Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Hesse, Ludwig Otto** (1811–1874)

Titel: **Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.**
Separat-Abdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik.
Band 11 (1866)
Seite 369 – 425.
Signatur des Sonderdrucks: Haeusser Brosch. 31,14

Auf dem Sonderdruck befindet sich nachstehende Notiz Otto Hesses:

> Collega Haeusser. Aus den letzten Worten dieser Vorlesungen können Sie sehen, welchen Einfluß ein unheilvoller Krieg auf die Wissenschaft ausübt. Sie zieht sich zurück in sich, wie in eine Festung, um mit der Außenwelt nur noch telegraphisch zu verkehren.
>
> Der Verfasser
> O. Hesse

Der letzte Satz der vierten Vorlesung lautet:

> Die gerade Linie wird dann gleichsam als Telegraphenbureau dienen, auf dem man alle geometrischen Zustände in der Ebene erfahren und neue Combinationen in ihr anordnen kann.

VIER VORLESUNGEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

VON

Dr. OTTO HESSE,

ORDENTLICHEM PROFESSOR AN DER ~~UNIVERSITÄT ZU~~ HEIDELBERG.

Separat-Abdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Collega Häusser. Aus den letzten Blättern dieser Vorlesungen mögen Sie sehen, welchen Einfluss ein [illegible] Mann auf die Wissenschaft ausübt. Sie zeigt sich [illegible], wie in einer Richtung [illegible] mit den [illegible] unbegreiflich zu [illegible] erkennen.

Ihr ergebenster O. H.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1866.

VIER VORLESUNGEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

VON

Dr. OTTO HESSE,

ORDENTLICHEM PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU HEIDELBERG.

Separat-Abdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1866.

Erste Vorlesung.

Homographie.

Ein System von unendlich vielen geraden Linien (Strahlen), welche sämmtlich von einem und demselben Punkte ausgehen, nennt man **Strahlenbüschel**. Schneidet man einen Strahlenbüschel U durch irgend eine gerade Linie A, so wird die gerade Linie in den Schnittpunkten **homographisch getheilt**. Jedem Punkte der geraden Linie entspricht ein Strahl des Büschels, der durch ihn geht, und jedem Strahle entspricht ein Punkt der geraden Linie, welcher auf dem Strahle liegt.

Man kann aber auch von einer durch unendlich viele Punkte getheilten geraden Linie A ausgehen. Zieht man von den Theilungspunkten Strahlen nach einem festen Punkte ausserhalb der geraden Linie, so bilden diese einen Strahlenbüschel U, welcher die gerade Linie homographisch theilt.

Es ist bekannt, dass ein Strahlenbüschel und ein Punktesystem auf einer geraden Linie sich analytisch ausdrücken lassen durch die Gleichungen:

1) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad A_0 - \mu A_1 = 0,$

wenn man unter $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier Strahlen des ersten, unter $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier Punkte des zweiten Systems und unter λ und μ zwei willkührliche Grössen versteht.

Die erste Gleichung stellt unter dieser Voraussetzung irgend einen Strahl λ des Strahlenbüschels U und die zweite irgend einen Punkt μ des Punktesystemes auf der geraden Linie A dar.

Sollen aber die genannten beiden Gleichungen **homographische Elemente** ausdrücken, das heisst, soll der durch die erste Gleichung dargestellte Strahl λ durch den durch die zweite Gleichung ausgedrückten Punkt μ gehen, so muss der Werth von λ den Werth von μ bedingen, mit anderen Worten, eine von diesen Grössen muss eine Function der anderen sein, sie müssen durch eine Gleichung $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ von einander abhängen.

Diese Gleichung muss vom ersten Grade sein in Rücksicht auf μ, weil jeder Strahl λ des Systemes U sein homographisches Element μ des Systemes A eindeutig bedingt. Ebenso muss die Gleichung vom ersten Grade sein in Rücksicht auf λ, weil auch jeder Punkt μ auf der geraden Linie A nur einem Strahle λ des Büschels U entspricht. Aus der so definirten Gleichung $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ folgt, dass sie die Form haben muss:

2) . . . . . $p - \lambda p_1 - \mu q + \lambda\mu q_1 = 0.$

Man kann demnach sagen:

3) . . . **Ein Strahlenbüschel und seine homographische Theilung auf einer geraden Linie lassen sich durch Gleichungen von der Form 1) analytisch darstellen unter der Voraussetzung einer bestimmten Bedingungsgleichung zwischen λ und μ von der Form 2).**

Wir lassen noch einen zweiten Beweis des Satzes folgen, der zugleich die Werthe der vier Constanten p, q in der Bedingungsgleichung 2) bestimmen lehrt.

Soll der durch die zweite Gleichung 1) bestimmte Punkt μ auf dem durch die erste Gleichung gegebenen Strahl λ liegen, so müssen die aus der zweiten Gleichung genommenen homogenen Coordinaten des Punktes, in die erste homogene Gleichung gesetzt, derselben genügen. Macht man diese Substitutionen, so erhält man die Bedingungsgleichung:

4) . . . . $U_0{}^0 - \lambda U_1{}^0 - \mu U_0{}' + \lambda\mu U_1{}' = 0$

wenn $U_0{}^0$ und $U_1{}^0$ die Ausdrücke bezeichnen, in welche U_0 und U_1 übergehen, wenn man in ihnen für die Variabeln die Coordinaten des Punktes $A_0 = 0$ setzt, und $U_0{}'$ und $U_1{}'$ die Ausdrücke, in welche U_0 und U_1 übergehen, wenn man für die Variabeln in ihnen die Coordinaten des Punktes $A_1 = 0$ setzt.

Aus dem Vergleich der Gleichung 4) mit 2) ergeben sich die Werthe der vier Constanten in der letzteren:

5) . . . . $p = U_0{}^0, \quad p_1 = U_1{}^0, \quad q = U_0{}', \quad q_1 = U_1{}'.$

Die Gleichungen $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ stellen irgend zwei Punkte auf der geraden Linie A dar. Wählen wir dieselben so, dass der Punkt $A_0 = 0$ auf der geraden Linie $U_0 = 0$ liegt, dass der Punkt $A_1 = 0$ auf der geraden Linie $U_1 = 0$ liegt und richten zugleich die homogenen Coordinaten dieser Punkte so ein, dass $U_0' + U_1^0 = 0$, so verschwinden U_0^0 und U_1' und die Bedingungsgleichung 4) geht über in $\lambda - \mu = 0$.

Hiernach können wir den Satz 3) kürzer so ausdrücken:

6) . . . Ein jeder Strahlbüschel und seine homographische Theilung auf irgend einer geraden Linie lassen sich analytisch durch Gleichungen ausdrücken von der Form:

6) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad A_0 - \lambda A_1 = 0.$

Man kann leicht einsehen, dass die Sätze 3) und 6) nach der gegebenen Definition der Homographie sich nicht umkehren lassen, dass, wenn Gleichungen von der angegebenen Form gegeben sind, nicht jeder durch sie ausgedrückte Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht. Will man jedoch, dass auch die umgekehrten Sätze 3) und 6) Geltung haben, so muss man den Begriff der Homographie erweitern.

Zu diesem Zwecke werden wir ein Punktesystem auf einer geraden Linie A und einen Strahlenbüschel U noch homographisch nennen, wenn man die gerade Linie aus dem vorhin beschriebenen Systeme herausnimmt und ihr, ohne die Punktefolge zu ändern, in der Ebene irgend welche Lage giebt; oder wenn man dem sonst unveränderten Strahlenbüschel eine beliebige andere Lage zuertheilt. Wir nennen diese Lage homographischer Systeme die schiefe Lage zum Unterschiede von den früheren der perspectivischen Lage, in der jeder Strahl des Büschels durch seinen entsprechenden Punkt ging.

Untersuchen wir nun, welche Aenderung das Versetzen der homographischen Systeme aus der perspectivischen Lage in die schiefe Lage in ihren analytischen Ausdrücken 1) und 6) zu Wege bringt.

Um den durch die erste Gleichung 1) oder 6) gegebenen Strahlenbüschel beliebig in die Ebene zu verlegen, beziehen wir denselben auf ein beliebiges anderes rechtwinkliges Coordinatensystem, was analytisch darauf hinauskommt, dass wir für die homogenen Coordinaten x, y, z in der Gleichung gewisse lineare homogene Ausdrücke der Coordinaten X, Y, Z des zweiten rechtwinkligen Systemes setzen. Wenn wir dann das zweite Coordinatensystem mit seinem Strahlenbüschel in die Lage bringen, dass die Coordinatenaxen des zweiten Systems mit den entsprechenden Coordinatenaxen des ersten Systemes zusammenfallen, so nimmt der Strahlenbüschel eine ganz beliebige andere Lage an. Diese letzte Operation wird analytisch dadurch vollführt, dass man für X, Y, Z respective setzt x, y, z.

Man verlegt demnach den durch die erste Gleichung 1) oder 6) gegebenen Strahlenbüschel beliebig in der Ebene, wenn man in der Gleichung an Stelle der homogenen Coordinaten x, y, z setzt gewisse lineare homogene Ausdrücke derselben Coordinaten. Dadurch gehen zwar die homogenen Ausdrücke U_0 und U_1 der Coordinaten in andere ebenfalls lineare Ausdrücke derselben Coordinaten über, aber die Form der Gleichung bleibt ungeändert.

Ebenso verlegt man das durch die zweite Gleichung 1) oder 6) gegebene Punktesystem auf einer geraden Linie beliebig in der Ebene, wenn man in den Gleichungen an Stelle der homogenen Liniencoordinaten u, v, w setzt gewisse lineare homogene Ausdrücke derselben Coordinaten. Dadurch wird ebenso wenig die Form der Gleichungen geändert.

Demnach können wir sagen:

7) . . . Jeder Strahlenbüschel und seine homographische Theilung auf irgend einer geraden Linie in irgend welcher schiefen Lage lassen sich durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer bestimmten Bedingungsgleichung von der Form 2), oder einfacher durch Gleichungen von der Form 6), analytisch ausdrücken.

Wir werden jetzt untersuchen, ob Gleichungen von der Form 1) unter der Voraussetzung einer gegebenen Bedingungsgleichung von der Form 2) nach dem erweiterten Begriffe der Homographie immer homographischer Systeme analytisch ausdrücken.

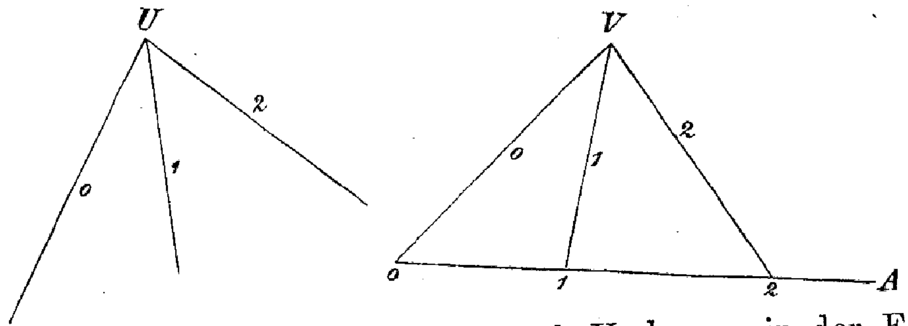
Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass nicht jeder durch die erste Gleichung 1) gegebene Strahl des Büschels durch den ihm nach der gegebenen Bedingungsgleichung 2) entsprechenden Punkt der geraden Linie geht, welcher durch die zweite Gleichung ausgedrückt wird. Ein bestimmter Strahl wird aber durch den ihm entsprechenden Punkt der geraden Linie gehen, wenn die Coordinaten des Punktes, in die Gleichung des Strahles gesetzt, der Gleichung genügen. Die Bedingung dafür ist die Gleichung 4), wenn man unter μ den Werth versteht, der sich aus der gegebenen Bedingungsgleichung 2) ergiebt. Der Umstand, dass diese Gleichung 4), wenn man den gegebenen Werth von μ einsetzt, eine quadratische Gleichung in λ wird, beweiset den Satz:

8) . . . Wenn ein Strahlenbüschel und ein den Strahlen desselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer beliebig gegebenen Bedingungsgleichung 2) gegeben sind, so hat der Strahlenbüschel zwei Strahlen, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen.

Wenn drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen, so müssen die Werthe der λ für die drei Strahlen der genannten quadratischen Gleichung genügen. Da aber die quadratische Gleichung nur zwei Wurzeln hat, welche ihr genügen, so ist das nicht möglich, wenn nicht alle drei Coefficienten in der nach Potenzen von λ entwickelten quadratischen Gleichung zugleich verschwinden. Verschwinden aber diese, so genügt jeder beliebige Werth von λ der Gleichung und daraus entspringt der Satz:

9) . . . Wenn ein Strahlenbüschel und ein den Strahlen desselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer beliebig gegebenen Bedingungsgleichung 2) gegeben sind, und wenn drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen, so geht jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der geraden Linie — mit anderen Worten — die Systeme sind homographisch und zugleich in perspectivischer Lage.

Auf diesen Satz gestützt können wir den Satz 3) umkehren. Diese Umkehrung beabsichtigend fixiren wir irgend drei Strahlen 0, 1, 2 aus dem durch die erste Gleichung 1) gegebenen Strahlenbüschel U und die ihnen aus der zweiten Gleichung unter Vermittelung von 2) entsprechenden Punkte 0, 1, 2 auf der geraden Linie A, wie die Figur zeigt:



Der Strahlenbüschel U lässt sich durch Verlegung in der Ebene in die Lage von V bringen, dass jeder der drei angegebenen Strahlen durch den ihm entsprechenden Punkt geht. Man braucht nur durch die Punkte 0 und 1 einen Kreis zu legen, dessen Peripheriewinkel dem Winkel gleich ist, den die beiden Strahlen 0 und 1 bilden, und einen zweiten Kreis durch die Punkte 1 und 2, dessen Peripheriewinkel gleich ist dem von den Strahlen 1 und 2 eingeschlossenen Winkel; der Schnittpunkt der beiden Kreise wird das Centrum des Strahlenbüschels V, und die drei geraden Linien, welche das Centrum mit den Punkten 0, 1, 2 verbinden, werden die Strahlen des verlegten Strahlenbüschels sein.

Analytisch wird diese Verlegung des Strahlenbüschels U, welcher durch die erste Gleichung 1) gegeben ist, in die Lage von V dadurch vollführt, dass man für die homogenen Coordinaten in jener Gleichung gewisse lineare homogene Ausdrücke derselben Coordinaten setzt, wodurch U_0 in V_0 und U_1 in V_1 übergehe und die erste Gleichung 1) in:

$$V_0 - \lambda V_1 = 0$$

Da nun drei Strahlen dieses verlegten Strahlenbüschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie A gehen, so tritt für ihn der zuletzt genannte Satz in Wirksamkeit, und da die Strahlenbüschel U und V, abgesehen von ihrer Lage, dieselben sind, so haben wir die Umkehrung des Satzes 3) bewiesen, nämlich:

10) . . . Wenn ein Strahlenbüschel und ein Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer beliebig gegebenen Bedingungsgleichung von der Form 2) gegeben sind, so sind die Strahlenbüschel und das Punktesystem homographische Systeme,

Im Speciellen, wenn die gegebene Bedingungsgleichung 2) die Gleichung $\lambda - \mu = 0$ ist, haben wir den mit 7) vereinten Satz:

11) . . . Jeder Strahlenbüschel und ein beliebiges mit ihm homographisches Punktesystem auf irgend einer geraden Linie lassen sich durch Gleichungen von der Form 6) analytisch ausdrücken, und umgekehrt stellen Gleichungen von der Form 6) immer einen Strahlenbüschel und ein mit ihm homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie dar.

Unsere Untersuchung hatte nur einen Strahlenbüschel und ein mit ihm homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie im Auge, denn auch die durch die Gleichungen 1) unter einer beliebigen Bedingungsgleichung von der Form 2) gegebenen Systeme erwiesen sich als homographische Systeme.

Wie diese gegebenen Systeme in perspectivische Lage gebracht werden konnten, so lassen sich auch im Speciellen homographische Systeme in perspectivische Lage bringen nach der Regel:

12) . . . Man bringt einen Strahlenbüschel in perpectivische Lage mit einem homographischen Punktesystem auf einer geraden Linie, wenn man die Systeme so verlegt, dass drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen.

In dieser perspectivischen Lage kann man zu jedem Strahle des Büschels den ihm entsprechenden Punkt der geraden Linie (den Schnittpunkt) construiren und umgekehrt zu jedem Punkte der geraden Linie den ihm entsprechenden Strahl (der durch ihn geht).

Demnach genügt es, drei Elemente des einen Systemes und die drei ihnen entsprechenden Elemente des anderen homographischen Systemes zu kennen, um für jedes Element des einen Systemes das entsprechende Element des andern Systemes zu finden. — Diese drei Paare entsprechender Elemente sind aber auch keiner Beschränkung unterworfen, wir meinen, es können irgend drei Strahlen eines Strahlenbüschels irgend drei Punkten in einer geraden Linie homographisch entsprechen; denn diese drei Paare entsprechender Elemente lassen sich immer in perspectivische Lage bringen.

Wir drücken dieses kurz so aus:

13) . . . Durch irgend drei Strahlen eines Strahlenbüschels und die ihnen homographisch entsprechenden Punkte in einer geraden Linie, die irgend welche drei Punkte der ge-

raden Linie sein können, sind die homographischen Systeme, der Strahlenbüschel und das Punktesystem auf der geraden Linie, vollständig bestimmt.

Bisher haben wir nur von homographischen Systemen gehandelt, von welchen das eine ein Strahlenbüschel, das andere ein System von Punkten auf einer geraden Linie waren. Wir erweitern nun den Begriff homographischer Systeme durch folgende Definitionen.

Zwei Strahlenbüschel sind homographisch, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der beiden Strahlenbüschel.

Punktesysteme auf zwei geraden Linien sind homographisch, wenn ein Strahlenbüschel gefunden werden kann, welcher homographisch ist mit jedem der beiden Punktesysteme.

Bezeichnen wir nun mit den letzten Buchstaben U, V.. des Alphabetes lineare homogene Ausdrücke der homogenen Punktcoordinaten und mit den ersten Buchstaben A, B.. lineare homogene Ausdrücke der homogenen Liniencoordinaten, so stellen sich beliebige homographische Strahlenbüschel analytisch unter der Form dar:

14) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad V_0 - \lambda V_1 = 0.$

weil das Punktesystem $A_0 - \lambda A_1$ nach 11) homographisch ist mit jedem der beiden Strahlenbüschel. Ebenso drücken die Gleichungen:

15) . . . . . $A_0 - \lambda A_1 = 0, \qquad B_0 - \lambda B_1 = 0$

beliebige homographische Punktesysteme auf irgend welchen geraden Linien aus, weil der Strahlenbüschel $U_0 - \lambda U_1 = 0$ homographisch ist mit jedem der beiden Punktesysteme.

Hiernach können wir, wenn wir mit Systeme ebensowohl Strahlenbüschel als Punktesysteme auf geraden Linien, auch untermischt mit einander, bezeichnen, den Satz aussprechen:

16) . . . Wenn zwei Systeme homographisch sind mit einem dritten Systeme, so sind je zwei von den drei Systemen homographisch.

Zwei homographische Strahlenbüschel sind im Allgemeinen in schiefer Lage. Sie haben eine perspectivische Lage, wenn die entsprechenden Strahlen der beiden Systeme sich in Punkten schneiden, die alle auf einer geraden Linie liegen.

Ebenso sind homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien im Allgemeinen in schiefer Lage. Sie haben eine perspectivische Lage, wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der beiden Systeme sämmtlich durch einen und denselben Punkt gehen.

Man kann homographische Systeme der genannten Art in perspectivische Lage bringen, wenn man sie so in der Ebene verlegt, dass sie den Bedingungen der folgenden Sätze genügen:

17) . . . Wenn zwei entsprechende Strahlen zweier homographischen Strahlenbüschel einen einzigen Strahl bilden, so sind die Strahlenbüschel in perspectivischer Lage.

18) . . . Wenn zwei entsprechende Punkte zweier homographischen Punktesysteme auf zwei geraden Linien zusammenfallen, so sind die Punktesysteme in perspectivischer Lage.

Denn es seien 14) die Gleichungen der homographischen Strahlenbüschel, von welchen die dem Werthe $\lambda = \lambda_0$ entsprechenden Strahlen:

$$U_0 - \lambda_0 U_1 = 0, \qquad V_0 - \lambda_0 V_1 = 0$$

zusammenfallen. Da diese Gleichungen eine und dieselbe gerade Linie darstellen, so muss man einen bestimmten Factor ϱ finden können, der Art, dass man identisch hat:

$$(U_0 - \lambda_0 U_1) - \varrho(V_0 - \lambda_0 V_1) \equiv 0$$

Ziehen wir nun von der ersten Gleichung 14) die mit jenem Factor ϱ multiplicirte zweite Gleichung und dann noch die angegebene identische Gleichung ab, so erhalten wir nach Division durch $\lambda_0 - \lambda$ die Gleichung:

$$U_1 - \varrho V_1 = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, in der sich jede zwei entsprechende Strahlen der beiden Strahlenbüschel 14) schneiden, weil sie unabhängig von λ ist.

Zum Beweise des zweiten Parallelsatzes bedarf es nichts weiter, als dass man in dem Vorhergehenden den Ausdruck „Strahlenbüschel“ mit „Punktesystem“ auf einer geraden Linie vertauscht und die Symbole U und V in A und B verändert.

Wir legen jetzt irgend zwei homographische Strahlenbüschel concentrisch auf einander, um ihre Eigenschaften in dieser Lage zu erforschen.

Es seien 14) die Gleichungen der so aufeinander gelegten Strahlenbüschel. Da in dieser Lage die vier Strahlen $U_0=0$, $U_1=0$, $V_0=0$, $V_1=0$ durch das gemeinschaftliche Centrum gehen, so lassen sich vier Constanten p, q der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$V_0 \equiv q U_0 - p U_1, \qquad V_1 \equiv q_1 U_0 - p_1 U_1.$$

Setzt man diese Ausdrücke von V_0 und V_1 in die Gleichungen 14), so hat man die Gleichungen von irgend zwei concentrisch auf einander gelegten Strahlenbüscheln:

19) . . $$U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 - \frac{p - \lambda p_1}{q - \lambda q_1} U_1 = 0.$$

Die einem Werthe von λ entsprechenden Strahlen der beiden concentrischen Büschel fallen zusammen unter der Bedingung:

20) . . . . $$\frac{p - \lambda p_1}{q - \lambda q_1} - \lambda = 0.$$

Da diese Gleichung eine quadratische ist, so schliessen wir daraus, dass im Allgemeinen zwei Mal zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammenfallen.

Fallen drei Mal zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammen, so muss entweder die quadratische Gleichung drei Wurzeln haben, was nicht möglich ist, oder die Coefficienten p, q_1 und $q + p_1$ der entwickelten quadratischen Gleichung verschwinden sämmtlich, in welchem Falle die beiden Strahlenbüschel nicht verschieden von einander sind.

Dem Vorhergehenden entsprechend legen wir auch irgend zwei homographische Punktesysteme in eine und dieselbe gerade Linie. Ihre Gleichungen 15) lassen sich bei der angegebenen Lage der Systeme in gleicher Weise zurückführen auf Gleichungen von der Form:

$$21) \quad . \ . \ . \quad A_0 - \lambda A_1 = 0, \qquad A_0 - \frac{p - \lambda p_1}{q - \lambda q_1} A_1 = 0,$$

und die Gleichung 20) ist wieder die Bedingung, unter welcher zwei entsprechende Punkte der beiden Punktesysteme zusammenfallen. Aus der Interpretation der Gleichung 20) entspringen, wie bereits angedeutet worden, die Sätze:

22) ... Wenn zwei homographische Strahlenbüschel beliebig concentrisch auf einander gelegt werden, so fallen im Allgemeinen zwei Mal entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammen. Wenn drei Mal entsprechende Strahlen zusammenfallen, so fallen jede zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammen.

23) ... Wenn zwei homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien auf einander gelegt werden, so vereinigen sich im Allgemeinen zwei Mal entsprechende Punkte der beiden Systeme. Wenn drei Mal entsprechende Punkte sich vereinigen, so vereinigen sich jede zwei entsprechende Punkte der beiden Systeme.

Die beiden Strahlen, in welchen sich zwei entsprechende Strahlen concentrisch auf einander gelegter homographischer Strahlenbüschel vereinigen, heissen Doppelstrahlen der Strahlenbüschel.

Die beiden Punkte, in welchen sich zwei entsprechende Punkte der auf einander gelegten homographischen Punktesysteme vereinigen, heissen Doppelpunkte der beiden Systeme.

Die Gleichungen 19) und 21) concentrisch auf einander gelegter Strahlenbüschel und in eine gerade Linie gelegter homographischer Punktesysteme haben nicht die einfachste Gestalt, auf welche sie zurückgeführt werden können. Um sie darauf zurückzuführen dienen die Sätze 22) und 23).

In dem ersten Strahlenbüschel 19) waren $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Strahlen, an welche sich der ganze Strahlenbüschel anlehnte. Diese beiden Strahlen konnten aus den Strahlen des Büschels beliebig gewählt werden. Wir werden jetzt für dieselben die beiden Doppelstrahlen der beiden Büschel 19) wählen.

In dieser Voraussetzung müssen sowohl für $\lambda = 0$ als für $\lambda = \infty$ die beiden Strahlen 19) zusammenfallen. In dem ersten Falle muss $p = 0$, in dem anderen $q_1 = 0$ sein. Setzen wir demnach $\frac{p_1}{q} = -\alpha$, so führen wir die Gleichungen 19) zurück auf die einfachere Form:

24) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 - \lambda \alpha U_1 = 0,$

Ebenso nehmen die Gleichungen zweier homographischen Punktesysteme auf einander gelegt die Gestalt an:

25) . . . . $A_0 - \lambda A_1 = 0, \qquad A_0 - \lambda \alpha A_1 = 0,$

wenn $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen der Doppelpunkte der beiden Systeme sind.

Aus der Ansicht dieser Gleichungen 24) und 25) lassen sich sogleich die Sätze abnehmen:

26) ... In zwei concentrisch auf einander gelegten homographischen Strahlenbüscheln haben je zwei entsprechende Strahlen dasselbe anharmonische Verhältniss zu den beiden Doppelstrahlen der Strahlenbüschel.

27) ... In zwei auf einander gelegten homographischen Punktesystemen haben je zwei entsprechende Punkte dasselbe anharmonische Verhältniss zu den beiden Doppelpunkten der Systeme.

Wenn einer der beiden concentrischen Strahlenbüschel 24) um das gemeinschaftliche Centrum gedreht wird, so ändern sich die Doppelstrahlen $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ und voraussichtlich auch das anharmonische Verhältniss α. Ebenso ändern sich die Doppelpunkte $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ und voraussichtlich das anharmonische Verhältniss α, wenn die beiden auf einander liegenden Punktesysteme 25) auf derselben geraden Linie gegen einander verschoben werden. Wir werden nun untersuchen, ob im ersten Falle durch eine bestimmte Drehung und im anderen Falle durch eine bestimmte Verschiebung das genannte anharmonische Verhältniss in ein harmonisches übergeführt werden kann.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Feststellung der Bedingung, unter welcher die entsprechenden Strahlen zweier concentrisch auf einander liegenden Strahlenbüschel 19) harmonisch sind mit den Doppelstrahlen.

Die genannten Strahlenbüschel lassen sich so ausdrücken:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 - \mu U_1 = 0,$$

indem man hat:

$$p - \lambda p_1 - \mu q + \lambda \mu q_1 = 0.$$

In der Voraussetzung, dass $p_1 = q$ geht diese Gleichung über in:

$$p - (\lambda + \mu) q + \lambda \mu q_1 = 0.$$

Da sich nun zwei Grössen λ_1 und μ_1 so bestimmen lassen, dass:

$$\frac{p}{q_1} = \lambda_1 \mu_1, \qquad \frac{q}{q_1} = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1),$$

so geht die letzte Gleichung dadurch über in die bekannte Bedingungsgleichung für harmonische Strahlenpaare:

$$\lambda_1 \mu_1 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda \mu = 0.$$

Das heisst, unter der gemachten Voraussetzung $p_1 = q$ sind je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel harmonisch mit einem bestimmten Strahlenpaare, den Doppelstrahlen.

Diese und eine analoge Untersuchung an zwei auf einander liegenden homographischen Punktesystemen 21) führen zu den Sätzen:

28) . . . In zwei concentrisch auf einander gelegten Strahlenbüscheln 19) sind je zwei entsprechende Strahlen harmonisch mit den beiden Doppelstrahlen unter der Bedingung $p_1 = q$.

29) . . . In zwei auf einander gelegten homographischen Punktesystemen sind je zwei entsprechende Punkte harmonisch mit den beiden Doppelpunkten unter der Bedingung $p_1 = q$.

Die oben angegebene Untersuchung verlangt ferner die Lösung der folgenden Aufgabe:

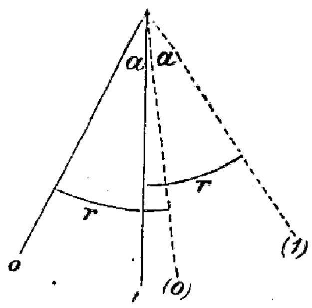
30) . . . Wenn ein durch seine Gleichung:

30) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0$

gegebener Strahlenbüschel um sein Centrum und um einen bestimmten Winkel r gedreht wird, die Gleichung des Strahlenbüschels nach seiner Drehung zu bestimmen.

Wir können annehmen, dass $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$, die Gleichungen der Strahlen 0 und 1 des gegebenen Strahlenbüschels, die Normalform haben. Im anderen Falle würden wir in der Gleichung 30) durch Multiplication mit gewissen Factoren die Ausdrücke U_0 und U_1 auf die Normalformen zurückzuführen und die Factoren mit der Variabeln λ zu einer neuen Variable vereinigen.

Unter der angegebenen Voraussetzung werden wir die fest mit einander verbundenen Strahlen 0 und 1, die den Winkel a einschliessen, um einen Winkel r drehen, wie die Figur zeigt: und die Gleichungen dieser Strahlen in der neuen Lage [0] und [1] analytisch ausdrücken.



Ihre analytischen Ausdrücke haben die Form 30) und für jeden derselben hat der Factor λ die bekannte geometrische Bedeutung, nach welcher sich die Gleichungen der gedrehten Strahlen ergeben:

$$U_0 \sin(r - a) - U_1 \sin r = 0,$$
$$U_0 \sin r - U_1 \sin(r + a) = 0.$$

Diese Gleichungen haben jedoch nicht die Normalformen. Sie werden auf dieselben zurückgeführt durch Division mit gewissen Factoren μ_0 und μ_1, deren Quadrate sich nach bekannten Regeln darstellen wie folgt:

$$\mu_0{}^2 = \sin^2(r - a) - 2\cos a \sin(r - a) \sin r + \sin^2 r = \sin^2 a,$$
$$\mu_1{}^2 = \sin^2(r + a) - 2\cos a \sin(r + a) \sin r + \sin^2 r = \sin^2 a.$$

Aus den Normalformen der Gleichungen der Strahlen [0] und [1] setzen wir nun in Berücksichtigung der geometrischen Bedeutung des Factors λ die Gleichung des Strahlenbüschels 30) nach der Drehung um den Winkel r so zusammen:

31) $$\{U_0 \sin(r - a) - U_1 \sin r\} - \lambda \{U_0 \sin r - U_1 \sin(r + a)\} = 0.$$

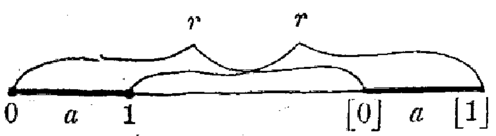
An die vorhergehende Aufgabe schliesst sich nun die analoge Aufgabe an:

32) . . . Wenn ein durch seine Gleichung

32) . . . . $$A_0 - \lambda A_1 = 0$$

gegebenes Punktesystem auf einer geraden Linie in dieser Linie um die Entfernung r verschoben wird, die Gleichung des verschobenen Punktesystemes zu finden.

Auch hier werden wir annehmen, dass $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen der Punkte 0 und 1 in der Normalform seien und a die Entfernung der beiden Punkte von einander. Durch Verschiebung um r auf der geraden Linie mögen die Punkte 0 und 1 in die Lage von [0] und [1] kommen.



Die Gleichungen der Punkte [0] und [1] sind von der Form 32), und, wenn man für den Factor λ die diesen Punkten entsprechenden Werthe setzt, so hat man die Gleichungen der Punkte [0] und [1]:

$$A_0(r - a) - A_1 r = 0, \qquad A_0 r - A_1(r + a) = 0.$$

Wir führen dieselben auf die Normalform zurück durch Division mit μ_0 und μ_1:

$$\mu_0 = (r - a) - r = - a, \qquad \mu_1 = r - (r + a) = - a$$

und aus diesen Gleichungen der Punkte [0] und [1] in der Normalform setzen wir in Erinnerung der geometrischen Bedeutung des Factors λ die Gleichung des um r verschobenen Punktesystemes 32) zusammen, wie folgt:

33) . . $\left\{A_0 (r - a) - A_1 r\right\} - \lambda \left\{A_0 r - A_1 (r + a)\right\} = 0.$

Diese Aufgaben sind gelöset worden, um in Gemeinschaft mit den Sätzen 28) und 29) die oben angeregten Fragen zu entscheiden, erstens, ob durch Drehung eines von zwei concentrischen homographischen Strahlenbüscheln eine solche Lage herbeigeführt werden kann, dass jedes Paar entsprechender Strahlen der beiden Büschel harmonisch sei mit den Doppelstrahlen und zweitens, ob durch Verschiebung eines von zwei auf einander liegenden homographischen Punktesystemen eine Lage erreicht werden kann, in der je zwei entsprechende Punkte der beiden Systeme harmonisch seien mit den Doppelpunkten der Systeme.

Zu dem angegebenen Zwecke drehen wir von den beliebig concentrisch auf einander gelegten homographischen Strahlenbüscheln 24) den zweiten um das gemeinschaftliche Centrum und um einen beliebigen Winkel r. Unter der Voraussetzung, dass U_0 und U_1 die Normalformen dieser Ausdrücke seien, geht dann die Gleichung jenes Strahlenbüschels über in eine Gleichung, die man aus 31) erhält, wenn man $\lambda\alpha$ für λ setzt:

34) $\left\{U_0 \sin (r - a) - U_1 \sin r\right\} - \lambda\alpha \left\{U_0 \sin r - U_1 \sin (r + a)\right\} = 0.$

Die Bedingung, unter welcher die entsprechenden Strahlen dieses gedrehten und des ersten homographischen Strahlenbüschels 24) harmonisch seien mit den Doppelstrahlen der beiden Büschel, lässt sich nach dem Satze 28) abnehmen:

$$\alpha \sin (r + a) = \sin (r - a),$$

woraus sich die Tangente des Drehungswinkels r ergiebt, der der Bedingung entspricht:

35) . . . . $\operatorname{tg} r = \dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cdot \operatorname{tg} a.$

Verschieben wir von zwei in einer geraden Linie auf einander gelegten homographischen Punktesystemen 25) das zweite System um r, so erhalten wir unter der Voraussetzung, dass A_0 und A_1 die Normalformen bezeichnen, die Gleichung des verschobenen Punktesystemes aus 33), wenn wir $\lambda\alpha$ für λ setzen:

36) . . $\left\{A_0 (r - a) - A_1 r\right\} - \lambda\alpha \left\{A_0 r - A_1 (r + a)\right\} = 0$

und daraus nach Satz 29) die Bedingung:

37) . . . . $r = \dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cdot a,$

unter welcher die entsprechenden Punkte des ersten Punktesystems 25) und des zweiten um r verschobenen homographischen Punktesystems harmonisch sind mit den Doppelpunkten der Systeme.

Es lässt sich also das anharmonische Verhältniss α für zwei concentrisch auf einander gelegte homographische Strahlenbüschel 24) durch Drehung des zweiten Strahlenbüschels um das gemeinschaftliche Centrum und um einen Winkel r, bestimmt durch die Gleichung 35), auf ein harmonisches zurückführen, selbst wenn $\alpha = 1$, in welchem Falle die Strahlenbüschel 35) congruent sind und sich in congruenter Lage befinden. In diesem Falle ist der Drehungswinkel r nach 35) ein rechter Winkel.

Ebenso lässt sich das anharmonische Verhältniss α für zwei auf einander gelegte homographische Punktesysteme 25) auf einer geraden Linie durch eine bestimmte Verschiebung r in der geraden Linie, ausgedrückt durch die Gleichung 37), auf ein harmonisches Verhältniss zurückführen. In dem Falle $\alpha = 1$ sind die homographischen Punktesysteme 25) congruent und in congruenter Lage. In diesem Falle rücken die endlichen Punkte durch die Verschiebung in's Unendliche.

Um die Resultate der letzten Untersuchungen kurz zusammen zu fassen, dienen die folgenden Definitionen.

Alle Linienpaare, welche harmonisch sind mit einem beliebig gegebenen Linienpaare, bilden einen **involutorischen Strahlenbüschel**, so genannt, weil je drei von den Linienpaaren eine Involution bilden.

Alle Punktepaare, welche harmonisch sind mit einem beliebig gegebenen Punktepaare, bilden ein **involutorisches Punktesystem** auf einer geraden Linie, weil je drei von jenem Punktepaare eine Involution bilden.

Hiernach haben wir die Sätze:

38) . . . **Jede zwei homographische Strahlenbüschel lassen sich concentrisch so auf einander legen, dass die entsprechenden Strahlen der beiden Systeme gepaart einen involutorischen Strahlenbüschel bilden.**

39) . . . **Jede zwei homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien lassen sich in einer geraden Linie so verlegen, dass die entsprechenden Punkte der beiden Systeme gepaart ein involutorisches Punktesystem auf einer geraden Linie bilden.**

Da sich nun jeder involutorische Strahlenbüschel in zwei homographische Strahlenbüschel 24) mit dem Werthe $\alpha = -1$ auflöset und eben so jedes involutorische Punktesystem auf einer geraden Linie in zwei homographische Punktesysteme 25) mit dem Werthe $\alpha = -1$ getrennt werden kann, so hat man auch die umgekehrten Sätze:

40) . . . Wenn man in einem beliebigen involutorischen Strahlenbüschel den einen Strahl eines jeden Strahlenpaares als einem Strahlenbüschel zugehörig betrachtet, den anderen einem zweiten Strahlenbüschel zugehörig und dem ersten Strahle entsprechend, und die beiden Strahlenbüschel in der Ebene beliebig verlegt, so hat man homographische Strahlenbüschel der allgemeinsten Art.

41) . . . Wenn man in einem beliebigen involutorischen Punktesysteme auf einer geraden Linie den einen Punkt eines jeden Punktepaares als einem Punktesystem zugehörig betrachtet, den anderen einem zweiten Punktesysteme zugehörig und dem ersten Punkte entsprechend, und die beiden Punktesysteme in der Ebene beliebig verlegt, so hat man homographische Punktesysteme der allgemeinsten Art.

Zweite Vorlesung.

Erzeugung der Kegelschnitte durch homographische Systeme.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung gesehen, dass irgend zwei homographische Strahlenbüschel sich analytisch durch Gleichungen von der Form ausdrücken lassen:

1) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad V_0 - \lambda V_1 = 0,$

indem dieselben für den gleichen Werth von λ in beiden Gleichungen die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel darstellen.

Man erhält hieraus die Gleichung des geometrischen Ortes der Schnittpunkte entsprechender Strahlen, wenn man λ eliminirt:

2) . . . . $U_0 V_1 - U_1 V_0 = 0$

die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die Centra der beiden homographischen Büschel geht, weil die Gleichung 2) ebenso für $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ als für $V_0 = 0$ und $V_1 = 0$ erfüllt wird.

Auf diese Form 2) lässt sich die Gleichung jedes beliebigen Kegelschnittes zurückführen. Denn wählt man auf dem beliebig gegebenen Kegelschnitt irgend vier Punkte und legt durch dieselben zwei Linienpaare $U_0 = 0$, $V_1 = 0$ und $U' = 0$, $V_0 = 0$, so stellt die Gleichung:

$$U_0 V_1 - \mu U' V_0 = 0$$

mit dem willkürlichen Factor μ alle möglichen Kegelschnitte dar, welche durch die vier Punkte gehen, also unter Voraussetzung des passenden Factors μ den beliebigen Kegelschnitt, dessen Gleichung in 2) übergeht, wenn man für $\mu U'$ setzt U_1. Man erkennt hieraus, dass durch die Schnitte homographischer Strahlenbüschel sich alle möglichen Kegelschnitte erzeugen und hat daher den Satz:

3) . . . Jede zwei homographische Strahlenbüschel erzeugen durch den Schnitt der entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt, auf dem die Centra der Strahlenbüschel liegen. Durch alle möglichen homographischen Strahlenbüschel werden auf diese Weise alle möglichen Kegelschnitte erzeugt.

Dieser Satz lässt sich umkehren wie folgt:

4) . . . Wenn man von zwei beliebig auf einem Kegelschnitt als Centra angenommenen Punkten Strahlen zieht nach einem variabeln Punkte, der den Kegelschnitt beschreibt, so entstehen dadurch zwei homographische Strahlenbüschel mit den beliebig auf dem Kegelschnitt angenommenen Centren.

Denn legen wir durch vier beliebig auf dem Kegelschnitt angenommene Punkte die beiden Linienpaare $U_0 = 0$, $V_1 = 0$ und $U_1 = 0$, $V_0 = 0$, so können wir die Gleichung des Kegelschnittes auf die Form 2) bringen. Definiren wir hierauf eine neue Variable λ durch die Gleichung: $U_0 - \lambda\, U_1 = 0$, so löset sich die Gleichung 2) des gegebenen Kegelschnittes in die Gleichungen 1) auf, die zwei homographische Strahlenbüschel analytisch darstellen, deren Centra zwei von den vier auf dem Kegelschnitt angenommene Punkte sind.

Die homogenen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes p des von den homographischen Strahlenbüscheln 1) erzeugten Kegelschnittes 2) erhält man durch Berechnung aus den beiden Gleichungen 1). Man bemerkt sogleich, dass dieselben von der quadratischen Form in λ sind:

5) . . . .
$$\begin{aligned} x &= a + b\lambda + c\lambda^2 \\ y &= a_1 + b_1\lambda + c_1\lambda^2 \\ z &= a_2 + b_2\lambda + c_2\lambda^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nun die homogenen Coordinaten x, y, z aller Punkte des Kegelschnittes, wenn man für λ alle möglichen Werthe setzt.

Multipliciren wir die Gleichungen 5) der Reihe nach mit den variabeln Liniencoordinaten u, v, w und addiren, um die Gleichung des beliebigen Punktes p des Kegelschnittes zu bilden, so erhalten wir:

6) . . . . $W = A + B\lambda + C\lambda^2$

wenn wir abkürzend setzen:

7) . . . .
$$\begin{aligned} W &= xu + yv + zw, \\ A &= au + a_1v + a_2w, \\ B &= bu + b_1v + b_2w, \\ C &= cu + c_1v + c_2w. \end{aligned}$$

Hiernach ist $W = 0$, oder nach 6):

8) . . . . $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$

die Gleichung eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes 2).

Wenn wir in dieser Gleichung 8) die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ einzeln gleich 0 setzen, so erhalten wir die Gleichungen: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ von drei bestimmten Punkten, aus welchen Gleichungen durch Multiplication mit den verschiedenen Potenzen von λ und Addition wieder die Gleichung 8) eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes zusammengesetzt ist. Diese Bemerkung führt auf den Satz:

9) . . . Wenn man die Gleichungen von irgend drei Punkten multiplicirt respective mit der 0^{ten}, 1^{ten} und 2^{ten} Potenz einer variabeln Grösse λ und addirt, so erhält man die Gleichung eines beliebigen Punktes eines und desselben Kegelschnittes.

Es seien nämlich $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen von irgend drei Punkten. Die Gleichung 8) wird dann die nach dem Satze zusammengesetzte Gleichung eines Punktes sein, dessen Coordinaten durch Gleichungen von der Form 5) ausgedrückt werden. Diese Gleichungen 5) sind linear in Rücksicht auf die Potenzen λ^0, λ^1, λ^2, wenn man sich für a, a_1, a_2 gesetzt denkt $a\lambda^0$, $a_1\lambda^0$, $a_2\lambda^0$. Lösen wir die Gleichungen 5) dann nach λ^0, λ^1, λ^2 auf, so erhalten wir Gleichungen von der Form:

10) . . . . $$\begin{aligned} \lambda^0 &= A_0 x + A_1 y + A_2 z, \\ \lambda^1 &= B_0 x + B_1 y + B_2 z, \\ \lambda^2 &= C_0 x + C_1 y + C_2 z. \end{aligned}$$

Setzen wir endlich diese Werthe der Potenzen von λ in die identische Gleichung ein:

11) . . . . $\lambda^0\lambda^2 - \lambda^1\lambda^1 = 0$,

so erhalten wir die Gleichung des Kegelschnittes, von dem ein beliebiger Punkt p durch die Punktgleichung 8) dargestellt ist, weil die Coordinaten des Punktes p der beschriebenen Gleichung 11) genügen.

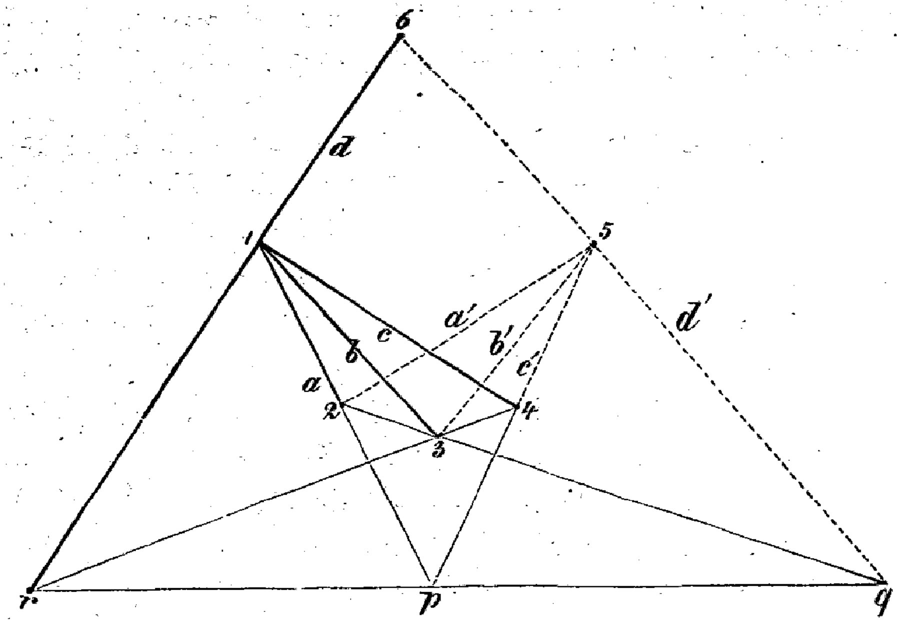
Es drücken in der That die Gleichungen 5) die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes eines Kegelschnittes aus, welche Werthe auch die neun Coefficienten a, b, c haben und durch Variation der neun Coefficienten erhält man alle möglichen Kegelschnitte.

Der oben angegebene Satz 4) von der Entstehung homographischer Strahlenbüschel durch einen Kegelschnitt in Verbindung mit dem Pascal'schen Satze, welcher lehrt alle Punkte eines Kegelschnitts linear zu construiren, von dem fünf Punkte gegeben sind, führt zu der Auflösung der Aufgabe:

12) . . . Wenn drei Strahlen eines Strahlenbüschels und die entsprechenden Strahlen eines homographischen Strahlen-

büschels gegeben sind, die übrigen entsprechenden Strahlen der beiden Büschel lineare zu construiren.

Es seien von dem einen Strahlenbüschel mit dem Centrum 1 die Strahlen a, b, c gegeben, welchen homographisch entsprechen sollen die gegebenen Strahlen a', b', c' eines zweiten Strahlenbüschels mit dem Centrum 5. Der einem beliebigen Strahle d des ersten Strahlenbüschels entsprechende Strahl d' des zweiten Strahlenbüschels ist zu construiren.



Die drei gegebenen Strahlen des ersten Büschels schneiden die entsprechenden Strahlen des zweiten homographischen Strahlenbüschels in den Punkten 2, 3, 4. Durch die fünf Punkte 1 2 . . . 5 lässt sich nun ein Kegelschnitt legen, der von dem gegebenen Strahle d des ersten Strahlenbüschels in einem Punkte 6 geschnitten wird. Diesen Punkt 6 zu construiren wird die Aufgabe sein, denn der Strahl d' des zweiten Büschels, der die Punkte 6 und 5 verbindet, entspricht nach dem Satze 4) homographisch dem Strahle d des ersten Büschels.

Wir lösen nun die genannte Aufgabe, wenn wir den Schnittpunkt r der geraden Linie d und 3 4 durch eine gerade Linie verbinden mit dem Schnittpunkte p der Strahlen a und c'. Diese geraden Linien werden in q von der geraden Linie 2 3 geschnitten. Die Verbindungslinie d' von q und 5 schneidet nach dem Pascal'schen Satze den Strahl d in dem gesuchten Punkte 6. Sie wird deshalb der dem Strahle d entsprechende Strahl d' des zweiten homographischen Strahlenbüschels sein.

Wollte man die Aufgabe 12) dadurch lösen, dass man die gegebenen unvollständigen Strahlenbüschel in eine perspectivische Lage bringt, wie in der vorhergehenden Vorlesung angegeben worden ist, so würde diese Construktion keine lineare genannt werden können. Die Verlegung der Strahlenbüschel in der Ebene verlangt eben andere Hülfsmittel, als das Ziehen von geraden Linien durch gegebene Punkte.

Nach dem zu der vorgetragenen Construktion verwendeten Pacal'-schen Satze lässt sich geometrisch leicht ermitteln, ob sechs Punkte in einem Kegelschnitt liegen oder nicht; aber es ermangeln noch einfache Criterien für die Gleichungen von sechs Punkten, die in einem Kegelschnitt liegen. Solche Criterien im Anschlusse an das Vorhergehende festzustellen, wird der Zweck der folgenden Untersuchung sein.

Man hat gesehen, dass $W=0$ die Gleichung eines beliebigen Punktes, eines und desselben Kegelschnittes ist, wenn W definirt wird durch die Gleichung 6), die wir hier wiederholen:

13) . . . . $$W = A + B\lambda + C\lambda^2.$$

Hiernach werden irgend sechs Punkte 1, 2, ... 6 eines Kegelschnittes durch die Gleichungen ausgedrückt:

14) . . . . $$W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \quad \ldots \quad W_6 = 0,$$

wenn wir unter W_1, W_2, ... W_6 die Ausdrücke verstehen:

15) . . . . $$\begin{aligned} W_1 &= A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2, \\ W_2 &= A + B\lambda_2 + C\lambda_2^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_6 &= A + B\lambda_6 + C\lambda_6^2, \end{aligned}$$

in welchen die sechs Grössen λ irgend welche sechs Werthe der Variable λ in 13) bedeuten.

Zwischen den angegebenen sechs Ausdrücken W existiren merkwürdige Relationen, die sich sehr einfach ergeben aus dem in der sechsten Vorlesung meiner Geometrie in der Ebene vorgetragenen algebraischen Satz 13).

„Wenn man mit π_1, π_2, ... π_6 die Produkte der Differenzen von „irgend sechs Grössen λ_1, λ_2, ... λ_6 bezeichnet:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_6), \\ \pi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)\ldots(\lambda_2 - \lambda_6), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_6 &= (\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2)\ldots(\lambda_6 - \lambda_5), \end{aligned}$$

„wenn ferner $\varphi(\lambda)$ irgend eine ganze Function von λ des vierten Grades „ist, so hat man identisch:

16) . . . . $$\frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} + \ldots \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0.\text{“}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varphi(\lambda) = W^2$, so führt das zu dem Satze:

17) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Punkten eines Kegelschnittes sind, so lassen sich sechs Grössen π_1, π_2, ... π_6 der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$17) \quad \ldots \ldots \quad \frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \ldots \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

Während in 15) die sechs Ausdrücke W eine ganz bestimmte Form hatten, so wird dieses in dem angegebenen Satze nicht mehr verlangt. Welche Form die sechs Ausdrücke W auch haben, durch Multiplication mit geeigneten constanten Factoren lassen sie sich immer auf die Form 15) zurückführen. Die Quadrate dieser constanten Factoren sind in dem Satze mit den angegebenen Ausdrücken π verschmolzen. Deshalb haben auch auch die Ausdrücke π in dem Satze 17) nicht mehr die frühere Bedeutung der Produkte der Differenzen der sechs Grössen λ.

Wir wollen noch einen zweiten Beweis des Satzes 17), unabhängig von dem algebraischen Satze 16), folgen lassen, der zugleich die Umkehrung des Satzes vorbereitet.

Zu diesem Zwecke werden wir annehmen, dass $W_1=0$, $W_2=0$, ... $W_6=0$ die Gleichungen von irgend sechs Punkten 1, 2, ... 6 eines Kegelschnittes seien, deren homogene Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_3$ ... $x_6\, y_6\, z_6$ aus den Gleichungen nach bekannter Regel entnommen werden. Liegen die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt:

$$a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + \ldots a_{22}z^2 = 0,$$

so müssen die angegebenen Coordinaten den sechs Bedingungen genügen:

$$18) \quad \ldots \quad \begin{array}{l} a_{00}x_1^2 + 2a_{01}x_1y_1 + \ldots a_{22}z_1^2 = 0, \\ a_{00}x_2^2 + 2a_{01}x_2y_2 + \ldots a_{22}z_2^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{00}x_6^2 + 2a_{01}x_6y_6 + \ldots a_{22}z_6^2 = 0. \end{array}$$

Es lassen sich nun sechs Grössen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_6$ immer so bestimmen, dass fünf von den folgenden sechs Gleichungen erfüllt werden:

$$19) \quad \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} \frac{x_1^2}{\pi_1} + \frac{x_2^2}{\pi_2} + \ldots \frac{x_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \frac{y_1^2}{\pi_1} + \frac{y_2^2}{\pi_2} + \ldots \frac{y_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \frac{z_1^2}{\pi_1} + \frac{z_2^2}{\pi_2} + \ldots \frac{z_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \frac{y_1 z_1}{\pi_1} + \frac{y_2 z_2}{\pi_2} + \ldots \frac{y_6 z_6}{\pi_6} = 0, \\ \frac{z_1 x_1}{\pi_1} + \frac{y_2 x_2}{\pi_2} + \ldots \frac{z_6 x_6}{\pi_6} = 0, \\ \frac{x_1 y_1}{\pi_1} + \frac{x_2 y_2}{\pi_2} + \ldots \frac{x_6 y_6}{\pi_6} = 0. \end{array}$$

Dividirt man die vorhergehenden Gleichungen 18) der Reihe nach durch $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_6$ und addirt in vertikaler Richtung, so sieht man, dass auch die sechste Gleichung des Systemes 19) erfüllt wird, wenn fünf derselben erfüllt werden.

Die Systeme Gleichungen 18) und 19) sind hiernach äquivalent. Indem sie auf einander zurückgeführt werden können, drückt jedes derselben, wenn man in dem ersten die sechs Coefficienten a und in dem anderen die sechs Grössen π unbestimmt lässt, nichts aus, als dass die sechs Punkte 1, 2, ... 6 in einem Kegelschnitt liegen.

Multiplicirt man aber die Gleichungen 19) der Reihe nach mit u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$ und addirt wieder in vertikaler Richtung, so erhält man aus den Bedingungen 19) für die sechs Punkte 1, 2, ... 6 eines Kegelschnitts die identische Gleichung 17), welche umgekehrt wieder in die sechs Bedingungsgleichungen 19) zerfällt.

Da die identische Gleichung 17) sich aber in die Bedingungsgleichungen 19) für die sechs Punkte eines Kegelschnittes auflöset, so ist damit zugleich der umgekehrte Satz 17) bewiesen:

20) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs Punkten sind und wenn die linken Theile dieser Gleichungen einer identischen Gleichung von der Form 17) genügen, so liegen die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Die Gleichung 17) ist eine quadratische in den sechs Ausdrücken W, hervorgegangen aus der identischen Gleichung 16) durch die Substitution $\varphi(\lambda) = W^2$. Aus derselben identischen Gleichung 16) ergeben sich aber noch lineare identische Gleichungen in den sechs Ausdrücken W, wenn man für $\varphi(\lambda)$ nacheinander setzt:

$$W, \qquad \lambda W, \qquad \lambda^2 W$$

nämlich die Gleichungen:

$$21) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{1}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 &= 0. \end{aligned}$$

Verschmelzen wir wieder die Produkte π mit den ihnen entsprechenden Ausdrücken W, so können wir hiernach sagen:

22) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Punkten eines Kegelschnittes sind, so lassen sich immer sechs Grössen π und sechs andere Grössen λ der Art bestimmen, dass die Gleichungen 21) identische werden.

Der Satz lässt sich auch umkehren wie folgt:

23) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs Punkten sind, und wenn sich sechs Grössen π und

sechs andere Grössen λ der Art bestimmen lassen, dass die Gleichungen 21) identische werden, so liegen die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Den Beweis des Satzes werden wir dadurch führen, dass wir unter Voraussetzung der Bedingungen 21) nachweisen, dass die sechs Punkte 1, 2, ... 6, um welche es sich handelt, die Ecken eines Pascal'schen Sechsecks bilden, dessen gegenüberliegende Seiten sich paarweise in drei Punkte p, q, r der vorhergehenden Figur schneiden, welche in einer geraden Linie liegen.

Durch Elimination von zwei Symbolen W aus den identischen Gleichungen 21) lassen sich andere identische Gleichungen bilden, welche nur vier von diesen Symbolen enthalten. Multipliciren wir, um W_5 und W_6 zu eliminiren, die Gleichungen der Reihe nach mit

$$\lambda_5 \lambda_6, \qquad -(\lambda_5 + \lambda_6), \qquad 1$$

und addiren, so erhalten wir:

$$24) \ldots \quad (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} = 0.$$

Auf diese Weise ergeben sich aus 21) durch Elimination von W_3 und W_6 oder von W_1 und W_4 oder von W_2 und W_5 die identischen Gleichungen:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} + (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5} = 0,$$

$$25) \ldots \quad (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_1)\frac{W_5}{\pi_5} + (\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_1)\frac{W_6}{\pi_6} = 0,$$

$$(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4} + (\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_2)\frac{W_6}{\pi_6} + (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{W_1}{\pi_1} = 0,$$

welche den Beweis liefern, dass folgende Gleichungen die drei Punkte p, q, r analytisch ausdrücken:

$$p) \ldots \quad (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} = 0,$$

$$q) \ldots \quad (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3} = 0,$$

$$r) \ldots \quad (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4} = 0.$$

Multiplicirt man nun diese Punktgleichungen der Reihe nach mit:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_5), \qquad (\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_5), \qquad (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)$$

und addirt, so erhält man die mit $(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)$ multiplicirte identische Gleichung 24). Da diese Gleichung aber eine identische ist, so liegen die drei Punkte p, q, r auf einer geraden Linie.

Es sei noch eines Systemes linearer identischer Gleichungen erwähnt, welches gleichfalls die Bedingungen für sechs Punkte eines Kegelschnitts ausdrückt:

$$26) \quad \begin{aligned} \frac{x_1}{\pi_1} W_1 + \frac{x_2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{x_6}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{y_1}{\pi_1} W_1 + \frac{y_2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{y_6}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{z_1}{\pi_1} W_1 + \frac{z_2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{z_6}{\pi_6} W_6 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen componiren sich leicht aus den Gleichungen 19), können aber auch durch Differentiation nach den Variabeln u, v, w aus der identischen Gleichung 17) abgeleitet werden. In ihnen bedeuten $x_1, y_1, z_1, \ldots$ die homogenen Coordinaten der sechs Punkte, die sich nach bekannter Regel aus ihren Gleichungen $W_1 = 0 \ldots$ abnehmen lassen, und die π bedeuten sechs zu bestimmende Grössen.

Es wird Vortheil bringen, bei den identischen Gleichungen 17) und und 21), wie wir sie aus dem algebraischen Satze 16) abgeleitet haben, noch zu verweilen. Wir wiederholen deshalb die Bedeutung der sechs Grössen π in ihnen als die angegebenen Produkte der Differenzen der sechs willkürlichen Grössen λ, der sechs Ausdrücke W in 15) und der drei Ausdrücke A, B, C in 7). Wir nannten die Gleichungen 17) und 21) identische, und verstanden darunter, dass sie für alle Werthe der Variabeln u, v, w erfüllt werden.

Diese Gleichungen 17) und 21) bleiben identische, wenn man für die Variabeln u, v, w nach 17): $A = au + a_1 v + a_2 w$, $B = bu + b_1 v + b_2 w$, $C = cu + c_1 v + c_2 w$ die Variabeln A, B, C einführt. In dieser Form verificiren sie sich sogleich durch den algebraischen Satz 16) und können eben so leicht auf einander zurückgeführt werden. Die identische Gleichung 17) zerfällt nämlich nach Einführung der neuen Variabeln A, B, C in sechs Gleichungen, aus deren Composition sich die identischen Gleichungen 21) ergaben und die Gleichung 17) geht umgekehrt aus den Gleichungen 21) hervor durch Multiplication respective mit A, B, C und Addition. Durch Differentiation der identischen Gleichung 17) nach den neuen Variabeln werden ebenfalls die Gleichungen 21) erhalten.

Die Gleichungen 17) und 21) bleiben auch identische Gleichungen, wenn man für die unabhänigen Variabeln A, B, C die Variabeln W_1, W_3, W_5 einführt durch die aus 15) entnommenen Gleichungen:

27) . . . $W_1 = A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2$, $W_3 = A + B\lambda_3 + C\lambda_3^2$, $W_5 = A + B\lambda_5 + C\lambda_5^2$.

Betrachten wir nun die Variabeln W_1, W_3, W_5 als die unabhängigen Variabeln, so sind durch die Gleichungen 21) die Variabeln W_2, W_4, W_6 gegebene lineare Functionen der unabhängigen Variabeln W_1, W_3, W_5, welche in die Gleichung 17) eingesetzt diese zu einer identischen machen. Wenn wir demnach die Bedeutung der sechs Grössen π als die Produkte der Differenzen der sechs willkürlichen Constanten festhalten, so können wir allgemein sagen:

28) . . . Wenn irgend 6 Variabele W_1, W_2, . . . W_6 durch drei lineare Gleichungen von der Form 21) mit einander verbunden sind, so sind dadurch drei von den Variabeln als Functionen der drei anderen der Art bestimmt, dass sie in die Gleichung 17) eingesetzt diese Gleichung zu einer identischen machen.

Da die Gleichungen 21) linear sind, die Gleichung 17) aber aus den Quadraten der Variabeln zusammengesetzt, so erinnert der angegebene Satz an das Problem der Raumgeometrie, der Transformation der rechtwinkligen Coordinaten, welches algebraisch ausgedrückt verlangt: Die Substitutionen für drei abhängige Variabeln als lineare Ausdrücke von drei unabhängigen Variabeln zu bestimmen, welche die Summe der Quadrate der drei abhängigen Variabeln in die Summe der Quadrate der drei unabhängigen Variabeln transformiren.

Hier liegt ein ähnlicher Fall vor, der einzige Unterschied ist der, dass die Quadrate der Variabeln in 17) noch ganz bestimmte Coefficienten haben. Da sich aber der genannte Unterschied durch geeignete Substitutionen beseitigen lässt, so sind wir in der Lage, jenes Raumproblem algebraisch zu behandeln ohne weitere Raumbetrachtungen herbeizuziehen.

Wir führen zu diesem Zwecke an Stelle der unabhängigen Variabeln W_1, W_3, W_5 die unabhängigen Variabeln x, y, z ein und an Stelle der abhängigen Variabeln W_2, W_4, W_6 die abhängigen Variabeln X, Y, Z, indem wir setzen:

$$29) \quad \begin{aligned} W_1 &= i\sqrt{\pi_1}\,.\,x, & W_2 &= \sqrt{\pi_2}\,.\,X,\\ W_3 &= i\sqrt{\pi_3}\,.\,y, & W_4 &= \sqrt{\pi_4}\,.\,Y,\\ W_5 &= i\sqrt{\pi_5}\,.\,z, & W_6 &= \sqrt{\pi_6}\,.\,Z. \end{aligned}$$

Dadurch geht die identische Gleichung 17) über in:

$$30) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und die Gleichungen 21) in:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi_2}}X + \frac{1}{\sqrt{\pi_4}}Y + \frac{1}{\sqrt{\pi_6}}Z = \frac{1}{i\sqrt{\pi_1}}x + \frac{1}{i\sqrt{\pi_3}}y + \frac{1}{i\sqrt{\pi_5}}z,\\
31)\ \ldots\ &\frac{\lambda_2}{\sqrt{\pi_2}}X + \frac{\lambda_4}{\sqrt{\pi_4}}Y + \frac{\lambda_6}{\sqrt{\pi_6}}Z = \frac{\lambda_1}{i\sqrt{\pi_1}}x + \frac{\lambda_3}{i\sqrt{\pi_3}}y + \frac{\lambda_5}{i\sqrt{\pi_5}}z,\\
&\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\pi_2}}X + \frac{\lambda_4^2}{\sqrt{\pi_4}}Y + \frac{\lambda_6^2}{\sqrt{\pi_6}}Z = \frac{\lambda_1^2}{i\sqrt{\pi_1}}x + \frac{\lambda_3^2}{i\sqrt{\pi_3}}y + \frac{\lambda_5^2}{i\sqrt{\pi_5}}z,
\end{aligned}$$

und der Satz 28) lässt sich nunmehr so ausdrücken:

32) ... Die Gleichungen 31) bestimmen die Substitutionen von drei abhängigen Variabeln X, Y, Z als lineare Functionen der drei unabhängigen Variabeln x, y, z, durch welche die Summe der Quadrate der drei abhängigen Variabeln übergeführt wird in die Summe der Quadrate der drei unabhängigen Variabeln.

Um die Substitutionen durch Elimination zu erhalten, multipliciren wir die Gleichungen 31) der Reihe nach mit:

$$\begin{array}{lll}
\lambda_4\lambda_6, & -(\lambda_4+\lambda_6), & 1,\\
\lambda_6\lambda_2, & -(\lambda_6+\lambda_2), & 1,\\
\lambda_2\lambda_4, & -(\lambda_2+\lambda_4), & 1,
\end{array}$$

und addiren. Dadurch erhalten wir die Substitutionen selbst:

$$33)\ \ldots\ldots\quad \begin{aligned}
X &= a x + b y + c z,\\
Y &= a' x + b' y + c' z,\\
Z &= a'' x + b'' y + c'' z,
\end{aligned}$$

indem wir haben:

$$34)\quad \begin{aligned}
a &= \frac{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_2}}{i\sqrt{\pi_1}}, & b &= \frac{(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_2}}{i\sqrt{\pi_3}}\\
a' &= \frac{(\lambda_1-\lambda_6)(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_4}}{i\sqrt{\pi_1}}, & b' &= \frac{(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_4}}{i\sqrt{\pi_3}}\\
a'' &= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_6}}{i\sqrt{\pi_1}}, & b'' &= \frac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_6}}{i\sqrt{\pi_3}}\\
c &= \frac{(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_2}}{i\sqrt{\pi_5}}, \\
c' &= \frac{(\lambda_5-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_4}}{i\sqrt{\pi_5}}, \\
c'' &= \frac{(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)}\cdot\frac{\sqrt{\pi_6}}{i\sqrt{\pi_5}}.
\end{aligned}$$

Diesen Ausdrücken der neun Coefficienten in den Substitutionen geben wir noch eine andere Gestalt, indem wir für $\sqrt{\pi_1}, \ldots \sqrt{\pi_6}$ respective setzen $\frac{\pi_1}{\sqrt{\pi_1}}, \ldots \frac{\pi_6}{\sqrt{\pi_6}}$ und den von den Quadratwurzelzeichen freien Grössen π ihre Werthe zuertheilen:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_2}}, & b &= \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\,(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)\,(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_2}} \\
a' &= \frac{(\lambda_4-\lambda_3)\,(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_4}}, & b' &= \frac{(\lambda_4-\lambda_1)\,(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)\,(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_4}} \\
a'' &= \frac{(\lambda_6-\lambda_3)\,(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_6}}, & b'' &= \frac{(\lambda_6-\lambda_1)\,(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)\,(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_6}}
\end{aligned}
$$

35)
$$
\begin{aligned}
c &= \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\,(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)\,(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_2}}, \\
c' &= \frac{(\lambda_4-\lambda_1)\,(\lambda_4-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)\,(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_4}}, \\
c'' &= \frac{(\lambda_6-\lambda_1)\,(\lambda_6-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)\,(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_6}}.
\end{aligned}
$$

Was die Vorzeichen der sechs Quadratwurzeln $\sqrt{\pi_1}, \ldots \sqrt{\pi_6}$ anbetrifft, welche in die eben gegebenen Ausdrücke der neun Coefficienten eingehen, so können dieselben ganz willkürlich genommen werden. Bemerken wir aber, dass sämmtliche Variationen, die in den Substitutionen 33) durch die Veränderung der Vorzeichen der sechs Quadratwurzelgrössen hervorgehen, auch dadurch zu Wege gebracht werden können, dass man einer oder mehreren der sechs Variabeln die entgegengesetzten Vorzeichen zuertheilt, so können wir von diesen Variationen absehen und annehmen, dass sämmtliche Quadratwurzelgrössen das positive Vorzeichen haben.

Wir haben nun zwar die Substitutionen 33) bestimmt, welche die Gleichung 30) zu einer identischen machen, es erhebt sich aber die Frage, ob die angegebenen 33), welche wir von den sechs willkürlichen Grössen λ abhängig gemacht haben, auch die allgemeinsten seien.

Zur Beantwortung der Frage gehen wir auf die Bedingungsgleichungen zwischen den neun Coefficienten in den Substitutionen näher ein, in welche die identische Gleichung 30) nach den Substitutionen 33) sich auflöset:

36) . .
$$
\begin{aligned}
a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\
b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0, \\
c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0.
\end{aligned}
$$

Dass die Werthe 35) der Coefficienten in diese Gleichungen 36) eingesetzt denselben genügen, geht einfach daraus hervor, dass durch die Substitutionen 35) in 36) ganz dieselben Gleichungen erhalten werden, welche sich ergaben, wenn man in der identischen Gleichung für $\varphi(\lambda)$ nach einander setzt:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda-\lambda_3)^2\,(\lambda-\lambda_5)^2, && (\lambda-\lambda_5)^2\,(\lambda-\lambda_1)^2, && (\lambda-\lambda_1)^2\,(\lambda-\lambda_3)^2, \\
&(\lambda-\lambda_1)^2\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_5), && (\lambda-\lambda_3)^2\,(\lambda-\lambda_5)\,(\lambda-\lambda_1), && (\lambda-\lambda_5)^2\,(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_3).
\end{aligned}
$$

Es ist dieses nur ein Beweis a posteriori, dass die Substitutionen 33) mit den Werthen 35) der Coefficienten die Gleichung 30) zu einer identischen machen.

Aus den sechs Bedingungsgleichungen 36) zwischen den neun Coefficienten in den Substitutionen 33) lassen sich nur sechs Coefficienten fest bestimmen. Drei von ihnen können beliebig angenommen werden. Daraus folgt, dass die 9 Coefficienten in den Substitutionen 33), welche die Gleichung 30) zu einer identischen machen, sich durch nur drei Constanten ausdrücken lassen. Wir haben aber jene neun Coefficienten durch sechs willkürliche Constanten ausgedrückt. Das ist ein Paradoxon. Wir werden dasselbe dadurch lösen, dass wir zeigen, wie die sechs willkürlichen Grössen λ in den Coefficienten 34) oder 35) doch nur die Stelle von drei willkürlichen Grössen vertreten, die, wie es sein soll, in die Coefficienten eingehen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die Ausdrücke 34) oder 35) der neun Coefficienten ungeändert bleiben, wenn man erstens für alle λ_x setzt $\alpha\lambda_x$, zweitens für alle λ_x setzt $\lambda_x - \beta$ und drittens für alle λ_x setzt $\frac{1}{\lambda_x}$. Wenn wir diese Substitutionen in eine vereinigen, so können wir sagen: die neun Coefficienten 34) oder 35) der sechs Variabeln λ_x bleiben dieselben Functionen der sechs Variabeln μ_x, wenn man setzt:

$$37) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lambda_x = \frac{\alpha\mu_x + \beta}{\mu_x + \gamma},$$

also unabhängig von α, β, γ, wovon man sich auch direkt leicht überzeugen kann.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass, wenn man in den eben angegebenen Ausdrücken 34) oder 35) der neun Coefficienten irgend welchen drei Variabeln λ gegebene Werthe zuertheilt, die drei anderen aber beliebig variiren lässt, die neun Coefficienten alle Werthe annehmen, welche sie durch Variation sämmtlicher Variabeln λ erhalten würden.

Denn es sei C der Ausdruck irgend eines der neun Coefficienten und (C) der Ausdruck, in welchen C durch die Substitutionen 37) übergeht. Es ist (C) also dieselbe Function der sechs Variabeln μ_x als C der Variabeln λ_x, welche Werthe auch α, β, γ haben. Haben nun die sechs Variabeln λ_x irgend welche Werthe, so kann man, da es freisteht über die Constanten α, β, γ beliebig zu verfügen, denselben solche Werthe zuertheilen, dass drei von den sechs Variabeln μ_x auf Grund der sechs Gleichungen 37) gegebene Werthe erhalten. Da aber $C = (C)$ ist, so haben wir auf der einen Seite irgend welche Werthe der Variabeln, auf der anderen Seite gegebene Werthe von drei Variabeln.

Die Ausdrücke 34) oder 35) der neun Coefficienten hängen demnach nur von drei Grössen ab, die ganz willkürlich bleiben und die

Substitutionen 33) sind deshalb die allgemeinsten, welche die Gleichung 30) zu einer identischen Gleichung machen.

---

*) Die Substitutionen 33) mit den in 34) oder 35) angegebenen Werthen der neun Coefficienten, abhängig gemacht von nur drei beliebigen Grössen, sind bekanntlich die Transformationsformeln für rechtwinklige Raumcoordinaten. Sie haben weder die Form der Euler'schen noch der Monge'schen Transformationsformeln. Sie stehen vielmehr in einer geometrischen Verbindung mit den confocalen Oberflächen und dadurch mit den elliptischen Coordinaten. Diese Verbindung darzulegen, ist der Zweck der Anmerkung.

Es ist aus meiner Vorlesung über Raumgeometrie, welche von den confocalen Oberflächen und den elliptischen Coordinaten handelt, bekannt, dass die confocalen Oberflächen sich durch eine einzige Gleichung mit dem willkürlichen Parameter λ ausdrücken lassen:

$$\frac{x^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{y^2}{\lambda_3-\lambda}+\frac{z^2}{\lambda_5-\lambda}-1=0.$$

Wenn wir annehmen, dass $\lambda_1>\lambda_3>\lambda_5$, so stellt die angegebene Gleichung Oberflächen verschiedener Gattung dar:

Ellipsoide, wenn $\lambda=\lambda_2$ zwischen $-\infty$ und λ_5
einfache Hyperboloide, wenn $\lambda=\lambda_4$ zwischen λ_5 und λ_3
zweifache Hyperboloide, wenn $\lambda=\lambda_6$ zwischen λ_3 und λ_1.

Es ist ferner aus der citirten Vorlesung bekannt, dass alle Oberflächen derselben Gattung den ganzen unendlichen Raum erfüllen, dass aber keine zwei Oberflächen derselben Gattung sich schneiden. Dagegen schneiden sich je zwei Oberflächen verschiedener Gattung immer in reellen Punkten und zwar senkrecht.

Nehmen wir also drei confocale Oberflächen verschiedener Gattung mit den Parametern λ_2, λ_4, λ_6, so schneiden sich dieselben in 8 Punkten, und wenn wir die Coordinaten eines dieser Schnittpunkte bezeichnen mit x', y', z', so werden dieselben bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{x'^2}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{y'^2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{z'^2}{\lambda_5-\lambda_2}-1=0,$$
$$\frac{x'^2}{\lambda_1-\lambda_4}+\frac{y'^2}{\lambda_3-\lambda_4}+\frac{z'^2}{\lambda_5-\lambda_4}-1=0,$$
$$\frac{x'^2}{\lambda_1-\lambda_6}+\frac{y'^2}{\lambda_3-\lambda_6}+\frac{z'^2}{\lambda_5-\lambda_6}-1=0.$$

Die Tangentenebenen der drei Oberflächen in dem Schnittpunkte stehen auf einander senkrecht gleich wie die drei ihnen parallelen Ebenen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen:

$$\frac{x'x}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{y'y}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{z'z}{\lambda_5-\lambda_2}=0,$$
$$\frac{x'x}{\lambda_1-\lambda_4}+\frac{y'y}{\lambda_3-\lambda_4}+\frac{z'z}{\lambda_5-\lambda_4}=0,$$
$$\frac{x'x}{\lambda_1-\lambda_6}+\frac{y'y}{\lambda_3-\lambda_6}+\frac{z'z}{\lambda_5-\lambda_6}=0.$$

Diese Ebenen sind nun die Coordinatenebenen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ des zweiten durch 33) bestimmten rechtwinkligen Coordinatensystems.

Man überzeugt sich von der Richtigkeit des Gesagten, wenn man nach Vorschrift der citirten Stelle die Coordinaten x', y', z' des Schnittpunktes berechnet und in die drei letzten Gleichungen einsetzt.

Wie wir am Anfange der gegenwärtigen Vorlesung Kegelschnitte durch homographische Strahlenbüschel haben entstehen sehen, so lassen sich dem analog Kegelschnitte auch durch homographische Punktesysteme erzeugen. Die Analogie der sich daran knüpfenden Untersuchungen ist so vollständig, dass sie nach Verwechselung der Punktcoordinaten mit Liniencoordinaten einer Wiederholung der vorhergehenden Untersuchungen gleich kommen. Es werden darum nach der angegebenen Verwechselung die vorgeführten analytischen Formeln ausreichen und wir werden die sich ergebenden analogen Sätze mit gleichen Zahlen, aber in doppelten Klammern, bezeichnen.

Nach der ersten Vorlesung stellen die Gleichungen 1) der zweiten Vorlesung irgend zwei entsprechende Punkte homographischer Punktesysteme dar, wenn $U_0 = 0$, $V_0 = 0$ und $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ die Gleichungen sind von zwei Paaren entsprechender Punkte.

In dieser Voraussetzung kommen die Werthe der Liniencoordinaten, welche beiden Gleichungen 1) zugleich genügen, derjenigen geraden Linie zu, welche die beiden Punkte 1) verbindet. Die Coordinaten dieser, zugleich mit λ variabeln geraden Linie genügen der aus der Elimination von λ hervorgegangenen Gleichung 2) eines Kegelschnittes in Liniencoordinaten. Sie ist deshalb Tangente des Kegelschnittes 2).

Die beiden geraden Linien, auf welchen die homographischen Punktesysteme liegen, sind selbst Tangenten des Kegelschnittes 2), weil die Gleichung 2) erfüllt wird sowohl für $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ als für $V_0 = 0$ und $V_1 = 0$. Da sich aber die Gleichung jedes beliebigen Kegelschnittes in Liniencoordinaten auf die Form 2) zurückführen lässt, so haben wir den mit 3) analogen Satz:

((3)) ... Wenn man je zwei entsprechende Punkte von zwei homographischen Punktesystemen durch gerade Linien verbindet, so sind die Verbindungslinien Tangenten eines und desselben Kegelschnittes, der von den beiden geraden Linien berührt wird, auf welchen die homographischen Punktesysteme liegen.

Da man die Gleichung eines jeden Kegelschnittes in Liniencoordinaten immer auf die Form 2) zurückführen kann, in welcher $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ und $V_0 = 0$, $V_1 = 0$ die Gleichungen der gegenüberliegenden Ecken eines beliebigen, dem Kegelschnitt umbeschriebenen Vierecks bedeuten, und da mit Einführung der neuen Variable λ die eine Gleichung 2) in die beiden Gleichungen 1) zerfällt, so ist es erlaubt den Satz umzukehren, wie folgt:

((4)) ... Alle Tangenten eines Kegelschnittes theilen zwei beliebige unter ihnen homographisch.

Wenn wir unter x, y, z, wie diese Variabeln ursprünglich in die Gleichungen 1) eingehen, Liniencoordinaten verstehen, so erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen die homogenen Coordinaten x, y, z der Tangente des durch Liniencoordinaten ausgedrückten Kegelschnittes 2) in der Form 5). Bezeichnen wir ferner mit u, v, w variable Punktcoordinaten, so wird 8) auf Grund von 6) und 7) die Gleichung der genannten Tangente sein; was wir allgemeiner so ausdrücken:

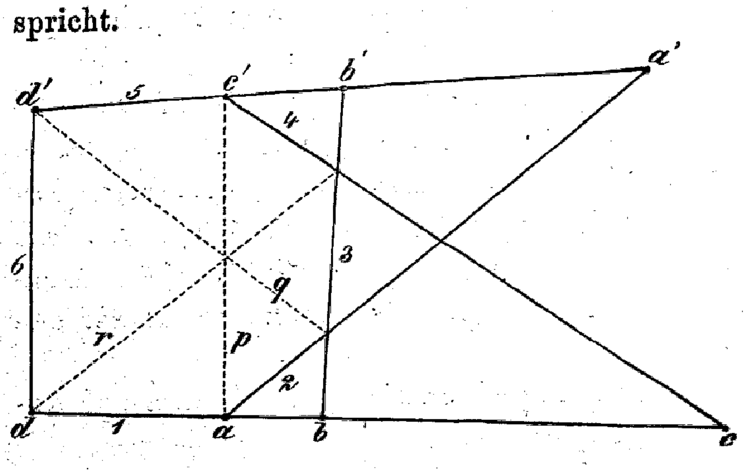
(9) . . . Wenn man die Gleichungen von irgend drei geraden Linien multiplicirt respective mit der 0^{ten}, 1^{ten} und 2^{ten} Potenz einer variabeln Grösse λ und addirt, so erhält man die Gleichung einer beliebigen Tangente eines und desselben Kegelschnittes.

Dass die Gleichungen der drei geraden Linien $A=0$, $B=0$, $C=0$, aus welchen die Gleichung 8) der Tangente zusammengesetzt ist, beliebig gewählt werden können, erhellet aus den Gleichungen 10) und 11), von welchen die letztere den Kegelschnitt in Liniencoordinaten x, y, z darstellt, welcher von der Tangente 8) berührt wird.

Der Satz (4) in Verbindung mit dem Brianchon'schen Satze, dass jedes Sechseck einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, dessen Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, sich in einem und demselben Punkte schneiden, führt zu der Lösung der folgenden Aufgabe:

(12) . . . Wenn von zwei homographischen Punktesystemen auf zwei geraden Linien drei Punkte des einen Systemes und die drei entsprechenden Punkte des anderen Systemes gegeben sind, die übrigen entsprechenden Punkte der beiden Systeme linear zu construiren.

Es seien von dem einen Punktesysteme auf der geraden Linie 1 die Punkte a, b, c gegeben und von dem anderen auf der geraden Linie 5 die ihnen homographisch entsprechenden Punkte a', b', c'. Es handelt sich darum, den Punkt d' des zweiten Systemes zu construiren, welcher einem beliebig gegebenen Punkte d des ersten Systemes entspricht.



Die Verbindungslinien 2, 3, 4 der gegebenen entsprechenden Punkte und die geraden Linien 1 und 5 bestimmen als Tangenten einen Kegelschnitt. Die Tangente 6 desselben, welche durch den gegebenen Punkt d geht, hat man zu suchen, denn sie bestimmt den gesuchten Punkt d'.

Zu diesem Zwecke ziehen wir die gerade Linie r, welche den Punkt d mit dem Schnittpunkte von 3 und 4 verbindet, und fixiren auf ihr den Punkt, in welchem sie von der geraden Linie ac' oder p getroffen wird. Verbinden wir den fixirten Punkt mit dem Schnittpunkte der geraden Linien 2 und 3 durch eine gerade Linie q, so trifft dieselbe die gerade Linie 5 in dem gesuchten Punkte d'. Denn dd' ist nach dem Brianchon'schen Satze die sechste Tangente des Kegelschnittes.

Man wird in dem Vorhergehenden zur Genüge gesehen haben, wie durch Vertauschung der Punktcoordinaten mit den Liniencoordinaten dieselben analytischen Formeln doppelt interpretirt werden können. Wenn wir in der angegebenen Richtung mit der Interpretation fortfahren, so ergeben sich daraus die Sätze:

(17) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes sind, so lassen sich sechs Grössen $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_6$ der Art bestimmen, dass man identisch hat 17).

(20) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs geraden Linien sind, und wenn die linken Theile dieser Gleichungen einer identischen Gleichung von der Form 17) genügen, so berühren die sechs geraden Linien einen Kegelschnitt.

(22) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes sind, so lassen sich immer sechs Grössen π und sechs andere Grössen λ der Art bestimmen, dass die Gleichungen 21) identische werden.

(23) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs geraden Linien sind, und wenn sich sechs Grössen π und sechs andere Grössen λ der Art bestimmen lassen, dass die Gleichungen 21) identisch werden, so berühren die sechs geraden Linien einen Kegelschnitt.

Dritte Vorlesung.

Erweiterung der Homographie.

Die in den vorhergehenden beiden Vorlesungen entwickelten Sätze paaren sich, indem jedes Paar hervorging aus einer doppelten geometrischen Interpretation derselben analytischen Formeln mit Vertauschung der Punktecoordinaten und Liniencoordinaten.

Ist demnach einer dieser Sätze bekannt, so kann man immer zu dem ihm entsprechenden Satze dadurch gelangen, dass man die analytischen Formeln aufstellt, durch welche er bewiesen wird und diese Formeln nach der bekannten Vertauschung wieder geometrisch deutet. Das ist aber ein sehr beschwerlicher Weg, um von einem gegebenen Satze zu dem ihm entsprechenden zu gelangen. Die Geometrie ersetzt deshalb die vermittelnden Formeln durch Uebertragungsprinzipe, nach welchen man aus einem gegebenen Satze den ihm entsprechenden unmittelbar ableiten kann. In unserem Falle ist das Prinzip das bekannte Reciprocitätsgesetz.

Die Uebertragungsprinzipe haben in der Geometrie eine viel grössere Bedeutung als einzelne Sätze. Denn jedes derselben führt die Zahl der Sätze in dem Umfange, in welchem es gilt, auf die Hälfte zurück; so dass man nur die eine Hälfte der Sätze und das Uebertragungsprinzip zu kennen braucht, um das ganze Feld zu beherrschen. Ueberlegen wir darum, wo man erfahrungsgemäss Uebertragungsprinzipe zu suchen hat?

Wenn wir zu diesem Zwecke aus unseren Vorlesungen irgend zwei einander entsprechende Sätze hervorheben, so sehen wir sie auf der einen Seite mit einander verbunden durch dieselben analytischen Formeln, auf der anderen Seite durch das Reciprocitätsgesetz. Irgend zwei andere entsprechende Sätze hängen auf der einen Seite von denselben, aber von den vorhergehenden verschiedenen Formeln ab, auf der anderen Seite wieder von dem Reciprocitätsgesetz. Das Reciprocitätsgesetz bleibt von einem Sätzepaare zum anderen das gleiche, die beweisenden Formeln ändern sich. Bei Sätzepaaren, die durch ein anderes Uebertragungsprincip mit einander verbunden sind, können wir dieselbe Wahrnehmung machen, dass man jedes Paar aus verschiedener Interpretation derselben analytischen Formeln hervorgehen lassen kann, aus Formeln, welche sich von einem Sätzepaar zum anderen ändern.

Dieses soll uns zu dem Schlusse berechtigen, dass überall, wo zwei geometrische Sätze aus verschiedener Interpretation derselben analytischen Formeln hervorgehen, sich ein Uebertragungsprinzip werde entdecken lassen, welches die beweisenden Formeln auch in einer grösseren Zahl von Fällen ersetzt.

Wir werden unsere Ansicht an einem Beispiele entwickeln. — Zu diesem Zwecke stellen wir den Pascal'schen Satz mit einem bekannten anderen Satze zusammen, hergenommen aus der sechsten Vorlesung über die Involution.

Die gegenüberliegenden Seiten 12, 45 und 23, 56 und 34, 61 eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseckes 12 ... 6 schneiden sich in drei Punkten p, q, r,

Wenn irgend sechs Punkte 12 ... 6 auf einer geraden Linie liegen, so giebt es ein Punktepaar $\alpha\beta$, welches gleichzeitig mit den beiden Punktepaaren 12, 45 mit den welche auf einer geraden Linie liegen. beiden Punktepaaren 23, 56 und mit den beiden Punktepaaren 34, 61 eine Involution bildet.

Diese Sätze sind nicht durch das Reciprocitätsgesetz mit einander verbunden, denn nach diesem Gesetze entspricht der Pascal'sche Satz dem Brianchon'schen. Dennoch sind sie mit einander verwandt. Den sechs auf dem Kegelschnitt gelegenen Ecken des Sechsecks entsprechen sechs Punkte auf einer geraden Linie und der Pascal'schen geraden Linie entspricht ein Punktepaar. Schon diese Verwandtschaft lässt vermuthen, dass die beiden Sätze durch ein Uebertragungsprinzip von einander abhängig gemacht werden können. Wir werden aber unsere Vermuthung noch dadurch bestätigen, dass wir beide Sätze aus verschiedener Interpretation derselben analytischen Formeln hervorgehen lassen.

Wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen von irgend drei Punkten sind, und wir setzen:

$$W = A + B\lambda + C\lambda^2$$

so stellt nach 9) der vorhergehenden Vorlesung $W = 0$ irgend einen Punkt eines und desselben Kegelschnittes dar. Daraus ergeben sich nun die Gleichungen: $W_1 = 0$, $W_2 = 0 \dots W_6 = 0$ von irgend sechs Punkten $1\ 2 \dots 6$ des Kegelschnittes, wenn man für λ setzt $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_6$, und man hat identisch 26)

$$\frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \dots \frac{1}{\pi_6} W_6 = 0$$

$$\frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \dots \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 = 0$$

$$\frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \dots \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 = 0$$

Gleichungen, welche aus der identischen Gleichung 16) hervorgingen, indem man für $\varphi(\lambda)$ setzte W oder λW oder $\lambda^2 W$.

Aus diesen Gleichungen setzt sich nun durch Multiplication mit $\lambda_3 \lambda_6$, $-(\lambda_3 + \lambda_6)$, 1 und Addition die ebenfalls identische Gleichung zusammen:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4}$$
$$+ (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5} = 0,$$

welche beweiset, dass:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} = 0$$

die Gleichung des Punktes p ist, in welchem sich die gegenüberliegenden Seiten 12, 45 des Sechsecks $1\ 2 \dots 6$ schneiden.

Um dieser Punktgleichung eine passendere Form zu geben, zerlegen wir den oben angegebenen, in λ quadratischen Ausdruck für W in seine Factoren:

$$W = C\,(\lambda - \alpha)\,(\lambda - \beta)$$

wo wir uns unter α und β allerdings irrationale Ausdrücke der Liniencoordinaten u, v, w vorzustellen haben. Mit Einführung dieses Produktes von W in die Punktgleichung und unter Berücksichtigung der Werthe von π_1 und π_2 nimmt die Gleichung des Punktes p eine Gestalt an, welche an die Bedingungsgleichung der Involution erinnert:

$$(\lambda_2 - \lambda_4)\,(\lambda_2 - \lambda_5)\,(\lambda_1 - \alpha)\,(\lambda_1 - \beta) - (\lambda_1 - \lambda_4)\,(\lambda_1 - \lambda_5)\,(\lambda_2 - \alpha)\,(\lambda_2 - \beta) = 0.$$

Denn in der That ist der linke Theil dieser Punktgleichung einer von den sieben Ausdrücken, deren Identität wir in der sechsten Vorlesung zur Involution nachgewiesen haben. Wir können daher die Gleichung des Punktes p auch so darstellen:

$$(\alpha - \lambda_1)\,(\alpha - \lambda_2)\,(\beta - \lambda_4)\,(\beta - \lambda_5) - (\alpha - \lambda_4)\,(\alpha - \lambda_5)\,(\beta - \lambda_1)\,(\beta - \lambda_2) = 0.$$

Die Irrationalität in dem linken Theile dieser Punktgleichung ist nur scheinbar, denn er lässt sich durch $\alpha - \beta$ ohne Rest dividiren, weil er eine alternirende Function der Grössen α und β ist und der Quotient wird eine symmetrische Function der beiden Wurzeln α und β, welche sich rational durch die Coefficienten in der Gleichung ausdrücken lässt, deren Wurzeln α und β sind.

Durch cyclische Vertauschung der sechs Grössen λ erhält man nun aus der letzten Gleichung folgende, in einander übergehende, Gleichungen, welche die Punkte p, q, r darstellen:

$$(\alpha - \lambda_1)\,(\alpha - \lambda_2)\,(\beta - \lambda_4)\,(\beta - \lambda_5) - (\alpha - \lambda_4)\,(\alpha - \lambda_5)\,(\beta - \lambda_1)\,(\beta - \lambda_2) = 0,$$
$$(\alpha - \lambda_2)\,(\alpha - \lambda_3)\,(\beta - \lambda_5)\,(\beta - \lambda_6) - (\alpha - \lambda_5)\,(\alpha - \lambda_6)\,(\beta - \lambda_2)\,(\beta - \lambda_3) = 0,$$
$$(\alpha - \lambda_3)\,(\alpha - \lambda_4)\,(\beta - \lambda_6)\,(\beta - \lambda_1) - (\alpha - \lambda_6)\,(\alpha - \lambda_1)\,(\beta - \lambda_3)\,(\beta - \lambda_4) = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Factoren:

$$(\alpha - \lambda_3)\,(\beta - \lambda_6) \qquad -(\alpha - \lambda_1)\,(\beta - \lambda_4) \qquad (\alpha - \lambda_5)\,(\beta - \lambda_2)$$

und addirt, so sieht man ohne die Produkte zu entwickeln, dass die Summe identisch 0 wird. Daraus schliessen wir, d a s s , w e n n v o n d e n g e n a n n t e n G l e i c h u n g e n z w e i e r f ü l l t w e r d e n , d i e d r i t t e a u c h e r f ü l l t w i r d. Denn die Annahme, dass der Factor der dritten Gleichung verschwinde, führt zu Widersprüchen in den beiden anderen Gleichungen.

Die Coordinaten u, v, w der geraden Linie, welche zwei von den drei Punkten p, q, r verbindet, genügen nun den diesen Punkten entsprechenden Gleichungen. Dass dieselben auch der dritten Gleichung genügen, beweiset eben den Pascal'schen Satz.

Dieselben drei Gleichungen beweisen zugleich den Satz, den wir neben den Pascal'schen Satz gestellt haben, wenn wir unter α und β

Grössen verstehen, die durch zwei von jenen Gleichungen bestimmt sind und demnach der dritten genügen.

Denn wenn $V_0 = 0$ und $V_1 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte bedeuten, so ist $V_0 - \lambda V_1 = 0$ die Gleichung eines beliebigen Punktes auf der Verbindungslinie der beiden Punkte. Daraus leiten wir nun die Gleichungen von irgend sechs Punkten 1, 2 . . . 6 auf der geraden Linie ab, indem wir für λ nach einander setzen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$, und die Gleichungen von noch zwei Punkten α, β, indem wir unter λ die Werthe von α und β, bestimmt durch zwei von obigen drei Gleichungen, verstehen. In dieser Auffassung drücken die drei Gleichungen aber die Bedingungen der Involutionen zwischen den 8 Punkten auf der geraden Linie aus, wie sie der zu beweisende, dem Pascal'schen beigeordnete, Satz verlangt.

Nachdem wir die beiden hervorgehobenen Sätze aus derselben analytischen Quelle abgeleitet haben, bleibt noch übrig, das geometrische Band zwischen ihnen aufzusuchen, ein Band, welches ein Punktesystem auf einer geraden Linie und ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt vereiniget. Dazu wird die folgende Erweiterung der Homographie dienen.

Unsere erste Vorlesung beschäftigte sich nur mit homographischen Strahlenbüscheln und Punktesystemen auf geraden Linien und deren Eigenschaften. Am Anfange der zweiten Vorlesung sahen wir alle Punkte eines und desselben Kegelschnittes entstehen durch den Schnitt entsprechender Strahlen irgend zweier homographischen Strahlenbüschel. Lassen wir nun einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes entsprechen demjenigen Strahle des einen Büschels, auf welchem er liegt, so haben wir eine Verbindung aller Punkte eines Kegelschnittes mit allen Strahlen eines und desselben Strahlenbüschels. Erinnern wir uns ferner an die Sätze 3) und 4), so drängt sich uns von selbst die Definition auf:

Jeder Strahlenbüschel, dessen Centrum in der Peripherie eines Kegelschnittes liegt, theilt den Kegelschnitt homographisch.

Nach dieser Definition entspricht jeder Punkt des Kegelschnittes homographisch dem Strahle des Büschels, der durch ihn geht und umgekehrt. Die Lage der beiden homographischen Gebilde heisse die perspectivische Lage, weil jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes geht und jeder Punkt des Kegelschnittes auf dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels liegt. Wir drücken dasselbe nur anders aus, wenn wir mit Rücksicht auf 3) und 4) sagen:

1) . . . Jede zwei homographische Strahlenbüschel theilen den Kegelschnitt homographisch, welchen die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen beschreiben.

Der den Kegelschnitt homographisch theilende Strahlenbüschel mag aus seiner perspectivischen Lage, in welcher sein Centrum in der Peripherie des Kegelschnittes liegt, herausgenommen und beliebig in der Ebene verlegt werden; auch in dieser schiefen Lage werden wir ihn **homographisch** nennen mit dem Punktesystem auf dem Kegelschnitt, den er vorher homographisch theilte. Aber auch jeder andere Strahlenbüschel soll **homographisch** heissen mit dem Punktesysteme auf dem Kegelschnitt, welcher homographisch ist mit dem aus der perspectivischen Lage herausgenommenen Strahlenbüschel.

Um nun die analytischen Ausdrücke für zwei entsprechende Elemente der zuletzt genannten homographischen Systeme zu erhalten, gehen wir auf den Anfang der vorhergehenden Vorlesung zurück. Wir liessen dort einen Kegelschnitt 2): $U_0 V_1 - U_1 V_0 = 0$ entstehen durch den Schnitt der entsprechenden Strahlen zweier homographischen Strahlenbüschel 1): $U_0 - \lambda U_1 = 0$, $V_0 - \lambda V_1 = 0$ und stellten die Gleichung des Schnittpunktes auf in der Form 8) $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$. Da das Centrum des ersten Strahlenbüschels $U_0 - \lambda U_1 = 0$ in der Peripherie des Kegelschnittes liegt, so theilt er den Kegelschnitt in den Punkten 8) homographisch. Sind endlich $R_0 = 0$ und $R_1 = 0$ die Gleichungen von irgend zwei geraden Linien, so hat man die Gleichung irgend eines mit dem ersten Strahlenbüschel 1) homographischen Strahlenbüschels $R_0 - \lambda R_1 = 0$.

Es stellen sich also ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein mit ihm homographischer Strahlenbüschel immer in der Form dar:

2) . . . $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad R_0 - \lambda R_1 = 0.$

Um zu entscheiden, ob diese Gleichungen 2), welches auch die in Liniencoordinaten gegebenen linearen Ausdrücke A, B, C und die in Punktcoordinaten linearen Ausdrücke R_0 und R_1 seien, immer entsprechende homographische Elemente ausdrücken, müssen wir auf die Natur der durch die Gleichungen 2) gegebenen Systeme näher eingehen.

Es liegt ein durch die erste Gleichung 2) gegebener Punkt auf dem durch die zweite Gleichung gegebenen Strahle, wenn die Coordinaten des Punktes, das sind die Coefficienten von u, v, w in der ersten Gleichung, das sind quadratische Ausdrücke in λ, für die Punktcoordinaten in die zweite Gleichung eingesetzt der Gleichung genügen. Dieses giebt eine kubische Bedingungsgleichung in λ. Dieser Gleichung wird dreimal, nicht viermal genügt, ausgenommen, wenn in derselben die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ sämmtlich verschwinden. Ist das Letztere der Fall, so wird der kubischen Gleichung für jeden Werth von λ genügt. Wir drücken dieses geometrisch aus wie folgt:

3) . . . **Wenn ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein demselben entsprechender Strahlenbüschel durch Gleichungen von der Form 2) gegeben sind, so geht dreimal ein**

Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes. Wenn vier Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte des Kegelschnittes gehen, so geht jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes.

In dem letzteren Falle, wenn jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes geht, muss das Centrum des Strahlenbüschels auf dem Kegelschnitt selbst liegen. Denn hätte das Centrum eine andere Lage, so würde ein beliebiger Strahl des Büschels den Kegelschnitt in zwei Punkten schneiden, denen zwei verschiedene Werthe von λ entsprechen, welche beide demselben Strahle des Büschels entsprechen müssten. Wir können daher zur Vervollständigung des vorhergehenden Satzes noch hinzufügen:

Wenn vier Strahlen des Büschels durch die ihnen nach 2) entsprechenden Punkte des Kegelschnittes gehen, so liegt das Centrum des Büschels in der Peripherie des Kegelschnittes und die Systeme sind homographisch und in perspectivischer Lage.

Betrachten wir den Fall, dass das Centrum des Strahlenbüschels 2) in der Peripherie des Kegelschnittes 2) liegt, so sehen wir, dass der dem Centrum, als Punkt des Kegelschnittes, entsprechende Strahl des Büschels immer auf dem ihm entsprechenden Strahle liegt. Sehen wir demnach ab von dem Centrum des Büschels als Punkt des Kegelschnittes, so folgt aus dem vorhergehenden Satze:

4) . . . Wenn ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein demselben entsprechender Strahlenbüschel durch Gleichungen von der Form 2) gegeben sind, wenn ferner das Centrum des Strahlenbüschels auf dem Kegelschnitt liegt und wenn drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte des Kegelschnittes gehen, so sind die Systeme homographisch und in perspectivischer Lage.

Auf diesen Satz gestützt können wir nachweisen, dass die Gleichungen 2) immer homographische Systeme ausdrücken.

Denn fixiren wir auf dem durch die erste Gleichung 2) gegebenen Kegelschnitt irgend einen Punkt als Centrum eines zu construirenden Strahlenbüschels und ziehen von demselben drei Strahlen nach drei beliebigen Punkten 0, 1, 2 des Kegelschnittes, welchen die Strahlen 0, 1, 2 des durch die zweite Gleichung gegebenen Strahlenbüschels entsprechen mögen, so können wir die gegebenen Strahlen als die den drei Strahlen 0, 1, 2 entsprechenden Strahlen eines mit dem gegebenen Strahlenbüschel homographischen aber noch unvollständigen Strahlenbüschels ansehen. Vervollständigen wir nun den mit dem gegebenen Büschel homographischen Strahlenbüschel, so ist der vervollständigte Strahlenbüschel nach Satz 4) homographisch mit dem Punktesysteme auf dem Kegelschnitt und in perspectivischer Lage. Der vervollständigte Strahlenbüschel theilt also den Kegelschnitt in dem durch die erste Gleichung 2) gegebenen Punktesystem homographisch. Da mit diesem Strahlenbüschel aber der durch die zweite Gleichung 2) gegebenen Strahlenbüschel homographisch ist, so sind nach der Definition die beiden Systeme 2) selbst homographisch. Mit Voranstellung früherer Bemerkungen drücken wir dasselbe so aus:

5) Jedes Punktesystem auf einem Kegelschnitt und jeder mit dem Punktesysteme homographische Strahlenbüschel lassen sich durch Gleichungen von der Form 2) analytisch ausdrücken; und umgekehrt stellen Gleichungen von der Form 2) immer ein Punktesytem auf einem Kegelschnitt und einen mit dem Punktesysteme homographischen Strahlenbüschel dar.

Wir wollen nicht unterlassen, auf einen wesentlichen Unterschied der eben betrachteten homographischen Systeme gegen die früheren aufmerksam zu machen. Die früheren homographischen Systeme, Strahlenbüschel und Punktesysteme, liessen sich durch Verlegung in der Ebene immer in perspectivische Lage bringen; ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein mit demselben homographischer Strahlenbüschel lassen sich im Allgemeinen nicht in eine perspectivische Lage versetzen. Dasselbe gilt auch von den homographischen Systemen auf welche die folgenden Untersuchungen führen werden.

Um Punkte eines Kegelschnittes mit Punkten auf einer geraden Linie in homographische Verbindung zu bringen, dehnen wir den Begriff der Homographie noch weiter aus. Wir werden sagen, dass ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt homographisch sei mit einem Punktesysteme auf einer geraden Linie, wenn ein Strahlenbüschel gefunden werden kann, der sowohl mit dem Punktesysteme auf dem Kegelschnitt als auch mit dem Punktesysteme auf der geraden Linie homographisch ist.

Wenn demnach $T_0 = 0$ und $T_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier Punkte sind, so sind die Gleichungen:

6) . . . . . $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad T_0 - \lambda T_1 = 0$

die allgemeinsten Ausdrücke für homographische Systeme der beschriebenen Art.

Ein Blick auf die Formeln 2) und 6) lässt ferner erkennen, dass der Satz 16) der ersten Vorlesung sich hier wiederholt:

7) . . . Wenn zwei Systeme homographisch sind mit einem dritten, so sind sie unter einander homographisch.

Dieser Satz wird sich bis zum Schlusse der Vorlesung bewähren, in der wir uns auf homographische Systeme noch anderer Art wie von selbst werden führen lassen.

Wir verweilen jedoch vorerst bei den durch die Gleichung 6) gegebenen homographischen Punktesystemen auf einem Kegelschnitt K und auf einer geraden Linie L.

Die erste Gleichung 6) ist, wenn wir λ variiren lassen, der analytische Ausdruck für alle Punkte eines und desselben Kegelschnittes K. Jedem Werthe von λ entspricht ein bestimmter Punkt des Kegelschnittes und jedem Punkte des Kegelschnittes entspricht ein Werth von λ. Wenn wir aber u, v, w in jener ersten Gleichung 6) die Coordinaten einer gegebenen geraden Linie l bedeuten lassen, so haben wir eine ganz bestimmte in λ quadratische Gleichung, deren Wurzeln entsprechen werden den beiden Schnittpunkten des Kegelschnittes K und der geraden Linie l der Art, dass wenn man diese Wurzeln für λ nach einander einsetzt in die erste Gleichung 6), in welcher u, v, w als Variable betrachtet werden, man die Gleichungen der Punkte erhält, in welchen der Kegelschnitt K von der geraden Linie l geschnitten wird.

Die gerade Linie l wird Tangente des Kegelschnittes K, wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung einander gleich werden, das ist unter der Bedingung:

8) . . . . $$B^2 - 4AC = 0.$$

Diese Gleichung stellt also in Liniencoordinaten den Kegelschnitt K dar, dessen Punkte durch die erste Gleichung 6) analytisch ausgedrückt werden.

Wir wollen den Kegelschnitt K von irgend drei geraden Linien l_0, l_1, l_2 schneiden lassen, deren Coordinaten gegeben seien:

$$u_0\ v_0\ w_0, \qquad u_1\ v_1\ w_1, \qquad u_2\ v_2\ w_2.$$

Die den Schnittpunkten entsprechenden Werthe von λ ergeben sich dann als die Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichungen, in welchen A_0, B_0, C_0; A_1 . . . die Ausdrücke A, B, C bezeichnen, nachdem man in ihnen für u, v, w die Coordinaten der gegebenen geraden Linien gesetzt hat:

9) . . . . $$\begin{aligned} A_0 + B_0\lambda + C_0\lambda^2 &= 0, \\ A_1 + B_1\lambda + C_1\lambda^2 &= 0, \\ A_2 + B_2\lambda + C_2\lambda^2 &= 0. \end{aligned}$$

Wenn wir die Wurzeln dieser Gleichungen in die zweite Gleichung 6) nach einander einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen der den sechs Schnittpunkten auf dem Kegelschnitt K homographisch entsprechenden Punkte der geraden Linie L, die sich paaren, wie die Schnittpunkte auf dem Kegelschnitt. Die Gleichungen dieser Punktepaare auf der geraden Linie L werden erhalten durch Einsetzung der Werthes von λ aus der zweiten Gleichung 6) in den Gleichungen 9):

$$10) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A_0 T_1^2 + B_0 T_1 T_0 + C_0 T_0^2 = 0, \\ A_1 T_1^2 + B_1 T_1 T_0 + C_1 T_0^2 = 0, \\ A_2 T_1^2 + B_2 T_1 T_0 + C_2 T_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Ebenso könnte man auch die Schnittpunktepaare auf dem Kegelschnitt durch drei Gleichungen ausdrücken. Die Gleichung des auf der geraden Linie l_0 liegenden Paares würde sich ergeben durch Elimination von λ aus der ersten Gleichung 6) und der ersten Gleichung 9). Jedoch sind diese Gleichungen zu wenig übersichtlich, als dass sie für unsere Untersuchungen von Werth sein sollten.

Wenn die drei geraden Linien l_0, l_1, l_2 sich in einem und demselben Punkte c schneiden, so lassen sich drei Factoren μ_0, μ_1, μ_2 finden, dass folgenden drei Gleichungen genügt wird:

$$\begin{aligned} \mu_0 u_0 + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0, \\ \mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0, \\ \mu_0 w_0 + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = 0. \end{aligned}$$

Daraus componiren sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 = 0, \\ \mu_0 B_0 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = 0, \\ \mu_0 C_0 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 = 0, \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen folgt, dass, wenn man die Gleichungen 10) der Reihe nach mit μ_0, μ_1, μ_2 multiplicirt und addirt, man identisch o erhält, welches nach 18) der sechsten Vorlesung eben die Bedingung ist für die Involution der drei Punktepaare 10).

Wir haben dadurch den Satz bewiesen:

11) . . . Wenn die Verbindungslinien von drei Punktepaaren auf einem Kegelschnitt sich in einem und demselben Punkte schneiden, so bilden die diesen Punktepaaren homographisch entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution.

Beachten wir, dass in homographischen Punktesystemen jedem Punkte des einen Systemes immer nur ein Punkt des andern entspricht, so können wir den Satz auch umkehren wie folgt:

12) . . . Wenn drei Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution bilden, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die ihnen homographisch entsprechenden Punktepaare auf einem Kegelschnitt verbinden, in einem und demselben Punkte.

Diese beiden Sätze bilden das gesuchte Prinzip, nach welchem aus jedem der beiden Parallelsätze, von welchen die gegenwärtige Vorlesung ausging, der andere abgeleitet werden kann. Denn die Pascal'sche Linie und die gegenüberliegenden Seiten des dem Kegelschnitt einbeschriebenen Pascal'schen Sechsecks schneiden sich dreimal in einem Punkte, und auf der anderen Seite haben wir das den Schnittpunkten der Pascal'schen Linie auf dem Kegelschnitt homographisch entsprechende Punktepaar α, β auf der geraden Linie, welches dreimal eine Involution bildet mit vier von den den sechs Ecken des Sechseckes homographisch entsprechenden Punkten.

Wenn man den Kegelschnitt schneiden lässt durch Strahlen eines Strahlenbüschels mit dem Centrum c, so bilden die den Schnittpunktepaaren von je drei Strahlen homographisch entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie nach 11) eine Involution. Das heisst, die den Schnittpunktepaaren sämmtlicher Strahlen des Büschels entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie bilden ein involutorisches Punktesystem.

Dieses involutorische System von Punktepaaren enthält bekanntlich zwei Doppelpunkte, in deren jedem ein Punktepaar zusammenfällt. Den Doppelpunkten entsprechen auf dem Kegelschnitt die Berührungspunkte der beiden durch den Punkt c gehenden Tangenten. Das Doppelpunktepaar, als ein einfaches Punktepaar aufgefasst, entspricht also auf dem Kegelschnitt demjenigen Punktepaare, in welchem die Polare des Punktes c den Kegelschnitt schneidet.

Da nun auf der einen Seite das Doppelpunktepaar harmonisch ist mit jedem Punktepaare des involutorischen Systemes, auf der anderen Seite jeder Strahl, der durch den Punkt c geht, mit der Polare des Punktes c ein Paar harmonischer Polaren des Kegelschnittes bildet, so können wir die beiden Prinzipiensätze 11) und 12) auch so ausdrücken:

13) . . . Den Schnittpunktepaaren irgend zweier harmonischen Polaren eines Kegelschnittes auf demselben entsprechen homographisch auf einer geraden Linie harmonische Punktepaare.

14) . . . Harmonischen Punktepaaren auf einer geraden Linie entsprechen homographische Punktepaare auf einem Kegelschnitt, deren Verbindungslinien harmonische Polaren des Kegelschnittes sind.

Umgekehrt lassen sich aus diesen beiden Sätzen die beiden vorhergehenden ableiten, wenn man sich erinnert, dass drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden, wenn sie mit einer vierten geraden Linie drei Paare harmonischer Polaren eines Kegelschnittes bilden und dass drei Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution bilden, wenn jedes derselben harmonisch ist mit einem vierten Punktepaare.

Wir nannten die Sätze 11) bis 14) Prinzipiensätze, weil sie eine Vermittelung bilden zwischen Sätzen der ebenen Geometrie und, wenn wir uns so ausdrücken sollen, der Geometrie auf der geraden Linie. An einem Beispiele haben wir die Vermittelung nachgewiesen. Andere Beispiele zur Anwendung liegen in der sechsten Vorlesung über ebene Geometrie 22)—24) vor. Indem wir die erwähnten Sätze hier wiederholen, wollen wir jedem derselben denjenigen Satz voranstellen, der ihm nach den Prinzipiensätzen entspricht.

Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt umbeschrieben, ein zweites Sechseck durch Verbindung der Tangirungspunkte 1, 2 ... 6 der auf einander folgenden Seiten mit geraden Linien demselben Kegelschnitt einbeschrieben ist, so ist jede Diagonale, welche zwei gegenüberliegende Ecken des umbeschriebenen Sechsecks verbindet, die harmonische Polare zu einem der gegenüberliegenden Seitenpaare 12, 45; 23, 56; 34, 61 des einbeschriebenen Sechsecks und die drei Diagonalen des umbeschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Wenn irgend sechs Punkte 1, 2 ... 6 auf einer geraden Linie liegen und man construirt drei Punktepaare, von welchen das erste harmonisch ist mit den Punktepaaren 12, 45, das zweite harmonisch mit den Punktepaaren 23, 56, das dritte harmonisch mit den Punktepaaren 34, 61, so bilden die drei construirten Punktepaare eine Involution.

Durch vier Punkte eines Kegelschnittes lassen sich drei Linienpaare legen. Diejenige gerade Linie, welche harmonische Polare ist zu jeder Linie eines der drei Linienpaare, verbindet die Schnittpunkte der beiden anderen Paare; und diejenige gerade Linie, welche die Schnittpunkte zweier von jenen drei Linienpaaren verbindet, ist harmonische Polare zu jeder geraden Linie des dritten Paares.

Beliebige vier Punkte auf einer geraden Linie bilden drei Gruppen von zwei Punktepaaren. Dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist mit jedem Punktepaare einer Gruppe, bildet eine Involution mit den Punktepaaren der beiden andern Gruppen; und dasjenige Punktepaar, welches mit zwei Gruppen eine Involution bildet, ist harmonisch mit jedem Punktepaare der dritten Gruppe.

Wenn man durch beliebige vier Punkte eines Kegelschnittes drei Linienpaare legt und das Dreieck construirt, dessen Ecken die Schnitt-

Beliebige vier Punkte auf einer geraden Linie bilden drei Gruppen von zwei Punktepaaren. Construirt man drei Punktepaare, von denen jedes punkte der drei Linienpaare sind, so ist jede Seite des Dreiecks die harmonische Polare zu einem jener drei Linienpaare und je zwei Seiten sind harmonische Polaren des Kegelschnittes.

harmonisch ist mit den Punktepaaren einer Gruppe, so sind je zwei construirte Punktepaare harmonisch.

Der erste von diesen Sätzen der ebenen Geometrie ist der bekannte Brianchon'sche Satz, der zweite führt auf die bekannte Construktion der Polare eines Punktes in einem Kegelschnitt mit der geringsten Zahl von geraden Linien, und der letzte Satz lehrt ein System harmonischer Polaren eines Kegelschnittes construiren. Was die, mit Einschluss des ersten Sätzepaares unserer Vorlesung, ihnen entsprechenden Sätze auf der geraden Linie anbetrifft, so können wir in rein algebraischer Auffassung sagen, dass die beiden ersten Relationen ausdrücken zwischen den Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung des sechsten Grades und den Wurzeln anderer aus jenen Wurzeln construirbaren Gleichungen, während die beiden letzten Sätze Relationen geben zwischen den Wurzeln einer beliebigen biquadratischen Gleichung und anderen aus diesen Wurzeln construirbaren Gleichungen, von welchen wir bereits in der siebenten Vorlesung der ebenen Geometrie bei Auflösung der biquadratischen Gleichung Gebrauch gemacht haben.

Wie an den aufgeführten Beispielen bilden die Prinzipiensätze 22) — 24) die Vermittelung von allen Sätzen der ebenen Situationsgeometrie mit entsprechenden Sätzen der Geometrie auf der geraden Linie. Wir wollen uns eingehender darüber äussern.

Wir gehen von dem unendlich getheilten Kegelschnitt K aus und von der mit dem Kegelschnitt homographisch getheilten geraden Linie L. Irgend eine gegebene gerade Linie l in der Ebene des Kegelschnittes wird bestimmt sein durch das Schnittpunktepaar der geraden Linie auf dem Kegelschnitt. Durch das Schnittpunktepaar auf dem Kegelschnitt ist das demselben homographisch entsprechende Punktepaar auf der geraden Linie bestimmt. Wenn wir dieses Punktepaar das Bild der geraden Linie l auf der geraden Linie L nennen, so hat jede gegebene gerade Linie l ihr entsprechendes Bild auf der geraden Linie L, und umgekehrt entspricht jedem Punktepaare auf der geraden Linie L eine durch dasselbe bestimmte gerade Linie l in der Ebene.

Betrachtet man nun alle Figuren in der Ebene durch gerade Linien entstanden, den Punkt durch den Schnitt zweier geraden Linien, die Curve gegeben durch ihre sämmtlichen Tangenten, so haben wir für die Figuren in der Ebene auf der geraden Linie L entsprechende Bilder, in welchen sich der Charakter der Figuren, das sind geometrische Sätze, ebenfalls aussprechen muss, wie umgekehrt der Charakter der Bilder die

Eigenschaften ihrer Figuren in der Ebene bedingt. Da nun Sätze der Situationsgeometrie sich immer so ausdrücken lassen, dass gewisse gerade Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden, so sieht man, dass die Prinzipiensätze 22) — 24) dazu dienen werden, Sätze der Situationsgeometrie in Bildsätze zu übertragen und umgekehrt aus Bildsätzen Sätze in der ebenen Geometrie herzuleiten.

Man kann auch den Pol c der geraden Linie l in dem Kegelschnitt K als das Element der Figuren in der Ebene betrachten. In diesem Falle würde das dem Schnittpunktepaare der Polare l und des Kegelschnittes K homographisch entsprechende Punktepaar auf der geraden Linie L das Bild des Poles c sein. Es würde also jedem Punkte in der Ebene ein Punktepaar als Bild auf der geraden Linie entsprechen, wie umgekehrt jedem Punktepaar auf der geraden Linie L ein Punkt in der Ebene entspricht. Die Prinzipiensätze liessen sich dann in ähnlicher Weise dazu verwerthen, um Sätze aus der ebenen Situationsgeometrie zu übertragen in Bildsätze und umgekehrt.

Wir brechen hiermit die angeregte Uebertragung von geometrischen Sätzen ab, indem wir uns vorbehalten, in der nächsten Vorlesung auf denselben Gegenstand aus einem anderen Gesichtspunkte noch einmal zurückzukommen, und fahren in der Erweiterung der Homographie fort.

Zwei Punktesysteme auf zwei Kegelschnitten sollen **homographisch** heissen, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie (oder ein Strahlenbüschel) gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der Punktesysteme auf den Kegelschnitten.

Auf Grund dieser Definition stellen sich homographische Punktesysteme auf zwei Kegelschnitten analytisch in der Form dar:

$$15)\quad . \quad . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0,$$

wie umgekehrt zwei Gleichungen der angegebenen Form immer homographische Punktesysteme auf zwei Kegelschnitten ausdrücken werden, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Punkten sind.

Die Kegelschnitte 15) können unter Umständen zusammenfallen, ohne dass die entsprechenden Punkte zusammenfallen. Dann hätte man zwei homographische Theilungen eines und desselben Kegelschnittes.

Wenn man in den Gleichungen 15) C' identisch 0 werden lässt, so kommt man auf die Gleichungen 6) zurück, deren geometrische Bedeutung an der betreffenden Stelle angegeben worden ist.

Eliminirt man in diesem Systeme 6) die Variable λ, so erhält man eine Bedingungsgleichung $\Omega = 0$ zwischen den Coordinaten u, v, w der geraden Linien, welche die entsprechenden Punkte der homographischen Systeme 6) verbinden. Diese Gleichung $\Omega = 0$ ist vom dritten Grade und kann nach der bekannten Methode der Elimination in Determinantenform dargestellt werden. Sie drückt analytisch eine Curve dritter Klasse aus, welche von jenen geraden Linien berührt wird.

Die Elimination der Variable λ aus den Gleichungen 15) giebt gleichfalls eine Bedingungsgleichung $\Omega' = 0$, zwischen den Coordinaten u, v, w der geraden Linie, welche die entsprechenden Punkte der homographischen Systeme 15) verbinden. Durch diese Gleichung vom vierten Grade, ebenfalls in Determinantenform, ist eine Curve vierter Classe bestimmt, welche von jenen geraden Linien berührt wird.

Der Begriff der Homographie kann noch nach einer anderen Richtung hin erweitert werden, wenn man die Kegelschnitte nicht durch Punkte, sondern durch ihre Tangenten entstehen lässt. Da diese Erweiterung nur eine Uebertragung des Verhergehenden ist, so wird es, indem wir die Analogie der Sätze und Formeln mit den vorhergehenden durch gleiche Zahlen in doppelten Klammern andeuten, der Ausführlichkeit nicht mehr bedürfen.

Wir gehen von dem Satze (4) der zweiten Vorlesung aus: dass alle Tangenten eines Kegelschnittes zwei beliebige unter ihnen homographisch theilen. Dieser Satzt lehrt das ganze System der Tangenten eines Kegelschnittes in Verbindung bringen mit der Theilung einer Tangente nach folgender Definition:

Das System der Tangenten eines Kegelschnittes theilt eine beliebige unter ihnen homographisch mit dem Tangensysteme.

Hiernach entspricht homographisch jeder Tangente des Kegelschnittes der Punkt der beliebigen Tangente, durch welchen er geht und umgekehrt. Die Lage der homographischen Systeme heisse die perspectivische Lage. Wir können nach der angegebenen Definition auch sagen:

(1) . . . Das System der Tangenten eines Kegelschnittes theilt zwei beliebige unter ihnen homographisch mit dem Tangentensysteme.

Wenn man die von dem Systeme der Tangenten des Kegelschnittes homographisch getheilte beliebige Tangente mit ihrer Theilung aus ihrer perspectivischen Lage heraushebt und sie beliebig in der Ebene verlegt, so soll die Theilung auch in dieser schiefen Lage homographisch heissen mit dem Tangentensysteme. Selbst jedes andere Punktesystem auf einer geraden Linie soll mit dem Tangentensysteme des Kegelschnittes homographisch genannt werden, wenn es homographisch ist mit der Theilung der beliebigen Tangente in der früheren perspectivischen Lage.

In der Absicht die analytischen Ausdrücke für zwei entsprechende Elemente der zuletzt genannten homographischen Systeme zu finden, gehen wir auf die Formeln der zweiten Vorlesung zurück. Die Gleichungen 1) $U_0 - \lambda U_1 = 0$, $V_0 - \lambda V_1 = 0$ stellten dort homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien dar, wenn die Gleichungen $U_0 = 0$,

$U_1 = 0$, $V_0 = 0$, $V_1 = 0$ irgend vier Punkte ausdrücken. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte in den homographischen Systemen 1) waren Tangenten des Kegelschnittes 2) $U_0 V_1 - U_1 V_0 = 0$, der auch von den geraden Linien berührt wurde, auf welchen die Punktesysteme 1) liegen. Durch den von den Gleichungen 1) dargestellten Punkt ging eine Tangente des Kegelschnittes 2) hindurch, deren Gleichung sich in der Form darstellte 8) $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$, wo $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen bestimmter gerader Linien bedeuteten. Das ist eine Tangente des Kegelschnittes 2), welche nach der Definition die Tangente, auf welcher das erste Punktesystem 1) liegt, in dem Punkte $U_0 - \lambda U_1 = 0$ homographisch theilt. Da nun $R_0 - \lambda R_1 = 0$ die Gleichung eines beliebigen mit dem ersten Punktesysteme 1) homographischen Punktesystemes ist, wenn $R_0 = 0$ und $R_1 = 0$ die Gleichungen von irgend welchen Punkten bedeuten, so stellen sich das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein mit demselben homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie in der Form dar:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad R_0 - \lambda R_1 = 0.$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob die beiden Gleichungen (2) immer homographische Systeme, ein Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein mit ihm homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie, ausdrücken, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen von irgend drei geraden Linien und $R_0 = 0$, $R_1 = 0$ die Gleichungen von irgend zwei Punkten sind.

Der Weg zur Untersuchung der Frage ist im Vorhergehenden vorgezeichnet. Wir geben nur die Zwischensätze an, welche zu ihrer Beantwortung dienen.

(3) . . . Wenn das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein demselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form (2) gegeben sind, so geht dreimal eine Tangente durch den ihm entsprechenden Punkt. Wenn vier Tangenten durch die ihnen entsprechenden vier Punkte gehen, so geht jede Tangente durch den ihr entsprechenden Punkt.

Wenn vier Tangenten durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, so ist die gerade Linie, auf welcher das Punktesystem liegt, welches dem Tangentensysteme entspricht, selbst Tangente des Kegelschnittes.

(4) . . . Wenn das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein demselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form (2) gegeben sind, wenn ferner die gerade Linie Tangente des Kegelschnittes ist und wenn drei Tangenten des Kegelschnittes

durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, so sind die Systeme homographisch und in perspectivischer Lage.

Daraus folgt nun der allgemeine Satz, auf Grund dessen sich die beiden vorhergehenden Sätze aussprechen lassen, ohne der Gleichungen (2) Erwähnung zu thun:

(5) . . . Das Tangentensystem eines Kegelschnittes und jedes mit dem Tangentensysteme homographische Punktesystem auf einer geraden Linie lassen sich durch Gleichungen von der Form (2) ausdrücken, und umgekehrt stellen Gleichungen von der Form (2) immer das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein mit demselben homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie dar.

Das Tangentensystem eines Kegelschnittes soll homographisch sein mit einem Strahlenbüschel, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit dem Tangentensystem und zugleich mit dem Strahlenbüschel.

Homographische Systeme der genannten Art stellen sich analytisch in der Form dar:

$$(6) \quad . \; . \; . \; A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad T_0 - \lambda T_1 = 0,$$

wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $T_0 = 0$, $T_1 = 0$ irgend welche Liniengleichungen sind.

Lassen wir jedoch $T = 0$ und $T_1 = 0$ Punktgleichungen bedeuten, wodurch die Gleichungen (6) in die Gleichungen (2) übergehen und vergegenwärtigen wir uns die geometrische Bedeutung der Formeln 8) — 11) in der angegebenen Auffassung, so ergeben sich daraus die Sätze:

(11) . . . Wenn man von drei Punkten auf einer geraden Linie drei Tangentenpaare an einen Kegelschnitt zieht, so bilden die den Tangentenpaaren homographisch entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution.

(12) . . . Wenn drei Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution bilden, so schneiden sich die ihnen homographisch entsprechenden Tangentenpaare eines Kegelschnittes in drei Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen.

(13) . . . Wenn man von zwei harmonischen Polen eines Kegelschnittes Tangentenpaare an den Kegelschnitt zieht, so entsprechen diesen homographisch harmonische Punktepaare auf einer geraden Linie.

(14) . . . Harmonische Punktepaare auf einer geraden Linie entsprechen homographisch Tangentenpaaren eines Kegelschnittes aus einem Polenpaare des Kegelschnittes.

Es sollen ferner Tangentensysteme an zwei Kegelschnitten homographisch sein, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der Systeme.

Homographische Systeme der Art stellen sich in der Form dar:

$$(15) \quad . \quad . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0,$$

vorausgesetzt, dass beide Gleichungen Liniengleichungen sind.

Endlich werden wir das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein Punktesystem auf einem anderen Kegelschnitt homographisch nennen, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der beiden Systeme.

Solche Systeme werden ebenfalls durch Gleichungen von der Form (15) ausgedrückt, wenn die eine eine Liniengleichung, die andere eine Punktgleichung vorstellt.

An die gegebenen Definitionen der complicirteren homographischen Systeme schliessen sich nun Fragen an, welche analog sind den Fragen, welche wir für die einfachen homographischen Systeme beantwortet haben, zum Beispiel, wie viel Tangenten eines Kegelschnittes werden durch die ihnen homographisch entsprechenden Punkte eines anderen Kegelschnittes gehen? Wir werden jedoch weder auf diese noch auf andere Fragen, die sich nach dem Vorhergehenden von selbst aufdrängen, eingehen, uns vielmehr damit begnügen, einen ganz speciellen Fall homographischer Systeme der zuletzt bezeichneten Art in dem folgenden Satze vorzuführen.

Das System der Tangenten eines Kegelschnittes ist homographisch mit dem Systeme ihrer Berührungspunkte.

Es sei die Gleichung der Tangente eines Kegelschnittes:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0.$$

Die Gleichung der ihr unendlich naheliegenden Tangente desselben Kegelschnittes ist, wenn wir mit ε eine unendlich kleine Grösse bezeichnen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + (B + 2\,C\lambda)\,\varepsilon = 0.$$

Berechnen wir x, y, z aus den beiden Gleichungen oder aus zwei anderen, die aus diesen Gleichungen combinirt sind, so erhalten wir die Coordinaten des Berührungspunktes der ersten Tangente.

Aus der Combination der beiden Gleichungen gehen aber folgende hervor:

$$B + 2\,C\lambda = 0, \qquad 2\,A + B\lambda = 0,$$

aus welchen sich quadratische Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes ergeben. Setzt man aus diesen die Gleichung des Berührungspunktes zusammen, so erhält man für ihn einen Ausdruck von der Form:

$$A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0.$$

Dass nun die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes und die

Gleichung ihres Berührungspunktes von der Form (15) sind, beweiset den genannten Satz.

Durch den Schnitt des Tangentensystemes eines Kegelschnittes und eines mit ihm homographischen Strahlenbüschels (6) entsteht eine Curve dritter Ordnung, deren Gleichung $\Omega = 0$*) durch Elimination von λ aus jenen Gleichungen in Determinantenform erhalten wird.

Durch den Schnitt der homographischen Tangentensysteme (15) zweier Kegelschnitte entsteht eine Curve vierter Ordnung, deren Gleichung $\Omega' = 0$*) aus der Elimination von λ ebenfalls in Determinantenform hervorgeht.

Da es jedoch nicht in unserem Plane liegt, auf algebraische Curven höherer Klassen oder Ordnungen weiter einzugehen, so schliessen wir unsere Vorlesung mit der Bemerkung, dass in derselben der Weg vorgezeichnet worden ist, Curven dritter und vierter Klasse durch ihre Tangenten, und Curven dritter und vierter Ordnung durch ihre Punkte in homographische Verbindung zu bringen mit Punktesystemen auf einer geraden Linie oder Strahlenbüschel.

Vierte Vorlesung.

Ein Prinzip der Uebertragung aus der Ebene in die gerade Linie und umgekehrt.

Die Sätze 11) — 14) oder (11) — (14) der vorhergehenden Vorlesung bilden die Grundlage eines Prinzipes zur Uebertragung aus der Ebene in die gerade Linie und aus der geraden Linie in die Ebene. Sie gingen hervor aus einer weiten Theorie, die man verfolgen musste, um zu jenen Sätzen zu gelangen. Wir beabsichtigen in dieser Vorlesung dasselbe Prinzip der Uebertragung unabhängig von dem Vorhergehenden aus einem neuen analytischen Gesichtspunkte zu entwickeln. Bei dieser

*) Die Determinanten für Ω und Ω' sind folgende:

$$\Omega = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ T_0, & -T_1, & 0 \\ 0, & T_0, & -T_1 \end{vmatrix} \qquad \Omega' = \begin{vmatrix} A, & B, & C, & 0 \\ 0, & A, & B, & C \\ A', & B', & C', & 0 \\ 0, & A', & B', & C' \end{vmatrix}.$$

Ihre Elemente sind lineare homogene Ausdrücke in Punktcoordinaten.

Solche Determinantenformen der Curven $\Omega = 0$ der dritten und $\Omega' = 0$ der vierten Ordnung waren es, welche vormals in „Crelle's Journal" verborgene Eigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung entwickeln lehrten. Die Wahl der Determinantenform war damals ein Kunstgriff; hier ergiebt sie sich als eine nothwendige Folge unserer Untersuchungen. Die geometrische Bedeutung derselben kann zu neuen Sätzen Veranlassung geben.

Gelegenheit wird es sich zeigen, das der Modus der Uebertragung, auf welchen die Homographie hinführte, zugleich der allgemeinste ist.

Man kann nicht jedem Punkte in der Ebene einen durch ihn bestimmten Punkt in der geraden Linie der Art entsprechen lassen, dass auch umgekehrt jedem Punkte in der geraden Linie ein einziger Punkt in der Ebene entspricht. Die Ebene enthält eben das Quadrat von Punkten der geraden Linie.

Hiernach scheint es unmöglich, die Geometrie in der Ebene auf die Geometrie in einer geraden Linie zurückzuführen.

Die Möglichkeit leuchtet aber sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Ebene gerade so viel verschiedene Punkte enthält, als die gerade Linie verschiedene Punktepaare. Lässt man demnach jedem Punkte in der Ebene ein Punktepaar in der geraden Linie und umgekehrt jedem Punktepaare in der geraden Linie einen Punkt in der Ebene in unzweideutiger Weise entsprechen, so hat man ein Uebertragungsprinzip, welches die Geometrie in der Ebene zurückführt auf die Geometrie in einer geraden Linie und umgekehrt.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Raumgeometrie zurückführen auf die Geometrie in einer geraden Linie, selbst die Geometrie von mehr als drei Dimensionen. Hier würde es sich aber nicht um Punktepaare in der geraden Linie handeln, sondern um Systeme von drei oder mehreren Punkten.

Sieht man jedoch ab von den angedeuteten Erweiterungen des Uebertragungsprinzipes, so kommt es darauf an, den Modus festzustellen, nach welchem die Uebertragung einer ebenen Figur in eine ihr entsprechende Figur auf einer geraden Linie und umgekehrt eindeutig vor sich gehen muss.

Es liegen zwei Systeme von Punkten vor, das eine System in der Ebene, das andere auf der geraden Linie, der Fundamentallinie. Ein beliebiger Punkt in der Ebene sei durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y bestimmt; ein Punkt λ auf der Fundamentallinie werde bestimmt durch seine Gleichung:

$$1) \quad T_0 - \lambda T_1 = 0,$$

indem die Gleichungen $T_0 = 0$ und $T_1 = 0$ zwei feste Punkte der Fundamentallinie, Fundamentalpunkte, darstellen.

Soll nun der Punkt λ einer der beiden Punkte der Fundamentallinie sein, welche dem Punkte xy in der Ebene entsprechen, so muss die Grösse λ von den beiden Grössen x und y abhängen, das heisst, die drei Grössen λ, x, y müssen durch eine Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$ mit einander verbunden sein. Da aber jeder Punkt der Ebene einem Punktepaare auf der Fundamentallinie entsprechen soll, so muss die Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$ eine quadratische in λ sein.

Andererseits soll einem gegebenen Punktepaare λ_0, λ_1 auf der Fundamentallinie der Voraussetzung nach nur ein einziger Punkt in der Ebene entsprechen. Das will sagen, dass die beiden Gleichungen: $\varphi(\lambda_0, x, y) = 0$, $\varphi(\lambda_1, x, y) = 0$ nur eine einzige Auflösung für die Unbekannten x, y zulassen, dass die Gleichungen linear seien in Rücksicht auf die Unbekannten.

Hierdurch ist der Modus der Uebertragung analytisch festgestellt. Die Uebertragung wird vermittelt durch die Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$, welche in λ quadratisch, in x und y aber linear ist, also durch eine Gleichung von der Form:

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

wenn man unter A, B, C beliebig gegebene lineare Functionen von x und y versteht.

Man sieht, dass diese Gleichung alles leistet, was das ausgesprochene Prinzip verlangt. Jedem Punkte in der Ebene entspricht nach ihr ein Punktepaar 1) auf der Fundamentallinie und umgekehrt entspricht jedem Punktepaare auf der Fundamentallinie ein Punkt in der Ebene.

Um das dargelegte Prinzip irgend fruchtbar zu machen, bedarf es solcher Fundamentalsätze, welche die einfachsten Figurenverhältnisse der Systeme auf einander übertragen.

Ein einfaches Figurenverhältniss in der Ebene besteht darin, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Die Coordinaten dieser Punkte seien $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und $A_0, B_0, C_0, A_1 \ldots$ die Ausdrücke, in welche A, B, C übergehen, wenn man für die Coordinaten in ihnen nach einander setzt die Coordinaten der drei Punkte. Alsdann ist die analytische Bedingung, unter welcher die drei Punkte auf einer geraden Linie liegen die, dass sich drei Factoren μ_0, μ_1, μ_2 finden lassen, welche den drei Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 &= 0,\\
\mu_0 B_0 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 &= 0,\\
\mu_0 C_0 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Diesen drei Punkten in der Ebene entsprechen drei Punktepaare 1) auf der Fundamentallinie, für welche die Werthe von λ sich als die Wurzeln der quadratischen Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned}
A_0 + B_0\lambda + C_0\lambda^2 &= 0,\\
A_1 + B_1\lambda + C_1\lambda^2 &= 0,\\
A_2 + B_2\lambda + C_2\lambda^2 &= 0,
\end{aligned}$$

und die Gleichungen der drei Punktepaare auf der Fundamentallinie selbst sind:

$$\begin{aligned}
A_0 T_1^2 + B_0 T_1 T_0 + C_0 T_0^2 &= 0,\\
A_1 T_1^2 + B_1 T_1 T_0 + C_1 T_0^2 &= 0,\\
A_2 T_1^2 + B_2 T_1 T_0 + C_2 T_0^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Dass diese Gleichungen nach einander mit den Factoren μ_0, μ_1, μ_2 multiplicirt und addirt mit Rücksicht auf die ersten drei Gleichungen identisch 0 geben, ist ein Beweis, dass die drei Punktepaare eine Involution bilden.

Daraus entspringen nun die Fundamentalsätze:

Irgend drei Punkten auf einer und derselben geraden Linie in der Ebene entsprechen drei Punktepaare der Involution auf der Fundamentallinie.

Jeden drei Punktepaaren der Involution auf der Fundamentallinie entsprechen drei Punkte in der Ebene, welche auf einer geraden Linie liegen.

Es ist damit für das einfachste Figurenverhältniss in der Ebene der Ausdruck der entsprechenden Figur in der Fundamentallinie gefunden. Suchen wir nun ebenso umgekehrt das einfachste Figurenverhältniss in der Fundamentallinie auszudrücken für die Ebene.

In der Fundamentallinie liegen Punktepaare der verschiedensten Art vor. Jedem derselben entspricht in der Ebene ein Punkt. Unter diesen Punktepaaren giebt es solche, welche zusammenfallen in dem einen oder dem anderen Punkte, Doppelpunkte. Ja, man kann die Fundamentallinie betrachten als bestehend allein aus Doppelpunkten und man wird die Frage erheben, welches das entsprechende Bild in der Ebene sei für die Aufeinanderfolge der Doppelpunkte.

Das Punktepaar 1) auf der Fundamentallinie, entsprechend den Wurzeln λ der quadratischen Gleichung 2), wird ein Doppelpunkt, wenn die Wurzeln gleich werden, das ist unter der Bedingung:

$$3) \quad \ldots \ldots \ldots \quad B^2 - 4AC = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung stellt aber für die Ebene einen Kegelschnitt dar. Man hat demnach den Satz:

Alle Doppelpunkte auf der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene Punkten eines bestimmten Kegelschnittes, und allen Punkten dieses Kegelschnittes entsprechen Doppelpunkte auf der Fundamentallinie.

Der Kegelschnitt 3) hängt ab von den 9 Constanten, welche in seine Gleichung eingehen. Er kann deshalb jeder beliebige Kegelschnitt sein. Beachtet man nun, dass der Kegelschnitt die Grenze bildet für diejenigen Punkte $x\,y$ in der Ebene, welchen reelle oder welchen imaginäre Wurzeln der quadratischen Gleichung 2) entsprechen, das heisst, reellen oder imaginären Punktepaaren auf der Fundamentallinie, so sieht man, dass es freisteht diese Grenze beliebig zu verengern oder zu erweitern.

Dieser Kegelschnitt 3), die Directrix, spielt bei der Uebertragung der ebenen Figur in die lineare Figur und umgekehrt eine wichtige

Rolle. Gehen wir nämlich von irgend zwei Punktepaaren α und α' der Fundamentallinie aus, welchen zwei Punkte a und a' in der Ebene entsprechen werden, und construiren auf der Fundamentallinie alle möglichen Punktepaare, von welchen jedes eine Involution bildet mit den beiden Punktepaaren α und α', so entsprechen diesen in der Ebene alle möglichen Punkte, welche auf der geraden Linie aa' liegen. Unter den auf der Fundamentallinie construirten Punktepaaren giebt es aber bekanntlich zwei Doppelpunkte und diese, als ein einfaches Punktepaar betrachtet, sind harmonisch mit jedem der construirten Punktepaare. Die den beiden Doppelpunkten entsprechenden Punkte in der Ebene liegen nach dem letzten Satze auf der Directrix. Da sie aber auch auf der geraden Linie aa' liegen, so sind sie die Schnittpunkte der geraden Linie aa' und der Directrix. Man kann deshalb sagen:

Jeden drei Punkten in der Ebene auf einer geraden Linie entsprechen auf der Fundamentallinie drei Punktepaare der Involution. Construirt man dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist mit jedem der drei Punktepaare der Involution und betrachtet jeden Punkt des construirten Paares als einen Doppelpunkt, so entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie in der Ebene dem Schnittpunktepaare der geraden Linie und der Directrix.

So entsprechen den Punkten auf irgend einer Tangente der Directrix alle Punktepaare auf der Fundamentallinie, von welchen der eine Punkt des Paares immer unverändert bleibt, nämlich der Punkt, welcher als Doppelpunkt betrachtet dem Berührungspunkte der Tangente entspricht. So entsprechen ferner irgend zwei Punkte der Directrix zweien Doppelpunkten in der Fundamentallinie. Dem Pole der geraden Linie, welche jene beiden Punkte der Directrix verbindet, entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie, wenn man jeden Doppelpunkt für einen einfachen Punkt nimmt. So kann man endlich Sätze rücksichtlich eines Kegelschnittes, der Directrix hier, umwandeln in Sätze der Geometrie in der geraden Linie; wovon Beispiele in der vorhergehenden Vorlesung vorliegen.

Sehr viel complicirter wird die Uebertragung, wenn der Kegelschnitt nicht mehr die Directrix sein soll. Man wird sie aber um so lieber aufnehmen, als sie auf neue Gesichtspunkte führt, die in dem Folgenden flüchtig angedeutet werden sollen.

Wenn man den Werth von λ aus 1) in 2) setzt, so erhält man die Gleichung des Punktepaares

4) . . . . $$AT_1^2 + BT_1T_0 + CT_0^2 = 0$$

auf der Fundamentallinie, welches dem Punkte xy in der Ebene entspricht. Da in diese Gleichung nur die Verhältnisse A, B, C eingehen, so kann man diesen Grössen auch beliebige Werthe zuertheilen und aus den gegebenen Verhältnissen die Coordinaten x, y des diesen Werthen entsprechenden Punktes in der Ebene eindeutig bestimmen. Das will sagen, dass die Gleichung 4) alle möglichen Punktepaare auf der Fundamentallinie darstelle, mag man in ihr entweder x und y oder A, B und C beliebig variiren lassen.

Die Bedingung nun, dass Punkte in der Ebene auf einer geraden Linie liegen, ist bekanntlich die, dass ihre Coordinaten x, y einer linearen Gleichung von der Form genügen:

5) . . . . $aA + bB + cC = 0.$

Die diesen Punkten in der Ebene entsprechenden Punktepaare 4) auf der Fundamentallinie bilden nach dem ersten Fundamentalsatze ein involutorisches System. Wir können deshalb sagen:

Die Gleichung 4) stellt ein involutorisches System von Punktepaaren auf der Fundamentallinie dar, wenn die variabeln Coefficienten A, B, C einer linearen Bedingungsgleichung von der Form 5) genügen, und jene Punktepaare entsprechen Punkten in der Ebene, welche auf einer geraden Linie liegen.

Sollen Punkte in der Ebene auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen ihre Coordinaten x, y einer homogenen Bedingungsgleichung der 2ten Ordnung genügen:

6) . . . . $F(A, B, C) = 0.$

Die ihnen entsprechenden Punktepaare auf der Fundamentallinie werden durch die Gleichungen 4) ausgedrückt, deren Coefficienten eben derselben Gleichung 6) genügen müssen. Wir werden daher analog dem Vorhergehenden sagen:

Die Gleichung 4) stellt ein involutorisches System der zweiten Ordnung von Punktepaaren auf der Fundamentallinie dar, wenn die variabeln Coefficienten A, B, C einer homogenen Bedingungsgleichung 6) von der zweiten Ordnung genügen, und jene Punktepaare entsprechen in der Ebene Punkten, welche auf einem Kegelschnitt liegen.

Wir nennen eben das System der Punktepaare 4) auf der Fundamentallinie ein involutorisches System der zweiten Ordnung, weil es sich in zwei involutorische Systeme zerspaltet, wenn die Bedingungsgleichung 6) sich in lineare Factoren auflösen lässt.

Fünf beliebig in der Ebene gewählte Punkte bestimmen den Kegelschnitt, der durch sie geht, ein sechster Punkt des Kegelschnittes ist nur unvollständig durch die beliebig gewählten fünf Punkte bestimmt.

Demnach können auf der Fundamentallinie fünf Punktepaare beliebig gewählt werden, wenn sie in der Ebene fünf Punkten entsprechen sollen, durch welche ein Kegelschnitt geht. Ein sechstes Punktepaar, welches in der Fundamentallinie einem sechsten Punkte des Kegelschnittes entsprechen soll, ist einer Beschränkung unterworfen. Der eine Punkt des sechsten Paares kann immer noch willkürlich auf der Fundamentallinie gewählt werden, der andere ist durch ihn und die fünf gewählten Punktepaare, wie wir sehen werden, nicht mehr eindeutig bestimmt.

Durch fünf von den sechs Punktepaaren des involutorischen Systemes zweiter Ordnung ist der Kegelschnitt in der Ebene bestimmt, der durch die den fünf Punktepaaren in der Ebene entsprechenden Punkte geht. Von dem sechsten Punktepaare soll nur der eine gegeben sein. Dieser, als Doppelpunkt betrachtet, entspricht einem bestimmten Punkte der Directrix. Allen Punktepaaren auf der Fundamentallinie, von welchen der eine unverändert der gegebene Punkt ist, entsprechen in der Ebene Punkte auf der Tangente der der Directrix und der Doppelpunkt dem Berührungspunkte. Die erwähnte Tangente der Directrix schneidet aber den Kegelschnitt in zwei Punkten und jeder dieser Schnittpunkte wird einem Punktepaare auf der Fundamentallinie entsprechen, von welchem der eine Punkt unverändert der gegebene bleibt, die beiden anderen Punkte der beiden Paare werden verschieden sein und jeder derselben wird als zwölfter Punkt des involutorischen Systemes zweiter Ordnung genommen werden können.

Das gewonnene Resultat drücken wir kurz so aus:

Wenn von sechs Punktepaaren eines involutorischen Systemes zweiter Ordnung elf Punkte gegeben sind, so giebt es zwei verschiedene zwölfte Punkte des Systemes.

Den zwölften Punkt eines involutorischen Systemes zweiter Ordnung wird man demnach nicht ohne Hülfe eines Kreises oder Kegelschnittes construiren wollen.

Das zuletzt beschriebene Figurenverhältniss gehört schon zu den complicirteren, auf deren Betrachtung wir hier nicht weiter eingehen; vielmehr werden wir uns damit begnügen, die analytische Behandlung der Geometrie in der geraden Linie in den ersten Anfängen vorzuzeichnen.

Wir wollen annehmen, dass die Gleichung 4), welche das dem Punkte x, y in der Ebene entsprechende Punktepaar auf der Fundamentallinie darstellt, durch Einführung der homogenen Coordinaten selbst homogen gemacht sei, dass also A, B, C lineare homogene Ausdrücke der Coordinaten x, y, z bedeuten.

Bezeichnen wir unter dieser Voraussetzung mit U den Ausdruck:

7) $$U \equiv AT_1^2 + BT_1T_0 + CT_0^2$$

und mit U_0 und U_1 die Ausdrücke, in welche U übergeht, wenn man für die Coordinaten x, y, z setzt die Coordinaten x_0, y_0, z_0 eines Punktes 0 in der Ebene oder x_1, y_1, z_1 eines Punktes 1 in der Ebene, so sieht man, dass dasjenige Punktepaar auf der Fundamentallinie, welches dem Punkte:

$$x = x_0 - \lambda x_1, \qquad y = y_0 - \lambda y_1, \qquad z = z_0 - \lambda z_1,$$

auf der geraden Linie 01 entspricht, durch die Gleichung ausgedrückt wird:

8) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0.$

Diese Gleichung stellt also ein involutorisches System von Punktepaaren auf der Fundamentallinie dar.

Zweien mit 0 und 1 harmonischen Punkten in der Ebene entsprechen auf der Fundamentallinie die beiden Punktepaare 8) und:

9) . . . . $U_0 + \lambda U_1 = 0.$

Nennen wir demnach zwei Punktepaare **harmonisch** mit zwei anderen Punktepaaren auf der Fundamentallinie, wenn die ihnen in der Ebene entsprechenden Punktepaare harmonisch sind, so stellen sich die ersteren analytisch in der Form dar:

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 0, \qquad U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 + \lambda U_1 = 0.$$

Operiren wir mit diesen Gleichungen wie mit Gleichungen von harmonischen Punktepaaren, so ergiebt sich daraus der Satz:

Wenn $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Gleichungen sind von irgend zwei Punktepaaren auf einer und derselben geraden Linie, so stellen die Gleichungen:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0, \quad U_0 - \mu U_1 = 0, \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0, \quad U_0 - \mu_1 U_1 = 0$$

irgend vier Punktepaare desselben involutorischen Systemes dar, von welchen das erste Paar Punktepaare harmonisch ist mit dem letzten unter der Bedingung:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Wir werden ferner sagen, dass drei Paare von Punktepaaren auf der Fundamentallinie eine **Involution** bilden, wenn die ihnen in der Ebene entsprechenden drei Punktepaare eine Involution bilden. Auf Grund dieser Definition lässt sich der Satz aussprechen:

Wenn $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Gleichungen sind von irgend zwei Punktepaaren auf einer und derselben geraden Linie, so stellen die drei Gleichungenpaare:

$$\begin{aligned} U_0 - \lambda_0 U_1 &= 0, & U_0 - \lambda_1 U_1 &= 0, & U_0 - \lambda_2 U_1 &= 0, \\ U_0 - \mu_0 U_1 &= 0, & U_0 - \mu_1 U_1 &= 0, & U_0 - \mu_2 U_1 &= 0 \end{aligned}$$

irgend sechs Punktepaare desselben involutorischen Systemes dar und die drei Paare von Punktepaaren bilden eine Involution unter der Bedingung:

$$(\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0.$$

Man wird bereits die Bemerkung gemacht haben, dass die symbolischen Gleichungen, welche hier auftreten, ganz dieselben sind, welche uns gedient haben die Geometrie in der Ebene von Anfang zu entwickeln. Wie wir die angegebenen Gleichungen doppelt interpretirt haben, so lassen sich alle jene symbolischen Gleichungen, durch welche Sätze in der Ebene bewiesen werden, doppelt interpretiren und dieses giebt Gelegenheit eine grosse Zahl von Sätzen aus der Geometrie in der geraden Linie zu entdecken.

Diese Sätze aus der Geometrie in der geraden Linie drücken sich allerdings schwerfällig aus, was recht zu Tage tritt, wenn man entsprechende Sätze neben einander stellt, wie zum Beispiel:

Jede zwei gerade Linien in der Ebene schneiden sich in einem Punkte.

Jede zwei involutorische Systeme von Punktepaaren auf einer und derselben geraden Linie haben ein Punktepaar gemeinsam.

von welchen Sätzen der letztere in einer anderen Form in der 5ten Vorlesung unter No. 22 bereits angegeben worden ist, oder

Wenn jede von zwei geraden Linien durch zwei gegebene Punkte geht, so fallen die geraden Linien zusammen.

Wenn zwei involutorische Systeme von Punktepaaren zwei Punktepaare gemeinsam haben, so ist jedes Punktepaar des einen Systemes zugleich ein Punktepaar des anderen Systemes.

Da der Mangel kurzer Ausdrücke für Figurenverhältnisse bei den complicirteren Sätzen der Geometrie in der geraden Linie sich viel fühlbarer macht, so wird man es sich angelegen sein lassen, solche kurze Bezeichnungen zu erfinden.

Die eigentliche Aufgabe der Geometrie in der geraden Linie wird aber die bleiben, sie zu construiren ohne die gerade Linie zu verlassen. Denn mit der Lösung der Aufgabe und mit dem Uebertragungsprinzipe kann man die breitere Basis der Ebene verlassen und sich auf die gerade Linie zurückziehen ohne die Herrschaft über die Ebene aufzugeben. Die gerade Linie wird dann gleichsam als Telegraphenbureau dienen, auf dem man alle geometrischen Zustände in der Ebene erfahren und neue Combinationen in ihr anordnen kann.