Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

III. Internationaler Mathematiker-Kongress

Heidelberg, 1904

Autor: **Weber, Heinrich** (1842 – 1913)

Titel: **Bemerkungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen**

Bereich: Wissenschaftliche Vorträge

Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 / hrsg von A. Krazer. – Leipzig, 1905. – S. 446 – 450

Heinrich Weber referiert über einen paradox erscheinenden Umstand aus dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen und über irreversible Vorgänge, die mit einem Verlust oder Gewinn an Energie einherzugehen scheinen.

Bemerkungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Von

H. Weber aus Straßburg i. E.

I. Herr Hadamard hat in seinem Vortrage einen paradox erscheinenden Umstand aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen berührt, zu dem ich in meinem Buche (Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. II, § 90, Braunschweig 1901) eine Erläuterung gegeben habe, die ich hier kurz wiedergeben möchte. Es handelt sich um die Differentialgleichung der schwingenden Saite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

in der wir unter x die Abszisse, unter y die Zeit verstehen. Das Integral u dieser Gleichung ist bestimmt, wenn die Anfangsverschiebung

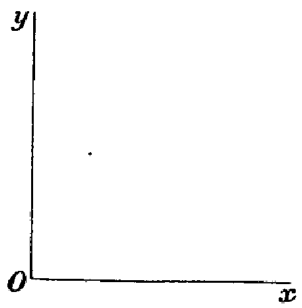

Fig. 1.

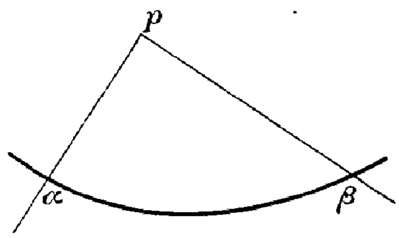

Fig. 2.

und die Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind, während an den Enden nur die Verschiebung (z. B. bei festen Endpunkten $u = 0$) willkürlich gegeben ist. Nehmen wir der Einfachheit halber eine nur einseitig begrenzte und befestigte Saite oder eine Luftsäule in einer unendlich langen nur einseitig gedeckten Pfeife, und tragen x und y als Koordinaten in einer Ebene auf (Fig. 1), so ist u in dem positiven Quadranten bestimmt, wenn u und $\frac{\partial u}{\partial y}$ für $y = 0$ und positive x, u für $x = 0$ und positive y gegeben sind. Hier haben also die beiden Teile der Begrenzung, die zu der Differentialgleichung vollkommen gleichartig stehen, in bezug auf die Grenzbedingungen ein ganz verschiedenes Verhalten. Um dies zu erklären, ersetze ich den rechten Winkel $x o y$ durch eine beliebige Kurve $\alpha\beta$ (Fig. 2) und nehme an, daß längs dieser Kurve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2 \tag{2}$$

und außerdem in einem Punkte der Wert von u bekannt sei, oder, was dasselbe ist, u und sein nach der Normalen genommener Differentialquotient. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Dreieck $\alpha\beta p$ ergibt sich:

$$2u_p = u_\alpha + u_\beta + \int_\alpha^\beta (\varphi_1 dy + \varphi_2 dx), \tag{3}$$

worin das Integral über die Kurve $\alpha\beta$ zu erstrecken ist. Hierdurch ist p_γ in dem veränderlichen Punkt p und damit in dem ganzen Dreieck $\alpha\beta p$ bestimmt, wenn φ_1 und φ_2 auf dem Kurvenbogen $\alpha\beta$ bekannt sind.

Wir stellen aber nun die Frage, ob der Ausdruck (3) den Forderungen (1), (2) wirklich genügt. Daß die Differentialgleichung (1) allgemein befriedigt ist, sieht man leicht ein. Anders ist es aber mit den Grenzbedingungen. Um diese zu diskutieren, bilden wir aus (3), indem wir unter x, y die Koordinaten des Punktes p verstehen, durch einfache Betrachtungen:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta), \\ 2\frac{\partial u}{\partial y} &= -\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta), \end{aligned} \tag{4}$$

und wenn wir nun mit dem Punkt p auf die Kurve $\alpha\beta$, etwa in den Punkt α, hineinrücken, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Wenn die durch α gezogene Parallele zu $p\beta$ den Bogen $\alpha\beta$ nicht schneidet, so wird, wenn p nach α rückt, β gleichfalls nach α rücken (Fig. 2) und die Gleichungen (4) ergeben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(\alpha), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2(\alpha). \tag{5}$$

Wenn aber, wie in Figur 3, diese Parallele die Kurve $\alpha\beta$ in α_1 schneidet, so rückt β nach α_1 und aus (4) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_1), \\ 2\frac{\partial u}{\partial y} &= -\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Die Grenzbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2$ sind also nur dann erfüllt, wenn

$$\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) = \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_1).$$

Zieht man also an die Kurve $\alpha\beta$ zwei zueinander rechtwinklige Tangenten, die unter 45^0 gegen die Achse geneigt sind und in den Punkten a, b berühren, so sind nun auf dem Bogen ab die Funktionen φ_1, φ_2 beliebig, und dadurch ist die Funktion u in dem Dreieck abc bestimmt. Über diesen Bogen hinaus besteht eine Abhängigkeit der

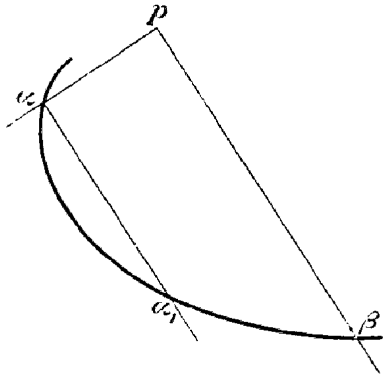

Fig. 3.

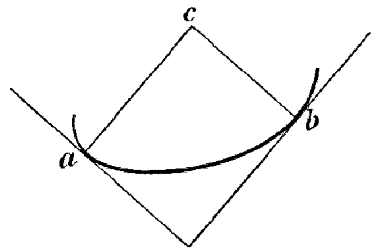

Fig. 4.

Funktionswerte φ_1, φ_2 von den Werten, die diese Funktionen auf dem Bogen a, b haben.

Die Anwendung auf die Frage, von der wir ausgingen, ergibt sich hieraus von selbst und wird veranschaulicht durch die Figur 5. An

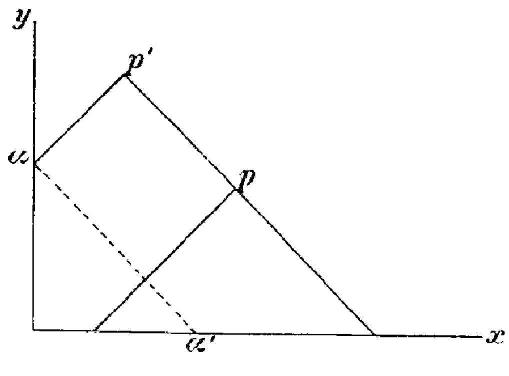

Fig. 5.

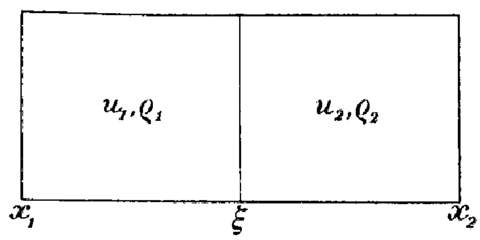

Fig. 6.

der x-Achse können φ_1 und φ_2 willkürlich angenommen werden. An der y-Achse sollte $\varphi_1 = 0$ sein; φ_2 kann dann aber nicht mehr willkürlich sein, sondern muß gleich $\varphi_1(\alpha') + \varphi_2(\alpha')$ sein.

II. Eine zweite Bemerkung, die ich zu machen habe, bezieht sich auf einen irreversiblen Vorgang von der Art, die Herr Bryan in der vorigen Sitzung im Anschluß an den Vortrag des Herrn Volterra erwähnt hat.

Lord Rayleigh hat in seinem Werke „Theory of Sound" gegen Riemanns Theorie der Luftschwingungen mit endlicher Amplitude einen Einwand erhoben, der sich darauf gründet, daß Riemanns Formeln in gewissen Fällen einen Verlust oder einen Gewinn an Energie zu ergeben scheinen. Ich habe in dem schon erwähnten Buche (Riemann-Weber § 179, 180) diesem Einwand durch eine Betrachtung zu begegnen versucht, deren wesentlichen Inhalt ich an einem einfachen Beispiel in folgendem wiedergeben will.

Es sei u und ϱ Geschwindigkeit und Dichtigkeit des Gases, als Funktionen von x und t gedacht, und der Druck $p = \varphi(\varrho)$ eine gegebene Funktion von ϱ. Nach Riemanns Annahme, daß der Wärmeaustausch zu vernachlässigen sei, ergibt sich $\varphi(\varrho) = a^2 \varrho^k$, wo k das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen, also eine Konstante, und ebenso a eine Konstante ist. Denken wir uns eine Luftsäule, die begrenzt ist von zwei Querschnitten bei den Abszissen x_1, x_2, so kann in dieser ein stationärer Zustand bestehen, wenn die Endquerschnitte passend bewegt werden, und wenn die Funktionen u, ϱ für $x < \xi$ die konstanten Werte u_1, ϱ_1 und für $x > \xi$ die konstanten Werte u_2, ϱ_2 haben, und ξ bleibt unveränderlich, wenn die Relationen bestehen:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}}.$$

Geben wir den Quadratwurzeln das positive Zeichen, so fließt das Gas in der Richtung der abnehmenden x, und wir haben bei $x = \xi$ einen zwar absolut ruhenden, relativ zur Gasmasse aber vorwärts schreitenden Stoß, der ein Verdichtungsstoß ist, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$, und ein Verdünnungsstoß, wenn $\varrho_1 < \varrho_2$ ist.

Setzen wir den Querschnitt unserer Gassäule $= 1$ und

$$A = \tfrac{1}{2} u_1^2 \varrho_1 (\xi - x_1) + \tfrac{1}{2} u_2^2 \varrho_2 (x_2 - \xi),$$
$$B = \varrho_1 \psi(\varrho_1)(\xi - x_1) + \varrho_2 \psi(\varrho_2)(x_2 - \xi),$$
$$C = \varphi(\varrho_1) u_1 - \varphi(\varrho_2) u_2,$$

worin $\psi(\varrho) = \int \frac{\varphi(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2}$, so ist A die kinetische Energie der Gassäule, B die „innere Energie“, C die Arbeit des Druckes gegen die Endflächen, und es ergibt sich:

$$C = \frac{d(A+B)}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \Delta\theta, \tag{1}$$

worin $d\mu$ die im Zeitelement dt durch den Querschnitt hindurchgedrückte Gasmasse und

$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + \psi(\varrho_2) - \psi(\varrho_1) + \frac{\varphi(\varrho_2)}{\varrho_2} - \frac{\varphi(\varrho_1)}{\varrho_1}$$

ist.

Bei einem stetigen Vorgang würde $\Delta\theta = 0$ sein und die Arbeit des Druckes wäre einfach gleich der Vermehrung der Energie.

Für einen Verdichtungsstoß erweist sich $\varDelta\theta$ stets als positiv, und die Arbeit des Druckes hat nicht nur die Vermehrung der Energie $A + B$, sondern auch den an der Unstetigkeitsstelle stattfindenden Energieverlust zu decken. Dies steht in Einklang mit dem allgemeinen mechanischen Gesetz, nach dem bei unstetigen Bewegungen immer ein Energieverlust stattfindet. Über den Verbleib dieser Energie geben uns die mechanischen Differentialgleichungen keinen Aufschluß.

Ist aber $\varrho_1 < \varrho_2$, so ist $\varDelta\theta$ negativ, und es würde durch die Unstetigkeit nach der Formel (1) ein Energiegewinn stattfinden. Die Maschine, die wir uns gedacht haben, würde also, in Widerspruch mit dem Energiegesetz, Energie nach außen abgeben. Wie erklärt sich dieser Widerspruch, da doch durch Umkehrung der Vorzeichen von u und x die Bedingungsgleichungen nicht aufhören, befriedigt zu sein? Er erklärt sich dadurch, daß im Falle $\varrho_1 < \varrho_2$ eine andere Lösung möglich ist, bei der die Unstetigkeit in eine oder in zwei Verdünnungswellen oder in eine Verdünnungswelle und einen rückwärts schreitenden Verdichtungsstoß aufgelöst wird, worüber das Nähere in § 177 des Bandes II von Riemann-Weber zu finden ist.

Bei $\varrho_1 > \varrho_2$ ist aber nur die eine Art von Bewegung mit vorwärts schreitendem Verdichtungsstoß möglich. Hierin liegt auch die Erklärung dafür, daß in der Riemannschen Theorie nirgends Verdünnungsstöße, sondern nur Verdichtungsstöße vorkommen.

Ähnliche Erscheinungen zeigt die Theorie der elektrolytischen Verschiebungen.

Nimmt man die Quadratwurzeln positiv, also u_1, u_2 negativ, so schreitet die Stelle ξ relativ zu dem Gase vorwärts, und wir haben, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$ ist, einen vorwärtsschreitenden Verdichtungsstoß, wenn dagegen $\varrho_1 < \varrho_2$ ist, einen vorwärtsschreitenden Verdünnungsstoß. Nun zeigt es sich, daß bei den Verdichtungsstößen Energie verloren geht (wie bei jeder unstetigen Bewegung in der Mechanik). Bei Verdünnungsstößen würde aber Energie gewonnen werden, und darum kommen Verdünnungsstöße in der Riemannschen Theorie nicht vor.

Der Vorgang, wie er durch die Figur 6 dargestellt ist, ist daher physisch nicht umkehrbar, obwohl die Bedingungsgleichungen auch für den umgekehrten Bewegungsvorgang befriedigt sind.

Es zeigt sich nämlich, daß in dem Falle $\varrho_1 < \varrho_2$ noch ein zweiter und zwar stetiger Zustand den Bedingungen genügt, den man am anschaulichsten darstellen kann, wenn man x und t (die Zeit) als Koordinaten betrachtet.