraden Primzahlen 3, 5, 7, .., p_r gesiebt hat, sollen als die Lückenzahlen r-ter Stufe bezeichnet werden. Dem Begriffe nach sind solche Zahlen schon 1808 von Legendre im Zusammenhang mit der Frage nach den Primzahlen in arithmetischen Reihen betrachtet worden.[2]) Legendre suchte nämlich zu beweisen, daß die Differenzen der unmittelbar aufeinander folgenden Lückenzahlen r-ter Stufe zur oberen Schranke die Zahl $2p_{r-1}$ haben. Wäre seine Behauptung richtig, so würde daraus ein einfacher Beweis des Satzes folgen, daß durch jede lineare Form $ax+b$ mit ganzzahligen, teilerfremden Koeffizienten unbegrenzt viele Primzahlen dargestellt werden. Nach Legendre ist Polignac (um 1850) zu nennen, dessen séries diatomiques die Reihen der um eine Einheit verminderten Differenzen zwischen je zwei benachbarten Lückenzahlen sind.[3]) Er ist ebensowenig wie Dupré über die ersten, naheliegenden Eigenschaften der Lückenzahlen hinausgekommen. Dieser hat 1859, veranlaßt durch eine Preisaufgabe der Pariser Akademie, nachgewiesen, daß jene Behauptung Legendres zwar für die niederen Stufen zutrifft, daß jedoch für $r = 8, 11, 12, \ldots, 24$ die obere Schranke der Differenzen größer als $2p_{r-1}$ ausfällt.[4])

Anknüpfend an ältere Untersuchungen von mir[5]), die sich auf Goldbachs empirisches Theorem bezogen, daß jede gerade Zahl als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden kann, hatte der norwegische Mathematiker Brun im Jahre 1915 wahrscheinlich gemacht, daß zwischen der Anzahl solcher Darstellungen der Zahl $2n$ und der Anzahl der Primzahlpaare der Differenz 2, die zwischen 1 und $2n$ liegen, ein Zusammenhang bestehe.[6]) Die scharfsinnige Abhandlung Bruns regte mich zu der Frage an, wieviele Doppeldarstellungen $2n = p+(q+2) = (p+2)+q$ eine gerade Zahl $2n$ gestattet, wenn p und $p+2$, q und $q+2$ gleichzeitig Primzahlen sein sollen.[7]) Meine Untersuchungen führten mich zu der Vermutung,

---

[1]) Vgl. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig 1907, S. 332.

[2]) A. M. Legendre, Essai sur la théorie des nombres, 2. éd., Paris 1808, IV. partie, § IX und XI. Die betreffenden Ausführungen sind in der ersten Auflage vom Jahre 1798 noch nicht enthalten. Sie sind unverändert in die dritte Ausgabe, die den Titel führt: Théorie des nombres und 1830 erschienen ist, übernommen worden: siehe Bd. II, S. 76 f.

[3]) A. de Polignacs zahlreiche Noten sind in Landaus Literaturverzeichnis (Handbuch der Verteilung der Primzahlen, Bd. II, Leipzig 1909, S. 947—948) aufgeführt. Hier sei nur die zusammenfassende Darstellung erwähnt, die er unter dem Titel: Nouvelles recherches sur les nombres premiers im Journ. de math. (1) 19 (1854), S. 305 veröffentlicht hat.

[4]) A. Dupré, Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres, Paris 1859.

[5]) P. Stäckel, Über das Goldbachsche empirische Theorem: Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1896, S. 292.

[6]) V. Brun, Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 24 (1915).

[7]) P. Stäckel, Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen, Sitz.-Ber. der Heidelberger Akad. d. W., Math.-nat. Klasse, Jahrgang 1916, 10. Abhandlung.

daß zwischen der Anzahl solcher Doppeldarstellungen und der Anzahl der Folgen von vier Primzahlen, bei denen zwei Primzahlpaare der Differenz 2 möglichst rasch aufeinanderfolgen, so daß also die Differenzen der Primzahlfolge (2, 4, 2) sind, ein ähnlicher Zusammenhang bestehe, wie zwischen der Anzahl der Goldbachschen Darstellungen und der Anzahl der Paare von Primzahlen, bei denen zwei Primzahlen möglichst rasch aufeinanderfolgen.

Damit war der entscheidende Schritt getan, das Goldbachsche Theorem war der Vereinzelung entrissen, in der es bis dahin gestanden hatte. Es reihte sich ein in die Lehre von den Primzahlfolgen, bei denen die benachbarten Glieder sich um gegebene gerade Zahlen unterscheiden und die eng damit zusammenhängende Lehre von den mehrfachen Darstellungen gerader Zahlen als Summen mittels Primzahlfolgen mit denselben symmetrischen Differenzen; nimmt man nämlich zwei solche Folgen, schreibt die eine in aufsteigender, die andere in absteigender Ordnung und addiert die entsprechenden Glieder, so wird durch die Summen dieselbe gerade Zahl dargestellt. Nunmehr ergab sich die bemerkenswerte Tatsache, daß der ganze Inbegriff der so entspringenden Fragen über Differenzen und Summen von Primzahlen, deren vollständige Beantwortung die Mittel übersteigt, die uns gegenwärtig zur Verfügung stehen, für die Lückenzahlen beliebiger Stufe in abschließender Weise und mit voller Strenge erledigt werden können. Gleichzeitig zeigte sich, daß es gewisse Begriffe und Sätze gibt, die für Lückenzahlen jeder Stufe gelten. Dazu gehört, um ein besonders wichtiges Beispiel anzuführen, der Begriff der beständigen Differenzenfolgen als derjenigen Folgen gerader Zahlen, die auf jeder Stufe als Differenzen benachbarter Glieder bei Lückenzahlfolgen verwirklicht sind.

Wenn es gelang, die Begriffe und Sätze, die für Lückenzahlen jeder Stufe gelten, auf die Primzahlen zu übertragen, so war damit eine Einsicht in den Aufbau der Primzahlenreihe gewonnen, der weit über das hinausging, was die heutige Lehre von der Verteilung der Primzahlen gewährt. Der Durchführung dieses Gedankens stellte sich jedoch ein Hindernis entgegen. Zwar wird die Anzahl der Primzahlen, mit denen die Reihe der Lückenzahlen r-ter Stufe beginnt, wenn die Stufenzahl r wächst, beliebig groß, allein die Dichtigkeit der Primzahlen zwischen 1 und $2n$, bezogen auf die Lückenzahlen desselben Bereiches, nähert sich, falls $2n$ hinreichend stark zunimmt, der Grenze Null. Wenn ich die bei den Lückenzahlen gewonnenen Ergebnisse für die Primzahlen fruchtbar machen wollte, so war ich daher genötigt, an dieser Stelle den Boden der strengen Beweisführung zu verlassen und mich auf das Gebiet der Vermutung zu begeben, freilich mit dem Vorbehalt, daß die erhaltenen Sätze einer numerischen Prüfung zu unterwerfen seien. Eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung veranlaßte mich, die Dichtigkeit der Primzahlen in der Weise zu berücksichtigen, daß die für die Lückenzahlen erhaltenen Anzahlen mit einer geeigneten Potenz der Dichtigkeit multipliziert werden und erst darauf der Grenzübergang für die Stufenzahl gemacht wird.

Wenn es schon als ein günstiges Zeichen gelten durfte, daß der auf die beschriebene Art vorgenommene Grenzübergang zu wohlbestimmten Ausdrücken führte, so ergaben umfangreiche Abzählungen, daß die wahren Werte der Anzahlen von Primzahlfolgen mit gegebenen beständigen Differenzen und der Anzahlen der mehrfachen Darstellungen gerader Zahlen als Summen mittels Primzahlfolgen gegebener beständiger und symmetrischer Differenzen schon für kleinere Werte von $2n$ mit den berechneten Werten befriedigend übereinstimmten, und bei größeren Werten von $2n$ war eine noch stärkere Annäherung festzustellen. Die im folgenden hergeleiteten asymptotischen Ausdrücke für die genannten Anzahlen haben allerdings nur den Wert von Vermutungen, sie dürfen aber doch Vertrauen beanspruchen.

Daß für die Anzahl der Goldbachschen Darstellungen der geraden Zahl $2n$ ein asymptotischer Ausdruck aufgestellt ist, der höchstwahrscheinlich zutrifft, wird vielleicht dazu bei-tragen, daß endlich der Beweis des Goldbachschen Satzes gelingt. Wer hier durchdringt, wird sicherlich zugleich die Hilfsmittel entdecken, die zum Beweise aller der asymptotischen Formeln für die Darstellung gerader Zahlen durch Differenzen und Summen von Primzahlen im folgenden entwickelt werden. Wie groß die Schwierigkeiten sind, die es hier zu bezwingen gilt, erkennt man freilich um so deutlicher, je weiter man auf diesem Gebiete vordringt. Schon die Frage, ob es überhaupt Primzahlfolgen mit gegebenen beständigen Differenzen gibt, läßt sich heute nicht allgemein beantworten. Der Grund liegt wohl darin, daß es nicht gelungen ist, aus der Reihe der Primzahlen Teilreihen herauszuheben, die einem übersehbaren Gesetz gehorchen.[1])

Wenn auch die Zeit noch fern sein mag, wo die durch Intuition gewonnenen, durch Induktion sichergestellten Formeln ihren strengen Beweis erhalten, so eröffnet sich doch nunmehr für die numerische Primzahlforschung ein weites und fruchtbares Feld. Aus den großen Tafelwerken, die uns die Primzahlen von 1 bis 10 006 721 bieten, hat man bisher allzuwenig Nutzen für die Erkenntnis des feineren Baues der Primzahlreihe gezogen. Was von Untersuchungen nach dieser Richtung abgeschreckt hat, ist nicht die Mühe der Arbeit gewesen, denn an unermüdlichen Rechnern hat es nie gefehlt. Entmutigend war vielmehr der Umstand, daß man nicht voraussehen konnte, ob einfache Gesetzmäßigkeiten zutage treten würden, daß es mit anderen Worten an den richtigen Fragestellungen fehlte: um Versuche anzustellen, muß man auch in der Mathematik erst Gedanken haben.

Die Kraft eines Einzelnen ist unzureichend gegenüber der Fülle der neuen Aufgaben, die nunmehr der numerischen Primzahlforschung obliegen. Allerdings birgt die Aufforderung mitzuhelfen eine Gefahr in sich. „Mehr als irgendwo", schreibt MEHMKE[3]), „scheint auf diesem Gebiete [des numerischen Rechnens] durch Wiederholung schon getaner Arbeit Zeit und Kraft verschwendet worden zu sein." Damit eine solche Vergeudung vermieden werde, wäre eine gegenseitige Verständigung erwünscht, ja man könnte an eine von einer Zentralstelle aus zu leitende Einrichtung denken.

Die Ergebnisse der Untersuchungen über die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Lücken- und Primzahlen, die ich im Anschluß an meine Abhandlung vom Jahre 1916 angestellt hatte, sind in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie für die Jahre 1917 und 1918 veröffentlicht worden.[4]) Die vorliegende Abhandlung bringt eine neue, einheitliche Darstellung des Gegenstandes. Der erste Teil enthält unter dem Titel:

---

[1]) Vgl. meine Abhandlung: Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen, Crelle's Journal 148 (1918), S. 101. Herr HENSEL legt Wert darauf, hervorzuheben, daß ein kleiner brieflicher Zusatz, den er zu Nr. 6 der Abhandlung (S. 106—107) gemacht hat, aus Unterhaltungen mit Herrn OSTROWSKI hervorgegangen ist, und daß diesem ein wesentlicher Anteil an dem mitgeteilten Beweise zukommt.

[2]) Von den älteren Tafeln sei hier genannt: J. K. BURCKHARDT, Tables des diviseurs pour tous les nombres du deuxième million, Paris 1814, troisième million, Paris 1816, première million, Paris 1817. Z. DASE, Faktorntafel für alle Zahlen der 7., 8., 9. Million, vollendet von R. ROSENBERG, Hamburg 1862—1865; J. GLAISHER, Factor table for the fourth, fifth, sixth million, London 1879—1883. Dazu ist jetzt gekommen: D. N. LEHMER, Factor table of the first ten millions, Washington 1909, List of the prime numbers from 1 to 10 006 721, Washington 1914. Leicht zugänglich und für viele Zwecke ausreichend ist die Tafel der Primzahlen von 1 bis 400 313 in der Sammlung mathematischer Tafeln von VEGA-HÜLSSE, 2. Abdruck, Leipzig 1849. Vgl. P. SEELHOFF, Geschichte der Faktorentafeln, Arch. f. Math. u. Phys. 70 (1884), S. 413.

[3]) R. MEHMKE, Numerisches Rechnen, Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I, Teil 2, Leipzig 1904, S. 951.

[4]) P. STÄCKEL, Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen, mit Beiträgen von W. WEINREICH, Sitz.-Ber. der Heidelberger Akademie d. W., Math.-nat. Klasse, I. Teil, Jahrgang 1917, 15. Abhandlung, II. Teil, Jahrgang 1918, 2. Abhandlung, III. Teil, Jahrgang 1918, 14. Abhandlung.

Additive Arithmetik der Lückenzahlen alles, was sich auf die Differenzen und Summen von Lückenzahlen bezieht; die darin aufgestellten Lehrsätze sind in voller Strenge bewiesen. Die Übertragung der für alle Stufen giltigen Begriffe und Sätze auf die Primzahlen erfolgt im zweiten Teil: Additive Arithmetik der Primzahlen. Die hier hergeleiteten Sätze dürfen nur als Vermutungen bezeichnet werden; es sind aber, darf man hinzufügen, Vermutungen, die durch eine Reihe numerischer Prüfungen durchaus bestätigt werden. Die Entwicklungen konnten an einigen Stellen vereinfacht, verbessert, weitergeführt werden. Von den umfangreichen numerischen Zusammenstellungen, die sich in meinen oben erwähnten vorausgehenden Arbeiten finden, habe ich nur Proben gegeben.

Numerische Rechnungen spielen in dem hier behandelten neuen Kapitel der Zahlentheorie eine wichtige Rolle. Sie dienen nicht nur dazu, die Richtigkeit vermuteter Sätze zu prüfen, ebensooft ist man auch auf numerische Induktion angewiesen, um zu allgemeinen Sätzen zu gelangen. Es war daher für mich von großem Werte, daß Herr Dr. Weinreich in Frankfurt a. M., angeregt durch meine Abhandlung vom Jahre 1916 über die Darstellung gerader Zahlen als Summen von Primzahlen, sich erbot, mir bei den Rechnungen zu helfen, die zur Weiterführung meiner Untersuchungen nötig würden. Weinreich hat sich jedoch nicht darauf beschränkt, die numerische Arbeit mit Ausdauer, Sorgfalt und Geschick durchzuführen, sondern sich auch an den zahlentheoretischen Forschungen beteiligt. Für seinen Anteil im einzelnen sei auf die Bemerkungen in den erwähnten Abhandlungen, Teil I S. 4, 27, 30, 33, 43, 45 – 51, Teil II S. 15, 37, 41, Teil III S. 16, 23, 31, 61 – 65 hingewiesen. Wie hoch ich seinen Anteil am Ganzen schätze, habe ich durch den Doppelnamen der Verfasser dieser Abhandlung ausdrücken wollen.

PAUL STÄCKEL.

Erster Teil.
Additive Arithmetik der Lückenzahlen.

Kapitel I: Differenzen von Lückenzahlen.

§ 1. Erklärung und grundlegende Eigenschaften der Lückenzahlen.

Jeder ungeraden Zahl 1, 3, 5, ... mögen aus der Reihe der r ersten ungeraden Primzahlen $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7, \ldots, p_r$ diejenigen zugeordnet werden, durch die sie teilbar ist.[1]) Die Folge der Teilerscharen hat Lücken; denn die ungeraden Zahlen, die zu dem Produkt der r ersten ungeraden Primzahlen

(1) $$P_r = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot p_r$$

teilerfremd sind, besitzen keine Teiler der verlangten Art. Die so erklärten Zahlen sollen als die Lückenzahlen r-ter Stufe bezeichnet werden.

Die Lückenzahlen r-ter Stufe beginnen mit der Zahl 1. Es folgt sogleich die Primzahl p_{r+1}. Dann kommen die zwischen p_{r+1} und p^2_{r+1} liegenden Primzahlen. Die erste zusammengesetzte Zahl ist p^2_{r+1}.

Um alle Lückenzahlen r-ter Stufe zu ermitteln, genügt es, den Hauptbereich r-ter Stufe zu betrachten, der aus den Zahlen von 1 bis $2P_r$ besteht. Ist nämlich v_r eine Lückenzahl r-ter Stufe des Hauptbereichs, so werden durch die arithmetische Reihe $2P_r y + v_r$ ($y=0, 1, 2, \ldots$) lauter Lückenzahlen r-ter Stufe dargestellt, und umgekehrt ist der Rest der Division einer Lückenzahl r-ter Stufe durch $2P_r$ immer eine dem Hauptbereich angehörige Lückenzahl r-ter Stufe.

Erteilt man in den arithmetischen Reihen $2P_r y + v_r$ der Zahl y negative Werte, so ergeben sich negative Zahlen, die ebenfalls zu $2P_r$ teilerfremd sind und daher negative Lückenzahlen r-ter Stufe genannt werden mögen.

Lehrsatz I. Die Lückenzahlen r-ter Stufe des Hauptbereichs sind als ungerade Zahlen eindeutig bestimmt durch ihr charakteristisches Restsystem, das heißt durch die Reste $s_1, s_2, \ldots, s_r$, die sie bei der Division durch die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ lassen.

Beweis. Um zu zeigen, daß die $r+1$ Kongruenzen

$$x \equiv 1 \pmod{2},\ x \equiv s_\varrho \pmod{p_\varrho}\ (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

stets eine und nur eine Lösung im Hauptbereich r-ter Stufe haben, braucht man nur zu benützen, daß jede ungerade Zahl des Bereichs eindeutig in die Form

$$1 + 2a_1 + 2a_2 p_1 + 2a_3 p_1 p_2 + 2a_4 p_1 p_2 p_3 + \ldots + 2a_r p_1 p_2 p_3 \cdots p_{r-1}$$

[1]) Anm. bei der Korrektur: Es wäre wohl eine oft recht bedeutende Vereinfachung, alle Zahlen zugrunde zu legen und mit der Primzahl $p_0 = 2$ zu beginnen. Da aber nach STÄCKELS Tod eine so wichtige Änderung nicht angängig erschien, muß die Primzahl 2 ihre — soweit sich übersehen läßt — unverdiente Sonderstellung hier noch beibehalten. WEINREICH.

gesetzt werden kann, wenn die Koeffizienten a_ϱ auf die Werte $0, 1, 2, \ldots, p_\varrho - 1$ beschränkt werden.

Bedenkt man weiter, daß die Zahl x dann und nur dann durch p_ϱ teilbar ist, wenn der Rest s_ϱ verschwindet, so folgt, daß es im Hauptbereich r-ter Stufe

(2) $$P_r^{(1)} = (3-1)\,(5-1)\,(7-1)\ldots(p_r-1)$$

Zahlen gibt, die zu $2\,P_r$ teilerfremd sind, und man hat den

Lehrsatz II. Im Hauptbereich r-ter Stufe liegen $P_r^{(1)}$ Lückenzahlen r-ter Stufe.

Das Verfahren des ERATOSTHENES zur Ermittelung der Primzahlen hat den Mangel, daß man nicht weiß, ob nach einer der Siebungen noch ungestrichene Zahlen zurückbleiben. Daß diese Frage zu bejahen ist, zeigt die für alle Werte von r giltige Ungleichheit $P_r^{(1)} \geqq 2$. Hiermit ist bewiesen, daß die Reihe der Primzahlen unbegrenzt ist.[1] Der Beweis von EUKLID (Buch IX, Satz 20) besteht in dem Kunstgriff, daß eine Lückenzahl r-ter Stufe angegeben wird, nämlich die Zahl $2\,P_r + 1$, die aus der Zahl 1 des Hauptbereichs entspringt.

Werden aus der steigenden Reihe der negativen und positiven Lückenzahlen r-ter Stufe $k+1$ unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder herausgegriffen, so erhält man einen $(k+1)$-gliedrigen Abschnitt von Lückenzahlen. Im besonderen bilden die Lückenzahlen des Hauptbereichs den Hauptabschnitt r-ter Stufe. Er beginnt mit den Zahlen 1, p_{r+1}, er endet mit den Zahlen $2P_r - p_{r+1}$, $2P_r - 1$, denn mit v_r ist auch $2P_r - v_r$ eine Lückenzahl r-ter Stufe des Hauptabschnitts. Mithin sind die $p_{r+1} - 2$ unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen von $2P_r - p_{r+1} + 1$ bis $2P_r - 2$ einschließlich zusammengesetzte Zahlen, und es gibt Abschnitte ganzer Zahlen von beliebiger Länge, in denen keine einzige Primzahl vorkommt.[2]

Die Zahl P_r, die Mitte des Hauptbereichs, ist ein Symmetriezentrum für die Lückenzahlen r-ter Stufe; denn $P_r - 2a$ und $P_r + 2a$ sind gleichzeitig Lückenzahlen oder keine Lückenzahlen r-ter Stufe. Im besonderen sind die Zahlen $P_r \pm 2^\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, ..)$ zu $2\,P_r$ teilerfremd, und man hat, abgesehen von der ersten Stufe, in der Mitte des Hauptabschnitts die 6 unmittelbar aufeinanderfolgenden Lückenzahlen

$$P_r - 8,\ P_r - 4,\ P_r - 2,\ P_r + 2,\ P_r + 4,\ P_r + 8.$$

Wie leicht gezeigt wird, sind in der unbegrenzten Reihe der positiven und negativen Lückenzahlen r-ter Stufe alle Vielfachen von P_r Symmetriezentra.

Wenn man die steigende Reihe der Lückenzahlen r-ter Stufe durchläuft und daraus nacheinander die Glieder $v_r, v_r', v_r'', \ldots, v_r^{(k)}$ entnimmt, so entsteht eine $(k+1)$-gliedrige Folge von Lückenzahlen. Aus ihr entspringt die k-gliedrige Differenzenfolge

(3) $$2\delta_1 = v_r' - v_r,\ 2\delta_2 = v_r'' - v_r',\ \ldots,\ 2\delta_k = v_r^{(k)} - v_r^{(k-1)}.$$

Ist die Folge ein Abschnitt, so sollen die zugehörigen Differenzen Urdifferenzen heißen.

[1] Auf demselben Grundgedanken beruht der Beweis von E. KUMMER, Neuer elementarer Beweis des Satzes, daß die Anzahl aller Primzahlen unendlich ist, Monatsbericht der Berliner Akademie, Jahrgang 1878, S. 777.

[2] Ebenfalls mit elementaren Mitteln, aber umständlicher hat A. DUPRÉ diesen Satz bewiesen. Später hat GLAISHER die Folge der Zahlen $2\,P_r + 2$ bis $2\,P_r + p_{r+1} - 1$ benutzt, die dasselbe leisten, wie die im Text angegebenen kleineren Zahlen, An enumeration of prime pairs, Messenger of math. (2) 8 (1878), S. 28; vgl. auch E. LUCAS, On long successions of composite numbers, ebenda S. 81. Listen von langen Folgen zusammengesetzter Zahlen findet man bei L. GLAISHER, On long successions of composite numbers, Messenger (2) 7 (1878), S. 171. Die längste Folge bis 100 000 ist 31 398 bis 31 468, sie umfaßt 71 Zahlen. Ferner sind die 151 Zahlen von 8 421 252 bis 8 421 402 zusammengesetzt.

Die nunmehr folgenden Untersuchungen über Differenzen von Lückenzahlen bilden die Grundlage einer additiven Arithmetik dieser Zahlen.

§ 2. Zulässige Differenzenfolgen.

Wenn eine k-gliedrige Folge gerader Zahlen $(2\delta_\varkappa)$ bei den Lückenzahlen r-ter Stufe als Differenzenfolge auftritt, so soll sie als zulässig für die r-te Stufe bezeichnet werden. Es gibt dann mindestens eine $(k+1)$-gliedrige Lückenzahlfolge r-ter Stufe mit den Gliedern

(4) $$v_r,\ v_r+2\delta_1,\ v_r+2\delta_1+2\delta_2,\ \ldots,\ v_r+2\delta_1+2\delta_2+\ldots+2\delta_k.$$

Sie läßt sich in der Form $v_r+2\sigma_\varkappa$ $(\varkappa=0, 1, 2, \ldots, k)$ darstellen, wenn man die steigende Folge der $k+1$ Teilsummen

(5) $$2\sigma_0=0,\ 2\sigma_1=2\delta_1,\ 2\sigma_2=2\delta+2\delta_2,\ \ldots,\ 2\sigma_k=2\delta_1+2\delta_2+\ldots+2\delta_k$$

einführt. Die letzte Teilsumme $2\sigma_k$ heiße das Gewicht der Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$. Nach diesen Vorbereitungen soll der Satz bewiesen werden:

Lehrsatz III. Eine k-gliedrige Folge $(2\delta_\varkappa)$ ist dann und nur dann als Differenzenfolge auf der r-ten Stufe zulässig, wenn die Reste der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ bei keiner der r Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ ein volles Restsystem ausmachen.

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Bilden nämlich die Reste der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ gegen die Primzahl p_ϱ ein volles Restsystem, so gilt dasselbe von den $k+1$ Zahlen $v_r+2\sigma_\varkappa$, mithin ist mindestens eine von ihnen durch p_ϱ teilbar. Die Bedingung ist hinreichend. Fehlt nämlich unter den Resten gegen p_ϱ die Zahl t_ϱ, die dann von Null verschieden ist, so gehört zu dem charakteristischen Restsystem $p_1-t_1, p_2-t_2, \ldots, p_r-t_r$ eine bestimmte Lückenzahl v_r des Hauptabschnitts r-ter Stufe, und weil die Zahlen $v_r+2\sigma_\varkappa$ gegen p_ϱ dieselben Reste lassen wie die Zahlen $2\sigma_\varkappa-t_\varrho$, so ist keine von ihnen durch p_ϱ teilbar.

Zwei Folgen von $k+1$ geraden Zahlen, bei denen die entsprechenden Glieder kongruent mod. $2P_r$ sind, haben gegen die Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ dieselben Reste. Folglich entspringen sämtliche auf der r-ten Stufe zulässigen Differenzenfolgen aus einer endlichen Anzahl von Grundfolgen, bei denen die Zahlen $(2\delta_\varkappa)$ der Reihe $2, 4, 6, \ldots, 2P_r$ angehören, durch Hinzufügung von Vielfachen der Zahl $2P_r$.

Die Anzahl der verschiedenen Reste der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ gegen die Primzahl p_ϱ werde mit $V(p_\varrho)$ bezeichnet. Der kleinste Wert, den $V(p_\varrho)$ haben kann, ist Eins, und zwar haben dann alle Teilsummen, also auch alle Differenzen den gemeinsamen Rest Null. Sind umgekehrt alle Differenzen durch p_ϱ teilbar, so hat $V(p_\varrho)$ den Wert Eins. Mithin hat $V(p_\varrho)$ dann und nur dann den kleinsten Wert, wenn die ungerade Primzahl p_ϱ in dem größten gemeinsamen Teiler aller k Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ aufgeht. Solchen Primzahlen soll in bezug auf die betrachtete Differenzenfolge Minimalcharakter zugeschrieben werden.

Der größte Wert, den $V(p_\varrho)$ haben kann, ist $p_\varrho-1$. Die Primzahl p_ϱ trägt dann Maximalcharakter in bezug auf die betrachtete Differenzenfolge. Weil die Anzahl der verschiedenen Reste höchstens gleich $k+1$ sein kann, können nur solche Primzahlen p_ϱ Maximalcharakter haben, für die $p_\varrho \leqq k+2$ ist. Es gibt dann nur einen Nichtrest t_ϱ, und die Lage der Lückenzahlen, denen die gegebenen Differenzen zukommen, gegen die Vielfachen von p_ϱ ist eindeutig bestimmt.

Unter den Resten der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ müssen sich gleiche befinden, wenn p_ϱ kleiner als $k+1$ ist. Bei zulässigen Differenzenfolgen trifft dies auch zu, wenn p_ϱ gleich $k+1$ ist, also, wenn die Zahl R so gewählt wird, daß

(6) $$p_R \leqq k+1 < p_{R+1}$$

ist, für die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_R$. Ist p_A die größte der ungeraden Primzahlen, die in einer der $\frac{1}{2}k\,(k+1)$ Differenzen

(7) $$2\sigma_{\varkappa\lambda} = 2\sigma_\varkappa - 2\sigma_\lambda \qquad (\varkappa > \lambda)$$

aufgehen, so sind die Reste der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ für die Primzahlen $p_{A+1}, p_{A+2}, \ldots$ voneinander verschieden, und man hat $V\,(p_\varrho) = k+1$. Nach der Erklärung ist die Primzahl p_A nicht größer als σ_k, und weil für die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_R$ gleiche Reste auftreten, muß A mindestens gleich R sein.

Für $k=1$ möge $R=0$ und $p_0=1$ gesetzt werden.

§ 3. Symmetrische Differenzenfolgen.

Gleichzeitig mit der Differenzenfolge: $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_k$ ist die in umgekehrter Ordnung geschriebene Folge: $2\delta_k, 2\delta_{k-1}, \ldots, 2\delta_1$ zulässig oder unzulässig. Die umgekehrte Folge kann mit der ursprünglichen zusammenfallen. Dann gelten die Gleichungen $2\delta_\varkappa = 2\delta_{k-\varkappa+1}$, und es ist

(8) $$\sigma_\varkappa + \sigma_{k-\varkappa} = \sigma_k \cdot \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

Haben umgekehrt die $k+1$ Summen $\sigma_\varkappa + \sigma_{k-\varkappa}$ alle denselben Wert, so ist $2\delta_\varkappa = 2\delta_{k-\varkappa+1}$. Folgen dieser Beschaffenheit mögen *symmetrisch* heißen.

Zur Darstellung der Lückenzahlfolgen $(v_r + 2\sigma_\varkappa)$, denen eine gegebene symmetrische Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ zukommt, benutzt man häufig mit Vorteil deren **Mitte** m_r, das heißt die Zahl $v_r + \sigma_k$. Die Mitte braucht kein Glied der Folge zu sein. Für die weiteren Betrachtungen müssen die Fälle, ob k gerade oder ungerade ist, getrennt werden.

I. Es sei k *gerade*, $k = 2l$. Dann ist die Mitte m_r ein Glied der Lückenzahlfolge, und diese erscheint, wenn

(9) $$\tau_\lambda = \delta_l + \delta_{l-1} + \ldots + \delta_{l-\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

gesetzt wird, in der Gestalt

$$m_r - 2\tau_l,\ m_r - 2\tau_{l-1},\ \ldots,\ m_r - 2\tau_1,\ m_r,\ m_r + 2\tau_1,\ \ldots,\ m_r + 2\tau_{l-1},\ m_r + 2\tau_l.$$

An die Stelle des Lehrsatzes III tritt der

Lehrsatz IV. *Eine $2l$-gliedrige symmetrische Folge $(2\delta_\varkappa)$ ist dann und nur dann als Differenzenfolge r-ter Stufe zulässig, wenn die Reste der $2l+1$ Zahlen $0, \pm 2\tau_1, \ldots, \pm 2\tau_l$ bei keiner der r Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ ein volles Restsystem ausmachen.*

Weiter gilt der

Lehrsatz V. *Bei einer symmetrischen Differenzenfolge von gerader Gliederzahl, die auf der r-ten Stufe zulässig ist, hat keine der Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ Maximalcharakter.*

Beweis. Zwei Zahlen $\pm 2\tau_\lambda$ haben dann und nur dann gegen die Primzahl p_ϱ denselben Rest, wenn τ_λ durch p_ϱ teilbar ist, und zwar den Rest Null. Also ist $V\,(p_\varrho)$ ungerade und von $p_\varrho - 1$ verschieden.

II. Es sei k ungerade, $k = 2l - 1$. Hier ist die Mitte m_r kein Glied der Lückenzahlfolge, und diese erscheint, wenn

(10) $$\tau_\lambda = \delta_{l-1} + \delta_{l-2} + \cdots + \delta_{l-\lambda+1} \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, l)$$

gesetzt wird, in der Gestalt

$$m_r - (\delta_l + 2\tau_l),\ m_r - (\delta_l + 2\tau_{l-1}),\ \ldots,\ m_r - (\delta_l + 2\tau_2),\ m_r - \delta_l,$$
$$m_r + \delta_l,\ m_r + (\delta_l + 2\tau_2),\ \ldots,\ m_r + (\delta_l + 2\tau_{l-1}),\ m_r + (\delta_l + 2\tau_l).$$

Wird noch $2\tau_1 = 0$ eingeführt, so ist der Lehrsatz III zu ersetzen durch den

Lehrsatz VI. Eine $(2l-1)$-gliedrige symmetrische Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ ist dann und nur dann auf der r-ten Stufe zulässig, wenn die Reste der $2l$ Zahlen $\pm(\delta_l + 2\tau_\lambda)$ bei keiner der Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ ein volles Restsystem ausmachen.

Die Anzahl $V(p_\varrho)$ kann hier gerade oder ungerade sein, und es ist nicht ausgeschlossen, daß es Primzahlen von Maximalcharakter gibt. Für diese gilt der

Lehrsatz VII. Wenn eine Primzahl für eine symmetrische Differenzenfolge Maximalcharakter trägt, so sind die Mitten der zugehörigen Lückenzahlfolgen durch sie teilbar.

Beweis. Damit die Primzahl p_ϱ Maximalcharakter trägt, müssen die Reste der $2l$ Zahlen $\pm(\delta_l + 2\tau_\lambda)$ abgesehen von der Reihenfolge mit den Zahlen $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{1}{2}(p_\varrho - 1)$ übereinstimmen, und es findet sich nur dann unter den $2l$ Zahlen $m_r \pm (\delta_l + 2\tau_\lambda)$ keine durch p_ϱ teilbare, wenn m_r den Teiler p_ϱ hat.

§ 4. Beständige Differenzenfolgen.

Wenn eine Differenzenfolge auf der r-ten Stufe zulässig ist, so ist sie nach dem Lehrsatz III auch für alle kleineren Stufen, im besondern also auf der ersten Stufe zulässig. Wohl aber kann eine auf der r-ten Stufe zulässige Differenzenfolge für die $(r+1)$-te Stufe unzulässig werden, wenn nämlich die Reste der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ gegen die Primzahl p_{r+1} ein volles Restsystem ausmachen. Beim Übergang zu höheren Stufen gehen also immer gewisse Differenzenfolgen verloren. Es gibt indessen Folgen, die auf jeder Stufe zulässig bleiben. Sie sollen beständig genannt werden.

Lehrsatz VIII. Wird die Zahl R so gewählt, daß $p_R \leqq k+1 < p_{R+1}$ ist, so ist die k-gliedrige Folge $(2\delta_\varkappa)$ dann und nur dann beständig, wenn die Reste der $k+1$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ bei keiner der R Primzahlen $3, 5, \ldots, p_R$ ein volles Restsystem ausmachen.

Beweis. Die Bedingung ist für die Zulässigkeit auf allen Stufen bis zur R-ten einschließlich notwendig und hinreichend. Für die höheren Stufen aber können die Reste der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ niemals ein volles System ausmachen, weil die Anzahl der Teilsummen kleiner als jede der Primzahlen $p_{R+1}, p_{R+2}, \ldots$ ist.

Die Bedingung des Lehrsatzes VIII ist für alle zulässigen Folgen r-ter Stufe erfüllt, deren Gliederzahl k kleiner als $p_{r+1} - 1$ ist. Demnach sind alle ein-, zwei- und dreigliedrigen, auf der ersten Stufe zulässigen Folgen auch beständige Folgen; eingliedrige zulässige Folgen sind alle geraden Zahlen.

Weitere Beispiele zulässiger Folgen ergeben sich aus der Betrachtung der Reihe der Primzahlen $5, 7, 11, \ldots$. Jede Primzahl, die größer als p_r ist, gehört zu den Lückenzahlen r-ter Stufe, mithin ist die Differenzenfolge jeder steigenden Reihe positiver Primzahlen, deren Gliederzahl weniger als das erste Glied beträgt, beständig.

Jetzt sei p, p', p'', ... eine steigende Reihe positiver Primzahlen, deren Differenzenfolge unbeständig ist, und zwar möge diese unzulässig werden, wenn man von der r-ten zur $(r+1)$-ten Stufe übergeht. Nun sind unter den Lückenzahlen $(r+1)$-ter Stufe alle Primzahlen größer als p_{r+1} enthalten. Folglich muß p kleiner als p_{r+2} sein, und man erkennt, daß eine Differenzenfolge, die beim Übergang von der r-ten zur $(r+1)$-ten Stufe unzulässig wird, nur bei solchen Folgen positiver Primzahlen vorkommen kann, deren Anfangsglied kleiner als p_{r+2} ist. Hieraus folgt endlich, daß eine Differenzenfolge nur dann unbegrenzt oft in der Reihe der positiven Primzahlen verwirklicht sein kann, wenn sie beständig ist.

Beispiele beständiger Folgen sind ferner die symmetrischen Folgen mit $2l-1$ Gliedern

$$2l,\ 2l-2,\ 2l-4,\ \ldots,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2l-4,\ 2l-2,\ 2l.$$

und zwar für jeden Wert von l. Man hat hier $\delta_l = 1$, $2\tau_\lambda = \lambda(\lambda+1)-2$, so daß nach dem Lehrsatz VI die Reste der $2l$ Zahlen $\pm[\lambda(\lambda+1)-1]$ gegen eine ungerade Primzahl p zu untersuchen sind. Bekanntlich erhält man schon alle möglichen Reste, wenn man $\lambda = 0$, $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ setzt, und weil der Ausdruck $\pm[\lambda(\lambda+1)-1]$ für $\lambda = 0$ und für $\lambda = 1$ gleich ± 1 wird, können sich höchstens $p-1$ verschiedene Reste ergeben, mithin ist die Forderung des Lehrsatzes VI erfüllt.

Endlich mögen noch die beständigen Folgen angeführt werden, bei denen sämtliche Differenzen denselben Wert haben. Aus dem Lehrsatz VIII folgt, daß der gemeinsame Wert ein Vielfaches von $2P_r$ sein muß, und die Folge ist beständig, sobald ihre Gliederzahl kleiner als $p_{r+1}-1$ bleibt.

Es gibt Mittel, die es ermöglichen, aus bekannten beständigen Folgen neue Folgen dieser Art herzuleiten. Zunächst ist klar, daß aus einer beständigen Folge durch Umkehrung der Ordnung der Glieder wieder eine beständige Folge hervorgeht. Ferner hat man den

Lehrsatz IX. Sind $2\sigma_0$, $2\sigma_1$, ..., $2\sigma_k$ und $2\tau_1$, $2\tau_2$, ..., $2\tau_l$ die Teilsummen von zwei beständigen Differenzenfolgen, so lassen sich beliebig viele Zahlen $2Z$ so bestimmen, daß aus den $k+l+2$ Zahlen

$$2\sigma_0,\ 2\sigma_1,\ \ldots,\ 2\sigma_k,\ 2Z+2\tau_0,\ 2Z+2\tau_1,\ \ldots,\ 2Z+2\tau_l,$$

wenn man sie der Größe nach ordnet und gleiche Zahlen nur einmal hinschreibt, die Teilsummen einer beständigen Folge hervorgehen (Zusammensetzung beständiger Folgen).

Beweis. Bei den Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ fehle unter den Resten gegen die Primzahl p die Zahl t, bei den Teilsummen $(2\tau_\lambda)$ die Zahl u. Bestimmt man $2Z$ so, daß für alle Primzahlen $p \leqq k+l+2$ die Kongruenzen

$$2Z \equiv t-u \pmod{p}$$

erfüllt sind, so fehlt bei den Teilsummen der zusammengesetzten Folge der Rest t, und diese ist nach Lehrsatz VIII beständig.

Wenn für alle in Betracht kommenden Primzahlen p unter den Nichtresten t und u ein Paar gleicher Zahlen vorkommt, so gehört zu den Werten von $2Z$ auch der Wert Null. Das gilt im besonderen für die Zusammensetzung einer beständigen Folge mit sich selbst. Hier führt jedoch der Wert Null zur ursprünglichen Folge zurück, und der kleinste brauchbare Wert von $2Z$ hat die Form $2\gamma Q$, wenn γ eine ganze Zahl ist und Q das Produkt der Primzahlen bedeutet, denen in bezug auf die Folge Maximalcharakter zukommt; denn bei ihnen ist man gezwungen, in den Kongruenzen t gleich u zu nehmen.

Als Beispiel diene die einfachste beständige Folge (2). Für sie hat 3 Maximalcharakter, und wenn man die Folge mit sich selbst zusammensetzt, wird $2Z=6\gamma$. Der kleinste Wert 6 führt schon zu der beständigen Folge (2, 4, 2). Da für diese 3 und 5 Maximalcharakter tragen, so wird bei der Zusammensetzung mit sich selbst $2Z=30\gamma$. Der kleinste Wert 30 führt schon zu der beständigen Folge (2, 4, 2, 22, 2, 4, 2). Jetzt bekommt auch 7 Maximalcharakter, und bei wiederholter Zusammensetzung mit sich selbst wird $2Z=210\gamma$. Für den kleinsten Wert 210 liefert jetzt die Primzahl 11 ein volles Restsystem. Dagegen führt die Annahme $2Z=420$ zu der beständigen Folge

(2, 4, 2, 22, 2, 4, 2, 382, 2, 4, 2, 22, 2, 4, 2).

Auf diese Art kann man fortfahren. Es gibt demnach beständige Folgen, deren Gliederzahl beliebig groß ist und bei denen alle Glieder ungerader Ordnung gleich 2 sind.

§ 5. Anzahl der Lückenzahlfolgen mit gegebener Differenzenfolge.

Die Anzahl der Lückenzahlfolgen r-ter Stufe mit den gegebenen Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ oder, was auf dasselbe herauskommt, mit den gegebenen Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$, die mit einer Lückenzahl des Hauptabschnitts beginnen, soll mit $h_r\,(2\sigma_\varkappa)$ bezeichnet werden. Zu ihrer Bestimmung kann das Verfahren dienen, das zum Beweise des Lehrsatzes III angewandt wurde. Weil nämlich die Anfangszahlen der betreffenden Folgen, die im Hauptabschnitt liegen, durch ihre charakteristischen Restsysteme eindeutig bestimmt sind, gibt es genau so viele Lückenzahlfolgen der verlangten Art als Restsysteme $(p_\varrho-t_\varrho)$. Folglich ist $h_r\,(2\sigma_\varkappa)$ gleich dem Produkt der Anzahlen der Nichtreste, die den Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ gegen die Primzahlen p_ϱ zukommen, oder

$$h_r\,(2\sigma_\varkappa)=\prod_{\varrho=1}^{r}(p_\varrho-V(p_\varrho)). \tag{11}$$

Für eine Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$, die auf der r-ten Stufe unzulässig ist, hat mindestens eine der Anzahlen $V(p_\varrho)$ den Wert p_ϱ, und das Produkt auf der rechten Seite verschwindet. Für eine beständige Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ sind sämtliche Faktoren von Null verschieden; spätetens von $\varrho=A+1$ ab haben sie die Form $p_\varrho-k-1$. Es sei daran erinnert, daß nach § 2 $A>R$ ist. Bildet man in Verallgemeinerung der Gleichungen (1) und (2) die Produkte

$$P_r^{(k+1)}=\prod_{\varrho=R+1}^{r}(p_\varrho-k-1), \tag{12}$$

so wird für beständige Folgen zweckmäßig die Form gewählt werden können:

$$h_r\,(2\sigma_\varkappa)=P_r^{(k+1)}\cdot S_r(2\sigma_\varkappa) \qquad (r>R). \tag{13}$$

Auf der r-ten Stufe ist der erste Faktor für alle k-gliedrigen Differenzenfolgen derselbe, dagegen wird der zweite durch die arithmetische Beschaffenheit der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ bedingt. Er möge die zur beständigen Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ gehörige Schwankungsfunktion r-ter Stufe genannt werden.

Von besonderer Bedeutung ist die Tatsache, daß die **Schwankungsfunktionen der beständigen Folgen von der A-ten Stufe ab denselben Wert behalten.** Sobald nämlich r den Wert A erreicht oder überschreitet, ist nach Gleichung (11)

$$h_{r+1}(2\sigma_\varkappa)=h_r(2\sigma_\varkappa)\cdot(p_{r+1}-k-1), \tag{14}$$

also zufolge der Gleichung (13)

$$S_{r+1}(2\sigma_\varkappa)=S_r(2\sigma_\varkappa) \qquad (r\geq A). \tag{15}$$

Der beständige Wert der Schwankungsfunktion läßt sich in der Form schreiben

$$S(2\sigma_\varkappa) = \prod(p' - V(p')) \cdot \prod \frac{p'' - V(p'')}{p'' - k - 1}. \tag{16}$$

Das Zeichen p' bedeutet die Primzahlen erster Art 3, 5, ..., p_R, das Zeichen p'' die Primzahlen zweiter Art, die größer als p_R sind, aber p_A nicht übersteigen. Die beständige Schwankungsfunktion ist aus Multiplikatoren erster und zweiter Art zusammengesetzt, und zwar hat man

$$M_1(p') = p' - V(p') \qquad (p' \leqq k+1); \tag{17}$$

$$M_2(p'') = \frac{p'' - V(p'')}{p'' - k - 1} = 1 + \frac{k+1 - V(p'')}{p'' - k - 1} \qquad (k+1 < p'' \leqq p_A). \tag{18}$$

Die Multiplikatoren erster Art sind ganze Zahlen, die Multiplikatoren zweiter Art rationale Zahlen, größer als Eins, wenn $V(p'')$ kleiner als $k+1$ ist, gleich Eins, wenn $V(p'')$ gleich $k+1$ ist. Diejenigen Primzahlen, bei denen der Multiplikator größer als Eins ist, sollen wirksam heißen.

Falls R und A beide gleich Null sind, gibt es keine Multiplikatoren. Falls A gleich R ist, gibt es nur Multiplikatoren erster Art. Falls R gleich Null, aber A größer als Null ist, gibt es nur Multiplikatoren zweiter Art.

Primzahlen von Maximalcharakter, bei denen $V(p) = p - 1$ ist, sind höchstens gleich $k+2$, also im allgemeinen erster Art: der zugehörige Multiplikator hat dann den Wert Eins. Nur $k+2$ kann als Primzahl zweiter Art Maximalcharakter tragen, aber auch dann hat der Multiplikator den Wert Eins.

Um die Multiplikatoren herzustellen, hat man die Anzahlen $V(p)$ zu ermitteln. Hierzu empfiehlt es sich, die $\frac{1}{2}k(k+1)$ Differenzensummen

$$2\sigma_{\varkappa\lambda} = 2\sigma_\varkappa - 2\sigma_\lambda = 2\delta_\varkappa + 2\delta_{\varkappa-1} + \ldots + 2\delta_{\lambda+1} \qquad (\varkappa > \lambda) \tag{8'}$$

in Form eines Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ anzuordnen:

Das Dreieck der Differenzensummen

	$2\sigma_1$	$2\sigma_2$	$2\sigma_3$	...	$2\sigma_\lambda$	...	$2\sigma_\varkappa$	...	$2\sigma_{k-1}$	$2\sigma_k$
$2\sigma_0$	$2\sigma_{10}$	$2\sigma_{20}$	$2\sigma_{30}$	...	$2\sigma_{\lambda 0}$	...	$2\sigma_{\varkappa 0}$	...	$2\sigma_{k-1 \cdot 0}$	$2\sigma_{k0}$
$2\sigma_1$		$2\sigma_{21}$	$2\sigma_{31}$	...	$2\sigma_{\lambda 1}$	...	$2\sigma_{\varkappa 1}$	...	$2\sigma_{k-1 \cdot 1}$	$2\sigma_{k1}$
$2\sigma_2$			$2\sigma_{32}$	...	$2\sigma_{\lambda 2}$	...	$2\sigma_{\varkappa 2}$	...	$2\sigma_{k-1, 2}$	$2\sigma_{k2}$
...				...	...	...	...	...	...	...
$2\sigma_\lambda$						...	$2\sigma_{\varkappa\lambda}$	...	$2\sigma_{k-1, \lambda}$	$2\sigma_{k\lambda}$
...						...	...	...	...	...
$2\sigma_\varkappa$								...	$2\sigma_{k-1, \varkappa}$	$2\sigma_{k\varkappa}$
...								...	...	...
$2\sigma_{k-2}$									$2\sigma_{k-1, k-2}$	$2\sigma_{k, k-2}$
$2\sigma_{k-1}$										$2\sigma_{k, k-1}$

Schreibt man in die Felder des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ statt der Differenzensummen $(2\sigma_{\varkappa\lambda})$ deren ungerade Primteiler, so erfolgt die Bestimmung von $V(p)$ mittels des Satzes:

Lehrsatz X. Wenn der Primteiler p in $z(p)$ Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ fehlt, so ist $V(p) = z(p) + 1$.

B e w e i s. Wenn zwei Teilsummen $2\sigma_\varkappa$ und $2\sigma_\lambda$, $(\varkappa > \lambda)$, verschiedene Reste gegen die Primzahl p haben, so ist ihre Differenz $2\sigma_{\varkappa\lambda}$ nicht durch p teilbar; wenn sie aber gleiche Reste haben, so findet sich in der Zeile mit dem Eingang $2\sigma_\varkappa$ der Primteiler p, und enthält umgekehrt diese Zeile den Primteiler p, so gibt es einen Zeiger λ, für den $2\sigma_\varkappa$ und $2\sigma_\lambda$, $(\varkappa > \lambda)$, denselben Rest besitzen. Die Teilsumme mit dem größten Zeiger, die einen bestimmten Rest s liefert, soll die l e t z t e T e i l s u m m e des Restes s genannt werden. Es gibt ebenso viele verschiedene Reste von Teilsummen als es letzte Teilsummen gibt, also $V(p)$.

Jetzt sei $2\sigma_\mu$ die letzte Teilsumme des Restes s. Dann haben die Teilsummen $2\sigma_{\mu+1}$, $2\sigma_{\mu+2}, \ldots, 2\sigma_k$ Reste, die von s verschieden sind, und in der Zeile mit dem Eingang $2\sigma_\mu$ fehlt p. Ausgenommen ist nur der Fall, daß $2\sigma_k$ die letzte Teilsumme des Restes s ist, denn es gibt keine Zeile dieses Eingangs; $2\sigma_k$ ist sicher die letzte Teilsumme ihres Restes.

Fehlt umgekehrt in der Zeile mit dem Eingang $2\sigma_\mu$ der Primteiler p, so ist $2\sigma_\mu$ die letzte Teilsumme ihres Restes. Folglich gibt es ebenso viele letzte Teilsummen, als es Zeilen gibt, in denen p fehlt, also $z(p)$ Zeilen, und dazu kommt noch die letzte Teilsumme $2\sigma_k$. Im Ganzen wird demnach $V(p) = z(p) + 1$.

Mit Benutzung der Funktion $z(p)$ lauten die Gleichungen für die Multiplikatoren

$$M_1(p') = p' - z(p') - 1 \qquad (p' \leq k+1); \tag{17'}$$

$$M_2(p'') = \frac{p'' - z(p'') - 1}{p'' - k - 1} = 1 + \frac{k - z(p'')}{p'' - k - 1} \qquad (k+1 < p'' \leqq p_A). \tag{18'}$$

Die zweite Gleichung zeigt, daß eine Primzahl zweiter Art wirksam ist, sobald sie mindestens in einer Zeile des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ als Primteiler auftritt. Hierin liegt, daß die wirksamen Primzahlen zweiter Art mit den Primteilern der Differenzensummen $(2\sigma_{\varkappa\lambda})$ zusammenfallen, die größer als $k+1$ sind.

Man hat es nicht nötig, für jede zu untersuchende Folge $(2\sigma_\varkappa)$ das Dreieck der Differenzensummen von neuem herzustellen, wenn man sich ein für allemal eine Tafel anfertigt, die als Eingänge der Spalten die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, ... trägt, als Eingänge der Zeilen die Zahlen 0, 2, 4, 6, ... und die in der ersten Zeile für die Eingänge der Spalten deren ungerade Primteiler angibt, während in jeder folgenden Zeile die Teilerscharen um je eine Spalte nach rechts verschoben sind. Für die Untersuchung einer gegebenen Differenzenfolge hat man nur diejenigen Spalten und Zeilen des großen Dreiecks aufzudecken, deren Eingänge zu den Zahlen $(2\sigma_\varkappa)$ gehören.

Als Beispiel für die Anwendung des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ möge die in § 4 auftretende Differenzenfolge (2, 4, 2, 22, 2, 4, 2) dienen. Die Folge der Teilsummen ist (0, 2, 6, 8, 30, 32, 36, 38). Primzahlen erster Art werden 3, 5, 7, Primzahlen zweiter Art 11, 13, 17, 19. Durch Eintragen der Primteiler von 3 bis 19 erhält man das Dreieck

	2	6	8	30	32	36	38
0	—	3	—	3,5	—	3	19
2		—	3	7	3,5	17	3
6			—	3	13	3,5	—
8				11	3	7	3,5
30					—	3	—
32						—	3
36							—

Hieraus folgt

p'	3	5	7	p''	11	13	17	19
$z(p')$	1	3	5	$z(p'')$	6	6	6	6
$M_1(p')$	1	1	1	$M_2(p'')$	4/3	6/5	10/9	12/11

Schließlich wird

$$S(0,\ 2,\ 6,\ 8,\ 30,\ 32,\ 36,\ 38) = 64/33.$$

Die Primzahlen von 23 ab sind unwirksam.

Zum Schluß soll ermittelt werden, wieviele Paare von Lückenzahlen r-ter Stufe gegebener Differenz 2δ ihre Anfangszahl im Hauptabschnitt haben. Weil $k = 1$ ist, wird

(19) $$h_r(0,2\delta) = P_r^{(2)} \cdot S_r(0,2\delta),$$

und zwar ist nach Gleichung (12):

(20) $$P_r^{(2)} = (3-2)\ (5-2)\ (7-2)\ \ldots\ (p_r-2).$$

Es gibt nur Multiplikatoren zweiter Art und die Schwankungsfunktion setzt sich zusammen aus Faktoren

(21) $$M_2(p) = 1 + \frac{2-V(p)}{p-2}.$$

Bei der Bestimmung von $V(p)$ sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist erstens die Differenz 2δ nicht durch p teilbar, so ergeben die Teilsummen $0, 2\delta$ zwei verschiedene Reste gegen p, folglich ist $V(p) = 2$ und $M_2(p) = 1$. Solche Primzahlen sind unwirksam.

Ist zweitens die Differenz 2δ durch p teilbar, so ergeben die Teilsummen $0, 2\delta$ den einen Rest Null, folglich ist $V(p) = 1$ und $M_2(p) = \frac{p-1}{p-2}$. Die in der Differenz 2δ enthaltenen Primteiler sind wirksam; der größte von ihnen ist die Primzahl p_A.

Die beständige Schwankungsfunktion wird

(22) $$S(0,2\delta) = \prod \frac{p-1}{p-2};$$

das Produkt ist über sämtliche in δ enthaltene ungerade Primzahlen zu erstrecken.

§ 6. Folgen von Urdifferenzen.

Die Differenzen von je zwei benachbarten Lückenzahlen sind in § 1 als Urdifferenzen bezeichnet worden; in der Tat läßt sich die Differenz von zwei nicht benachbarten Lückenzahlen als Summe von Urdifferenzen darstellen.

Wenn man bei der Bildung der Urdifferenzen r-ter Stufe von der Lückenzahl 1 ausgeht, so ergibt sich eine periodische Reihe von Zahlen, denn die ersten $P_r^{(1)}$ Urdifferenzen kehren beständig wieder. Sie bilden den Hauptabschnitt der Urdifferenzen r-ter Stufe. Der Hauptabschnitt beginnt mit der Zahl $p_{r+1} - 1$, er endet mit der Zahl 2 als der Differenz der Lückenzahlen $2P_r - 1$ und $2P_r + 1$. Auch die in der Mitte stehenden Urdifferenzen lassen sich allgemein angeben, es sind (von der zweiten Stufe ab) die Zahlen 2, 4, 2, 4, 2. Für die unbegrenzte Reihe der Urdifferenzen der negativen und positiven Lückenzahlen r-ter Stufe sind die letzte 2 und die in der Mitte befindliche 4 Symmetriezentra. Hieraus folgt, daß, von 2 und 4 abgesehen, die Anzahl des Vorkommens der Urdifferenz $2\delta'$ im Hauptabschnitt gerade ist. Dagegen sind die Anzahlen für 2 und 4 ungerade, und zwar gleich den entsprechenden k-Funktionen, also nach den Bemerkungen in § 5 gleich $P_r^{(2)}$.

Zu einem $(k+1)$-gliedrigen Abschnitt von Lückenzahlen r-ter Stufe gehört eine Folge von k Urdifferenzen oder kürzer eine k-gliedrige Urfolge. Während man jedoch leicht feststellen kann, ob eine gegebene Folge gerader Zahlen als Differenzenfolge r-ter Stufe zulässig ist oder nicht, sind, wie es scheint, für die Urfolgen keine einfachen Kennzeichen vorhanden. Was sich darüber ermitteln ließ, soll in diesem und dem folgenden Paragraphen dargelegt werden.

Wie in § 4 bemerkt wurde, finden sich sämtliche Differenzenfolgen, die bei Lückenzahlen überhaupt vorkommen können, schon auf der ersten Stufe. Beim Übergang zu höheren Stufen gehen gewisse Folgen verloren. Zum Beispiel sind auf der r-ten Stufe alle Differenzenfolgen gestattet, deren Glieder denselben Wert $2P_r$ haben, wie groß auch die Gliederzahl sein möge, auf der $(r+1)$-ten Stufe bleiben jedoch davon nur diejenigen Folgen erhalten, deren Gliederzahl kleiner als p_{r+1} ist.

Ganz anders verhalten sich die Urdifferenzen. Auf der ersten Stufe sind Urdifferenzen sämtliche Folgen, deren Glieder abwechselnd die Werte 2 und 4 haben. Beim Übergang zur zweiten Stufe bleiben davon Urfolgen nur die 9 Folgen

$$(2),\ (4);\ (2,4),\ (4,2);\ (2,4,2),\ (4,2,4);\ (2,4,2,4),\ (4,2,4,2);\ (4,2,4,2,4).$$

Dagegen treten hinzu die Folge (6) und alle die Zahl 6 enthaltenden Abschnitte von Urdifferenzen zweiter Stufe. Ebenso werden beim Übergang von irgendeiner Stufe zur nächsthöheren immer gewisse Urdifferenzen eingebüßt, dafür aber andere gewonnen.

Lehrsatz XI. Wenn eine Folge auf einer gewissen Stufe als Urfolge auftritt, so bleibt sie auf der nächsthöheren Stufe Urfolge oder sie wird unzulässig.

Beweis. Beim Übergang von der r-ten zur $(r+1)$-ten Stufe erhält man sämtliche Lückenzahlen $(r+1)$-ter Stufe des Hauptbereichs, der von 1 bis $2P_{r+1}$ reicht, wenn man von den darin liegenden Lückenzahlen r-ter Stufe diejenigen wegläßt, die durch p_{r+1} teilbar sind, und diese Lückenzahlen r-ter Stufe entspringen aus den Lückenzahlen des Hauptbereichs r-ter Stufe, der von 1 bis $2P_r$ reicht, wenn man dazu Vielfache von $2P_r$ zählt; sie lassen sich also in der Form $v_r+2P_r\eta$ darstellen, und zwar durchläuft η die Werte 0, 1, 2, ..., $p_{r+1}-1$. Unter den Werten von η befindet sich immer einer und nur einer, für den $v_r+2P_r\eta$ durch p_{r+1} teilbar wird; er möge als der Ausnahmewert bezeichnet werden.

Betrachtet man jetzt einen Abschnitt von Lückenzahlen r-ter Stufe $(v_r+2\sigma'_\varkappa)$, so entspringen daraus durch das angegebene Verfahren auf der $(r+1)$-ten Stufe zunächst die p_{r+1} Folgen $(v_r+2\sigma'_\varkappa+2P_r\eta)$. Um festzustellen, welches davon Lückenzahlfolgen $(r+1)$-ter Stufe sind, hat man für jedes der $k+1$ Glieder einer solchen Folge die Ausnahmewerte $\eta_\varkappa$ zu ermitteln. Wenn es einen Wert η' von η gibt, der von allen Ausnahmewerten $(\eta_\varkappa)$ verschieden ist, so bilden die Zahlen $(v_r+2\sigma'_\varkappa+2P_r\eta')$ eine Lückenzahlfolge $(r+1)$-ter Stufe, und diese Folge ist ein Abschnitt.

Demnach bleibt die zu den Teilsummen $(2\sigma'_\varkappa)$ gehörende Urfolge r-ter Stufe $(2\delta'_\varkappa)$ auch auf der $(r+1)$-ten Stufe eine Urfolge, es sei denn, daß die $k+1$ Ausnahmewerte $(\eta_\varkappa)$, abgesehen von der Reihenfolge, mit den Zahlen 0, 1, 2, ..., $p_{r+1}-1$ übereinstimmen. Nun durchläuft aber mit η auch $v_r+2P_r\eta$ ein volles Restsystem für die Primzahl p_{r+1}, und wenn die Zahlen $(v_r+2P_r\eta_\varkappa+2\sigma'_\varkappa)$ durch p_{r+1} teilbar sind, müssen auch die Teilsummen $(2\sigma'_\varkappa)$ ein volles Restsystem für p_{r+1} ergeben. Folglich wird in diesem Falle nach

Lehrsatz III die Differenzenfolge $(2\delta'_\varkappa)$ auf der $(r+1)$-ten Stufe unzulässig Was zu beweisen war.

Für jeden Ausnahmewert η'' von η ist unter den $k+1$ Zahlen $(v_r+2\sigma'_\varkappa+2P_r\eta'')$ mindestens eine durch p_{r+1} teilbare enthalten, mithin entspringt aus dem $(k+1)$-gliedrigen Abschnitt r-ter Stufe $(v_r+2\sigma'_\varkappa)$ auf der $(r+1)$-ten Stufe ein Abschnitt von weniger als $k+1$ Gliedern. Die zugehörigen Urdifferenzen sind teils Glieder der Folge $(2\delta'_\varkappa)$, teils Summen von Abschnitten dieser Folge. Sind nämlich $\eta_\varkappa, \eta_{\varkappa+1}, \ldots, \eta_{\varkappa+\lambda-1}$ gleich η'', aber $\eta_{\varkappa-1}$ und $\eta_{\varkappa+\lambda}$ davon verschieden, so folgt auf der $(r+1)$-ten Stufe auf die Lückenzahl $v_r+2\sigma'_{\varkappa-1}+2P_r\eta''$ sogleich die Lückenzahl $v_r+2\sigma'_{\varkappa+\lambda}+2P_r\eta''$ und es wird daher $2\sigma'_{\varkappa+\lambda}-2\sigma'_{\varkappa-1}=2\delta'_\varkappa+2\delta'_{\varkappa+1}+\ldots+2\delta'_{\varkappa+\lambda}$ eine Urdifferenz $(r+1)$-ter Stufe.

Lehrsatz XII. Die Urfolgen, die beim Übergang von der r-ten zur $(r+1)$-ten Stufe neu hinzutreten, entspringen aus den Urfolgen r-ter Stufe, indem gewisse Abschnitte durch die Summen ihrer Glieder ersetzt werden.

Eine beständige Differenzenfolge, die von einer gewissen Stufe ab Urfolge wird, erzeugt beim Übergang zu einer höheren Stufe Urfolgen, bei denen gewisse Urdifferenzen der niederen Stufe miteinander verschmolzen sind; selbstverständlich brauchen solche Urfolgen nicht neu zu sein, aber alle neuen entstehen einmal auf diese Weise. Es läßt sich zeigen, daß von der A-ten Stufe ab immer nur ein Paar benachbarter Urdifferenzen der Folge $(2\delta'_\varkappa)$ verschmelzen kann. Sollen sich nämlich mehr als zwei Urdifferenzen zu einer einzigen vereinigen, so müssen mindestens zwei benachbarte Ausnahmewerte einander gleich werden. Es sei etwa $\eta_\varkappa$ gleich $\eta_{\varkappa+1}$. Dann ist die Differenz

$$(v_r+2\sigma'_{\varkappa+1}+2P_r\eta_\varkappa)-(v_r+2\sigma'_\varkappa+2P_r\eta_\varkappa)=2\sigma'_{\varkappa+1,\varkappa}$$

durch p_{r+1} teilbar. Nun sollte aber p_A die größte ungerade Primzahl sein, die in mindestens einer der Differenzensummen $(2\sigma'_{\lambda\mu})$ enthalten ist. Mithin sind die Ausnahmewerte $(\eta_\varkappa)$, sobald r größer als A geworden ist, alle voneinander verschieden.

Auf jeder Stufe ist 2 die kleinste Urdifferenz. Die Frage nach der größten Urdifferenz $2\gamma_r$ der r-ten Stufe hat schon Legendre bei seinem Beweisversuch des Satzes von den unendlich vielen Primzahlen in arithmetischen Reihen aufgeworfen und dahin beantwortet, daß $2\gamma_r=2p_{r-1}$ sei. Daß seine Begründung unzureichend ist, hat Dirichlet bemerkt, daß sein Satz falsch ist, Dupré nachgewiesen. Wohl aber läßt sich in voller Strenge beweisen

Lehrsatz XIII. Unter den Urdifferenzen r-ter Stufe kommt stets die Zahl $2p_{r-1}$ vor.

Beweis. Man betrachte, unter x eine noch zu bestimmende Zahl verstanden, die $p_{r-1}-1$ aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen

$$2P_{r-2}x\pm u,\ u=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p_{r-1}-2.$$

Weil die Zahlen $3, 5, \ldots, p_{r-1}-2$ mindestens eine der $r-2$ ersten ungeraden Primzahlen zum Teiler haben, so ergeben diese Werte von u keine Lückenzahlen r-ter Stufe. Jetzt wähle man die Zahl x so, daß $2P_{r-2}x-1$ durch p_{r-1}, $2P_{r-2}x+1$ durch p_r teilbar ist. Dann sind auch die Zahlen $2P_{r-2}x\pm1$ keine Lückenzahlen r-ter Stufe.

Es bleibt übrig, zu zeigen, daß die Zahlen $2P_{r-2}x\pm p_{r-1}$ Lückenzahlen r-ter Stufe sind. Daß sie keine der ersten $r-1$ ungeraden Primzahlen zu Teilern haben, ist unmittelbar ersichtlich. Nun war $2P_{r-2}x+1$ durch p_r teilbar; mithin ist die nächst kleinere durch p_r teilbare Zahl $2P_{r-2}x-p_r+1$, die nächst größere durch p_r teilbare Zahl $2P_{r-2}x+p_r+1$. Die Zahlen $2P_{r-2}x\pm p_{r-1}$ liegen aber innerhalb des Bereichs, der von den Zahlen $2P_{r-2}x+p_r+1$ begrenzt wird. Folglich ist ihre Differenz $2p_{r-1}$ eine Urdifferenz.

Man könnte die Zahl x auch so wählen, daß $2P_{r-2}x-1$ durch p_r, $2P_{r-2}x+1$ durch p_{r-1} teilbar wird.

Für den von LEGENDRE angestrebten Zweck, den Satz von den Primzahlen in arithmetischen Reihen zu beweisen, würde es genügen, wenn sich zeigen ließe, daß der Quotient $2\gamma_r : p_{r-1}^2$ mit wachsenden Werten von r beliebig klein wird. Ob es sich so verhält, muß dahingestellt bleiben.

§ 7. Unzerlegbare Differenzenfolgen.

Eine wichtige Klasse der Urfolgen sind die unzerlegbaren Folgen. Man nehme irgendeine auf der r-ten Stufe zulässige Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ und bilde daraus neue Folgen desselben Gewichtes $2\sigma_k$, indem man nicht benachbarte Differenzen verschmilzt, sondern vielmehr an die Stelle der Differenzen $2\delta_\varkappa$ Folgen gerader Zahlen setzt, deren Summe wieder $2\delta_\varkappa$ ist. Durch solche Zerlegungen entsteht schließlich die Folge von σ_k Gliedern, die sämtlich gleich 2 sind. Diese Folge ist unzulässig. Mithin muß im Laufe der Zerlegung mindestens eine Folge auftreten, bei der jede weitere Zerlegung zu einer unzulässigen Folge führt; eingeschlossen ist der Fall, daß schon die gegebene Folge keine Zerlegung gestattet. Eine Folge r-ter Stufe, bei der jede Zerlegung eine auf der r-ten Stufe unzulässige Folge ergibt, möge unzerlegbar auf der r-ten Stufe heißen. Aus der Erklärung folgt sogleich der Satz:

Lehrsatz XIV. Jede auf der r-ten Stufe unzerlegbare Folge ist eine Urfolge r-ter Stufe.

Einfache Beispiele sind die Folgen, deren Glieder abwechselnd gleich 2 und 4 sind. Man hat von der zweiten Stufe ab die neun in § 6 angeführten beständigen Folgen, die auf jeder Stufe als Urfolgen auftreten.

Unzerlegbar sind ferner alle Folgen eines gegebenen Gewichts $2\sigma_k$, denen die größtmögliche Gliederzahl zukommt. Die Höchstzahl ist sicher kleiner als σ_k. Eine der Wahrheit näher kommende Schranke läßt sich folgendermaßen herleiten.

Das Gewicht $2\sigma_k$ kann auf eine und nur eine Art in der Form

$$(23)\qquad 2\sigma_k = \sum_{\varrho=0}^{r} g_\varrho \cdot 2P_\varrho \qquad (P_0 = 1)$$

dargestellt werden, wenn die Koeffizienten den Ungleichheiten

$$0 \leqq g_\varrho \leqq p_{\varrho+1} - 1 \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, r-1),$$
$$g_r \geqq 0$$

unterworfen werden. Nun ist die Anzahl der Lückenzahlen r-ter Stufe, die einem Abschnitt der Länge $2P_\varrho$ angehören, nicht größer als die Anzahl der Lückenzahlen ϱ-ter Stufe des Abschnitts, also als $P_\varrho^{(1)}$. Folglich liegen in einem Abschnitt der Länge $2\sigma_k$ höchstens

$$(24)\qquad \tau_k = \sum_{\varrho=0}^{r} g_\varrho \cdot P_\varrho^{(1)} \qquad (P_0^{(1)} = 1)$$

Lückenzahlen r-ter Stufe, und eine Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ des Gewichtes $2\sigma_k$ kann höchstens $\tau_k - 1$ Glieder enthalten.

Statt die Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ zu zerlegen, kann man die zugehörige Folge von Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ erweitern, nämlich die neuen Teilsummen hinzufügen, die bei den zerlegten Differenzenfolgen auftreten. Die erste Einschubzahl $2\varepsilon_1$ muß positiv, kleiner als das Gewicht $2\sigma_k$ und verschieden von den schon vorhandenen Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ sein. Ihr Platz in der Reihe der Teilsummen wird durch die Ungleichheiten $2\sigma_\lambda < 2\varepsilon_1 < 2\sigma_{\lambda+1}$ bestimmt. Die zweite Einschubzahl $2\varepsilon_2$ muß außerdem von $2\varepsilon_1$ verschieden sein, und so geht es weiter. Schließlich erhält man eine erweiterte Folge von Teilsummen $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu)$; sie kann höchstens τ_k Glieder enthalten. Der Gesamtheit der Zerlegungen einer Folge $(2\delta_\varkappa)$, diese eingeschlossen, entspricht auf diese Art die Gesamtheit der erweiterten Teilsummen, die ursprüngliche Folge von Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ eingeschlossen.

Wenn die Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ auf der r-ten Stufe unzerlegbar ist, so gibt es für jede Einschubzahl 2ε mindestens eine Primzahl p_ϱ aus der Reihe $3, 5, \ldots, p_r$, bei der die Reste der erweiterten Folge $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon)$ ein volles Restsystem ausmachen. Hierin liegt, daß diese Primzahl p_ϱ für die ursprüngliche Folge $(2\delta_\varkappa)$ Maximalcharakter besaß. Maximalcharakter tragen aber nur solche Primzahlen, die $\leqq k+2$ sind, mithin ist wegen der Ungleichheit (6) $\varrho \leqq R+1$. Man hat daher die Sätze:

Lehrsatz XV. *Falls eine Differenzenfolge auf einer gewissen Stufe unzerlegbar ist, so bleibt sie auf der nächsthöheren Stufe unzerlegbar oder sie wird unzulässig.*

Lehrsatz XVI. *Falls eine Differenzenfolge auf der $(R+1)$-ten Stufe zerlegbar ist, so bleibt sie es auf allen folgenden Stufen.*

Als Beispiel einer Folge, die auf einer gewissen Stufe zerlegbar ist, aber beim Übergang auf die nächsthöhere Stufe unzerlegbar wird, sei die Folge (2, 4, 6, 2) angeführt. Sie gestattet auf der ersten Stufe die Zerlegung (2, 4, 2, 4, 2), sie wird aber auf der zweiten Stufe unzerlegbar, weil die Folge (2, 4, 2, 4, 2) für diese Stufe unzulässig ist. Mithin ist die *beständige* Folge (2, 4, 6, 2) von der zweiten Stufe ab unzerlegbar.

§ 8. Anzahl der Lückenzahlabschnitte mit gegebener Urfolge.

Die Erklärung der unzerlegbaren Folgen liefert sofort den Beweis für den Satz:

Lehrsatz XVII. *Die Anzahl der im Hauptabschnitt beginnenden Lückenzahlabschnitte mit einer gegebenen unzerlegbaren Urfolge ist gleich der betreffenden h-Funktion.*

Für zerlegbare Urfolgen läßt sich zeigen, daß die Anzahl $u_r\,(2\sigma'_\varkappa)$ der im Hauptabschnitt beginnenden Lückenzahlabschnitte r-ter Stufe durch die h-Funktionen ausgedrückt werden kann, die zu der gegebenen Folge und ihren Zerlegungen gehören. Es ist indessen nützlich, die Fragestellung zu verallgemeinern. Die herzuleitenden Formeln bleiben nämlich in Kraft, wenn die Anfangszahlen der Lückenzahlfolgen irgendeinem Abschnitt von ganzen Zahlen entnommen werden, etwa dem Abschnitt, der von n_1 (eingeschlossen) bis n_2 (ausgeschlossen) reicht. An die Stelle der Zeichen $h_r(2\sigma_\varkappa)$ und $u_r\,(2\sigma'_\varkappa)$ mögen dann die Zeichen $H_r\,(2\sigma_\varkappa)$ und $U_r\,(2\sigma'_\varkappa)$ treten. Den Abschnitt ersichtlich zu machen, ist in diesem Paragraphen noch nicht nötig, weil er im Laufe der folgenden Untersuchungen beibehalten wird. Später, wenn mehrere Abschnitte gleichzeitig betrachtet werden, sollen die Zeichen $H_r^{(2\sigma_\varkappa)}\,(n_2 : n_1)$ und $U_r^{(2\sigma_\varkappa)}\,(n_2 : n_1)$ angewandt werden.

Lehrsatz XVIII. *Jede H-Funktion r-ter Stufe ist gleich der Summe der U-Funktionen r-ter Stufe, die zur Gesamtheit der erweiterten Teilsummen der H-Funktion gehören.*

Beweis. Die Lückenzahlfolge r-ter Stufe $(v_r + 2\sigma_\varkappa)$ liegt in dem Lückenzahlabschnitt, der mit v_r beginnt und mit $v_r + 2\sigma_k$ endet. Die Folge entsteht aus dem Abschnitt, indem gewisse Lückenzahlen, etwa $v_r + 2\varepsilon_1$, $v_r + 2\varepsilon_2$, $\ldots$, $v_r + 2\varepsilon_\nu$ übersprungen werden; der Abschnitt besitzt dann die Teilsummen $(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu)$. Die Gesamtheit der Lückenzahlfolgen, deren Anfangsglieder dem Abschnitt $(n_2 : n_1)$ angehören und denen die Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ zukommt, läßt sich in Klassen teilen, die durch die Anzahl der übersprungenen Lückenzahlen gekennzeichnet sind. Als Anzahl der Folgen der Klasse (ν) erhält man die Summe $\Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu)$, die über alle Verbindungen von Einschubzahlen $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2, \ldots$ zu je ν zu erstrecken ist; weil das Zeichen $U_r(2\sigma'_\lambda)$ den Wert Null hat, falls die Folge $(2\sigma'_\lambda)$ keine Urfolge ist, darf man auch sagen, daß die Summe über alle Verbindungen zu je ν zu erstrecken ist, die aus geraden Zahlen kleiner als das Gewicht $2\sigma_k$ gebildet werden können. Nunmehr entspringt durch Summation über alle Werte von ν die zu beweisende Formel

$$H_r(2\sigma_\varkappa) = U_r(2\sigma_\varkappa) + \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) + \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) + \ldots \\ \ldots + \Sigma U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu) + \ldots\ldots \tag{25}$$

Auf der rechten Seite hat man so weit zu gehen, bis die unzerlegbaren Folgen des Gewichtes $2\sigma_k$ erreicht sind.

Für jede Folge von Teilsummen, die in der Gleichung (25) vorkommt, läßt sich eine ähnliche Gleichung aufstellen:

$$H_r(2\sigma'_\lambda) = U_r(2\sigma'_\lambda) + \Sigma U_r(2\sigma'_\lambda, 2\varepsilon'_1) + \Sigma U_r(2\sigma'_\lambda, 2\varepsilon'_1, 2\varepsilon'_2) + \ldots \\ \ldots + \Sigma U_r(2\sigma'_\lambda, 2\varepsilon'_1, 2\varepsilon'_2, \ldots, 2\varepsilon'_\nu) + \ldots, \tag{26}$$

und so geht es fort, bis zu den unzerlegbaren Folgen, bei denen die H-Funktionen gleich den entsprechenden U-Funktionen sind; bei ihnen gibt es nur die eine Klasse (0).

Wenn man die Reihe der so erhaltenen Gleichungen rückwärts durchläuft, so lassen sich die darin auftretenden U-Funktionen durch H-Funktionen ausdrücken, und schließlich wird $H_r(2\sigma_\varkappa)$ eine lineare, homogene, ganzzahlige Funktion derjenigen H-Funktionen, deren Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ und die daraus durch Erweiterung hervorgegangenen Teilsummen sind. Ein Beispiel wird das deutlich machen.

Von der zweiten Stufe ab bestehen die Gleichungen

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} H_r(8) = U_r(8) + [U_r(2, 6) + U_r(6, 2)] + U_r(2, 4, 2); \\ H_r(2, 6) = U_r(2, 6) + U_r(2, 4, 2), \ H_r(6, 2) = U_r(6, 2) + U_r(2, 4, 2); \\ H_r(2, 4, 2) = U_r(2, 4, 2). \end{cases}$$

Aus ihnen erhält man durch Auflösung:

$$U_r(2, 4, 2) = H_r(2, 4, 2);$$
$$U_r(2, 6) = H_r(2, 6) - H_r(2, 4, 2), \ U_r(6, 2) = H_r(6, 2) - H_r(2, 4, 2);$$
$$U^{\text{ı}}(8) = H_r(8) - [H_r(2, 6) + H_r(6, 2)] + H_r(2, 4, 2).$$

Allgemein gilt der Satz:

Lehrsatz XIX. Jede U-Funktion r-ter Stufe ist eine lineare, homogene Funktion der H-Funktionen r-ter Stufe, die zur Gesamtheit der erweiterten Teilsummen der U-Funktion gehören, nämlich:

$$U_r(2\sigma_\varkappa) = H_r(2\sigma_\varkappa) - \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) + \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) \\ - \Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3) + \ldots \\ \ldots + (-1)^\nu H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu) + \ldots \tag{27}$$

Beweis. Auf der rechten Seite mögen für die H-Funktionen ihre Ausdrücke durch U-Funktionen nach den Gleichungen (26) eingesetzt werden. Die U-Funktionen geben jedesmal an, wieviel Lückenzahlfolgen mit den Differenzen $(2\delta'_\lambda)$ vorhanden sind, bei denen die zu ihren Einschubzahlen gehörenden Lückenzahlen übersprungen werden. Die Anzahl $U_r(2\sigma_\varkappa)$, die angibt, bei wievielen Folgen keine Lückenzahl übersprungen wird, findet sich nur in dem Ausdruck für die Funktion $H_r(2\sigma_\varkappa)$. Dagegen sind die Anzahlen $U_r(2\sigma'_\lambda)$ auf der rechten Seite mehrmals vorhanden. Die Anzahl $U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon', 2\varepsilon'', \ldots, 2\varepsilon^{(\nu)})$ findet sich einmal in dem Ausdruck für $H_r(2\sigma_\varkappa)$. Unter den U-Funktionen, die aus der Summe $\Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)$ entspringen, kommt sie ν-mal vor, denn jede der ν Zahlen $2\varepsilon', 2\varepsilon'', \ldots, 2\varepsilon^{(\nu)}$ kann als Einschubzahl $2\varepsilon_1$ gewählt werden. In der folgenden Summe $\Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ kann für die Einschubzahlen $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$ irgendein Paar der Zahlen $2\varepsilon', 2\varepsilon'', \ldots, 2\varepsilon^{(\nu)}$ genommen werden, mithin kommt die Funktion $U_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon', 2\varepsilon'', \ldots, 2\varepsilon^{(\nu)})$ darin $\binom{\nu}{2}$-mal vor. So geht es weiter. Die betrachtete U-Funktion ist schließlich in der Summe $\Sigma H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu)$ nur einmal enthalten, nämlich in dem Gliede, bei dem die Einschubzahlen $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu$ mit den Zahlen $2\varepsilon', 2\varepsilon'', \ldots, 2\varepsilon^{(\nu)}$ übereinstimmen. Bei Berücksichtigung der Vorzeichen ergibt sich schließlich als Koeffizient der betrachteten U-Funktion

$$1-\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}-\binom{\nu}{3}+\ldots+(-1)^\nu=0,$$

das heißt, es heben sich alle U-Funktionen heraus, bei denen Einschubzahlen auftreten, und es bleibt nur die Funktion $U_r(2\sigma_\varkappa)$ übrig. Was zu beweisen war.

Aus der Gleichung (27) läßt sich eine wichtige Eigenschaft der U-Funktionen herleiten. Nach der Gleichung (14) war von der A-ten Stufe ab

$$h_{r+1}(2\sigma_\varkappa)=h_r(2\sigma_\varkappa)\,.\,(p_{r+1}-k-1).$$

Auch die Funktion $u_{r+1}(2\sigma_\varkappa)$ kann durch u-Funktionen r-ter Stufe dargestellt werden. Damit man die Gleichung (14) auf die h-Funktionen anwenden darf, die in dem Ausdruck für $u_r(2\sigma_\varkappa)$ vorkommen, darf keine der zugehörigen Differenzensummen $(2\sigma'_{\lambda\mu})$ durch eine der Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$ teilbar sein. Bestimmt man also die Zahl B durch die Ungleichheiten

$$p_B \leqq \sigma_k < p_{B+1}, \tag{28}$$

so gilt von der B-ten Stufe ab die Gleichung

$$\begin{aligned}u_{r+1}(2\sigma_\varkappa) &= h_r(2\sigma_\varkappa)\,.\,(p_{r+1}-k-1)-\Sigma h_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)\,.\,(p_{r+1}-k-2)\\ &+\Sigma h_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)\,.\,(p_{r+1}-k-3)+\ldots\\ &+(-1)^\nu\Sigma h_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu)\,.\,(p_{r+1}-k-\nu-1)+\ldots.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist nach der Gleichung (27) gleich

$$\begin{aligned}&u_r(2\sigma_\varkappa)\,.\,(p_{r+1}-k-1)+\Sigma h_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)-2\,.\,\Sigma h_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)+\ldots\\ &\ldots+(-1)^\nu\nu\,.\,\Sigma h_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu)+\ldots,\end{aligned}$$

und hieraus folgt durch wiederholte Anwendung des Lehrsatzes XVIII die Gleichung

$$\begin{aligned}u_{r+1}(2\sigma_\varkappa) &= u_r(2\sigma_\varkappa)\,.\,(p_{r+1}-k-1)+\Sigma u_r(\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1)-\Sigma u_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)+\ldots\\ &\ldots+(-1)^\nu\Sigma u_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_\nu)+\ldots,\end{aligned} \tag{29}$$

so daß schließlich die u-Funktion $(r+1)$-ter Stufe durch lauter u-Funktionen r-ter Stufe ausgedrückt ist.

Die Gleichung (29) kann schon auf früheren Stufen richtig sein, in jedem Falle aber besteht sie von der B-ten Stufe ab. Ist sie für irgendeine Stufe r richtig, die mindestens gleich A ist, so hat sie in Wirklichkeit eine einfachere Gestalt. Nach § 6 kann von der A-ten Stufe ab immer nur ein Paar Urdifferenzen beim Übergang zur nächsthöheren Stufe verschmelzen, das heißt, man kann der Folge der Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ höchstens eine Einschubzahl hinzufügen. Mithin haben die u-Funktionen, bei denen mehr als eine Einschubzahl vermerkt ist, den Wert Null, und die Gleichung für $u_{r+1}(2\sigma_\varkappa)$ lautet:

$$u_{r+1}(2\sigma_\varkappa)=u_r(2\sigma_\varkappa)\,.\,(p_{r+1}-k-1)+\Sigma u_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1). \tag{30}$$

Zum Schluß dieses Kapitels sollen noch für die Gewichte von 2 bis 12 die Ausdrücke für die h- und u-Funktionen mitgeteilt werden. Von zwei Folgen, die durch Umkehrung der Ordnung ineinander übergehen, ist immer nur die eine angegeben, weil die zugehörigen h- und u-Funktionen übereinstimmen. Bei jeder h-Funktion findet man die Stufenzahl A angegeben, von der ab der allgemeine Ausdruck in Kraft tritt, bei jeder u-Funktion die Stufenzahl a, von der ab die betreffende Urfolge auftritt. Für die späteren numerischen Anwendungen sind noch die Werte der Zeichen P_r, $P_r^{(1)}$, ..., $P_r^{(5)}$ bei den ersten 7 Stufen angegeben worden.

Die ersten h- und u-Funktionen

Gewicht	Differenzenfolge	Teilersummen	R	A	h-Funktion	a	u-Funktion
2	2	0, 2	0	0	$P_r^{(2)}$	1	$P_r^{(2)}$
4	4	0, 4	0	0	$P_r^{(2)}$	1	$P_r^{(2)}$
6	2, 4	0, 2, 6	1	1	$P_r^{(3)}$	1	$P_r^{(3)}$
	6	0, 6	0	1	$2P_r^{(2)}$	2	$2P_r^{(2)}-2P_r^{(3)}$
8	2, 4, 2	0, 2, 6, 8	1	1	$P_r^{(4)}$	1	$P_r^{(4)}$
	2, 6	0, 2, 8	1	1	$P_r^{(3)}$	2	$P_r^{(3)}-P_r^{(4)}$
	8	0, 8	0	0	$P_r^{(2)}$	3	$P_r^{(2)}-2P_r^{(3)}+P_r^{(4)}$
10	4, 2, 4	0, 4, 6, 10	1	2	$2P_r^{(4)}$	1	$2P_r^{(4)}$
	4, 6	0, 4, 10	1	2	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}$	2	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}-2P_r^{(4)}$
	10	0, 10	0	2	$\frac{4}{3}P_r^{(2)}$	3	$\frac{4}{3}P_r^{(2)}-3P_r^{(3)}+2P_r^{(4)}$
12	2, 4, 2, 4	0, 2, 6, 8, 12	2	2	$P_r^{(5)}$	1	$P_r^{(5)}$
	2, 4, 6	0, 2, 6, 12	1	2	$2P_r^{(4)}$	2	$2P_r^{(4)}-P_r^{(5)}$
	2, 6, 4	0, 2, 8, 12	1	2	$2P_r^{(4)}$	2	$2P_r^{(4)}-P_r^{(5)}$
	4, 2, 6	0, 4, 6, 12	1	1	$P_r^{(4)}$	2	$P_r^{(4)}-P_r^{(5)}$
	2, 10	0, 2, 12	1	2	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}$	3	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}-4P_r^{(4)}+P_r^{(5)}$
	4, 8	0, 4, 12	1	1	$P_r^{(3)}$	3	$P_r^{(3)}-3P_r^{(4)}+P_r^{(5)}$
	6, 6	0, 6, 12	1	1	$2P_r^{(3)}$	3	$2P_r^{(3)}-6P_r^{(4)}+2P_r^{(5)}$
	12	0, 12	0	1	$2P_r^{(2)}$	4	$2P_r^{(2)}-7P_r^{(3)}+10P_r^{(4)}-2P_r^{(5)}$

Werte der Zeichen P_r, $P_r^{(1)}$, ..., $P_r^{(5)}$

r	p_r	P_r	$P_r^{(1)}$	$P_r^{(2)}$	$P_r^{(3)}$	$P_r^{(4)}$	$P_r^{(5)}$
1	3	3	2	1	—	—	—
2	5	15	8	3	2	1	—
3	7	105	48	15	8	3	2
4	11	1 155	480	135	64	21	12
5	13	15 015	5 760	1 485	640	189	96
6	17	255 255	92 160	22 275	8 960	2 457	1 152
7	19	4 849 845	1 658 880	378 675	143 360	36 855	16 128

Kapitel II: Summen von Lückenzahlen.

§ 1. Die Darstellung gerader Zahlen als Summen von Lückenzahlen.

Gegeben seien zwei $(k+1)$-gliedrige Lückenzahlfolgen r-ter Stufe mit derselben symmetrischen Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$, etwa die Folgen $(v_r+2\sigma_\varkappa)$ und $(w_r+2\sigma_\varkappa)$. Schreibt man die zweite in umgekehrter Ordnung: $(w_r+2\sigma_{k-\varkappa})$ und addiert die entsprechenden Glieder beider Folgen, so haben nach Gleichung (8) Seite 10 die Summen $v_r+w_r+2\sigma_\varkappa+2\sigma_{k-\varkappa}$ den gemeinsamen Wert $v_r+w_r+2\sigma_k$. Man erhält demnach eine $(k+1)$-fache Darstellung der geraden Zahl $2n=v_r+w_r+2\sigma_k$ als Summe mittels Lückenzahlen r-ter Stufe, denen dieselbe k-gliedrige symmetrische Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ zukommt.

Bei den folgenden Untersuchungen werden nur solche Darstellungen einer geraden Zahl $2n$ als Summe betrachtet, bei denen die beiden Summanden positiv sind, so daß es sich um Summen im eigentlichen Sinne des Wortes handelt.

Die Anzahl der $(k+1)$-fachen Darstellungen der geraden Zahl $2n$ als Summe mittels Lückenzahlfolgen r-ter Stufe, denen die Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ zukommen, werde mit $G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ bezeichnet, und zwar sollen Darstellungen, bei denen v_r von w_r verschieden ist, als verschieden angesehen werden, so daß ein solches Paar v_r, w_r von Anfangszahlen zweimal zählt, während Darstellungen, bei denen v_r gleich w_r ist, nur einmal zählen.

Es gibt symmetrische Differenzenfolgen, bei denen nicht alle geraden Zahlen Darstellungen der verlangten Art zulassen. Hat nämlich die Folge $2l-1$ Glieder, so sind die Lückenzahlen $m_r\mp(\delta_l+2\tau_\lambda)$ und $m'_r\pm(\delta_l+2\tau_\lambda)$ zu addieren, und es wird $2n=m_r+m'_r$. Nach dem Lehrsatz VII sind aber die Mitten m_r und m'_r durch die Primzahlen teilbar die in bezug auf die Folge Maximalcharakter tragen. Mithin müssen von der R-ten Stufe, ab alle darstellbaren Zahlen durch das Produkt Q aller Primzahlen q, q', q'', ... von Maximalcharakter teilbar sein.

Lehrsatz XX. Die Bestimmung der G-Funktionen läßt sich auf die Bestimmung von H-Funktionen zurückführen, es ist nämlich

$$G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)=H_r^{(2\sigma_\varkappa,\,2n+2\sigma_\varkappa)}(-2\sigma_k;\ -2n-2\sigma_k). \tag{31}$$

Beweis. Wenn die Zahl $2n$ eine $(k+1)$-fache Darstellung als Summe mittels Lückenzahlfolgen r-ter Stufe $(v_r+2\sigma_\varkappa)$ gestattet, so läßt sie sich auch auf $k+1$ Arten als Differenz von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe auffassen. Wenn man nämlich $w'_r=-w_r-2\sigma_k$ setzt, so wird

$$2n=(v_r+2\sigma_\varkappa)-(w'_r+2\sigma_\varkappa).$$

Die zweite Folge $(w'_r+2\sigma_\varkappa)$ besteht aus negativen Lückenzahlen r-ter Stufe mit den Differenzen $(2\delta_\varkappa)$; diese Zahlen liegen zwischen $-w_r-2\sigma_k$ und $-w_r$, die Grenzen eingeschlossen. Mithin ist jeder der betrachteten $(k+1)$-fachen Darstellungen der Zahl $2n$ eine Folge von $2k+2$ Lückenzahlen r-ter Stufe: $(w'_r+2\sigma_\varkappa,\ v_r+2\sigma_\varkappa)$ zugeordnet, deren Differenzen

$$2\delta_1,\ 2\delta_2,\ \ldots,\ 2\delta_2,\ 2\delta_1,\ 2n-2\sigma_k,\ 2\delta_1,\ 2\delta_2,\ \ldots,\ 2\delta_2,\ 2\delta_1$$

sind; die zugehörigen Teilsummen haben die Werte

$$2\sigma_0,\ 2\sigma_1,\ \ldots,\ 2\sigma_k,\ 2n,\ 2n+2\sigma_1,\ 2n+2\sigma_2,\ \ldots,\ 2n+2\sigma_k.$$

Hat man umgekehrt eine Folge von $2k+2$ Lückenzahlen r-ter Stufe, denen diese Differenzen und Teilsummen zukommen und liegt die Anfangszahl w'_r im Abschnitt $(-2\sigma_k;\ -2n-2\sigma_k)$, so liegt $w_r=-w'_r-2\sigma_k$ zwischen 0 und $2n$, und man erhält eine Darstellung der Zahl $2n$ als Summe der positiven Lückenzahlen $w_r+2\sigma_\varkappa$ und $v_r+2\sigma_\varkappa$. Hieraus ergeben sich alle $k+1$ Darstellungen von $2n$ als Summe mittels der $(k+1)$-gliedrigen Lückenzahlfolgen r-ter Stufe $(v_r+2\sigma_\varkappa)$ und $(w_r+2\sigma_\varkappa)$. Folglich gibt es genau so viele $(k+1)$-fache Darstellungen der verlangten Art, als es $(2k+2)$-gliedrige Lückenzahlfolgen jener Differenzen und Teilsummen gibt, deren Anfangszahlen im Abschnitt $(-2\sigma_k;\ -2n-2\sigma_k)$ liegen.

Um den Beweis zu vollenden, hat man noch einen Punkt klarzustellen. Nach der Erklärung der Anzahl der $(k+1)$-fachen Darstellungen sollten Darstellungen als verschieden angesehen werden, wenn v_r von w_r verschieden ist, dagegen nur einmal zählen, wenn v_r gleich w_r ist. Diese Forderung ist erfüllt. Denn wenn v_r von w_r verschieden ist, so setze man $v'_r = -v_r - 2\sigma_k$. Dann wird

$$2n = (w_r+2\sigma_\varkappa) - (v'_r+2\sigma_\varkappa),$$

und man gelangt zu der $(2k+2)$-gliedrigen Lückenzahlfolge $(v'_r+2\sigma_\varkappa,\ w_r+2\sigma_\varkappa)$, die mit der Lückenzahl $-v_r-2\sigma_k$ beginnt und niemals mit der vorhergehenden Folge $(w'_r+2\sigma_\varkappa,\ v_r+2\sigma_\varkappa)$ zusammenfallen kann.

§ 2. Asymptotische Ausdrücke für die H- und G-Funktionen.

Im Sinne von Dirichlet[1]) heißt eine einfache, leicht zu übersehende Funktion das asymptotische Gesetz einer verwickelteren Funktion, wenn der Quotient beider bei unbegrenzt wachsendem Werte der unabhängigen Veränderlichen der Grenze Eins zustrebt. Es ist bequem, zwei solche Funktionen $f(n)$ und $\varphi(n)$ asymptotisch gleich zu nennen und $f(n) \backsim \varphi(n)$ zu schreiben.

Mit Hilfe der Anzahl $h_r(2\sigma_\varkappa)$ kann ein asymptotischer Ausdruck für die Anzahl $H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2;\ n_1)$ hergeleitet werden. Wenn die Länge des Abschnitts, n_2-n_1, zwischen $x\cdot 2P_r$ und $(x+1)\cdot 2P_r$ liegt, so liegt der Wert der H-Funktion zwischen $x\cdot h_r(2\sigma_\varkappa)$ und $(x+1)\cdot h_r(2\sigma_\varkappa)$. Für große Werte von n_2-n_1, das heißt für Werte, bei denen der Quotient $2P_r:(n_2-n_1)$ klein ist, hat man daher die asymptotische Formel

$$H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2:n_1) \backsim \frac{n_2-n_1}{2P_r}\cdot h_r(2\sigma_\varkappa). \tag{32}$$

Die Forderung, daß der Quotient $2P_r:(n_2-n_1)$ klein sein soll, ist erfüllt, wenn man bei fester Stufenzahl r die Länge des Abschnitts n_2-n_1 unbegrenzt wachsen läßt. Wenn man jedoch, wie es im folgenden notwendig werden wird, auch die Stufenzahl r als veränderlich ansieht, so liegt darin eine Beschränkung der Art, auf die r unendlich werden darf.

Die Form der rechten Seite zeigt, daß für die asymptotischen Werte der H-Funktionen nur die Länge des Bereichs maßgebend ist, daß es also nicht darauf ankommt, wo der Bereich beginnt. Man findet hier eine Eigenschaft der Primzahlen wieder, denn die Anzahl $\pi(n)$ der ungeraden Primzahlen des Abschnitts $(n:1)$, Eins eingeschlossen, wird durch den Ausdruck $n:\log n$ asymptotisch dargestellt, und daher hat man

$$\pi(n_2-n_1) \backsim \pi(n_2)-\pi(n_1),$$

vorausgesetzt, daß n_2-n_1 klein ist gegen n_2.

Für eine Stufenzahl r, die größer als R ist, darf man die Gleichung (13) anwenden und erhält

$$H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(n_2:n_1) \backsim \frac{P_r^{(k+1)}}{2P_r}\,(n_2-n_1)\cdot S_r(2\sigma_\varkappa). \tag{33}$$

[1]) L. Dirichlet, Über die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie, Monatsberichte der Berliner Akademie 1838, S. 13, Werke Bd. I, S. 353.

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist allen $(k+1)$-gliedrigen Lückenzahlfolgen r-ter Stufe gemeinsam. Er ist der Länge des Abschnitts $(n_2 : n_1)$ proportional und soll daher die Wachstumsfunktion r-ter Stufe der $(k+1)$-gliedrigen Lückenzahlfolgen heißen. Dagegen ist der zweite Faktor, die Schwankungsfunktion r-ter Stufe, durch die arithmetische Beschaffenheit der Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ und der daraus entspringenden Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ bedingt. Sobald r den Wert A überschreitet, hat die Schwankungsfunktion den beständigen Wert $S(2\sigma_\varkappa)$.

Die Gleichung (31) ermöglicht es, auch für die G-Funktionen asymptotische Ausdrücke aufzustellen. Man findet sogleich

$$G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \backsim \frac{P_r^{(2k+2)}}{2P_r}\, 2n \cdot S_r(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa). \tag{34}$$

Daß die Teilsummen von der Länge des Bereichs abhängen, tut der Giltigkeit der Formel keinen Eintrag, denn dazu ist nur erforderlich, daß der Quotient $2P_r : 2n$ klein ist. Wohl aber tritt eine Schwierigkeit ein, wenn man die Stufenzahl so weit wachsen lassen will, daß die Schwankungsfunktion beständig wird, denn der Zeiger der größten Primzahl, die in mindestens einer der $2k+2$ Teilsummen $(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ als Teiler enthalten ist, wird jetzt von $2n$ abhängig, und es fragt sich, ob die Bedingung, daß $2P_r : 2n$ klein sein soll, für solche Zeiger erfüllt ist. Es wird sich herausstellen, daß es erlaubt ist, in der Gleichung (33) den Zeiger r bei der Schwankungsfunktion wegzulassen, wenn gewisse Voraussetzungen über die Art, wie r und $2n$ gleichzeitig unendlich werden, erfüllt sind. Hierauf kann jedoch erst eingegangen werden, nachdem die Eigenschaften der Schwankungsfunktionen $S_r(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ genauer untersucht sind, und das wird die Aufgabe der folgenden Paragraphen sein.

§ 3. Die Schwankungsfunktionen der einfachsten G-Funktionen.

Die Schwankungsfunktion $S_r(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ ist aus den Multiplikatoren erster und zweiter Art zusammengesetzt. Aus den Gleichungen (17′) und (18′) ergibt sich für den vorliegenden Fall:

$$M_1(p') = p' - Z(p') - 1 \qquad (p' < 2k+2); \tag{35}$$

$$M_2(p'') = \frac{p'' - Z(p'') - 1}{p'' - 2k - 2} = 1 + \frac{2k+1-Z(p'')}{p''-2k-2} \qquad (p'' > 2k+2). \tag{36}$$

Die Funktion $Z(p)$ bezieht sich auf das Dreieck der Differenzensummen, das zu den Teilsummen $(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ gehört. Der allgemeinen Untersuchung sollen, damit man ersieht, worauf es ankommt, einige Beispiele vorausgeschickt werden.

I. **Einfache Darstellungen der geraden Zahlen als Summen mittels Lückenzahlen.** Die Lückenzahlfolgen, die zur Darstellung benutzt werden, sind hier die Lückenzahlen selbst, und es wird $2n = v_r + w_r$. Weil $k = 0$ ist, hat man als Wachstumsfunktion r-ter Stufe

$$W_r^{(1)}(2n) = \frac{P_r^{(2)}}{2P_r}\, 2n.$$

Für die Folge von Teilsummen $(0, 2n)$ gibt es keine Primzahlen erster Art, vielmehr sind alle ungeraden Primzahlen 3, 5, 7, ... zweiter Art. Das Dreieck der Differenzensummen besteht aus der einzigen Zahl $2n$. Mithin ist $Z(p'') = 0$, falls p'' ein Teiler von $2n$ ist, $Z(p'') = 1$, falls es kein Teiler ist. Im zweiten Fall ist die Primzahl p'' unwirksam, im ersten wird

$$M_2(p'') = \frac{p''-1}{p''-2}.$$

Im besonderen ist die beständige Wachstumsfunktion

$$S(0, 2n) = \prod \frac{p-1}{p-2};$$

das Produkt ist über sämtliche ungerade Primteiler von $2n$ zu erstrecken.

II. Zwillingsdarstellungen der geraden Zahlen. So sollen die Darstellungen der geraden Zahlen heißen, bei denen zur Bildung der Summen die Lückenzahlpaare der Differenz 2 oder die Lückenzahlzwillinge benutzt werden. Jetzt wird

$$2n = v_r + (w_r + 2) = (v_r + 2) + w_r.$$

Weil $k = 1$ ist, erhält man als Wachstumsfunktion r-ter Stufe

$$W_r^{(3)}(2n) = \frac{P_r^{(4)}}{2P_r} 2n.$$

Für die Folge von Teilsummen $(0, 2, 2n, 2n+2)$ ist Primzahl erster Art nur 3, alle übrigen ungeraden Primzahlen sind zweiter Art. Das Dreieck der Differenzensummen wird

2	$2n$	$2n+2$
	$2n-2$	$2n$
		2

Wenn $2n$ durch 3 teilbar ist, hat man $Z(3) = 1$, also $M_1(3) = 1$; wenn $2n$ nicht durch 3 teilbar ist, hat entweder $2n-2$ oder $2n+2$ den Teiler 3, und es wird $Z(3) = 2$, also $M_1(3) = 0$. Hieraus folgt, daß nur die durch 6 teilbaren Zahlen Zwillingsdarstellungen zulassen. Man hätte das von vornherein sagen können, denn 3 trägt Maximalcharakter für die Differenzenfolge (2).

Ebenso leicht findet man für die Primzahlen zweiter Art,

wenn $2n$ den Teiler p'' hat, $Z(p'') = 1$, $M_2(p'') = \frac{p''-2}{p''-4}$;

wenn $2n-2$ oder $2n+2$ den Teiler p'' hat, $Z(p'') = 2$, $M_2(p'') = \frac{p''-3}{p''-4}$;

wenn weder $2n$ noch $2n \pm 2$ den Teiler p'' haben, $Z(p'') = 3$, $M_2(p'') = 1$.

Demnach sind nur solche Primzahlen zweiter Art wirksam, die als Primteiler bei einer der drei Zahlen $2n$, $2n \pm 2$ auftreten. Zur Bildung der beständigen Schwankungsfunktion $S(0, 2, 2n, 2n+2)$ hat man sämtliche Primteiler der genannten drei Zahlen zu benutzen.

III. Doppelte Darstellungen gerader Zahlen. Zur Bildung der Summen werden Lückenzahlpaare der Differenz 2δ benutzt. Wachstumsfunktion ist wieder $W_r^{(3)}(2n)$, Primzahl erster Art nur 3. Das Dreieck der Differenzensummen wird

2δ	$2n$	$2n+2\delta$
	$2n-2\delta$	$2n$
		2δ

Bei der Primzahl 3 ist zu unterscheiden, ob 2δ durch 3 teilbar ist oder nicht.

1. 2δ ist nicht durch 3 teilbar. Dann ist immer eine und nur eine der drei Zahlen $2n$, $2n \pm 2\delta$ durch 3 teilbar. Ist $2n$ durch 3 teilbar, so wird $M_1(3) = 1$; ist es nicht durch 3 teilbar, $M_1(3) = 0$. Mithin gestatten nur die durch 6 teilbaren Zahlen die

4*

gewünschte Darstellung, im Einklang damit, daß 3 für die Differenzenfolge (2δ), wenn 2δ nicht durch 3 teilbar ist, Maximalcharakter trägt.

2. 2δ **ist durch 3 teilbar.** Ist dann auch $2n$ durch 3 teilbar, so wird $M_1(3)=2$, ist es nicht durch 3 teilbar, $M_1(3)=1$. Die durch 3 teilbaren geraden Zahlen gestatten also noch einmal soviel Darstellungen der verlangten Art als die nicht durch 3 teilbaren.

Ist die Primzahl zweiter Art p''_2 kein Teiler von 2δ, so wird:

wenn $2n$ durch p'' teilbar ist, $M_2(p'')=\frac{p''-2}{p''-4}$;

wenn eine der beiden Zahlen $2n\pm 2\delta$ durch p'' teilbar ist, $M_2(p'')=\frac{p''-3}{p''-4}$;

wenn weder $2n$ noch $2n+2\delta$ den Teiler p'' haben, $M_2(p'')=1$.

Ist die Primzahl zweiter Art q'' Teiler von 2δ, so wird:

wenn $2n$ durch q'' teilbar ist, $M_2(q'')=\frac{q''-1}{q''-4}$;

wenn $2n$ nicht durch q'' teilbar ist, $M_2(q'')=\frac{q''-2}{q''-4}$.

Demnach sind nur diejenigen Primzahlen zweiter Art wirksam, die als Teiler bei einer der Zahlen 2δ, $2n$, $2n+2\delta$ vorkommen. Zur Bildung der beständigen Schwankungsfunktion $S(0, 2\delta, 2n, 2n+2\delta)$ hat man alle wirksamen Primzahlen zu benutzen.

§ 4. Die Schwankungsfunktion der allgemeinen G-Funktion.

Zur Ermittelung der Schwankungsfunktion $S_r(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ dient das zugehörige Dreieck der Differenzensummen $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$. Wie die Tafel zeigt, besteht es aus zwei Dreiecken von je k Zeilen und Spalten und einem Quadrat von $k+1$ Zeilen und Spalten. Die beiden Dreiecke sind identisch mit dem Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$. Das Quadrat enthält die $(k+1)^2$ Zahlen $2n\pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}$; das Zeichen σ' soll andeuten, daß die Zeiger $\varkappa$, λ über alle Paare $\varkappa\leq\lambda$ zu erstrecken sind, so daß zu den Zahlen $2\sigma_{\varkappa\lambda}$ die Zahlen $2\sigma'_{\varkappa\varkappa}=$ hinzukommen.

Das Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$										
	$2\sigma_1$	$2\sigma_2$	...	$2\sigma_k$	$2n$	$2n+2\sigma_1$	...	$2n+2\sigma_\varkappa$	...	$2n+2\sigma_k$
$2\sigma_0$	$2\sigma_{10}$	$2\sigma_{20}$	...	$2\sigma_{k0}$	$2n$	$2n+2\sigma_{10}$	...	$2n+2\sigma_{\varkappa 0}$	...	$2n+2\sigma_{k0}$
$2\sigma_1$		$2\sigma_{21}$	...	$2\sigma_{k1}$	$2n-2\sigma_{10}$	$2n$	...	$2n+2\sigma_{\varkappa 1}$	...	$2n+2\sigma_{k1}$
....			...	......	....	....	...	....	...	....
$2\sigma_\lambda$			...	$2\sigma_{k\lambda}$	$2n-2\sigma_{\lambda 0}$	$2n-2\sigma_{\lambda 1}$	...	$2n+2\sigma_{\varkappa\lambda}$	...	$2n+2\sigma_{k\lambda}$
....			...	......	....	....	...	....	...	....
$2\sigma_{k-1}$				$2\sigma_{k,\,k-1}$	$2n-2\sigma_{k-1,\,0}$	$2n-2\sigma_{k-1,\,1}$	...	$2n-2\sigma_{k-1,\,\varkappa}$	...	$2n+2\sigma_{k,\,k-1}$
$2\sigma_k$					$2n-2\sigma_{k0}$	$2n-2\sigma_{k1}$	...	$2n-2\sigma_{k\varkappa}$	...	$2n$
$2n$						$2\sigma_{10}$	...	$2\sigma_{\varkappa 0}$	...	$2\sigma_{k0}$
$2n+2\sigma_1$							...	$2\sigma_{\varkappa 1}$	...	$2\sigma_{k1}$
....							...	....	...	....
$2n+2\sigma_{k-1}$										$2\sigma_{k,\,k-1}$

Die Anzahl der Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$, die den Primteiler p nicht enthalten, werde mit $Z(p)$ bezeichnet. Die entsprechende Anzahl für das Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ heiße wie früher $z(p)$. Bei der Bestimmung von $Z(p)$ ist es zweckmäßig, die ungeraden Primzahlen in vier Klassen zu teilen, je nachdem

$$\text{I. } p > n+\sigma_k, \quad \text{II. } 2\sigma_k < p \leqq n+\sigma_k, \quad \text{III. } \sigma_k < p < 2\sigma_k, \quad \text{IV. } p \leqq \sigma_k$$

ist. Wenn man von dem Fall der Zwillingsdarstellungen absieht, der bereits erledigt wurde, kann es Primzahlen erster Art, größer als $2k+2$, nur in der dritten und vierten Klasse geben. Beide Arten zu trennen, wird jedoch erst nötig, wenn man die Multiplikatoren aufstellt.

Erste Klasse. Primzahlen größer als $n+\sigma_k$ sind in keiner Zeile des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ als Teiler enthalten. Mithin ist $Z(p)=2k+1$ und

$$\text{(I)} \qquad M_2(p) = 1 \qquad (p > n+\sigma_k).$$

Solche Primzahlen sind unwirksam.

Zweite Klasse. Primzahlen größer als $2\sigma_k$ sind in keiner Zeile des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ als Teiler enthalten, so daß für sie nur das Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ in Betracht kommt. Die Zahlen des Quadrats liegen zwischen $2n-2\sigma_k$ und $2n+2\sigma_k$, sind also einem Abschnitt von $2\sigma_k+1$ geraden Zahlen entnommen. Weil nun p größer als $2\sigma_k$ ist, so hat höchstens eine der Zahlen $2n \pm 2a$ $(0 \leqq 2a \leqq 2\sigma_k)$ den Teiler p. Gibt es im Quadrat keine solche Zahl, so ist $M_2(p)=1$. Ist $2n$ selbst durch p teilbar, so wird $Z(p)=k$, und man hat

$$M_2(p) = \frac{p-k-1}{p-2k-2}.$$

Ist im Quadrat $2n-2a$ oder $2n+2a$ durch p teilbar, so hat man festzustellen, wie oft die Zahl $2a$ unter den Zahlen $2\sigma_{\varkappa\lambda}$ vorkommt. Jedesmal, wenn die Gleichung $2\sigma_{\varkappa\lambda}=2a$ gilt, erhält man eine Zeile des Quadrats, die eine durch p teilbare Zahl enthält, und nur eine, denn die Zahlen der Zeile sind einem Abschnitt von σ_k+1 geraden Zahlen entnommen. Mithin sind so viele Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ mit dem Primteiler p behaftet, als Differenzensummen im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ gleich $2a$ sind. Um den Fall $2a=0$ zu umfassen, braucht man nur das Dreieck $\Delta'(2\sigma_\varkappa)$ der Zahlen $2\sigma'_{\varkappa\lambda}$ zu betrachten. Wird also die Anzahl der Zahlen dieses Dreiecks, die gleich $2a$ sind, mit $y(2a)$ bezeichnet, so ist $Z(p)=2k+1-y(2a)$. Hieraus folgen für die Multiplikatoren die Gleichungen

$$\text{(II)} \begin{cases} M_2(p) = 1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n \pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p \text{ teilbar ist,} \\ M_2(p) = \dfrac{p+y(2a)-2k-2}{p-2k-2}, \text{ wenn } 2n-2a \text{ oder } 2n+2a \text{ durch } p \text{ teilbar ist.} \end{cases}$$

Man beachte, daß derselbe Multiplikator herauskommt, gleichgiltig, ob $2n-2a$ oder $2n+2a$ den Teiler p besitzt.

Der größte Wert des Multiplikators ergibt sich, wenn $2n$ selbst den Teiler p hat. Dann ist $y(0)=k+1$, wenn aber $2a$ von Null verschieden ist, wird stets $y(2a) \leqq k$. Die obere Schranke k ist verwirklicht, falls alle Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ gleich $2a$ sind. Wie im ersten Kapitel gezeigt wurde, gibt es beständige Folgen dieser Art, und zwar hat man $2a=2P_R$ zu setzen. Es ist leicht zu zeigen, daß nur für Folgen mit lauter gleichen Differenzen $y(2a)=k$ wird.

Dritte Klasse. Auch die Primzahlen der dritten Klasse können im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ nicht als Teiler auftreten. In einer Zeile des Quadrats $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ findet sich eine solche Primzahl höchstens einmal als Teiler. Hat keine der Zahlen $2n \pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}$ den Teiler p, so ist wieder $M_2(p)=1$. Ist $2n$ selbst durch p teilbar, so wird $Z(p)=k$, und man erhält denselben Multiplikator wie bei der zweiten Klasse. Ist $2n-2a$ durch p teilbar, so gilt dasselbe von $2n+(2p-2a)$, und ist $2n+2a$ durch p teilbar, so gilt dasselbe von $2n-(2p-2a)$. Die Zahlen $2n\pm(2p-2a)$ kommen nur in Betracht, wenn $2p-2a$ höchstens gleich $2\sigma_k$ ist. Außer den Zahlen $2n\pm 2a$ können also auch die Zahlen $2n\mp(2p-2a)$ unter den Zahlen $2n\pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}$ vorkommen und den Primteiler p liefern. Damit sind aber auch alle Zahlen erschöpft, die den Teiler p besitzen können. Bedenkt man noch, daß $y(0)=k+1$ und $y(2p)=0$ ist, so wird allgemein $Z(p)=2k+1-y(2a)-y(2p-2a)$, und man hat schließlich

$$(\mathrm{III}_1) \quad M_1(p')=p'+y(2a)+y(2p-2a)-(2k+2) \qquad (p'<2k+2);$$

$$(\mathrm{III}_2) \begin{cases} M_2(p'')=1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n+2\sigma'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p'' \text{ teilbar,} \\ M_2(p'')=\dfrac{p''+y(2a)+y(2p-2a)-2k-2}{p''-2k-2}, \text{ wenn } 2n-2a \text{ oder } 2n+2a \text{ durch} \\ \quad p'' \text{ teilbar ist.} \end{cases}$$

Auch hier macht es keinen Unterschied, ob $2n-2a$ oder $2n+2a$ den Teiler p besitzt.

Vierte Klasse. Wenn $p\leq\sigma_k$ ist, können auch die Zahlen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ den Teiler p enthalten, und man hat daher zuerst die Anzahl $z(p)$ der von p freien Zeilen dieses Dreiecks festzustellen. Dann liefert das untere Dreieck im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ zu $Z(p)$ den ersten Beitrag $z(p)$. Den zweiten Beitrag liefern die ersten $k+1$ Zeilen des Dreiecks. Ist keine der Zahlen $2n\pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}$ durch p teilbar, so ist der zweite Beitrag gleich $z(p)+1$, und es wird $Z(p)=2z(p)+1$. Ist $2n$ selbst durch p teilbar, so ist der zweite Beitrag gleich Null, und es wird $Z(p)=z(p)$. Ist $2n$ nicht durch p teilbar, wohl aber mindestens eine der Zahlen $2n\pm 2\sigma_{\varkappa\lambda}$, so liegt $Z(p)$ zwischen $z(p)$ und $2z(p)+1$, und um den genauen Wert zu ermitteln, hat man die Zahlen des Quadrats $Q(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ auf ihre Teilbarkeit durch p zu untersuchen. In einer Zeile des Quadrats kann jetzt mehr als eine durch p teilbare Zahl vorkommen.

Ähnlich wie für die Multiplikatoren der Schwankungsfunktion $S_r(2\sigma_\varkappa)$ ein für allemal ein großes Dreieck hergestellt wurde, dient zur Bestimmung des Charakters, der dem Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ innewohnt, das große Quadrat. Es enthält oberhalb der von links oben nach rechts unten laufenden Hauptdiagonale das große Dreieck. In der Diagonale steht das Zeichen p und besagt, daß für die betreffenden Felder jede ungerade Primzahl als Teiler (der Null) aufzufassen ist. Das Quadrat wird vervollständigt, indem die Zeilen des großen Dreiecks nach links fortgesetzt werden, so daß in dem Felde mit dem Eingang (2α) der Spalte und (2β) der Zeile, α kleiner als β, die ungeraden Primteiler der Zahl $2\alpha-2\beta$ verzeichnet sind. Hieraus folgt, daß in Feldern, die symmetrisch zur Hauptdiagonale liegen, dieselben Primteiler stehen.

Um das große Quadrat für den Primteiler p auf das gegebene Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$ anzuwenden, denke man sich zuerst alle Zeilen und Spalten jede für sich zugedeckt. Die Zeile $(2\sigma_\lambda)$ enthält in der Spalte $(2\sigma_\varkappa)$ die Primteiler der Zahl $\pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}$. Mithin enthält dieselbe Zeile in der Spalte $(2\sigma_\varkappa+2a)$ die Primteiler der Zahl $\pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}+2a$. Jetzt sei $2n-2a$ durch p teilbar. Um festzustellen, welche der Zahlen

$$2n\pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}=2n-2a+(\pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}+2a)$$

den Teiler p besitzen, hat man demnach die $k+1$ Spalten $(2\sigma_\varkappa+2a)$ aufzudecken, und die Zeilen $(2\sigma_\varkappa)$ freizumachen. Wenn man noch die sichtbaren Zeilen und Spalten aneinander schiebt, so entsteht ein Quadrat von $(k+1)^2$ Feldern, das für die entsprechenden Felder des Quadrats $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ angibt, ob sie den Primteiler p aufweisen oder nicht.

Der Fall, daß $2n+2a$ durch p teilbar ist, läßt sich auf den soeben betrachteten Fall zurückführen, wenn man darauf verzichtet, daß $2a$ kleiner als p sein soll und für $2a$ alle geraden Reste gegen 2 nimmt, oder vielmehr diejenigen geraden Reste, die bei den Zahlen $2\sigma'_{\varkappa\lambda}$ wirklich vorkommen. Man erhält auf diese Art wieder ein Quadrat von $(k+1)^2$ Feldern.

In vielen Fällen ist es nicht erforderlich, die ganzen Quadrate herzustellen. Um nämlich den Beitrag zu ermitteln, den die ersten $k+1$ Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ zur Funktion $Z(p)$ liefern, hat man dem Quadrat $Q(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ noch das Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ hinzuzufügen und darin vermöge des großen Dreiecks die Zahlen $(2\sigma_{\varkappa\lambda})$ durch ihre ungeraden Primteiler zu ersetzen. Dann aber kommen für $Z(p)$ nur diejenigen Zeilen des Quadrats in Betracht, die im Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ von p frei sind. Wenn also etwa sämtliche Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ den Teiler p aufweisen, so genügt es, die $(k+1)$-te Zeile des Quadrats zu berücksichtigen. Nur wenn sämtliche Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ von p frei sind, muß man das volle Quadrat nehmen, hat dann aber mit dem Dreieck nichts mehr zu tun.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich daraus, daß eine Zeile, deren Eingang mit einem der Eingänge der Spalten übereinstimmt, von vornherein weggelassen werden darf, denn an der Kreuzungsstelle steht die Primzahl p.

Endlich ist noch eine einfache Beziehung nützlich, die zwischen den beiden Quadraten besteht, die man erhält, wenn $2n-2a$ und wenn $2n-(2p-2a)$ und damit $2n+2a$ durch p teilbar ist. Fehlt nämlich im ersten Quadrat der Primteiler p in zwei zur Hauptdiagonale symmetrischen Feldern, so fehlt er auch in denselben Feldern des zweiten Quadrats. Ist aber beim ersten Quadrat eines von zwei zur Hauptdiagonale symmetrischen Feldern mit dem Teiler p behaftet, und das andere dann notwendig frei von p, so vertauschen diese im zweiten Quadrat ihre Rolle. Hierin liegt, daß das zweite Quadrat aus dem ersten durch Spiegelung an der Hauptdiagonale erzeugt wird.

Nachdem man die ersten $k+1$ Zeilen des Dreiecks $\Delta(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ auf die angegebene Weise durch eine gewisse Anzahl von Zeilen des Quadrats ersetzt hat, das aus dem großen Quadrat durch Aufdecken von Zeilen und Spalten hervorgegangen ist, muß man abzählen, wie viele Zeilen von p frei sind. Findet man $x(2a, p)$ solcher Zeilen, so wird

$$(\mathrm{IV}_1)\quad \begin{cases} M_1(p') = p' - 2z(p') - 2, & \text{wenn keine der Zahlen } 2n \pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p \text{ teilbar,} \\ M_1(p') = p' - z(p') - x(2a, p') - 1, & \text{wenn } 2n - 2a \text{ durch } p' \text{ teilbar ist;} \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV}_2)\quad \begin{cases} M_2(p'') = \dfrac{p'' - 2z(p'') - 2}{p'' - 2k - 2}, & \text{wenn keine der Zahlen } 2n \pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p \text{ teilbar,} \\ M_2(p'') = \dfrac{p'' - z(p'') - x(2a, p'') - 1}{p'' - 2k - 2}, & \text{wenn } 2n - 2a \text{ durch } p \text{ teilbar ist.} \end{cases}$$

Wie sich die Durchführung im einzelnen gestaltet, soll im nächsten Paragraphen an zwei Beispielen gezeigt werden.

§ 5. Beispiele für die Bestimmung von Schwankungsfunktionen.

I. Die vierfachen Darstellungen der geraden Zahlen als Summen mittels Lückenzahlfolgen der Differenzen (2, 4, 2). Die Folge der Teilsummen ist (0, 2, 6, 8). Bei der Bestimmung der Schwankungsfunktion

$$S_r(0, 2, 6, 8, 2n, 2n+2, 2n+6, 2n+8)$$

sind die Primzahlen erster Klasse größer als $n+4$; sie sind unwirksam. Die Primzahlen zweiter Klasse liegen zwischen 8 und $n+4$, es sind also die Primzahlen 11, 13, 17, ... Nach den Formeln (II) wird

$$M_2(p'')=1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n,\ 2n\pm 2,\ 4,\ 6,\ 8 \text{ durch } p'' \text{ teilbar.}$$

$$M_2(p'')=\frac{p''+y(2a)-8}{p''-8}, \text{ wenn eine dieser Zahlen durch } p \text{ teilbar ist.}$$

Das Dreieck $\Delta'(0, 2, 6, 8)$ wird

0	2	6	8
	0	4	6
		0	2
			0

Demnach wird für

$$2a=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,$$
$$y(2a)=4,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,$$

und man erhält als Multiplikatoren

$$M_2(p'')=\frac{p''-4}{p''-8}, \text{ wenn } 2n \text{ durch } p'' \text{ teilbar,}$$

$$M_2(p'')=\frac{p''-6}{p''-8}, \text{ wenn eine der Zahlen } 2n+2,\ 2n+6 \text{ durch } p'' \text{ teilbar,}$$

$$M_2(p'')=\frac{p''-7}{p''-8}, \text{ wenn eine der Zahlen } 2n+4,\ 2n+8 \text{ durch } p'' \text{ teilbar.}$$

Primzahlen dritter Klasse sind 7 und 5. Sie sind erster Art. Für die Primzahl 7 wird bei

$$2a=0,\ 2,\ 4,\ 6; \quad 14-2a=14,\ 12,\ 10,\ 8$$
$$y(2a)=4,\ 2,\ 1,\ 2; \quad y(14-2a)=0,\ 0,\ 0,\ 1.$$

Folglich ist

$$M_1(7)=3,\ 1,\ 0,\ 2,$$

je nachdem eine der Zahlen $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$ durch 7 teilbar ist; mit $2n\pm 6$ ist von selbst $2n\mp 8$ durch 7 teilbar.

Für die Primzahl 5 wird bei

$$2a=0,\ 2,\ 4; \quad 10-2a=10,\ 8,\ 6$$
$$y(2a)=4,\ 2,\ 1; \quad y(10-2a)=0,\ 1,\ 2.$$

Folglich ist

$$M_1(5)=1,\ 0,$$

je nachdem $2n$ oder eine der Zahlen $2n\pm 2$, $2n\pm 4$ durch 5 teilbar ist.

Primzahl vierter Klasse ist 3. Sie ist erster Art. Man findet sofort $z(3)=1$, weil im Dreieck $\Delta(0, 2, 6, 8)$ die erste und die zweite Zeile mit dem Teiler 3 behaftet sind. Mithin kommen von den Quadraten nur die Zeilen mit den Eingängen 6 und 8 in Betracht. Man erhält

	$2a=0$				$2a=2$				$2a=4$			
	0	2	6	8	2	4	8	10	4	6	10	12
6	3	—	3	—	—	—	—	—	—	3	—	3
8	—	3	—	3	3	—	3	—	—	—	—	—

Hieraus folgt:

$$x(0,\ 3)=0, \qquad x(2,\ 3)=1, \qquad x(4,\ 3)=1.$$

Folglich wird $M_1(3)$ gleich 1 oder 0, je nachdem $2n$ oder eine der Zahlen $2n\pm2$ durch 3 teilbar ist.

Die geforderte Darstellung ist nur möglich, wenn $2n$ durch 3 und durch 5 teilbar ist; man hätte das voraussagen können, weil 3 und 5 in bezug auf die Folge (2, 4, 2) Maximalcharakter tragen. Aus dem Verhalten der Primzahl 7 folgt weiter, daß die Darstellung nur bei den geraden Zahlen der Formen 210ν, $210\nu+30$, 90, 120, 180 gelingt, dagegen nicht bei den Zahlen der Formen $210\nu+60$, 150. Auch dies läßt sich leicht bestätigen, denn von der dritten Stufe ab haben die Anfangszahlen einer Lückenzahlfolge der Differenzen (2, 4, 2) eine der Formen $210\nu+11$, 101, 191, also die Endzahlen eine der Formen $210\nu+19$, 109, 199. Bei der Summation einer Anfangs- und einer Endzahl sind daher nur die angegebenen fünf Fälle möglich.

II. Die fünffachen Darstellungen der geraden Zahlen als Summen mittels Lückenzahlfolgen der Differenzen (6, 12, 12, 6). Die Folge der Teilsummen ist (0, 6, 18, 30, 36). Bei der Bestimmung der Schwankungsfunktion

$$S_r(0,\ 6,\ 18,\ 30,\ 36,\ 2n,\ 2n+6,\ 2n+18,\ 2n+30,\ 2n+36)$$

sind die Primzahlen erster Klasse größer als $n+18$; sie sind unwirksam.

Die Primzahlen zweiter Klasse liegen zwischen 36 und $n+18$. Nach den Formeln (II) wird für $2a=0, 6, 12, 18, 24, 30, 36$:

$$M_2(p'')=1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n\pm2a \text{ durch } p'' \text{ teilbar,}$$

$$M_2(p'')=\frac{p''+y(2a)-10}{p''-10}, \text{ wenn eine der Zahlen } 2n\pm2a \text{ durch } p'' \text{ teilbar.}$$

Aus dem Dreieck $\Delta'(2\sigma_\varkappa)$ ergeben sich für $y(2a)$ der Reihe nach die Werte 5, 2, 2, 2, 1, 2, 1.

Die Primzahlen dritter Klasse sind 19, 23, 29, 31. Sie sind zweiter Art. Zu den angegebenen Werten von $2a$ treten jetzt noch die übrigen geraden Zahlen von 2 bis 34. Für sie ist $y(2a)=0$. Man überzeugt sich leicht, daß im vorliegenden Falle $y(2p-2a)$, falls $y(2a)$ von Null verschieden ist, immer den Wert Null hat. Die Fälle, in denen $y(2p-2a)$ von Null verschieden ausfällt, sind die folgenden:

$$\begin{array}{rccccc|rccccc}
2a= & 8, & 14, & 20, & 26, & 32; & 2a= & 10, & 16, & 22, & 28, & 34\\
y(38-2a)= & 2, & 1, & 2, & 2, & 2; & y(46-2a)= & 1, & 2, & 1, & 2, & 2\\
y(62-2a)= & 0, & 0, & 0, & 1, & 2; & y(58-2a)= & 0, & 0, & 1, & 2, & 1.
\end{array}$$

Nach den Formeln (III) wird jetzt

$$\left\{\begin{array}{l} M_2(p'')=1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n\pm2\sigma'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p'' \text{ teilbar,}\\[1ex] M_2(p'')=\dfrac{p''+y(2a)+y(2p-2a)-10}{p''-10}, \text{ wenn } 2n-2a \text{ oder } 2n+2a \text{ durch } p'' \text{ teilbar ist.}\end{array}\right.$$

Von den Primzahlen vierter Klasse sind erster Art 3, 5, 7, zweiter Art 11, 13, 17. Aus dem Dreieck $\Delta(2\sigma_\varkappa)$ ermittelt man zuerst der Reihe nach $z(p)=0, 2, 4, 4, 4, 4$.

1. $p'=3$. Man findet $x(0,\ 3)=0$, $x(2,\ 3)=1$, $x(4,\ 3)=1$, und daraus $M_1(3)$ gleich 2 oder 1, je nachdem $2n$ durch 3 teilbar ist oder nicht.

2. $p'=5$. Es kommen nur die Zeilen mit den Eingängen 18, 30, 36 in Betracht. Man findet $x(0,\ 5)=0$, $x(2,\ 5)=1$, $x(4,\ 5)=x(6,\ 5)=2$, $x(8,\ 5)=1$. Folglich wird $M_1(5)$ gleich

2, 1, 0, je nachdem $2n$, eine der Zahlen $2n \pm 2$, eine der Zahlen $2n \pm 4$ durch 5 teilbar ist. Die geraden Zahlen der Form $2n = 10\nu \pm 4$ sind demnach von der verlangten Darstellung ausgeschlossen.

3. Die Primzahlen 7, 11, 13, 17 lassen sich gemeinsam behandeln, weil $z(0)$ immer gleich 4 ist. Der Rest Null gibt immer $x(0, p) = 0$. An Stelle der von Null verschiedenen Reste $2a$ kann man ± 6, ± 12, ± 18, ± 24 nehmen. Die Quadrate für die 6 negativen Reste entspringen aus denen für die 6 positiven Reste durch Spiegelung an der Hauptdiagonale. Dabei bleibt die Anzahl der von dem Primteiler p freien Zeilen unverändert, und es ist $x(+2a, p) = x(-2a, p)$. Die Werte der Funktion $x(2a, p)$ sind:

	$x(2a, p)$					
	6	12	18	24	30	36
7	2	1	2	2	1	2
11	3	3	3	4	2	2
13	3	3	3	4	3	4
17	3	3	3	4	3	4

Die Aufstellung der Multiplikatoren geht nunmehr rasch vor sich. Zunächst ist $M_1(7)$ gleich 2, 1, 0, je nachdem $2n$, eine der Zahlen $2n \pm 2$, eine der Zahlen $2n \pm 4$ oder $2n \pm 6$ durch 7 teilbar ist. Mithin entziehen sich die geraden Zahlen der Formen $14\mu \pm 4$ und $14\mu \pm 6$ der gewünschten Darstellung. Nimmt man die Ausnahmezahlen $10\nu \pm 4$ hinzu, so bleiben als darstellbar übrig nur die Zahlen der Formen 70ϱ, $70\varrho \pm 2$, 8, 12, 20, 22, 28, 30. Für die Primzahlen zweiter Art 11, 13, 17 wird

$$\begin{cases} M_2(p'') = 1, \text{ wenn keine der Zahlen } 2n \pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda} \text{ durch } p'' \text{ teilbar,} \\ M_2(p'') = \dfrac{p'' - x(2a, p'') - 5}{p'' - 10}, \text{ wenn eine der Zahlen } 2n \pm 2a \text{ durch } p'' \text{ teilbar.} \end{cases}$$

Um im besonderen die beständige Schwankungsfunktion aufzustellen, hat man sämtliche ungeraden Primteiler der 13 Zahlen $2n$, $2n \pm 6$, 12, 18, 24, 30, 36 zu berücksichtigen.

§ 6. Hauptsatz für die asymptotische Darstellung der G-Funktionen.

In § 2 war für große Werte von $2n$ die asymptotische Formel

$$G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \sim \frac{P_r^{(2k+2)}}{2P_r} 2n \cdot S_r(2\sigma_\varkappa, 2n + 2\sigma_\varkappa) \tag{34}$$

hergeleitet worden; als groß sind solche Werte von $2n$ anzusehen, für die der Quotient $2P_r : 2n$ klein wird. Die Stufenzahl, von der ab die Schwankungsfunktion $S_r(2\sigma_\varkappa, 2n + 2\sigma_\varkappa)$ in die beständige Schwankungsfunktion $S(2\sigma_\varkappa, 2n + 2\sigma_\varkappa)$ übergeht, wird jetzt von der Zahl $2n$ abhängig, und es bedarf, wie in § 2 auseinandergesetzt wurde, einer besonderen Untersuchung, wann es erlaubt ist, das Zeichen S_r durch das Zeichen S zu ersetzen.

Hauptsatz. Wenn $2n$ und r gleichzeitig mit der Maßgabe unbegrenzt wachsen, daß

$$\text{I. } \lim(2P_r : 2n) = 0, \quad \text{II. } \lim(2n : (2P_r)^2) = 0 \text{ oder endlich}$$

ist, so besteht die asymptotische Hauptformel

$$G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \sim \frac{P_r^{(2k+2)}}{2P_r} 2n \cdot S(2\sigma_\varkappa, 2n + 2\sigma_\varkappa).$$

Beweis. 1. Die Bedingungen I. und II. sind miteinander verträglich; sie bestehen, wenn $2P_r$ in bezug auf $2n$ von einer Ordnung unendlich wird, die zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, die Grenze Eins ausgeschlossen.

2. Die beständige Schwankungsfunktion $S(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ unterscheidet sich von der Schwankungsfunktion $S_r(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)$ um einen Zusatzfaktor: dieser ist gleich dem Produkt aller Multiplikatoren, bei denen p größer als p_r ist. Man darf die Stufenzahl von vornherein so hoch annehmen, daß p_r größer als das Gewicht $2\sigma_k$ der Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ ist. Dann gehören die wirksamen Primzahlen p sämtlich der zweiten Klasse an und sind daher als Teiler in den Zahlen $2n \pm 2\sigma'_{\varkappa\lambda}$ enthalten. Mithin ist der Zusatzfaktor nicht größer als das Produkt $\Pi M_2(p)$, erstreckt über alle Primzahlen, die als Teiler in den $2\sigma_k+1$ Zahlen $2n$, $2n \pm 2$, $2n \pm 4, \ldots, 2n \pm 2\sigma_k$ auftreten, und der Beweis des Hauptsatzes ist erbracht, wenn gezeigt werden kann, daß dieses Produkt mit wachsenden Werten von $2n$ und somit auch von r gegen den Grenzwert Eins strebt.

Die Anzahl der Primteiler größer als p_r, die in einer Zahl enthalten sind, ist kleiner als der Exponent der Potenz von p_r, die der Zahl im Fehlbetrage am nächsten kommt. Setzt man also $2n+2\sigma_k = p_r{}^\lambda$, so können in den $2\sigma_k+1$ Zahlen $2n, 2n \pm 2, \ldots, 2n \pm 2\sigma_k$ nicht mehr als $(2\sigma_k+1) . \lambda$ Primteiler größer als p_r stecken. Für jeden solchen Primteiler p ist der zugehörige Multiplikator nach den Formeln (II) höchstens gleich

$$\frac{p-k-1}{p-2k-2} = 1 + \frac{k+1}{p-2k-2} < 1 + \frac{k+1}{p_r-2k-2}.$$

Mithin ist der Zusatzfaktor kleiner als diese Zahl erhoben in die Potenz mit dem Exponenten $(2\sigma_k+1)\cdot\lambda$, und sein natürlicher Logarithmus, weil $\log(1+u)$ für positives u kleiner als u wird, kleiner als

$$\frac{(k+1)\ (2\sigma_k+1)\lambda}{p_r-2k-2} = \frac{(k+1)\ (2\sigma_k+1)\ \log(2n+2\sigma_k)}{(p_r-2k-2)\ \log p_r}.$$

Nach der Bedingung II ist aber $\log(2n)$ asymptotisch nicht größer als $2\log(2P_r)$. Nun ist bekanntlich[1]) $\log(2P_r) \backsim p_r$. Folglich ist der zu untersuchende Ausdruck nicht größer als

$$\frac{(2k+2)\ (2\sigma_k+1)p_r}{p_r-2k-2} \cdot \frac{1}{\log p_r},$$

das heißt, er nähert sich mit wachsenden Werten von r der Grenze Null.

Hiermit ist bewiesen, daß der Zusatzfaktor gegen den Wert Eins konvergiert, und damit die Richtigkeit der Hauptformel nachgewiesen. Der durch die Bedingungen I und II eingeschränkte Grenzübergang gewährt das Mittel, um von der additiven Arithmetik der Lückenzahlen zur additiven Arithmetik der Primzahlen überzugehen.

[1]) Vgl. etwa E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, Leipzig 1909, S. 45.

Zweiter Teil.
Additive Arithmetik der Primzahlen.

Kapitel I: Differenzen von Primzahlen.

§ 1. Lückenzahlen und Primzahlen.

Daß die Lückenzahlen zu den Primzahlen in enger Beziehung stehen, hat sich im vorhergehenden wiederholt gezeigt. Sie waren aus dem Sieb des ERATOTHENES hervorgegangen. Mit ihrer Hilfe ließ sich der Satz, daß die Reihe der Primzahlen unbegrenzt ist, auf naturgemäße Art herleiten; gleichzeitig ergab sich, daß die Differenzen zwischen zwei benachbarten Primzahlen keine endliche obere Grenze haben. Endlich wurde bewiesen, daß in der Reihe der Primzahlen eine gegebene Differenzenfolge nur dann unbegrenzt oft auftreten kann, wenn sie auf jeder Stufe als Differenzenfolge von Lückenzahlen zulässig ist. Somit darf man hoffen, in den Lückenzahlen ein wirksames Mittel zur Förderung der Lehre von den Primzahlen gewonnen zu haben. Freilich ist es nicht erlaubt, Sätze, die für alle Lückenzahlen hinreichend hoher Stufen gelten, ohne weiteres auf Primzahlen zu übertragen, denn bei wachsender Stufenzahl tritt eine Erscheinung ein, die an die Semikonvergenz unendlicher Reihen erinnert. Zwar wächst die Anzahl der Primzahlen, mit denen der Hauptabschnitt r-ter Stufe beginnt, mit der Stufenzahl über alle Grenzen, gleichzeitig aber nähert sich, wie sogleich gezeigt werden soll, die Dichtigkeit der Primzahlen, bezogen auf den Hauptabschnitt, der Grenze Null.

Für diese Dichtigkeit hat man zunächst den Ausdruck

$$d_r = \pi(2P_r) : P_r^{(1)}, \tag{35}$$

worin $\pi(2P_r)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner als $2P_r$ bedeutet. Nun ist $\pi(2P_r) \backsim 2P_r : \log(2P_r)$ und nach einer schon im ersten Teil benutzten Formel $\log(2P_r) \backsim p_r$. Ferner hat MERTENS[1]) bewiesen, daß

$$2P_r : P_r^{(1)} \backsim e^\gamma \cdot \log p_r \tag{36}$$

ist, wo γ die EULER-MASCHERONIsche Konstante $0{,}577\,215\ldots$ bedeutet. Endlich ist $p_r : \log p_r \backsim r$. Folglich wird $d_r \backsim e^\gamma : r$. Was zu beweisen war.

Betrachtet man den Abschnitt der ganzen Zahlen $(2n;\ 1)$, so gilt unter der Voraussetzung, daß $\lim(2P_r : 2n) = 0$ ist, für die Anzahl der Lückenzahlen r-ter Stufe des Abschnitts die asymptotische Formel

$$H_r^{(0)}(2n) \backsim \frac{2n}{2P_r} \cdot h_r(0) \backsim \frac{2n}{2P_r} \cdot P_r^{(1)},$$

und hieraus folgt für die Dichtigkeit $D_r(2n)$ der Primzahlen unter den Lückenzahlen des Abschnitts $(2n:1)$ die Formel

$$D_r(2n) \backsim \frac{2P_r}{P_r^{(1)}} \cdot \frac{\pi(2n)}{2n} \backsim \frac{\log(2P_r)}{\log(2n)} \cdot \frac{e^\gamma}{r}; \tag{37}$$

die rechte Seite hat also den Grenzwert Null.

[1]) F. MERTENS, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Crelle's Journal 78 (1874), S. 53.

Wenn man von den Lückenzahlen zu den Primzahlen übergeht, muß daher die Dichtigkeit der Primzahlen berücksichtigt werden. Wie soll das aber geschehen? Hier ist die Stelle, wo man genötigt ist, den Boden der strengen Beweisführung zu verlassen, wie das gerade in der Zahlentheorie zur Aufstellung neuer Sätze oft und nicht ohne Erfolg geschehen ist.

Das Verfahren, das im folgenden benutzt wird, beruht auf einer Überlegung allgemeiner Art. Gegeben sei eine Reihe von Zahlen, unter denen in regelloser Verteilung gewisse ausgezeichnete Zahlen enthalten sind. Aus der Reihe sollen diejenigen $(k+1)$-gliedrigen Folgen herausgehoben werden, denen eine gewisse Eigenschaft zukommt; ihre Anzahl sei A. Wie viele dieser Folgen bestehen aus $k+1$ ausgezeichneten Zahlen? Wenn D die Dichtigkeit der ausgezeichneten Zahlen bezogen auf die Zahlen der Reihe bedeutet, so wird man bei großen Werten von A nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwarten haben, daß die Anzahl der ausgezeichneten Folgen näherungsweise $A \cdot D^{k+1}$ ist.

Demnach hat man, um aus den asymptotischen Formeln für die Anzahlen von Lückenzahlfolgen r-ter Stufe Formeln für die entsprechenden Anzahlen von Primzahlfolgen herzuleiten, die Lückenzahlformeln mit geeigneten Potenzen der Dichtigkeit der Primzahlen, bezogen auf den betrachteten Abschnitt von Lückenzahlen, zu multiplizieren und darauf die Stufenzahl wachsen zu lassen. Daß die hierdurch gewonnenen asymptotischen Ausdrücke für die H- und G-Funktionen im Gebiete der Primzahlen nur den Wert von Vermutungen beanspruchen dürfen, ist selbstverständlich. Sie verdienen jedoch Beachtung und Vertrauen; denn umfangreiche numerische Prüfungen, über die noch berichtet werden wird, haben ergeben, daß die aus den asymptotischen Formeln berechneten Näherungswerte mit den durch Abzählungen ermittelten wahren Werten gut übereinstimmen.

§ 2. Primzahlfolgen mit gegebenen Differenzen.

Die Anzahl der $(k+1)$-gliedrigen Primzahlfolgen, denen die gegebenen Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ zukommen und deren Anfangszahlen dem Abschnitt $(2n:1)$ angehören, soll mit $H^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ bezeichnet werden. Um dafür einen asymptotischen Ausdruck zu erhalten, hat man den Ausdruck für die Anzahl $H_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ mit der $(k+1)$-ten Potenz der Dichtigkeit der Primzahlen $D_r(2n)$ zu multiplizieren und dann die Stufenzahl wachsen zu lassen.

Man findet zunächst

$$\frac{P_r^{(k+1)}}{2P_r}\, 2n \cdot S_r(2\sigma_\varkappa) \cdot \left(\frac{2P_r}{P_r^{(1)}} \cdot \frac{\pi(2n)}{2n}\right)^{k+1}.$$

Die Teilsummen $(2\sigma_\varkappa)$ sind von r unabhängig, man darf also an die Stelle von $S_r(2\sigma_\varkappa)$ ohne weiteres den beständigen Wert $S(2\sigma_\varkappa)$ setzen. Die Funktion $S(2\sigma_\varkappa)$ soll auch bei den Primzahlen den Namen der **Schwankungsfunktion** führen.

Die übrigbleibenden Faktoren bilden das Produkt

$$\frac{(2P_r)^k P_r^{(k+1)}}{(P_r^{(1)})^{k+1}} \cdot 2n \left(\frac{\pi(2n)}{2n}\right)^{k+1}.$$

Der erste Faktor nähert sich mit wachsenden Werten von r einer bestimmten endlichen Grenze, denn man hat

$$\frac{p_\varrho^k(p_\varrho-k-1)}{(p_\varrho-1)^{k+1}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}k(k+1)p_\varrho^{k-1}+\ldots}{p_\varrho^{k+1}-(k+1)p_\varrho^k+\ldots}.$$

Es möge

$$\lim_{r=\infty} \frac{(2P_r)^k P_r^{(k+1)}}{(P_r^{(1)})^{k+1}} = A_k \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{38}$$

gesetzt werden. Auf die Berechnung und die Eigenschaften der Konstanten A_k soll im nächsten Paragraphen eingegangen werden. Hier mögen nur die numerischen Werte für die ersten 8 Konstanten Platz finden:

$$A_0 = 1,\ A_1 = 1{,}3204,\ A_2 = 2{,}8589,\ A_3 = 4{,}1532,\ A_4 = 10{,}140,$$
$$A_5 = 17{,}319,\ A_6 = 54{,}062,\ A_7 = 148{,}88.$$

In jedem asymptotischen Ausdruck darf ein Faktor, der mit wachsenden Werten der unabhängigen Veränderlichen einem bestimmten, von Null verschiedenen Grenzwert zustrebt, durch den Grenzwert ersetzt werden. Somit tritt an die Stelle der Faktoren, die nach Absonderung der Schwankungsfunktion übriggeblieben sind, die Wachstumsfunktion

$$W^{(k)}(2n) = A_k \frac{\pi^{k+1}(2n)}{(2n)^k}. \tag{39}$$

Sie ist für alle $(k+1)$-gliedrigen Primzahlfolgen dieselbe, während die Schwankungsfunktion durch die arithmetische Beschaffenheit der Teilsummen bedingt wird.

Die Wachstumsfunktion $W^{(k)}(m)$ wird mit m unendlich von der Ordnung $m : \log^{k+1} m$. Wie stark sich der Einfluß des Nenners bemerkbar macht, erkennt man aus folgender Tafel.

	Werte der Wachstumsfunktionen			
k	$m = 7919$	$m = 17389$	$m = 27449$	$m = 37814$
0	1000	2000	3000	4000
1	166,74	303,74	432,94	558,72
2	45,59	75,64	102,45	127,97
3	8,36	12,64	16,27	19,67
4	0,257	3,549	4,340	5,079
5	0,056	0,697	0,810	0,918
6	0,0022	0,025	0,027	0,030
7	0,00076	0,0079	0,0083	0,0088

Wenn man die Werte der Wachstumsfunktionen berechnet, so zeigt sich eine Erscheinung, die durch folgendes Beispiel verdeutlicht wird. Man hat für

$m =$	15828	15834	15840	15846	15852	15858	15864
$W^{(3)}(m) =$	12,18	12,16	12,15	12,14	12,12	12,11	12,12

Warum die Wachstumsfunktionen in einzelnen kurzen Bereichen kleine Abnahmen aufweisen können, liegt auf der Hand. Der Nenner m^k ist eine beständig zunehmende Funktion, der Zähler $A_k \pi^{k+1}(m)$ aber bleibt konstant, solange man keine neue Primzahl erreicht. In der Tat ist bei dem Beispiel 15823 eine Primzahl, auf die als nächste erst 15859 folgt. Es empfiehlt sich, die Werte der Wachstumsfunktionen auf ganze Zahlen abzukürzen und die einmal erhaltenen Werte beizubehalten, bis durch Abkürzen eine größere Zahl hervorgeht.

Der asymptotische Ausdruck für die Anzahl $H^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ erscheint nunmehr in der Gestalt

$$H^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \backsim W^{(k)}(2n) \cdot S(2\sigma_\varkappa). \tag{40}$$

Wenn k gleich Null ist, tritt an die Stelle der asymptotischen die wirkliche Gleichheit $H^{(0)}(2n) = \pi(2n)$.

Die Ergebnisse der vorhergehenden Betrachtungen lassen sich zusammenfassen in den

Satz 1. Es ist wahrscheinlich, daß jede beständige Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ in der Reihe der Primzahlen unbegrenzt oft verwirklicht ist, und zwar wird die Anzahl der Primzahlfolgen $(p+2\sigma_\varkappa)$, die zwischen 1 und $2n$ beginnen, asymptotisch dargestellt durch die Formel

$$H^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \backsim A_k \frac{\pi^{k+1}(2n)}{(2n)^k} \cdot S(2\sigma_\varkappa).$$

Die Konstanten A_k haben die Werte

$$A_k = \lim_{r=\infty} \frac{(2P_r)^k P_r^{(k+1)}}{(P_r^{(1)})^{k+1}},$$

und $S(2\sigma_\varkappa)$ ist als beständige Schwaukungsfunktion der Folge $(2\delta_\varkappa)$ eine rationale Zahl, die mindestens gleich Eins wird.

Bei einer Reihe von Beispielen sind die wahren Werte $H^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$, die durch Abzählen ermittelt wurden, mit den berechneten Näherungswerten verglichen worden, und es hat sich eine recht befriedigende Übereinstimmung ergeben. Hierüber wird in den Paragraphen 4 bis 6 berichtet werden.

§ 3. Die Konstanten A_k.

Aus der Erklärung der Konstanten A_k folgt unmittelbar, daß $A_0 = 1$ ist. Weiter wird

$$A_1 = 2 \cdot \prod_{\varrho=1}^{\infty} \frac{p_\varrho(p_\varrho - 2)}{(p_\varrho - 1)^2},$$

und für $k = 2, 3 \ldots$ erhält man nach Gleichung (12):

$$A_k = 2^k \cdot \prod_{\varrho=1}^{R} \frac{p_\varrho^k}{(p_\varrho - 1)^{k+1}} \cdot \prod_{\varrho=R+1}^{\infty} \frac{p_\varrho^k(p_\varrho - k - 1)}{(p_\varrho - 1)^{k+1}}.$$

Die unendlichen Produkte, die in den Ausdrücken für die Konstanten A_k auftreten, konvergieren sehr langsam, und es ist daher notwendig, die Genauigkeit der Näherungsprodukte abzuschätzen. Zu diesem Zweck soll ein einfacher Hilfssatz bewiesen werden.

Vorgelegt sei ein konvergentes Produkt

$$\omega = \prod_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} (1 - u_\varrho) = \omega_r \cdot \prod_{\varrho=r+1}^{\infty} (1 - u_\varrho);$$

die Größen u_ϱ sollen zwischen 0 und 1 liegen und so beschaffen sein, daß

$$\sum_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} u_\varrho = \sum_{\varrho=\varrho_0}^{r} u_\varrho + s_r$$

konvergiert. Dann ist

$$\omega_{r+1} = \omega_r - \omega_r u_{r+1}, \quad \omega_{r+2} = \omega_{r+1} - \omega_{r+1} u_{r+2}, \ldots,$$

mithin wird

$$\omega = \omega_r - \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_{r+\nu} u_{r+\nu+1},$$

und da die Näherungswerte $\omega_{r+\nu}$ beständig abnehmen, ist der Fehler des Näherungswertes ω_r kleiner als $\omega_r \cdot s_r$.

Jetzt sei im besonderen $\varrho_0 = R+1$ und

$$u_\varrho = 1 - \frac{p_\varrho^k(p_\varrho - k - 1)}{(p_\varrho - 1)^{k+1}}.$$

Bringt man den Ausdruck für u_ϱ auf die Gestalt

$$\left(1 + \frac{1}{p_\varrho - 1}\right)^{k+1} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{p_\varrho}\right)^{k+1} - 1 + (k+1)\frac{1}{p_\varrho}\right],$$

so ist der erste Faktor für $\varrho > r+1$ kleiner als für $\varrho = r+1$, während der zweite Faktor nach einer bekannten Formel gleich

$$\tfrac{1}{2} k(k+1) \left(1 - \frac{\vartheta}{p_\varrho}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{p_\varrho^2},$$

also nicht größer als $\frac{1}{2} k(k+1) p_\varrho^{-2}$ ist. Hieraus folgt, daß der Rest s_r kleiner wird als

$$\left(1 + \frac{1}{p_{r+1} - 1}\right)^{k+1} \cdot \tfrac{1}{2} k(k+1) \cdot \sum_{\varrho = r+1}^{\infty} \frac{1}{p_\varrho^2}.$$

Um die unendliche Summe abzuschätzen, möge r bereits so groß gewählt sein, daß p_r größer als 1000 ist. Bei den folgenden Tausendern ist die Anzahl der Primzahlen kleiner als der sechste Teil aller Zahlen des Tausends. Mithin wird

$$\sum_{\varrho = r+1}^{\infty} \frac{1}{p_\varrho^2} < \tfrac{1}{6} \cdot \sum_{p_r+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \tfrac{1}{6} \cdot \sum_{p_r+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu-1)} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{p_{r+1} - 1},$$

und es ist schließlich

$$s_r < \tfrac{1}{12} k(k+1) \cdot \frac{1}{p_{r+1} - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{p_{r+1} - 1}\right)^{k+1}.$$

Es sei zum Beispiel $r = 239$, $p_r = 1499$, $p_{r+1} = 1511$. Man erhält dann die in § 2 angegebenen Näherungswerte der Konstanten A_1 bis A_7, und die Fehler sind kleiner als die Produkte dieser Näherungswerte und der zugehörigen Reste s_r. Die Rechnung ergibt, daß die Fehler der Reihe nach kleiner sind als

0,00015, 0,00095, 0,0028, 0,0012, 0,029, 0,13, 0,47.

Bei der reichlichen Abschätzung wird die Annäherung in Wirklichkeit erheblich größer sein.

Die Konstanten A_k werden sich wohl auch bei anderen Untersuchungen der analytischen Zahlentheorie als nützlich erweisen. Sie gestatten zum Beispiel eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der Formel von Mertens

$$2 P_r : P_r^{(1)} \sim e^\gamma \cdot \log p_r,$$

nämlich die leicht zu beweisende asymptotische Gleichung

$$P_r^{(k+1)} : P_r^{(k+2)} \sim \frac{A_k}{A_{k+1}} \cdot e^\gamma \cdot \log p_r.$$

Eine ähnliche Formel gilt für das asymptotische Verhalten des Quotienten $P_r^{(m)} : P_r^{(n)}$.

§ 4. Die Primzahlpaare gegebener Differenz.

Für die Anzahl der Primzahlpaare der Differenz 2δ, deren Anfangszahlen dem Abschnitt $(2n:1)$ angehören, erhält man aus der Gleichung (40) die asymptotische Formel

$$H^{(0,2\delta)}(2n) \sim A_1 \frac{\pi^2(2n)}{2n} \cdot S(0, 2\delta) \qquad (A_1 = 1{,}3204). \tag{41}$$

Nach der Gleichung (22) wird

$$S(0, 2\delta) = \prod \frac{p-1}{p-2},$$

das Produkt ist über alle ungeraden Primteiler der Differenz 2δ zu erstrecken. Man findet für

$2\delta =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$S(0, 2\delta) =$	1	1	2	1	4/3	2	6/5	1	2	4/3	10/9	2	12/11	6/5	8/3.

Primzahlpaare der Differenz 2 sollen als **Primzahlzwillinge** bezeichnet werden. Ihr häufiges Vorkommen scheint schon früh die Aufmerksamkeit der Mathematiker erregt zu haben, und es ist wiederholt die Vermutung ausgesprochen worden, die Reihe der Primzahlzwillinge sei unbegrenzt. Um Aufschluß darüber zu erhalten, in welchem Maße die Dichtigkeit der Primzahlzwillinge abnimmt, wenn man in der Reihe der Zahlen weitergeht, hat Glaisher umfangreiche Abzählungen ausgeführt[1]), und zwar in Abschnitten von je 100 000 Zahlen. Die Vergleichung seiner Ergebnisse mit den Näherungswerten der Funktion $H^{(0,2)}(2n)$ läßt eine recht befriedigende Übereinstimmung erkennen.

$2n$	$\pi(2n)$	Berechnet[2])	Differenz	Gezählt	Fehler
1 000 000	78 498	8 136			
1 100 000	85 714	8 819	683	725	+42
2 000 000	148 933	14 644			
2 100 000	155 805	15 263	619	644	+25
6 000 000	412 849	37 509			
6 100 000	419 246	38 046	537	545	+ 8
7 000 000	476 648	42 855			
7 100 000	483 015	43 388	533	525	− 8
8 000 000	539 777	48 089			
8 100 000	546 024	48 601	512	518	+ 6

Die Werte der Funktion $\pi(2n)$, die zur Berechnung der Näherungswerte der Anzahl $H^{(0,2)}(2n)$ gebraucht werden, sind der Zusammenstellung entnommen, die man Bertelsen[3]) verdankt.

Davis hat die ersten 99 Primzahlen angegeben, die auf 100 000 000 folgen[4]); die größte ist 100 001 699. Nach Bertelsen ist

$$\pi(90\,000\,000) = 5\,216\,954,\quad \pi(100\,000\,000) = 5\,761\,455;$$

man hätte danach bei einem Abschnitt von 1699 Zahlen in der Gegend um 10^8 etwa 93 Primzahlen zu erwarten gehabt. Unter den 99 Primzahlen sind 10 Zwillinge vorhanden. Nach den asymptotischen Formeln wird

$$H^{(0,2)}(100\,000\,000) = 438\,298,\qquad H^{(0,2)}(100\,001\,699) = 438\,306,$$

so daß die Differenz 8 beträgt. Die Übereinstimmung ist besser, als man bei der unregelmäßigen Verteilung der Primzahlzwillinge erhoffen durfte; wechselt doch nach Glaisher zwischen 2 000 000 und 2 100 000 die Zahl der Zwillinge im Tausend zwischen 1 und 16.

Im Jahre 1915 hat Brun[5]) eine asymptotische Formel für die Anzahl der Primzahlzwillinge des Abschnitts $(2n:1)$ hergeleitet, indem er die Zwillinge, die zwischen $\sqrt{2n}$ und $2n - \sqrt{2n}$ liegen, durch ein Siebungsverfahren ermittelte und daraus Schlüsse zog, die freilich, wie er selbst hervorhebt, keinen Anspruch auf volle Strenge haben. Seine Formel lautet in der hier angewandten Bezeichnung

$$(42)\qquad H^{(0,2)}(2n) \backsim \varkappa \cdot \frac{2n}{\log^2(2n)};$$

1) J. W. L. Glaisher, An enumeration of prime pairs, Messenger of math. (2) 8 (1878), S. 28.

2) mit teilweiser Unsicherheit in der letzten Stelle.

3) J.-P. Gram, Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers, Acta math. 17 (1893), S. 312—314.

4) N. W. Davis, Les nombres premiers de 100 000 001 à 100 001 699, Journal de math. (2) 11 (1866), S. 188.

5) V. Brun, Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Archiv for Mathematik og naturvidenskab, 24 (1915).

$\varkappa$ bedeutet eine noch zu bestimmende numerische Konstante. Durch eine Überschlagsrechnung, bei der der Wert $H^{(0,2)}(100\,000) = 1\,225$ benutzt wurde, fand Brun für $\varkappa$ den Näherungswert 1,5985. Wenn man aus der Formel (41) mittels desselben Wertes von $2n$ die Konstante A_1 näherungsweise berechnet, ergibt sich als Näherungswert 1,3314, ein Wert, der schon nahe an 1,3204 liegt.

Um die Formel (41) für Primzahlpaare der Differenz 2δ zu prüfen, kann man die daraus entspringende Gleichung

$$\frac{H^{(0,2\delta)}(2n)}{H^{(0,2)}(2n)} \backsim S(0,2\delta) \tag{43}$$

benutzen. Man findet durch Abzählen

$$H^{(0,2)}(43\,051) = 625,\ H^{(0,4)}(43\,051) = 617,\ H^{(0,6)}(43\,051) = 1277.$$

Hieraus folgt

$$S(0,4) \backsim 0,987,\ S(0,6) \backsim 2,04,$$

während die genauen Werte 1 und 2 sind. Weitere Prüfungen dieser Art wären erwünscht.

Waren die Primzahlpaare der Differenz 6 doppelt so häufig als die Primzahlzwillinge, so ist das Verhältnis bei den Primzahlpaaren der Differenz 30 noch größer, nämlich 8/3, und allgemein wird es bei der Differenz $2P_r$ gleich

$$S(0,2P_r) = \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{p_\varrho - 1}{p_\varrho - 2} = \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{(p_\varrho - 1)^2}{p_\varrho(p_\varrho - 2)} \cdot \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{p_\varrho}{p_\varrho - 1}.$$

Der erste Faktor nähert sich nach der Gleichung (38) dem Grenzwert $2 : A_1$, der zweite wird nach der Formel von Mertens asymptotisch gleich $\frac{1}{2} e^{\gamma} \log p_r$. Demnach hat man

$$S(0,2P_r) \backsim \frac{e^{\gamma}}{A_1} \cdot \log p_r \qquad \left(\frac{e^{\gamma}}{A_1} = 1,349\ldots\right), \tag{44}$$

so daß diese Schwankungsfunktion mit wachsender Stufenzahl größer wird als jede gegebene Zahl. Auch für diese besonderen Differenzen 30, 210, ... wären genauere Untersuchungen eine dankbare Aufgabe.

§ 5. Beispiele für Primzahlfolgen.

Wenn es wahr ist, daß jede beständige Differenzenfolge in der Reihe der Primzahlen unbegrenzt oft verwirklicht ist, so eröffnet sich der numerischen Primzahlforschung ein weites und fruchtbares Feld. Ist doch bei den Gewichten

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

die Anzahl der verschiedenen beständigen Folgen

1 1 3 4 4 14 13 16 48 55 50 173.[1])

Als Muster sollen zwei Beispiele behandelt werden.

Die einfachste beständige dreigliedrige Differenzenfolge ist (2, 4, 2). Die zugehörigen Primzahlfolgen lassen sich als diejenigen Paare von Primzahlzwillingen erklären, die möglichst eng zusammenstehen. Die ersten beiden Primzahlvierlinge sind 5, 7, 11, 13 und 11, 13, 17, 19. Um weitere Primzahlvierlinge aus den Primzahltafeln herauszusuchen, kann man den Umstand benützen, daß die gesuchten Folgen unter den Lückenzahlfolgen der Differenzen (2, 4, 2) enthalten sind. Geht man etwa auf die vierte Stufe, so sind die Nichtreste für die Prim-

[1]) Anm. bei der Korrektur: Inzwischen weiter berechnet:

Gewicht	26	28	30	32	34	36
Anzahl d. best. Folgen	148	147	665	580	558	1920.

zahlen 3, 5, 7, 11 der Reihe nach 1; 4; 3, 4, 5; 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10; mithin gibt es 21 charakteristische Restsysteme. Die Anfangszahlen der gesuchten Lückenzahlfolgen, die im Hauptabschnitt liegen, ließen sich in der Form

$$1 + 2a_1 + 6a_2 + 30a_3 + 210a_4$$

darstellen. Mit Hilfe der charakteristischen Reste findet man der Reihe nach $a_1 = 2, a_2 = 1$, $a_3 = 0, 3, 6$ und als zugehörige Werte von a_4:

a_3	a_4						
0	1	2	4	6	7	8	10
3	10	0	2	4	5	6	8
6	8	9	0	2	3	4	6

Mithin werden die 21 Anfangszahlen, wenn man sie der Größe nach ordnet:

101, 191, 221, 431, 521, 611, 821, 851, 941, 1031, 1151, 1271, 1361, 1451, 1481, 1691, 1781, 1871, 2081, 2111, 2201.

Alle weiteren Anfangszahlen entstehen durch wiederholtes Hinzufügen von $2P_4 = 2310$.

Nach den Primzahltafeln gibt es

I. Von 1 bis 100 000 die 38 Vierlinge mit den Anfangszahlen
5, 11, 101, 191, 821, 1 481, 1 871, 2 081, 3 251, 3 461, 5 651, 9 431, 13 001, 15 641, 15 731, 16 061, 18 041, 18 911, 19 421, 21 011, 22 271, 25 301, 31 721, 34 841, 43 781, 51 341, 55 331, 62 981, 67 211, 69 491, 72 221, 77 261, 79 691, 81 041, 82 721, 88 811, 97 841, 99 131;

II. Von 100 001 bis 200 000 die 14 Vierlinge mit den Anfangszahlen
101 111, 109 841, 116 531, 119 119, 122 201, 135 461, 144 161, 157 271, 165 701 166 841, 171 161, 187 631, 194 861, 195 731;

III. Von 200 001 bis 300 000 die 18 Vierlinge mit den Anfangszahlen
201 491, 201 821, 217 361, 225 341, 240 041, 243 701, 247 601, 247 991, 257 861 260 491, 266 681, 268 811, 276 041, 284 741, 285 281, 294 311, 295 871, 299 471;

IV. Von 300 001 bis 400 000 die 17 Vierlinge mit den Anfangszahlen
300 491, 301 991, 326 141, 334 421, 340 931, 346 391, 347 981, 354 251, 358 901, 361 211, 375 251, 388 691, 389 561, 392 261, 394 811, 397 541, 397 751.

Zur Differenzenfolge (2, 4, 2) gehört die Schwankungsfunktion $S(0, 2, 6, 8) = 1$. Die Wachstumsfunktion ist

$$W^{(3)}(m) = A_3 \frac{\pi^4(m)}{m^3} \qquad (A_3 = 4,1532).$$

Die Rechnungen ergeben folgende Werte:

Anzahl der Primzahlvierlinge						
m	$\pi(m)$	Berechnet	Differenz	Gezählt	Differenz	Fehler
100 000	9 592	35		38		+3
			19		14	
200 000	17 984	54		52		−2
			16		18	
300 000	25 997	70		70		±0
			15		17	
400 000	33 860	85		87		+2

Durch die asymptotische Formel wird der wirkliche Verlauf der Funktion $H^{(0,2,6,8)}(m)$ mit überraschender Genauigkeit wiedergegeben.

Zwei Primzahlvierlinge folgen möglichst rasch aufeinander, wenn sie durch die Differenz 22 getrennt sind. Die Differenzenfolge eines solchen Primzahlachtlings hat die Gestalt $(2, 4, 2, 22, 2, 4, 2)$. Die zugehörige Schwankungsfunktion hat, wie im ersten Teil gezeigt worden ist, den Wert 64/33. Als Wachstumsfunktion dient

$$W^{(7)}(m) = A_7 \frac{\pi^8(m)}{m^7} \qquad (A_7 = 148,88).$$

Nun ist nach Bertelsen für

$m =$	1 000 000	2 000 000	3 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000
$\pi(m) =$	78 498	148 933	216 816	644 579	5 761 455	50 847 478,

und hieraus ergeben sich als Näherungswerte der H-Funktion der Reihe nach

0,42 0,55 0,65 0,86 3,51 12,9.

Demnach sind Primzahlachtlinge äußerst selten. Merkwürdigerweise gibt es zwischen 1 000 000 und 3 000 000 schon zwei Achtlinge:

1 006 301 bis 1 006 339 und 2 594 951 bis 2 594 989.

Daß Primzahlachtlinge wirklich vorkommen, bestätigt die Vermutung, daß alle beständigen Folgen in der Reihe der Primzahlen als Differenzenfolgen verwirklicht sind.

§ 6. Primzahlfolgen mit gegebenen Urdifferenzen.

Die Ermittelung der wahren Werte der H-Funktionen ist recht mühsam, sobald man zu größeren Gewichten kommt, weil auch diejenigen Abschnitte des gegebenen Gewichtes berücksichtigt werden müssen, bei denen Primzahlen übersprungen werden. Das zeigt sich schon bei der Frage nach den Primzahlpaaren der Differenz 6; denn die Zahl 6 kann auch als die Summe $2+4$ und $4+2$ erscheinen. Einfacher ist die Bestimmung der wahren Werte der U-Funktionen, für die nur die Differenzen der unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen in Betracht kommen.

Leider verhält es sich mit den asymptotischen Ausdrücken gerade umgekehrt. Hier sind die H-Funktionen leicht zugänglich, während die U-Funktionen Schwierigkeiten machen. Allerdings lassen sich die U-Funktionen durch H-Funktionen ausdrücken. Nach Gleichung (27) war

$$U_r(2\sigma_\varkappa) = H_r(2\sigma_\varkappa) - \sum H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) + \sum H_r(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \ldots;$$

die Folgen von Teilsummen auf der rechten Seite sind durch Erweiterung aus der Folge $(2\sigma_\varkappa)$ entsprungen. Geht man jedoch zu den asymptotischen Ausdrücken über, so wird die H-Funktion einer $(l+1)$-gliedrigen Folge von Teilsummen unendlich von der Ordnung $m : \log^{l+1} m$, mithin läßt sich aus der Gleichung (27) nur schließen, daß

$$U_r(2\sigma_\varkappa) \backsim H_r(2\sigma_\varkappa) \tag{45}$$

ist.

Satz 2. Es ist wahrscheinlich, daß jede beständige Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ in der Reihe der Primzahlen als Urfolge unbegrenzt oft vorkommt, und daß die Anzahl der Primzahlabschnitte mit den Urdifferenzen $(2\delta_\varkappa)$, deren Anfangszahlen im Abschnitt $(2n:1)$ liegen, asymptotisch gleich ist der Anzahl der Primzahlfolgen derselben Differenzen $(2\delta_\varkappa)$, die in demselben Abschnitt $(2n:1)$ beginnen.

Die numerische Prüfung hat ergeben, daß die asymptotischen Ausdrücke der H-Funktionen nur eine langsame Annäherung an die wahren Werte der U-Funktionen gewähren. Man hat zum Beispiel für $m = 43\,051$

bei den Differenzen	6	8	10	12	14
die wahren Werte der U-Funktionen	986	370	424	462	210
die asymptotischen Werte der H-Funktionen	1242	821	828	1241	745.

Dagegen ist bei der Differenz 6 der wahre Wert der H-Funktion 1277, also wenig verschieden von dem Näherungswert 1242.

Beide Erscheinungen: die schlechte Annäherung der U-Funktionen und die gute der H-Funktionen werden erklärt, wenn man annimmt, daß die asymptotischen Ausdrücke der H-Funktionen von den wahren Ausdrücken um Funktionen von m verschieden sind, die gegenüber dem Hauptglied von kleiner Ordnung unendlich werden, daß dagegen bei den wahren Ausdrücken der U-Funktionen zum Hauptglied noch Glieder von verhältnismäßig großer Ordnung treten. Wenn diese Vermutung zutrifft, so muß man zu brauchbaren asymptotischen Ausdrücken der U-Funktionen gelangen, wenn man in der Gleichung (27) die auf das Hauptglied folgenden Glieder mitnimmt, also ansetzt:

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} U^{(2\sigma_\varkappa)}(m) \backsim A_k \frac{\pi^{k+1}(m)}{m^k} \cdot S(2\sigma_\varkappa) - A_{k+1} \frac{\pi^{k+2}(m)}{m^{k+1}} \cdot \sum S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1) \\ + A_{k+2} \frac{\pi^{k+3}(m)}{m^{\;+2}} \cdot \sum S(2\sigma_\varkappa, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) - \cdots \end{aligned}\right.$$

Die Formel (46) ist für die Primzahlpaare der Differenzen 6, 8, 10, 12, 14 geprüft worden. Es ergeben sich wieder für $m = 43\,051$:

bei den Differenzen	6	8	10	12	14
die Näherungswerte	961	361	447	461	225
mit den Fehlern	$+25$	$+9$	-23	$+1$	$-15.$

Wenn auch die Darstellung der wahren Werte durch die Formel (46) erheblich besser ist, so wird man doch noch weitere Prüfungen anzustellen haben.

Kapitel II: Summen von Primzahlen.

§ 1. Die Darstellungen gerader Zahlen als Summen von Primzahlen.

Der am Schluß des ersten Teils bewiesene Hauptsatz ermöglicht es, bei den Anzahlen für die mehrfachen Darstellungen der geraden Zahlen $2n$ als Summen mittels Lückenzahlfolgen r-ter Stufe $2n$ und r gleichzeitig ins Unendliche wachsen zu lassen und so von den Lückenzahlen zu den Primzahlen überzugehen. Um für die Anzahl der $(k+1)$-fachen Darstellungen der Zahl $2n$ mittels Primzahlfolgen der beständigen, symmetrischen Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$, die mit $G^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ bezeichnet werden möge, einen asymptotischen Ausdruck zu gewinnen, hat man den asymptotischen Ausdruck der Funktion $H_r^{(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa)}(-2\sigma_k, -2n-2\sigma_k)$ mit der $(2k+2)$-ten Potenz der Dichtigkeit $D_r(2n)$ zu multiplizieren und dann $2n$ und r groß werden zu lassen. Daß gerade mit der $(2k+2)$-ten Potenz der Dichtigkeit multipliziert wird, steht in Einklang damit, daß bei den $(k+1)$-fachen Darstellungen $2k+2$ Primzahlen in Betracht kommen. Wenn man genau auf dieselbe Art verfährt, wie es bei der Funktion $H^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ geschehen ist, so ergibt sich der

Satz 3. Es ist wahrscheinlich, daß für jede beständige, symmetrische Differenzenfolge $(2\delta_\varkappa)$ die Anzahl $G^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)$ der zugehörigen $(k+1)$-fachen

Darstellungen der Zahl $2n$ als Summe mittels Primzahlfolgen der Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ asymptotisch durch die Formel

$$G^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) \backsim A_{2k+1}\frac{\pi^{2k+2}(2n)}{(2n)^{2k+1}}\cdot S(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa) \tag{47}$$

dargestellt wird.

Der erste Faktor möge wieder die Wachstumsfunktion, der zweite die Schwankungsfunktion der G-Funktion heißen. Für die Ermittelung der Schwankungsfunktionen darf auf die ausführlichen Anweisungen im ersten Teil verwiesen werden. Auch die Wachstumsfunktionen sind bereits dort untersucht worden: denn die Wachstumsfunktion der $(k+1)$-fachen Darstellungen der geraden Zahl $2n$ als Summe mittels $(k+1)$-gliedriger Primzahlfolgen stimmt überein mit der Wachstumsfunktion für die Anzahl der $(2k+2)$-gliedrigen Primzahlfolgen, die im Abschnitt $(2n:1)$ beginnen. Die Vermutung Bruns, zwischen den Funktionen $G^{(0)}(2n)$ und $H^{(0,2)}(2n)$ bestehe ein Zusammenhang, ist damit bestätigt, gleichzeitig aber die Art des Zusammenhangs aufgeklärt worden; mit $H^{(0,2)}(2n)$ sind nämlich die Funktionen $H^{(0,2\delta)}(2n)$ gleichberechtigt.

§ 2. Der Goldbachsche Satz.

Goldbach hat in einem Briefe an Euler vom 7. Juni 1742 die Vermutung ausgesprochen, jede gerade Zahl lasse sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.[1] Wenn es auch nicht gelungen ist, den strengen Beweis zu erbringen, so hat die Beschäftigung mit den Goldbachschen Darstellungen die Richtigkeit der Vermutung immer wahrscheinlicher gemacht. Die Tafeln, die G. Cantor[2] für die geraden Zahlen bis 1000, Haussner[3] bis 5000 veröffentlicht haben, zeigen, daß die Funktion $G^{(0)}(2n)$ bis 5000 nicht nur stets größer als Null ausfällt, sondern, wenn sie auch stark schwankt, im Durchschnitt beständig zunimmt; von 994 ab ist sie stets größer als 30.

Wie Stäckel[4] im Jahre 1896 bemerkt hat, zeigt der Verlauf der Funktion $G^{(0)}(2n)$ eine gewisse Ähnlichkeit mit dem der bekannten zahlentheoretischen Funktion $\varphi(2n)$, die angibt, wie viele ganze Zahlen kleiner als $2n$ und dazu teilerfremd sind. Bedeuten nämlich $a, b, c \ldots$ die ungeraden Primteiler von $2n$, so ist

$$\varphi(2n) = n\cdot\frac{a-1}{a}\,\frac{b-1}{b}\,\frac{c-1}{c}\cdots.$$

Hierin ist der erste Faktor, n, eine beständig wachsende Funktion von $2n$. Zu ihm tritt, um die Schwankungen der Funktion $\varphi(2n)$ zu erzeugen, für jeden in $2n$ enthaltenen ungeraden Primteiler, gleichgültig, wie oft er als solcher auftritt, der Multiplikator $\frac{p-1}{p}$. Stäckel suchte es wahrscheinlich zu machen, daß die Funktion $G^{(0)}(2n)$ asymptotisch

[1]) Ausführliche geschichtliche Angaben findet man in Stäckels schon angeführten Abhandlungen aus den Jahren 1896 und 1916.

[2]) G. Cantor, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach. Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Caen, 1894.

[3]) R. Haussner, Tafeln für das Goldbachsche Gesetz, Nova Acta, Abhandl. der Leopold.-Carol. Akademie, Bd. 72, Nr. 1, Halle 1897. Haussner zählt, wie schon Cantor, Darstellungen mit denselben Summanden nur einmal, während hier, gemäß der allgemeinen Erklärung der G-Funktionen, die Darstellungen $x+y$ und $y+x$ als verschieden angesehen werden, wenn x und y verschieden sind. Mithin ist die G-Funktion immer eine gerade Zahl, außer wenn $2n$ das Doppelte einer Primzahl wird.

[4]) P. Stäckel, Über das Goldbachsche empirische Theorem: Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse. 1896, S. 292.

durch das Produkt einer Wachstumsfunktion $W(2n)$ und einer Schwankungsfunktion $S(2n)$ darstellbar sei, die sich aus Multiplikatoren $M(p)$ aufbaut, wobei es wieder nicht darauf ankommt, wie oft p als Primteiler von $2n$ auftritt, und zwar machte er den Ansatz

$$W(2n) = 2\frac{\pi^2(2n)}{2n}, \quad M(p) = \frac{p}{p-1}.$$

Jedoch ergab die numerische Prüfung, daß die Näherungswerte „nur ein abgeblaßtes Bild der Wirklichkeit gewähren: die Minima werden vergrößert, die Maxima verkleinert“.

Bald darauf zeigte Landau[1]) in aller Strenge, daß die summatorische Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{n} G^{(0)}(2n) \backsim \tfrac{1}{2}\pi^2(2n)$$

ist, daß dagegen die summatorische Funktion der Stäckelschen Näherungswerte asymptotisch gleich

$$\frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4}\pi^2(2n) = \frac{1}{1{,}544}\pi^2(2n)$$

wird. Damit die Näherungswerte dieselbe summatorische Funktion wie die wahren Werte ergeben, schlug Landau vor, den Faktor 2 in der Wachstumsfunktion $W(2n)$ durch 1,544 ... zu ersetzen.

Jedoch ist die verbesserte Formel mit denselben Mängeln behaftet wie die ursprüngliche. Die Schuld liegt an der Wahl der Multiplikatoren. Es bedeutete daher einen erheblichen Fortschritt, daß Brun in der schon angeführten Abhandlung vom Jahre 1915 die Multiplikatoren

$$M^1(p) = \frac{p-1}{p-2}$$

einführte. Gleichzeitig fand er auf Grund seines Siebungsverfahrens, daß als Wachstumsfunktion die Anzahl der Primzahlzwillinge $H^{(0,2)}(2n)$ zu nehmen sei, und so ergab sich ihm die asymptotische Formel

$$G^{(0)}(2n) \backsim \varkappa \cdot \frac{2n}{\log^2(2n)}\,\Pi\frac{p-1}{p-2}. \tag{48}$$

Stäckel zeigte in der Abhandlung vom Jahre 1916, daß bei Annahme einer Wachstumsfunktion der Form $\varkappa \cdot 2n : \log^2(2n)$ die Konstante $\varkappa$ bereits bestimmt ist, wenn man die zu den ungeraden Primteilern von $2n$ gehörigen Multiplikatoren gibt, und er bewies weiter, daß bei der Wahl, die Brun getroffen hat, $\varkappa$ gleich A_1 wird. Endlich ersetzte er die rechte Seite der Formel (49) durch den asymptotisch gleichen Ausdruck

$$A_1\frac{\pi^2(2n)}{2n} \cdot \Pi\frac{p-1}{p-2}, \tag{49}$$

der, wie die numerische Prüfung ergab, sich den wahren Werten der Funktion $G^{(0)}(2n)$ stärker nähert als der Brunsche Ausdruck. Es ist das genau derselbe Ausdruck, der aus der allgemeinen Gleichung (47) für die G-Funktionen folgt, wenn man darin $k=0$ setzt; denn $S(0,2n)$ ist, wie im ersten Teil gezeigt wurde, gleich $\Pi M^1(p)$.

Stäckel hat aus seiner Formel die Näherungswerte von $G^{(0)}(2n)$ für den Bereich von 4000 bis 4998 berechnet und mit den wahren Werten verglichen. Als Probe mögen die 29 geraden Zahlen von 4180 bis 4218 herausgegriffen werden; sie sind gewählt worden, weil

[1]) E. Landau, Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1900, S. 180.

die Zahl 4200 durch 3, 5, 7 teilbar ist und hier ein großes Maximum der G-Funktion zu erwarten war.

Anzahl der Goldbachschen Darstellungen							
$2n$	Primteiler	$\pi(2n)$	$W(2n)$	$S(2n)$	Berechnet	Gezählt	Fehler
4180	5, 11, 19	574	104	1,569	163	162	− 1
82	3, 17, 41			2,188	228	212	−16
84	523			1,000	104	100	− 4
86	7, 13, 23			1,370	143	144	+ 1
88	3, 349			2,000	208	206	− 2
4190	5, 419			1,333	139	130	− 9
92	131			1,008	105	108	+ 3
94	3, 233			2,000	208	204	− 4
96	1049			1,000	104	98	− 6
98	2099			1,000	104	103	− 1
4200	3, 5, 7			3,200	333	328	− 5
02	11, 191	575		1,117	116	110	− 6
04	1051			1,000	104	100	− 4
06	3, 701			2,000	208	208	± 0
08	263			1,000	104	90	−14
4210	5, 421			1,333	139	132	− 7
12	3, 13	576		2,182	227	216	−11
14	7, 43			1,229	128	124	− 4
16	17, 31			1,103	115	110	− 5
18	3, 19, 37	577		2,178	227	234	+ 7

Die Übereinstimmung ist im allgemeinen befriedigend. Allerdings sind die Fehler bei einigen Werten von $2n$, wie 4182, 4190, 4208 beträchtlich. Im Bereich der 500 geraden Zahlen von 4000 bis 4998 gibt es etwa 70 solche großen Abweichungen. Sie sind teils positiv, teils negativ und gleichen sich im Mittel aus.

Ripert[1]) hat im Jahre 1903, ohne Stäckels Abhandlung in den Göttinger Nachrichten zu kennen, einige Vermutungen über den Verlauf der Funktion $G^{(0)}(2n)$ ausgesprochen. Er erkennt richtig, daß die Primteiler von $2n$ einen wesentlichen Einfluß haben, wenn ihm auch der Gedanke fern liegt, diesen Einfluß durch Multiplikatoren zahlenmäßig zu erfassen. Seine Bemerkung, die Wirkung der Primteiler 5, 7, 11, 13, ... zusammengenommen werde schließlich die Wirkung einer einzelnen Drei übertreffen, wird durch die Multiplikatoren bestätigt, denn man hat

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}=\frac{64}{33}<2,\quad \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1024}{495}>2.$$

[1]) L. Ripert, Vérification du théorème de Goldbach, L'Intermédiaire des mathématiciens, 10 (1903), S. 74; vgl. auch S. 166.

Aus der Gleichung (44) folgt sogar, daß das Produkt

$$\prod_{\varrho=r}^{r+s} M^1(p_\varrho)$$

für jeden Wert von r mit s über alle Grenzen wächst. Während das Auftreten ungerader Primteiler eine Vergrößerung herbeiführt, soll nach RIPERT das Auftreten einer Potenz von 2, deren Exponent eine Primzahl ist, verkleinernd wirken. Eine sorgfältige Prüfung hat ergeben, daß diese Behauptung allerdings in manchen Fällen zutrifft, daß es aber noch mehr Fälle gibt, bei denen das Gegenteil stattfindet. Es scheint daher nicht nötig, der Schwankungsfunktion einen Faktor hinzuzufügen, durch den der Einfluß der Primzahl 2 zur Geltung kommt.

Verdienstlich ist der Fleiß, mit dem RIPERT für eine Anzahl größerer Zahlen die wahren Werte der Funktion $G^{(0)}(2n)$ ermittelt hat. Wenn auch die Werte, die er für Zahlen unter 5000 mitteilt, wie die Vergleichung mit HAUSSNERS Tafel zeigt, kleine Fehler aufweisen, so wird man doch die RIPERTschen Zahlen zu einer ungefähren Vergleichung mit den Näherungswerten benützen dürfen. Für 16 Zahlen ist das in der folgenden Zusammenstellung geschehen.

Anzahl Goldbachscher Darstellungen							
$2n$	Primteiler	$\pi(2n)$	$W(2n)$	$S(2n)$	Berechnet	RIPERT	Fehler
6930	3, 5, 7, 11	890	151	3,5556	537	534	− 3
9240		1145	187		665	668	+ 3
11550		1391	221		786	786	± 0
13860		1637	255		907	890	− 17
16170		1879	288		1024	1032	+ 8
18480		2116	320		1138	1138	± 0
20790		2342	348		1237	1230	− 7
23100		2580	380		1351	1342	− 9
25410		2801	408		1451	1432	− 19
27720	3, 5, 7, 11	3022	435	3,5556	1547	1536	− 11
30030	3, 5, 7, 11, 13	3248	464	3,8788	1799	1802	+ 3
32340	3, 5, 7, 11	3468	491	3,5556	1746	1614	−132
34650	3, 5, 7, 11	3700	522	3,5556	1856	1818	− 38
36960	3, 5, 7, 11	3980	566	3,5556	2012	1956	− 56
39270	3, 5, 7, 11, 17	4135	575	3,7926	2181	2152	− 29
41580	3, 5, 7, 11	4347	600	3,5556	2133	2142	+ 9

Die Fehler sind verhältnismäßig klein, ausgenommen die Zahl 32340; vielleicht liegt hier ein Druckfehler vor; wenn nämlich bei RIPERT statt 807 zu lesen wäre 870, so würde das Doppelte, 1740, mit dem berechneten Werte 1746 gut stimmen.

§ 3. Die Zwillingsdarstellungen der geraden Zahlen.

In der Abhandlung vom Jahre 1916 hatte STÄCKEL auf die eigenartigen Darstellungen der geraden Zahl $2n$ hingewiesen; bei denen dem Primzahlzwilling $p, p+2$ ein Primzahlzwilling $2n-p-2$, $2n-p$ entspricht, einige Ergebnisse seiner Untersuchungen über solche Zwillingsdarstellungen mitgeteilt und eine ausführliche Veröffentlichung in Aussicht gestellt. Diese ist 1917 im ersten Teil der Abhandlung über die Lücken- und Primzahlen erschienen.

In der hier angewandten Bezeichnung ist nach Gleichung (47):

$$G^{(0,2)}(2n) \propto A_3 \frac{\pi^4(2n)}{(2n)^3} \cdot S(0,2,2n,2n+2) \qquad (A_3 = 4{,}1532). \tag{50}$$

Die Schwankungsfunktion ist im ersten Teil bestimmt worden. Es ergab sich, daß allein die durch 6 teilbaren Zahlen Zwillingsdarstellungen gestatten, und zwar waren für diese Zahlen nur die ungeraden Primteiler von $2n$ und $2n+2$ wirksam, nämlich mit den Multiplikatoren

$$\frac{p-2}{p-4}, \text{ wenn } 2n \text{ den Teiler } p,$$

$$\frac{p-3}{p-4}, \text{ wenn eine der Zahlen } 2n \pm 2 \text{ den Teiler } p \text{ besitzt.}$$

Weinreich hat die Formel (50) einer numerischen Prüfung unterworfen, indem er für den Bereich von 15 606 bis 15 900 die 50 Näherungswerte berechnete und mit den wahren Werten verglich. Als Probe sollen hier die letzten 10 Zahlen herausgegriffen werden.

Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen								
$2n$	Primteiler von $2n-2$	Primteiler von $2n$	Primteiler von $2n+2$	S	$W^{(3)}$	Berechnet	Gezählt	Fehler
15 846	17, 233	19, 139	7, 283	1,66	12	20	20	+0
52	5, 317	1321	7927	2,01		24	24	+0
58	991	881	5, 13, 61	2,27		27	22	−5
64	7, 11, 103	661	7933	1,54		19	12	−7
70	3967	5, 23	31	3,44		42	46	+4
15 876	7937	7	17, 467	1,80		22	26	+4
82	5, 397	2647	11, 19	2,45		30	28	−2
88	13, 47	331	5, 7, 227	3,06		37	34	−3
94	29, 137	883	1987	1,05		13	14	+1
15 900	7949	5, 53	7951	3,12		38	29	−9

Die vorher angeführte Abhandlung vom Jahre 1917 enthält eine von Weinreich berechnete Tafel der Funktion $G^{(0,2)}(2n)$ für den Bereich von 6 bis 16 800. Die Tafel zeigt, daß diese Funktion noch viel unregelmäßiger verläuft als die Funktion $G^{(0)}(2n)$, daß aber im Durchschnitt auch bei ihr ein Ansteigen der Werte stattfindet; freilich ist es erheblich langsamer.

Einer Zwillingsdarstellung entziehen sich die Zahlen

96, 402, 516, 786, 906, 1116, 1146, 1266, 1356, 3246, 3246, 4206.

Nur eine solche Darstellung gestatten die Zahlen 12, 396, 696. Mit der Anzahl 2 der Darstellungen verhält es sich sonderbar. Nachdem der Wert 2 bis 3486 im ganzen 56 mal aufgetreten ist, kehrt er erst bei der Zahl 9846 zurück, er findet sich aber auch noch bei 12 744, 15 126 und 15 816, obwohl die Wachstumsfunktion bei den beiden letzten Zahlen schon auf 12 angestiegen ist. Ob mit 15 816 das Ende der Zahlen erreicht ist, die nur zwei Zwillingsdarstellungen zulassen, muß dahingestellt bleiben.

Eine Ausdehnung der Tafel über 16 800 hinaus würde die große Mühe kaum lohnen. Aussichtsreicher wäre es, für einen kleineren Bereich jenseits 100 000 die Rechnung durchzuführen; hier würden für die G-Funktion im Durchschnitt Werte im Betrage von 70 zu erwarten sein.

Zu wünschen wäre ferner eine numerische Untersuchung der Funktionen $G^{(0,2\delta)}(2n)$ Nach Gleichung (47) wird

$$G^{(0,2\delta)}(2n) \sim A_3 \frac{\pi^4(2n)}{(2n)^3} \cdot S(0,2\delta,2n,2n+2\delta). \tag{51}$$

Die Schwankungsfunktion ist im ersten Teil bestimmt worden; wirksam sind nur die Primteiler der ungeraden Zahlen $2n$ und $2n \pm 2\delta$.

§ 4. Durchschnittliche Werte der Schwankungsfunktion $S(0,2n)$.

Wie in § 2 dieses Kapitels berichtet wurde, hat Landau bewiesen, daß die summatorische Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{n} G^{(0)}(2\nu) \sim \tfrac{1}{2}\pi^2(2n) \tag{52}$$

und diese Formel benutzt, um den ursprünglichen asymptotischen Ausdruck von Stäckel für $G^{(0)}(2n)$ zu prüfen, indem er auch für diesen die summatorische Funktion durch einen asymptotischen Ausdruck darstellte. Eine ähnliche Untersuchung läßt sich für die summatorische Funktion des neuen asymptotischen Ausdrucks

$$\mathfrak{G}^{(0)}(2n) = A_1 \frac{\pi^2(2n)}{2n} \cdot S(0,2n) \tag{53}$$

durchführen. Es sollen jedoch die beiden summatorischen Funktionen nicht für die Werte $\nu = 1,2,3,..,n$ gebildet werden, sondern für die Werte $\nu = n-m+1,\ n-m+2\ldots,n$, mit der Bedingung, daß die Länge m des Bereichs, über den summiert wird, zwar mit n über alle Grenzen wächst, jedoch das Verhältnis $m:n$ sich der Grenze Null nähert; in welcher Weise die Annäherung an die Grenze zu erfolgen hat, wird noch erörtert werden. Ein solches Vorgehen scheint dem Wesen asymptotischer Ausdrücke besser zu entsprechen.

Zunächst erhält man

$$\sum_{\nu=n-m+1}^{n} G^{(0)}(2\nu) \sim \tfrac{1}{2}\left(\frac{2n}{\log 2n}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2n-2m}{\log(2n-2m)}\right)^2 \sim \frac{2n}{\log^2(2n)} \cdot 2m.$$

Ferner wird

$$\sum_{\nu=n-m+1}^{n} \mathfrak{G}^{(0)}(2\nu) \sim A^1 \sum_{\nu=n-m+1}^{n} \left\{\frac{2\nu}{\log^2(2\nu)} \cdot S(0,2\nu)\right\} \sim A_1 \frac{2n}{\log^2(2n)} \sum_{\nu=n-m+1}^{n} S(0,2\nu).$$

Die beiden summatorischen Funktionen stimmen also überein, wenn

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=n-m+1}^{n} S(0,2\nu) = \frac{2}{A_1} \tag{54}$$

ist. Die Gleichung (54) kann auch die Bedingung des Fehlerausgleichs heißen. Wenn nämlich die beiden summatorischen Funktionen asymptotisch gleich sind, so ist die Summe der mit ihren Vorzeichen genommenen Fehler der Näherungsausdrücke $\mathfrak{G}^{(0)}(2\nu)$ für $\nu = n-m+1$ bis n dividiert durch eine der beiden summatorischen Funktionen asymptotisch gleich Null.

Auf der linken Seite der Gleichung (54) steht der durchschnittliche Wert der Schwankungsfunktion $S(0,2\nu)$. Der Durchschnitt bezieht sich auf einen langen Bereich von Zahlen 2ν, die selbst sehr groß sind, und zwar so, daß die Länge m des Bereichs gegen die Größe der Zahlen 2ν verschwindet. Zur Ermittelung des Durchschnitts $\mathfrak{M}(S(0,2\nu))$ führt folgende Überlegung.

Es sei $2\nu=2P_r x+2u_r$; $2u_r$ soll dem Hauptbereich angehören, das Verhältnis $2\nu:2P_r$ soll groß sein. Die beiden Lückenzahlen, deren Summe 2ν ergibt, seien $2P_r y+v_r$ und $2P_r z+w_r$; v_r und w_r sollen dem Hauptbereich angehören. Aus der Gleichung

$$2P_r x+2u_r=(2P_r y+v_r)+(2P_r z+w_r)$$

folgt, daß v_r+w_r bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt, und zwar ist v_r+w_r entweder gleich $2u_r$ oder gleich $2u_r+2P_r$. Je nachdem die erste oder die zweite Gleichung besteht, sind y und z so zu wählen, daß entweder $y+z=x$ oder $y+z=x-1$ wird; x und $x-1$ mögen in das Zeichen $x-\varepsilon$ zusammengefaßt werden.

Die Anzahl der Wertepaare v_r, w_r, in der hier angewandten Art aufgefaßt, für die v_r+w_r bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt, soll das Gewicht r-ter Stufe der Zahlenklasse $2P_r x+2u_r$ genannt werden und mit $g_r^{(0)}(2u_r)$ bezeichnet werden.

Nachdem man die Zahlen v_r und w_r gewählt hat, was auf $g_r^{(0)}(2u_r)$ Arten möglich ist, hat man die Gleichung $y+z=x-\varepsilon$ zu erfüllen. Dazu ist y gleich $0, 1, 2, \ldots, x-\varepsilon$ zu setzen; hierdurch ist jedesmal z bestimmt. Hieraus folgt, daß die Anzahl der Darstellungen der geraden Zahlen 2ν als Summen zweier Lückenzahlen r-ter Stufe, $G_r^{(0)}(2\nu)$, zwischen $x\cdot g_r^{(0)}(2u_r)$ und $(x+1)\cdot g_r^{(0)}(2u_r)$ liegt. Folglich gilt die asymptotische Gleichung

$$G_r^{(0)}(2\nu)\backsim\frac{2\nu}{2P_r}\cdot g_r^{(0)}(2u_r).$$

Nun war nach Gleichung (33)

$$G_r^{(0)}(2\nu)\backsim\frac{P_r^{(2)}}{2P_r}2\nu\cdot S_r(0,2\nu),$$

mithin besitzt die Schwankungsfunktion $S_r(0,2\nu)$ die asymptotische Darstellung

$$S_r(0,2\nu)\backsim g_r^{(0)}(2u_r):P_r^{(2)}.$$

Bei den Gewichten r-ter Stufe werden die $P_r^{(1)}$ Lückenzahlen des Hauptbereichs paarweise zu Summen vereinigt, und die Anzahl der Summen, die bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ übereinstimmen, gibt das Gewicht der betreffenden Zahlenklasse $2P_r x+2u_r$. Folglich ist die Summe aller Gewichte $g_r^{(0)}(2u_r)$, wenn $2u_r$ die Werte $2, 4, 6, \ldots, 2P_r$ durchläuft, gleich $(P_r^{(1)})^2$, und der durchnittliche Wert der Schwankungsfunktionen $S_r(0,2\nu)$, die zu P_r aufeinanderfolgenden großen geraden Zahlen gehören, wird gleich

$$(P_r^{(1)})^2:P_r P_r^{(2)}.$$

Jetzt mögen die Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt sein. Dann darf man zur Grenze für r übergehen, und es wird nach Gleichung (38)

$$\mathfrak{M}(S(0,2\nu))=\frac{2}{A_1}=1{,}515\ldots.$$

Was zu beweisen war.

Die Zahl m in der Gleichung (54) muß denselben Grenzbedingungen genügen wie die Zahl $2P_r$ beim Hauptsatz, sie muß also in bezug auf $2n$ von einer Ordnung unendlich werden, die zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, 1 ausgeschlossen. Es läßt sich zeigen, daß es schon ausreicht, wenn $\lim(m:n)=0$ ist, so daß die engere Bedingung nur durch das angewandte Beweisverfahren hereingekommen ist; jedoch soll hier nicht darauf eingegangen werden.

Um die Gleichung (54) einer numerischen Prüfung zu unterwerfen, ist für die 50 geraden Zahlen von 4000 bis 4098 die Summe der Wachstumsfunktionen 5073 und der wahren Werte 7583 gebildet worden. Als Quotient ergibt sich 1,495, eine verhältnismäßig gute Annäherung an den Grenzwert 1,515.

§ 5. Durchschnittliche Werte der Schwankungsfunktionen $S(2\sigma_\varkappa,\ 2n+2\sigma_\varkappa)$.

Die Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen lassen sich auf beliebige G-Funktionen und die zugehörigen Schwankungsfunktionen ausdehnen, mit dem Unterschiede freilich, daß an die Stelle der streng bewiesenen Formel von Landau eine allgemeinere Formel tritt, die sicherlich richtig ist, zu deren Herleitung aber, wie es scheint, die von Landau benützten Hilfsmittel nicht ausreichen.

Um Landaus Formel zu verallgemeinern, soll sie geometrisch gedeutet werden. Wenn die beiden rechtwinkligen Koordinaten x, y eines Punktes der Ebene gleich ungeraden Primzahlen sind, so gehört zu dem Punkte eine Goldbachsche Darstellung der geraden Zahl $2n = x + y$. Die Punkte, die zu den Darstellungen der geraden Zahlen des Abschnitts $(2n; 4)$ gehören, liegen im Innern oder auf der Grenze des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(0,2n)$, $(2n,0)$. Nun ist die Anzahl der Primzahlen, die ein großer Abschnitt der ganzen Zahlen aufweist, in erster Näherung der Länge des Abschnitts proportional. Man wird daher annehmen dürfen, daß die Anzahl der Primzahlpaare unter den Zahlenpaaren, die den Punkten eines großen Gebietes der Ebene entsprechen, in erster Linie dem Flächeninhalt des Gebietes proportional ist. Nun gehören dem Quadrat mit den Ecken $(0,0)$, $(0,2n)$, $(2n,0)$ $(2n,2n)$ genau $\pi^2(2n)$ Punkte an, deren Koordinaten Primzahlen sind; man wird also dem Dreieck $(0,0)$, $0,2n)$, $(2n,0)$ nur die Hälfte davon zuzuschreiben haben, und das ist der Sinn der Landauschen Formel.

Wie im ersten Teil gezeigt wurde, ist die Anzahl der Lückenzahlen, mit denen eine Lückenzahlfolge gegebener Differenzen beginnt, in erster Annäherung nur von der Länge des Abschnittes abhängig, dem die Anfangszahlen angehören sollen. Wenn es erlaubt ist, diesen Satz auf die Primzahlen zu übertragen, so führt die Schlußweise, die soeben bei der Landauschen Formel angewandt wurde, zu der asymptotischen Formel

$$\sum_{\nu=1}^{n} G^{(2\sigma_\varkappa)}(2\nu) \sim \tfrac{1}{2}\left(H^{(2\sigma_\varkappa)}(2n)\right)^2 \sim \tfrac{1}{2} A_k^2 \frac{\pi^{2k+2}(2n)}{(2n)^{2k}} \cdot S^2(2\sigma_\varkappa)$$

oder auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} G^{(2\sigma_\varkappa)}(2\nu) \sim \tfrac{1}{2} A_k^2 \frac{(2n)^2}{\log^{2k+2}(2n)} \cdot S^2(2\sigma_\varkappa). \tag{55}$$

Mithin ist

$$\sum_{\nu=n-m+1}^{n} G^{(2\sigma_\varkappa)}(2\nu) \sim \frac{2n}{\log^{2k+2}(2n)} \cdot 2m \cdot A_k^2 S^2(2\sigma_\varkappa).$$

Setzt man ferner

$$\mathfrak{G}^{(2\sigma_\varkappa)}(2n) = A_{2k+1} \frac{\pi^{2k+2}(2n)}{(2n)^{2k+1}} \cdot S(2\sigma_\varkappa, 2n+2\sigma_\varkappa), \tag{56}$$

so wird

$$\sum_{\nu=n-m+1}^{n} \mathfrak{G}^{(2\sigma_\varkappa)}(2\nu) \sim A_{2k+1} \frac{2n}{\log^{2k+2}(2n)} \sum_{\nu=n-m+1}^{n} S(2\sigma_\varkappa, 2\nu+2\sigma_\varkappa).$$

Die beiden summatorischen Funktionen stimmen überein, wenn

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{\nu=n-m+1}^{n} S(2\sigma_\varkappa,\, 2\nu+2\sigma_\varkappa) = \frac{2A_k^2 S^2(2\sigma_\varkappa)}{A_{2k+1}} \tag{57}$$

ist, und man hat Fehlerausgleich.

Nach Gleichung (38) hat man

$$A_{2k+1} = A_k^2 \lim_{r\to\infty}\frac{2P_r P_r^{(2k+2)}}{(P_r^{(k+1)})^2}.$$

Wird also die Zahl T durch die Ungleichheiten

$$p_T < 2k+2 < p_{T+1}$$

erklärt, so ist

$$A_{2k+1} = A_k^2\cdot 2P_T\cdot\prod_{\varrho=T+1}^{\infty}\Big[1-\Big(\frac{k+1}{p_\varrho-k-1}\Big)^2\Big]. \tag{58}$$

Daß die Gleichung (57) identisch erfüllt ist, läßt sich durch eine Überlegung dartun, die der im vorhergehenden Paragraphen angestellten durchaus entspricht. Die Lückenzahlen v_r und w_r hat man jetzt als die Anfangszahlen von Lückenzahlfolgen anzusehen, denen die Differenzen $(2\delta_\varkappa)$ zukommen, und die Anzahl der Wertpaare v_r, w_r, für die $v_r+w_r+2\sigma_k$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt, als das Gewicht r-ter Stufe $g_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2u_r)$ der Zahlenklasse $2P_r x+2u_r$ zu erklären. Man gelangt dann zu der asymptotischen Formel

$$G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2\nu) \backsim \frac{2\nu}{2P_r}\cdot g_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2u_r),$$

und da nach Gleichung (33)

$$G_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2\nu) \backsim \frac{P_r^{(2k+2)}}{2P_r}\, 2\nu\cdot S_r(2\sigma_\varkappa, 2\nu+2\sigma_\varkappa)$$

war, so wird jetzt

$$S_r(2\sigma_\varkappa, 2\nu+2\sigma_\varkappa) \backsim g_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2u_r) : P_r^{(2k+2)}.$$

Weil die Summe aller Gewichte $g_r^{(2\sigma_\varkappa)}(2u_r)$, erstreckt über die Werte $2, 4, 6, \ldots, 2P_r$ von $2u_r$, gleich $h_r^2(2\sigma_\varkappa)$ ist, so erschließt man wieder, daß der durchschnittliche Wert der Schwankungsfunktionen $S_r(2\sigma_\varkappa,\ 2\nu+2\sigma_\varkappa)$, die zu P_r aufeinander folgenden großen geraden Zahlen gehören, gleich

$$h_r^2(2\sigma_\varkappa) : P_r P_r^{(2k+2)}$$

ist, also asymptotisch gleich

$$(P_r^{(k+1)})^2 S_r^2(2\sigma_\varkappa) : P_r P_r^{(2k+2)}.$$

Folglich wird

$$\mathfrak{M}(S_r(2\sigma_\varkappa, 2\nu+2\sigma_\varkappa)) \backsim \frac{(P_r^{(k+1)})^2}{P_r P_r^{(2k+2)}}\cdot S^2{}_r(2\sigma_\varkappa).$$

Wenn die Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt sind, darf man zur Grenze übergehen und gelangt genau zu der Formel (57).

Bei der Bildung des Durchschnitts muß die ganze Zahl m in Bezug auf n von einer Ordnung unendlich werden, die zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, 1 ausgeschlossen. Wahrscheinlich ist auch hier nur die Bedingung erforderlich, daß $\lim(m:n)=0$ ist.

Wie die Beispiele zeigen, werden im allgemeinen nur gewisse Klassen von geraden Zahlen die geforderte $(k+1)$-fache Darstellung gestatten; sie sind durch die Zugehörigkeit zu einer Anzahl arithmetischer Reihen derselben Differenz gekennzeichnet. Für solche Zahlen, die sich der Darstellung entziehen, hat die Schwankungsfunktion den Wert Null. Bei der Bildung des Durchschnitts darf man sich auf die von Null verschiedenen Schwankungsfunktionen beschränken, wenn der vorher angegebene Ausdruck durch dessen Produkt mit einem Bruch ersetzt wird, dessen Zähler die halbe Differenz der arithmetischen Reihen und dessen Nenner die Anzahl der zulässigen Reihen ist. In diesem Sinne haben die Schwankungsfunktionen der Anzahlen $G^{(0,2)}(2n)$ den Durchschnitt $6A_1^2 : A_3 = 2{,}619\ldots$, den der Durchschnitt für die Schwankungsfunktionen der Goldbachschen Darstellungen ungefähr um eine Einheit übertrifft. Für die 50 durch 6 teilbaren Zahlen von 15 606 bis 15 900 ergibt sich als Durchschnitt 2,457 ..., was als gute Annäherung bezeichnet werden darf.

Daß die asymptotischen Ausdrücke für die G-Funktionen die Eigenschaft des Fehlerausgleichs besitzen, ist eine weitere Bestätigung ihrer Richtigkeit, die zusammen mit dem günstigen Erfolg der numerischen Prüfungen die Wahrscheinlichkeit der drei Sätze aus der additiven Arithmetik der Primzahlen fast zur Gewißheit erhebt.