Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Weierstraß, Karl** (1815-1897)
Hrsg.: Mittag-Leffler, Gösta

Titel: **Briefe von K. Weierstrass an Paul du Bois-Reymond**

Quelle: Acta mathematica. – 39 (1923), S. 199–225
Signatur UB Heidelberg: L 15-6::39.1923

Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) publizierte und annotierte in diesem Aufsatz eine Reihe von Briefen überwiegend mathematischen Inhalts von Karl Weierstraß (1815-1897) an den Mathematiker Paul du Bois-Reymond (1831-1889) aus dem Zeitraum von 1873 bis 1889.

BRIEFE VON K. WEIERSTRASS AN PAUL DU BOIS-REYMOND.

Berlin, 23. November 1873.
Potsdamer Str. No. 40.

Verehrter Herr Kollege!

— —

In Ihrer neuesten, mir von Borchardt mitgeteilten Abhandlung [1] haben Sie meinen Beweis, daß die Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

unter den angegebenen Bedingungen an keiner Stelle einen bestimmten Differential-Koeffizienten besitze, aufgenommen. Damit bin ich völlig einverstanden, finde auch an meinem Briefe nach einer abermaligen Durchsicht des seinerzeit sehr eilig Aufgeschriebenen nichts zu ändern, — höchstens wäre im Anfang eine kleine Erläuterung hinzuzufügen, worüber ich mir vorbehalte, Ihnen bei der Korrektur zu schreiben. Dagegen erlaube ich mir inbetreff der beigefügten Anmerkung folgendes zu bemerken.

Es wäre zunächst nach meiner Ansicht zweckmäßig ausdrücklich zu erwähnen, daß Riemann bereits im Jahre 1861 einigen seiner Zuhörer die durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

dargestellte Funktion als eine solche, die keine Ableitung besitze, bezeichnet, seinen Beweis dafür aber niemandem mitgeteilt, sondern nur gelegentlich geäußert habe, derselbe sei aus der Theorie der elliptischen Funktionen zu holen. Auch sei nichts darüber bekannt, ob Riemann behauptet habe, seine Funktion besitze an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten, — im Kreise von Riemanns Schülern schien man wenigstens von der Existenz solcher Funktionen nichts gewußt zu haben, wie aus einer Äußerung Hankels (Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, S. 15, Anm. 1)[2] hervorgeht. Ich lege einigen Wert darauf, daß dies gehörig festgestellt werde; denn hätte z. B. eine Funktion $f(x)$ — und solche Funktionen lassen sich leicht machen, und kenne ich deren schon seit längerer Zeit — die Eigenschaft, für irrationale Werte von x einen bestimmten Differentialquotienten zu besitzen, nicht aber für rationale, so wäre $f'(x)$ zwar keine Funktion im gewöhnlichen, aber doch in dem von Riemann wie von Ihnen adoptierten Sinne.

Was Sie ferner über die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(a\ x)}{b^n}$$

sagen, beruht auf einem von mir selbst verschuldeten Mißverständnis. Was ich in der Ihnen mitgeteilten Notiz beweisen wollte, war hauptsächlich das Faktum, daß der Quotient

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

wenn x_1, x_2 auf ein beliebig enges Intervall $X \ldots X'$ beschränkt werden, jeden zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Wert annehmen kann. Dies genügt, um zu beweisen, daß $f(x)$ eine der Differentialrechnung unzugängliche Funktion ist. Sie ist aber in der Tat eine Funktion ganz von derselben Beschaffenheit wie die später Ihnen angegebene; ja es läßt sich sogar sehr leicht beweisen, daß, sobald $\frac{a}{b} > 1$ ist, bei jedem bestimmten Werte von x sowohl

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{als} \quad \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

für unendlich kleine positive Werte von h beliebig groß werden kann. Wenn man aber nachweisen will, daß die vorstehenden Differenzenquotienten sich nicht b e i d e der Grenze $+\infty$ oder beide der Grenze $-\infty$ nähern, wofern h unendlich klein wird (und diesen Beweis halte ich für erforderlich), muß man — so viel ich sehe — für $\frac{a}{b}$ eine größere untere Grenze nehmen. Dann aber gestaltet sich der Beweis für die zweite Funktion formell etwas einfacher, weswegen ich die letztere vorgezogen habe, da es ja doch nur auf ein Beispiel ankam. Daß und wie man viel allgemeinere Funktionen von derselben Beschaffenheit angeben kann, liegt auf der Hand.

Wenn Sie mit dem Vorstehenden einverstanden sind, so bitte ich die Anmerkung in dem angedeuteten Sinne ändern zu wollen; eine Erwähnung meiner früheren Notiz erscheint mir übrigens gar nicht erforderlich.

Gegen das, was Sie inbetreff des AMPÈREschen Beweises[3]) sagen, hätte ich wohl etwas einzuwenden, doch das ist Ansichtssache. Nur die Annahme, von der Ampère ausgeht, es sei, wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, stets möglich, das Intervall, in dem x sich bewegt, so in Teile zu zerlegen, daß innerhalb eines jeden $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum habe — eine Annahme, von der Freycinet (Gambettas berühmter „Ingenieur") in einer „Étude sur la métaphysique du haut calcul" (1860) behauptet, sie sei eine unmittelbare Folge aus dem Begriff der Kontinuität —, ist, wie meine Funktion lehrt, geradezu als falsch zu bezeichnen.

Mit freundlichstem Gruß

Ihr ergebenster

WEIERSTRASS.

Berlin, 30. November 1873.

— —

Sie verlangen einen Rat von mir, — ich will Ihnen denselben ohne jede Vorbemerkung geben, nach meiner besten Überzeugung.

Borchardt beanstandet, wie aus seinem Briefe hervorgeht, in Ihrer neuesten Abhandlung drei Stellen.

Über die erste brauche ich nichts zu sagen, da Sie selbst mit der Streichung des angeführten Epithetons einverstanden sind.

Was zweitens den von Ihnen gebrauchten Ausdruck angeht, daß die von Ihnen angegebene Bedingung für die Konvergenz der Fourierschen Reihe zwar nicht die notwendige sei, doch dieser sehr nahe komme, — so würde ich unaufrichtig gegen Sie sein und müßte mich für Ihre Untersuchungen weniger interessieren, wenn ich Ihnen verhehlte, daß ich Borchardts Ansicht teile, nicht sowohl, weil dergleichen Redensarten sehr leicht mißdeutet werden können, als vielmehr hauptsächlich aus dem Grunde, daß Ihr Ausdruck mir eine petitio principii zu enthalten scheint. Denn es liegt in ihm offenbar die Voraussetzung, daß es eine alle Fälle umfassende und mathematisch ausdrückbare Bedingung für die fragliche Konvergenz überhaupt gebe, — denn eine notwendige Bedingung, die nicht mathematisch ausdrückbar wäre, könnte überhaupt nicht Gegenstand mathematischer Diskussion sein. Woher aber wissen wir, daß dies so sei? Wir kennen jetzt Funktionen mit Eigenschaften, von denen man früher keine Ahnung hatte, welche, wie Sie selbst sagen, allen unseren früheren Vorstellungen widersprechen. Wenn daher ein Kriterium auf noch so viele Arten von Funktionen paßt, ohne aus dem allgemeinsten und darum aber wenig inhaltsreichen Funktionsbegriff abgeleitet zu sein, so kann möglicherweise das Heer derer, auf die es nicht paßt, doch noch viel größer sein, — wenn wir überhaupt auf ein Zählen in diesem Falle uns einlassen wollten. Was speziell den Fall der Konvergenzbedingung der Fourierschen Reihe angeht, so ist meine persönliche Ansicht, — die ich aber öffentlich auszusprechen mich wohl hüten werde —, gegenwärtig die, daß es ein allgemein gültiges Kriterium dafür in der Tat nicht gibt, — es sind eben Ihre Untersuchungen, die mich zu dieser (von meiner früheren weit entfernten) Ansicht geführt haben. Aber es ist, wie gesagt, eben meine Ansicht. Ich bin aber der Meinung, Sie brauchen auf die Beibehaltung des von Ihnen gewählten Ausdrucks, der ganz gewiß manchem Leser anstößig sein wird, gar kein Gewicht zu legen. Denn Sie haben

1) gezeigt, daß die von Dirichlet aufgestellte Konvergenzbedingung nicht haltbar ist, — das ist um so mehr anzuerkennen, als bisher alle, die sich ernsthaft mit der Theorie der Fourierschen Reihe nach Dirichlet beschäftigt haben, unter anderem Kronecker, Sie selbst und ich, bemüht gewesen sind, diese Bedingung als die wahre zu begründen;

2) haben Sie ein Kriterium angegeben, wodurch sich die Konvergenz einer Fourierschen Reihe in vielen Fällen, die den bisherigen Methoden unzugänglich sind, beurteilen läßt.

Durch beides nun haben Sie in der Theorie der fraglichen Reihen einen wesentlichen Fortschritt erzielt, — dies ist ein Verdienst, das man auch in weiteren Kreisen um so bereitwilliger anerkennen wird, je weniger Sie selbst durch immerhin unwesentliche und, wie Sie zugeben werden, diskutierbare Nebenbetrachtungen das von Ihnen Geleistete zurücktreten lassen. Nicht jeder wird, das können Sie mir glauben, Ihre Abhandlung mit solcher Aufmerksamkeit studieren wie ich den ersten Entwurf derselben, und das fest Begründete von dem, was Ansichtssache ist, scharf zu sondern wissen.

Eben so offen, wie ich mich über diesen Punkt ausgesprochen habe, sage ich Ihnen aber auch, daß ich inbetreff der Streichung des § 6 Borchardts Ansicht nicht teile. Auch in diesem Paragraphen findet sich manches, worüber sich streiten läßt, — ich könnte Ihnen auch inbetreff Ihrer Ausdrucksweise Einwendungen machen —, aber darauf kommt es nicht an, ich meine, daß man in dergleichen Dingen jedem Autor seine volle Freiheit gewähren muß. Deswegen mache ich Ihnen, um doch zu einem praktischen Resultate zu gelangen und, da Sie nun einmal meinen Rat in Anspruch genommen haben, folgenden Vorschlag.

Geben Sie inbetreff des Punktes 2 nach — ohne Rückhalt, wie Sie es nach meiner Überzeugung mit allen Ehren können —, so mache ich mich dagegen anheischig, Borchardt inbetreff des Artikels 6, auf den Sie Wert legen, umzustimmen, sodaß Borchardt weder unter dem Text Ihrer Arbeit noch als Zusatz zu derselben eine Note machen wird.

Inbetreff dessen, was Sie in Ihrem Briefe von „einem planmäßigen Ausgeschlossenwerden aus dem Journal" sagen, will ich einfach bemerken, daß Sie sich darin vollständig irren; um Sie davon zu überzeugen, erlaube ich mir, Sie ausdrücklich zu ersuchen, daß Sie die beiden anderen in Aussicht gestellten Teile Ihrer Arbeit Borchardt möglichst bald zuschicken wollen. Alles übrige wird sich in Ordnung bringen lassen, wenn Sie, wie ich hoffe, in den Osterferien hierherkommen werden.

In der Überzeugung, daß Sie in der Offenheit, mit der ich mich in diesem Brief gegen Sie ausgesprochen habe, einen Beweis meiner aufrichtigen Achtung für Sie sehen werden, verbleibe ich, freundlichst grüßend

Ihr ganz ergebener

Weierstrass.

Berlin, 21. Dezember 1873.

Verehrter Herr Kollege!

Nach Empfang ihres freundlichen Schreibens vom 15. d. habe ich mit Borchardt Rücksprache genommen, und ist derselbe, wie ich vorausgesehen hatte, damit einverstanden, daß die eine von ihm angefochtene Stelle (diejenige, welche Betrachtungen allgemeiner Natur enthält) bleibe, wie sie ist, die andere aber in der von Ihnen vorgeschlagenen Weise geändert werde. Damit, denke ich, wäre die Sache abgetan. Darf ich noch einen Wunsch hinzufügen, so wäre es der, daß Sie bei der abermaligen Durchsicht des Manuskripts, — falls Sie dieselbe überhaupt für zweckmäßig halten —, an dem Passus, dessen Fassung Sie, wie Sie sagen, wiederholt umgeschrieben haben, nunmehr nichts mehr änderten, — man überzeugt sich gar zu oft, nachdem man einen Ausdruck wieder und wieder geändert hat, daß der zuerst gewählte der beste war.

Was den weiteren mathematischen Inhalt Ihres Briefes angeht, — d. h. den nicht unmittelbar auf Ihre Abhandlung sich beziehenden —, so hoffe ich, werden wir wohl Gelegenheit haben, uns mündlich darüber zu unterhalten. Inbetreff des Unendlichkleinen will ich nur bemerken, daß sich die Ansichten darüber wesentlich verschieden gestalten, je nachdem man von geometrischen und physikalischen Vorstellungen ausgehend, also mit dem Begriff der extensiven Größe, das Gebiet der Analysis betritt oder von der Algebra aus, d. h. dem Zahlbegriff und den mit demselben notwendig gegebenen arithmetischen Grundoperationen. Ich halte den letzteren Weg für den, auf welchem allein sich die Analysis mit wissenschaftlicher Strenge begründen läßt und alle Schwierigkeiten sich beseitigen lassen. Aber freilich ist dies eine Ansicht, die nur dadurch, daß sie konsequent und vollständig in allen Teilen der Analysis durchgeführt würde, zu begründen wäre.

— —

Berlin, 15. Dezember 1874.

Verehrter Herr Kollege!

— —

In Beantwortung Ihres früheren Briefes gebe ich Ihnen zunächst die gewünschte Adresse:

M^{d} Sophie Kowalewsky (nicht a), St. Petersburg, Wassily Ostrow, 1$^{\text{ère}}$ Ligne, Maison No. 14.

Dann will ich auch die Gewissensfrage, die Sie an mich richten, ganz gewissenhaft beantworten.

An der fraglichen Dissertation[4] habe ich — abgesehen davon, daß ich sie von zahllosen grammatischen Fehlern gereinigt — keinen andern Anteil, als daß ich der Verfasserin die Aufgabe gestellt habe. Und auch in dieser Beziehung muß ich bemerken, daß ich nach dem über gewöhnliche Differentialgleichungen Erkannten, — das in der Einleitung so, wie ich es vorzutragen pflege, zusammengestellt ist —, eigentlich ein anderes Resultat erwartet hatte. Ich war, — um bei dem einfachsten Falle stehen zu bleiben —, der Meinung, daß eine Potenzreihe mehrerer Veränderlichen, die einer gegebenen partiellen Differentialgleichung formell genügt, auch stets innerhalb eines bestimmten Bereichs konvergieren müsse und dann eine der Differentialgleichung wirklich genügende Funktion darstelle. Daß dem nicht so ist, wie Sie an dem in der Dissertation behandelten Beispiele der Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ sehen, wurde zu meiner großen Überraschung von meiner Schülerin ganz selbständig, — und zwar zunächst bei viel komplizierteren Differentialgleichungen als der angeführten —, entdeckt, sodaß sie schon an der Möglichkeit verzweifelte, zu einem allgemeinen Resultate zu gelangen; die so einfach erscheinende Aushilfe, die sie für die so entstandene Schwierigkeit gefunden hat, habe ich ihr als Beweis richtigen mathematischen Blickes hoch angerechnet. Sie hat übrigens für den Zweck der Promotion noch zwei andere Arbeiten verfaßt, von denen die eine unter dem Titel: „Bemerkungen und Zusätze zu Laplaces Untersuchungen über die Gestalt der Saturnsringe“ auch gedruckt werden soll[5]. Es wird darin zunächst gezeigt, wie das Resultat von

Laplace als erste Annäherung strenge begründet werden könne, — in der Tat ist die Analyse von Laplace schauderhaft —, und ferner nachgewiesen, daß in Wahrheit der Querschnitt eines Ringes unter der von Laplace gemachten Annahme nicht eine Ellipse sein kann, sondern eine eiförmige Kurve, deren Gestalt man, — abgesehen von den technischen Rechnungsschwierigkeiten, die enorm sind —, bis zu jedem Grade der Genauigkeit bestimmen kann. Diese Arbeit ist ganz aus der eigenen Initiative der Verfasserin hervorgegangen.

— —

Ihre andeutende Mitteilung über die Koeffizienten einer Reihe

$$\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ist insofern nicht vollständig, als Sie nicht angeben, was Sie von dieser Reihe in Beziehung auf die Konvergenz derselben voraussetzen. Hängt aber das, was Sie beweisen, nicht einigermaßen zusammen mit dem von CANTOR (Borchardt 72, p. 130) behandelten Satze?

Schließlich noch eine Bemerkung. Was sagen Sie zu einer Funktion, die bei reellem Werte des Arguments überall stetig ist, kein Maximum oder Minimum besitzt und trotz diesem regulären Verhalten so kapriziös ist, keinen bestimmten Differentialquotienten zu haben, wenn das Argument eine algebraische Zahl (d. h. Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Zahlkoeffizienten) ist, dagegen ganz vernünftig sich aufführt, sobald das Argument einen transzendenten Wert hat? Wenn ich Ihnen davon Mitteilung mache, so habe ich einen doppelten Zweck. Zunächst ärgert es mich, daß Sie durch die (sehr wahre) Bemerkung auf S. 29, Z. 3 Ihres „Versuchs“[6] meinem ältesten Schüler und Freunde KOENIGSBERGER eine Waffe in die Hand gegeben haben, durch die er seine auf S. 13 der „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen“ trotz alledem hingestellte Behauptung betr. die Existenz eines Differentialquotienten einer stetigen Funktion verteidigen kann. Denn da er wohlweislich die Bedingung einschiebt, daß die Funktion nicht unendlich viele Maxima und Minima haben solle, so widersprechen meine Beispiele seiner Behauptung nicht. Nun hatte ich mir eine Funktion der genannten Art gemacht, — übrigens wäre schon die von SCHWARZ[7] erdachte genügend gewesen, bei der meinigen erscheint die Sache nur etwas pikanter —; Sie aber sagen, leider mit Recht, auch die Gesamtheit aller algebraischen Zahlen sei doch immer nur als eine Reihe einzelner Werte zu betrachten, — in der Tat kann und muß man dies vielleicht, insofern die algebraischen Zahlen durch eine bestimmte Definition aus der Gesamtheit der reellen Zahlen ausgeschieden werden, und da nun wieder wohlbedächtig Ausnahmen, d. h. die Nichtexistenz eines Differentialquotienten für einzelne Werte des Arguments der

Funktion (wenn auch schwerlich an eine Reihe von Zahlen dabei gedacht worden ist, von denen auch im kleinsten Intervalle unendlich viele liegen) zugelassen werden, so ist alle meine Mühe umsonst. Wirklich scheint es schwer zu sein, eine Funktion aufzufinden, die kein Maximum und Minimum besitzt und bei der doch der Quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für jeden Wert von x, wenn h unendlich klein wird, beständig zwischen zwei endlichen Grenzen schwankt, so überzeugt ich auch bin, daß solche Funktionen existieren.

Die in Rede stehende Funktion ist aber die folgende. Es sei

$$\varphi(x) = x + \frac{x}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(x^2)\right),$$

sodaß

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log(x^2)\right),$$

k eine positive Zahl, kleiner als 1, und

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots$$

eine gegebene unendliche Reihe reeller Größen; so hat die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \varphi(x - a_n)$$

an keiner der Stellen

$$\pm a_1,\ \pm a_2,\ \ldots\ldots$$

einen bestimmten Differentialquotienten, obwohl sie gleichzeitig mit x beständig wächst und nirgends unstetig wird. Der Beweis erfordert einige Vorsicht, ist aber leicht zu führen. Nun hat Cantor[8] (B. 77 d. J.) gezeigt, daß sich die positiven algebraischen Zahlen auf eine gewisse Weise so in eine Reihe ordnen lassen, daß sich von einer ersten, zweiten usw. algebraischen Zahl sprechen läßt. Nimmt man also für die a_1, a_2, ... die Reihe der dergestalt geordneten algebraischen Zahlen, so hat man eine Funktion von der angegebenen Beschaffenheit. Aber, wie gesagt, sie nützt mir nichts, nachdem Sie mit dem so sehr verallgemeinerten Begriff einzelner Werte in der Gesamtheit der reellen Größen, d. h., wie Sie sich ausdrücken, „besonderer Zahlenarten, die doch immer isoliert, wenn auch in unendlicher Menge vorhanden, auftreten" dazwischen gekommen sind. Gestatten Sie mir aber, noch eine andere Bemerkung hier anzuknüpfen.

Riemann (Inaugural-Dissertation S. 1)[9] sagt: „Es ist (wenn w eine stetige Funktion einer reellen Veränderlichen z ist) einerlei, ob man die Abhängigkeit der Größe w von z als eine willkürlich gegebene betrachtet oder als eine durch bestimmte Größenoperationen bedingte definiert. Beide Begriffe sind infolge des erwähnten (Fourierschen) Theorems kongruent."

Dies kann nach meiner Ansicht nicht aufrecht erhalten werden, wenn die aus einer gegebenen (definierten) Funktion abgeleitete Fouriersche Reihe auch nur für einen einzigen Wert des Arguments den Wert der Funktion nicht darstellt. Solche Funktionen, welche diese Singularität darbieten, haben Sie entdeckt; die mir mitgeteilte, die ja leicht so erweitert werden kann, daß sie für jeden reellen Wert von x definiert und stetig ist, läßt sich (von $x = -a$ bis $x = +a$) in eine Fouriersche Reihe entwickeln, die für $x = 0$ divergiert, obwohl die Funktion an dieser Stelle einen endlichen Wert hat. Das genügt mir vollkommen, vielleicht aber nicht jedermann. (Man kann z. B. sagen: „Ja, es kommt oft vor, daß ein analytischer Ausdruck seinen wahren Wert unter der Form $\infty - \infty$ verbirgt" u. dgl.) Um eingewurzelte Vorurteile zu bekämpfen, muß man gröberes Geschütz auffahren. Könnten Sie nun nicht aus ihrer Funktion in ähnlicher Weise, wie die obige $f(x)$ aus $\varphi(x)$ entsteht, eine andere herleiten, welche, ihrer durchgängigen Stetigkeit ungeachtet, die Eigenschaft hätte, daß die aus ihr sich ergebende Fouriersche Reihe in dem Intervall, für welches sie gilt, divergent wäre für jeden rationalen oder algebraischen Wert des Arguments? Eine solche Reihe würde doch schwerlich jemand als einen mathematischen Ausdruck der betreffenden Funktion betrachten. Vielleicht denken Sie einmal in einer müßigen Stunde daran.

Hiermit schließe ich endlich diesen langen Brief, von dem ich nur wünsche, daß er mich in Ihren Augen von dem Vorwurf, den man mir mit Recht macht, ich sei nachlässig in der Beantwortung empfangener Briefe, einigermaßen reinigen möge.

Mit freundlichstem Gruß

Ihr ergebener

Weierstrass.

(Undatiert).

In Beziehung auf die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

liegt die Bemerkung nahe, daß sich daraus sofort eine andere ableiten läßt, welche wenigstens dem ersten Einwand Koenigsbergers, nämlich daß „schon jedes einzelne Glied der Reihe nicht für jeden Wert von t eine Bedeutung habe" (was ich selbstverständlich nicht zugebe) nicht ausgesetzt ist. Da nämlich a^n eine ganze Zahl ist, so läßt sich $\cos(a^n \pi x)$ als ganze Funktion von $\cos \pi x$ mit rationalen Zahlkoeffizienten darstellen; diese möge mit $G_n(\cos \pi x)$ bezeichnet werden. Setzt man nun, unter t eine unbeschränkt veränderliche reelle Größe verstehend,

$$\cos \pi x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

so verwandelt sich $f(x)$ in eine Funktion $F(t)$ von t, und man hat

$$F(t) = \sum_{n=0} b^n G_n\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right).$$

Nimmt man nun für b eine rationale Zahl an, so ist also $F(t)$ dargestellt durch eine Reihe, in der jedes einzelne Glied eine rationale Funktion von t mit rationalen Zahlenkoeffizienten ist. Diese konvergiert überdies gleichmäßig für alle Werte von t; man kann daher, wenn δ eine beliebig klein angenommene Größe ist, eine rationale Funktion $\overline{F(t)}$ so bestimmen, daß für j e d e n Wert von t die Differenz

$$F(t) - \overline{F(t)}$$

dem absoluten Betrag nach kleiner als δ ist, also für jeden g e g e b e n e n (rationalen oder irrationalen) Wert von t durch eine endliche Anzahl von Operationen eine rationale Zahl bestimmen, welche dem Werte von $F(t)$ so nahe kommt, als man will. Dies hat bisher jedem Mathematiker, selbst den strengsten Empiristen, wie z. B. Kirchhoff einer war, vollkommen genügt, um die vorstehende Reihe als Ausdruck einer gehörig definierten Funktion anzuerkennen. Diese Funktion $F(t)$ hat nun für keinen Wert einen bestimmten Differentialquotienten, sobald ab hinlänglich groß ist; denn existierte ein solcher für $t = t_0$, so hätte auch die Funktion $f(x)$ für den entsprechenden Wert von x einen bestimmten Differentialquotienten. Dieser Beweis wurde allerdings von Koenigsberger beanstandet, weil er den zugehörigen Wert von x nicht als hinlänglich definiert betrachtet; da aber das Behauptete richtig ist, so muß es sich auch für $F(t)$ direkt beweisen lassen.

Sie entschuldigen, daß ich im Vorstehenden zu Ihnen geredet habe, als wären Sie ein Student im ersten Semester. Wenn man aber sieht, wie die elementarsten Wahrheiten der Mathematik jetzt angezweifelt werden, so wird man vorsichtig und unterdrückt bei einer Deduktion auch nicht den selbstverständlichsten Übergangsgedanken. Auf Koenigsberger wird freilich das Gesagte keinen Eindruck machen, weil er nicht zugibt, daß die aufgestellte Reihe, selbst wenn man der Veränderlichen t nur rationale Werte beilegt, eine Bedeutung habe, ebensowenig als er einen unendlichen Dezimalbruch, wenn Sie ihm auch ein Gesetz angeben, das bestimmt, welche Ziffer auf jeder bestimmten Stelle stehen soll, als Ausdruck einer wohldefinierten Größe gelten ließe.

Mit freundlichsten Grüßen

Ihr hochachtungsvoll ergebener

Weierstrass.

Berlin, 6. Juni 1875.

Mein lieber Herr Kollege!

So habe ich denn wirklich vier unbeantwortete Briefe von Ihnen vor mir liegen. Nun, ich habe Ihnen, glaube ich, bereits früher gesagt, daß ich im Kreise meiner Bekannten schon lange in dem Rufe stehe, ein nachlässiger Korrespondent zu sein. Ich kann das Faktum nicht leugnen, aber freilich, wenige wissen, wie es gekommen, daß ich Briefschreiben niemals als eine freie Kunst zu lieben gelernt, sondern vielmehr stets als eine Belästigung, etwa wie Heftekorrigieren, Examinieren u. dgl. zu empfinden gewohnt worden bin. Mögen Sie es hören. Als ich einst nach sieben frisch und fröhlich durchlebten Universitäts-Semestern — im Album hieß ich Jurist — den Beschluß faßte, fortan Mathematik als Lebensberuf zu treiben, — was meine Freunde an meiner Zurechnungsfähigkeit zweifeln machte und meinem guten Papa, der mir das Ziel gesteckt hatte, zehn Jahre nach vollendetem Triennium spätestens Regierungsrat zu sein, viel Herzenskummer bereitete —, mußte ich diesen Entschluß zunächst mit vierzehnjähriger Verbannung in das Land der Velaten und Obotriten büßen. Das war eine schlimme Zeit, deren unendliche Öde und Langeweile unerträglich gewesen wäre ohne die harte Arbeit, die sie brachte, welche aber jedenfalls einen jungen Mann, der bis dahin ein Leben voll reichbekränzter Tage geführt hatte, zum Einsiedler machen mußte, was ich innerlich blieb, wenn ich auch in dem mich umgebenden Kreise von Gutsbesitzern, Referendaren und jungen Offizieren als ein ziemlich guter Kamerad galt; in dieser Zeit, — welche genau diejenigen Lebensjahre, die man sonst die schönsten nennt, für mich ausfüllte —, habe ich die Freude an schriftlicher Mitteilung verloren, — die Gegenwart hatte nichts, was der Rede wert gewesen, und von Zukunftsträumen zu sprechen war nicht meine Art. Außerdem war, was der jetzigen Generation kaum glaublich erscheint, damals die Unterhaltung einer regelmäßigen Korrespondenz ein Luxus, den sich ein

Gymnasiallehrer mit monatlich 29 Talern, die Groschen habe ich vergessen, für 30 Stunden wöchentlich nicht gestatten durfte; kostete doch anfangs der vierziger Jahre ein Brief von Königsberg nach Köln noch 17 Silbergroschen. Verzeihen Sie, lieber Kollege, daß ich Sie von dieser Misere unterhalte; aber die Erinnerung an jene 14 Jahre ist gerade in diesen Tagen wiederholt lebhafter als sonst in mir wach geworden. Neben Ihrem letzten Briefe, in welchem Sie, wofür ich Ihnen freundlichst danke, am Schlusse noch des Ordens Pour le mérite gedenken, der mir unerwartet zuteil geworden ist, — ich gestehe offen, daß ich, in der Lage, zuweilen einen Orden tragen zu müssen, diesen, den Gauß, Jacobi und Dirichlet gehabt haben, lieber anlegen werde als jeden andern —, liegt vor mir noch ein anderes Gratulationsschreiben von einem ehemaligen Korpsbruder. Der Mann, ehedem freisinnig und Rationalist von reinstem Wasser, ist erst Professor, dann praktischer Beamter und zuletzt Präsident eines hohen Gerichtshofs geworden; er hat sich in seinem ganzen Leben nicht um mich gekümmert, ich wußte nur von ihm, daß er Pietist und ein grimmiger Verteidiger der Todesstrafe ist; jetzt aber, da er in den Zeitungen gelesen, daß S. Majestät allergnädigst geruht haben u. s. w., kann er nicht umhin, seinem lieben alten Freunde und Bruder, der ihm einst die Erlangung der juristischen Doktorwürde so energisch bestritten — meine einzige Juristentat —, dann aber sich in so liebenswürdiger Weise habe besiegen lassen, seine herzlichste und aufrichtigste Freude darüber auszudrücken, daß derselbe auf einem andern Gebiete der Wissenschaft ein so berühmter Mann geworden sei, — und so geht es fort ein paar Seiten lang, verquickt mit den salbungsvollsten Floskeln über des Herrn wunderbare und gnädige Führung der Lebenswege, — nun möge der Herr ihn belohnen für seine gute Absicht, ich werde den Brief nicht beantworten.

Nun aber endlich zu etwas anderem. Zunächst bedaure ich, daß ich außerstande bin, Ihnen einen Privatdozenten, der aus eigenen Mitteln für seine Existenz sorgen könnte, zu empfehlen. Das letzte Exemplar dieser Art, die immer seltener wird, habe ich kürzlich bewogen, sich in Halle zu habilitieren. Wüßte ich noch jemanden, dem ich mit gutem Gewissen die Ergreifung der akademischen Laufbahn anraten könnte, so würde ich ihn zunächst — ich bin ein aufrichtiger Egoist — bestimmen, es hier zu versuchen, wo wir einen tüchtigen jungen Mann noch sehr gut brauchen könnten. Augenblicklich haben wir einen Jahrgang sehr guter mathematischer Studenten, aus denen hoffentlich auch einige tüchtige Dozenten hervorgehen werden.

Ich hatte darauf gerechnet, Sie zu Ostern hier zu sehen, habe mich aber gefreut, von Ihnen zu erfahren, daß Sie eine genußreiche Ferienreise gemacht haben. Mir ist es weniger gut gegangen; infolge einer Erkältung habe ich die

Ferien völlig verloren und fühle mich auch in diesem Augenblicke noch höchst arbeitsunlustig.

Für die Übersendung eines Korrekturexemplars Ihrer trigonometrischen Abhandlung — verzeihen Sie den lapsus calami — danke ich bestens, das andere Exemplar schicke ich Ihnen, Ihrem Wunsche entsprechend, zurück. Bei dieser Gelegenheit möchte ich Sie bitten, ein Exemplar Ihrer früheren Abhandlung, in der die Notiz von mir über die nicht differenzierbare Funktion steht, an Herrn Darboux (Paris, rue Monge 29) schicken zu wollen. Darboux hat nämlich kürzlich einen Aufsatz[10] — über Funktionen ohne Differentialquotienten veröffentlicht, in welchem er sehr richtig bemerkt, daß z. B. die von Schwarz angegebene Funktion nicht eigentlich als eine solche gelten könnte, weil sie doch an unendlich vielen Stellen einen Differentialquotienten habe, und dann — ebenso richtig —, daß die Reihe $\sum c_n \sin(n!\,x)$, wo $\sum c_n$ konvergiert, $\sum n!\,c_n$ aber divergiert (d. h. so ungefähr wird es lauten), als eine durchweg undifferenzierbare aufstellt. Es erscheint mir doch notwendig, ihm bemerklich zu machen, daß jenes Urteil bereits von Ihnen sehr bestimmt ausgesprochen und von mir die Existenz einer wirklich nicht differenzierbaren Funktion längst nachgewiesen ist. Sie brauchen ihm nicht zu schreiben, wenn Ihnen dies nicht paßt, sondern nur die betr. Stelle anzustreichen. Ich mag ihm selbst keine Mitteilung machen, da ich erst kürzlich in der Lage war, für meine Schülerin die Priorität der in der Dissertation derselben entwickelten Sätze, welche — weniger allgemein und streng — Darboux im Anfang d. J. in den Comptes Rendus[11] publiziert hat, in Anspruch zu nehmen.

Dies führt mich auf Herrn Thomae. Die von Ihnen mir namhaft gemachte Schrift ist mir nicht zu Gesicht gekommen; ich kann also aus eigener Kenntnis darüber nicht urteilen. Wenn aber alle seine Anführungen so genau sind wie die, von der ein Zuhörer mir erzählte, nämlich daß S i e die Riemannsche Reihe $\sum \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ als ein Beispiel einer Funktion, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten hat, angeführt hätten, — ich denke, Sie haben gerade das Gegenteil gesagt —, während alles übrige aber des über den Gegenstand von Ihnen Erörterten ignoriert worden sei, so mögen Sie allerdings Grund zur Klage genug haben. Gleichwohl wäre mein Rat: wenn es nicht absolut notwendig ist, eine Polemik mit dem Herrn anzufangen, so lassen Sie ihn vorläufig laufen. Großen Schaden wird das auch nicht anrichten; wenn Sie später Ihre Untersuchungen zusammenstellen, so wird ein einfacher Hinweis auf frühere Abhandlungen bei allen Urteilsfähigen genügen, Ihnen Ihr Recht zu wahren. Aber, wie gesagt, ich bin in diesem Moment nicht instruiert genug, um eine ganz bestimmte Ansicht auszusprechen.

Den zweiten Teil Ihres letzten Briefes erlauben Sie mir für jetzt zu übergehen; es wird sich vielleicht später, unter veränderten Umständen, eine Gelegenheit, darauf zurückzukommen, darbieten. Die von Ihnen ausgesprochene Besorgnis über das Schicksal Ihrer jüngsten Abhandlung, — d. h. soweit dasselbe im Redaktionszimmer beschlossen wird —, hat mir aber Veranlassung gegeben, dieselbe bei Borchardt, der morgen nach der Schweiz abreist, einzusehen und mit demselben darüber zu reden. Von einem Zurückschicken Ihrer Arbeit kann, — um dies zunächst abzumachen —, nicht die Rede sein. Allerdings aber haben Sie nicht mit Unrecht vermutet, daß Borchardt an einigen Stellen Anstoß nehmen werde. Gestatten Sie mir, mich darüber ganz aufrichtig auszusprechen, indem ich zwei dieser Stellen herausgreife, — wobei ich übrigens bemerke, daß mir Ihre Abhandlung in diesem Augenblick nicht vorliegt und ich deswegen vielleicht Ihre Worte nicht ganz richtig zitiere.

Was Sie über Fourier sagen, ist sachlich wohlbegründet und auch dem Ausdrucke nach zu verteidigen, — bis auf den Passus: „er operiert darauf los in einer Weise, die man heutzutage selbst einem Anfänger nicht zugute halten würde." Dies scheint auch mir gegen die Achtung zu verstoßen, die wir einem Manne wie Fourier schuldig sind. Bei all seinen Mängeln ist das Fouriersche Werk von unermeßlichem Einfluß auf die Wissenschaft gewesen, — ohne Fourier kein Dirichlet! Und dann, kann ein Urteil wie das von Ihnen ausgesprochene nicht dazu beitragen, einem unserer jetzigen Anfänger das Studium der alten Werke als überflüssig erscheinen zu lassen? „Wer liest jetzt noch Lagrange?", soll Hr. Prym gesagt haben, — ich denke aber, Sie sind der letzte, der zur Verbreitung einer solchen Verkehrtheit beitragen möchte. Ferner scheinen Sie mir inbetreff des Verhältnisses von Fourier zu Lagrange ganz der Ansicht Poissons zu sein, der bekanntlich bitter und bis zu Ungerechtigkeit böse auf den ersteren war. Meiner Meinung nach hat aber Riemann recht, wenn er auseinandersetzt, daß Lagrange die Fouriersche Reihe in unserem Sinne gar nicht gekannt habe. In der Tat handelt es sich bei Lagrange stets nur um Reihen mit endlicher Gliederzahl, die für beliebig viele und einander beliebig nahe liegende Werte des Arguments die zugehörigen Werte einer willkürlichen Funktion geben. Was Lagrange an den betreffenden Stellen mit $\int$ bezeichnet, sind Summen, nicht Integrale. Erst für die mit Hilfe solcher Reihen erhaltenen Resultate erlaubt er sich den Schluß vom Endlichen auf das Unendliche.

Auch den Ausdruck, es habe Lagrange, um die Konvergenz der Reihe gehörig in Betracht zu ziehen, an der erforderlichen Reife gemangelt, kann ich nicht billigen, weil er gar zu leicht mißverstanden werden kann. Denn warum Lagrange einen Mangel zum Vorwurfe machen, den er mit allen seinen

Zeitgenossen teilt, zumal da darüber z. B. schon Abel so bestimmt sich ausgesprochen hat?

Wenn also Borchardt Sie bitten wird, diese Stellen und vielleicht noch einige ähnliche — mir sind nur die beiden bei einer flüchtigen Durchsicht besonders aufgefallen — bei der Korrektur zu streichen, so möchte ich Sie dringend ersuchen, keine Schwierigkeiten machen zu wollen. Ich habe dafür einen anderen Grund, den Sie als triftig anerkennen werden und den ich Ihnen im Vertrauen auf Ihre Diskretion mitteile. Borchardt hat in der letzten Zeit mit dem Journal und dessen Redaktion so viel Ärger gehabt, daß er gar leicht darauf kommen könnte, ganz von der Herausgabe zurückzutreten, was auch seine Frau und sein Arzt möchten. Das wäre aber geradezu ein Unglück; wir haben hier absolut keinen, der befähigt und geeignet wäre, an seine Stelle zu treten. Nach Crelles Tode* drohte dem Journal die Gefahr, in die allerungeeignetsten Hände, in die Schellbachs, zu fallen; nach Crelles und Reimers Ansicht sollte derselbe die Redaktion ganz im bisherigen Geiste fortführen. Da ließ sich, hauptsächlich durch Dirichlets Zureden, Borchardt bestimmen, die Redaktion zu übernehmen; und er hat dieselbe bis jetzt mit einer nicht hoch genug anzuerkennenden Aufopferung fortgeführt, wobei ich die nicht unerheblichen pekuniären Unterstützungen, die er dem Unternehmen hat zuteil werden lassen, gar nicht einmal in Anschlag bringen will. Einmal war er bereits im Begriff zurückzutreten; da wandte Clebsch durch die Begründung seiner Annalen** die Gefahr ab; denn nun hielt es Borchardt für Ehrenpflicht, am Platze zu bleiben. Im gegenwärtigen Augenblick würde uns, wie gesagt, sein Rücktritt in die allergrößte Verlegenheit bringen. Schon aus diesem Grunde müssen alle, denen das fernere Gedeihen des Journals, das für die Entwicklung der deutschen Mathematik so bedeutsam geworden ist, am Herzen liegt, sorgsam alles vermeiden, was den Herausgeber verstimmen könnte, zumal da dessen Bestrebung, sein Journal von Polemik und persönlichem Hader frei zu halten, das doch wirklich anzuerkennen ist, sowie seine aufrichtige Pietät gegen die Meister und Begründer unserer Wissenschaft hauptsächlich es sind, die ihn zur Anwendung einer Kritik bestimmen, welche den Autoren nicht immer angenehm, in einzelnen Fällen zuweilen auch zu weit getrieben sein mag. Doch genug dieser Erörterungen, in die einzugehen mich nur meine aufrichtige Achtung für Sie und die warme Anerkennung Ihres wissenschaftlichen Eifers bewogen hat.

Schließlich will ich Ihre Frage, wer zuerst die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe auf die gebräuchliche Art durch bestimmte Integrale auszudrücken

* Im Jahre 1855.

** Die Mathematischen Annalen wurden im Jahre 1869 begründet.

gelehrt habe, dahin beantworten, daß Encke als den Urheber dieser Methode Gauss nannte, während es unzweifelhaft Euler gewesen ist. Die betr. Stelle werde ich Ihnen, wenn es Sie interessiert, gelegentlich nachweisen.

Mit freundlichstem Gruß und in Erwartung einer baldigen Antwort von Ihnen

Ihr ergebenster

Weierstrass.

Berlin, 7. Juni 1875.

Mein lieber Herr Kollege!

In meinem gestrigen Briefe habe ich, so überlang derselbe auch geworden ist, doch noch etwas vergessen, nämlich Sie zu bitten, wenn Sie ein Exemplar der Abhandlung[12] an Darboux schicken, in derselben gefälligst zwei störende Druckfehler korrigieren zu wollen:

Z. 10 v. o. x_0 statt α_0.

Z. 4 v. u. muß es heißen:

also auch, wenn $ab > 1$, kleiner als ......

Freundlichst grüßend

Weierstrass.

(Undatiert)

Hochgeehrter Herr Kollege!

— —

Aus dem von Ihnen beigebrachten Beispiele geht unzweifelhaft hervor, daß es möglich ist, auf eine beliebige Strecke Δ eine unendliche Menge getrennt von einander liegender Strecken Δ', deren Summe kleiner als Δ ist, so zu verteilen, daß in jedem noch so kleinen Intervall von Δ sich Strecken finden, die zu den Δ' gehören. Ebenso sicher ist es, daß man auf unendlich viele Arten diskontinuierliche Funktionen definieren kann, welche im Inneren jeder Strecke durchweg stetig sind, also der von Dirichlet angegebenen Bedingung der Integrierbarkeit genügen, während sie nicht integrierbar sind, wenn man den Begriff des bestimmten Integrals so feststellt, wie Riemann und Sie es tun. Ich möchte aber dabei bemerken, daß Dirichlet, als er die von Ihnen zitierte Stelle niederschrieb[13], ohne Zweifel eine andere Definition des bestimmten Integrals im Falle einer diskontinuierlichen Funktion im Sinne hatte, welche vor dem Erscheinen der Riemannschen Abhandlung über die Fouriersche Reihe allgemein adoptiert war. Nachdem man längere Zeit von der ursprünglichen, durch Leibniz vertretenen

Auffassungsweise des bestimmten Integrals sich abgewandt hatte, war dieselbe durch Cauchy in strengerer Begründung wieder in ihre Rechte eingesetzt und zugleich auf den Fall ausgedehnt worden, wo die zwischen den Grenzen a, a' zu integrierende Funktion $f(x)$ an beliebig vielen, zwischen a und a' liegenden Stellen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, indem dann

$$\int_a^{a'} f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_n}^{a'} f(x)\,dx$$

gesetzt wurde. Ich weiß nicht, ob vor Dirichlet jemand daran gedacht hat, daß die Unstetigkeitsstellen auch in unendlicher Menge vorhanden sein können; es lag aber nahe, in dem Falle, wo $f(x)$ die von Dirichlet gestellte Bedingung erfüllt, $\int_a^{a'} f(x)\,dx$ zu definieren als die Summe der über sämtliche Teilstrecken des Intervalles $a \ldots a'$, in denen die Funktion $f(x)$ durchweg stetig ist, ausgedehnten Integrale, eine Summe, die jedenfalls einen bestimmten endlichen Wert hat, wenn der Wert von $f(x)$ beständig unterhalb einer angebbaren Grenze bleibt. So erklärt es sich, daß Dirichlet das von ihm gestellte Kriterium der Integrierbarkeit einer Funktion als ein durch den Begriff des Integrals notwendig bedingtes ansah.

Es hängt aber die Entscheidung darüber, ob man eine der Dirichletschen Bedingung entsprechende Funktion unbedingt für integrierbar zu halten habe oder nicht, von der Erledigung einer anderen, wichtigeren Frage ab, über die ich gern Ihre Ansicht vernehmen möchte. Es hat mir immer geschienen, daß Riemanns Definition des bestimmten Integrals mit einer Unzuträglichkeit behaftet sei, die ich mir gefallen lassen mußte, weil ich sie bisher nicht zu beseitigen wußte. Dieselbe besteht darin, daß bei der Bestimmung der größten Schwankung, die der Wert der zu integrierenden Funktion in einem Intervalle macht (also bei der Aufstellung der Integrierbarkeitsbedingung), diejenigen Werte, die sie an den Unstetigkeitspunkten hat, mit berücksichtigt werden, während doch der Wert des Integrals, falls es existiert, bloß von den Werten abhängt, welche die Funktion in den Stetigkeitspunkten annimmt.

Es sei $f(x)$ die zu betrachtende Funktion, a die untere, a' die obere Integrationsgrenze, δ eine beliebig klein anzunehmende positive Größe, ferner $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine Reihe von Werten, die zwischen a, a' so anzunehmen sind, daß die Differenzen $a_1 - a$, $a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}$, $a' - a_n$ sämtlich von demselben Zeichen wie $a' - a$ und ihrem absoluten Betrag nach nicht größer als δ sind, endlich $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ eine Reihe von Werten, welche bezüglich in den Intervallen

$$a \ldots a_1,\ a_1 \ldots a_2, \ldots,\ a_n \ldots a'$$

nach Belieben angenommen werden können. Nähert sich alsdann, wenn man δ unendlich klein werden läßt, die Summe

$$S = (a_1 - a) f(x_1) + (a_2 - a_1) f(x_2) + \cdots + (a' - a_n) f(x_{n+1})$$

einer bestimmten Grenze, wie man auch die Größen a_ν, x_ν der gestellten Bedingung gemäß annehmen möge, so ist diese nach Riemanns, von Ihnen adoptierter Definition den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_a^{a'} f(x)\,dx.$$

Die Bedingung dafür, daß eine solche Grenze existiere, haben Sie auf die Form gebracht:

$$\lim_{\delta = 0} (\delta_1 \cdot \sigma_1 + \delta_2 \cdot \sigma_2 + \cdots + \delta_{n+1} \cdot \sigma_{n+1}) = 0,$$

wobei

$$\delta_1 = a_1 - a, \quad \delta_2 = a_2 - a_1, \ldots, \quad \delta_{n+1} = a' - a_n$$

und σ_ν die Differenz zwischen der oberen und der unteren Grenze derjenigen Werte ist, welche $f(x)$ in dem Intervall $a_\nu \ldots a_{\nu+1}$ annimmt.

Diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, darf man nun den Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Beschränkung auferlegen, daß jede von ihnen ein Stetigkeitspunkt der Funktion sein solle, da es ja nach Ihrem Satze (p. 27 des 79. Bandes von Borchardts Journal) in jedem noch so kleinen Intervalle solche Punkte gibt[14]. Dadurch wird evident, daß der Wert des Integrals unabhängig ist von den Werten, welche der Funktion in den Unstetigkeitspunkten beigelegt werden.

Nun frage ich, wenn dem so ist, warum definiert man dann das Integral nicht von vornherein als die Grenze, der sich S unter der Bedingung nähert, daß bei der Wahl der Werte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ nur die Stetigkeitsstellen der Funktion berücksichtigt werden sollen? Die Bedingung für die Integrierbarkeit wird dann in derselben Form ausgedrückt wie vorhin; aber es bedeutet dann σ_ν die Differenz zwischen der oberen und der unteren Grenze derjenigen Werte, die $f(x)$ in den Stetigkeitspunkten des Intervalls $a_\nu \ldots a_{\nu+1}$ annimmt. Da kann es nun sehr wohl sein, daß σ_ν nach der zweiten Erklärung einen kleineren Wert hat als nach der ersten, niemals aber einen größeren; es kann daher eine Funktion nach der modifizierten Riemannschen Definition, wie ich sie nennen will, integrierbar sein, die es nach der ursprünglichen nicht ist, während umgekehrt, wenn sie nach dieser integrierbar ist, sie nach jener es sicher auch ist. In der Tat ist nach der modifizierten Definition eine Funktion, die der Dirichletschen Bedingung entspricht, stets integrierbar und stimmt der Wert von $\int_a^{a'} f(x)\,dx$ mit dem oben angegebenen überein, — während andererseits das bestehen bleibt, daß die von Dirichlet angegebene Bedingung der Integrierbarkeit keine notwendige ist.

Ich habe seinerzeit Ihre Abhandlung: „Versuch einer Klassifikation u. s. w." sehr aufmerksam gelesen; die angeführte Stelle, — die über einen wichtigen Punkt allerdings sehr kurz sich ausspricht —, muß ich aber doch nicht gehörig geachtet haben, denn sonst wäre sie sicherlich meiner Erinnerung nicht so gänzlich entschwunden gewesen, daß mich der in Rede stehende Satz, als Sie neulich denselben zufällig erwähnten, förmlich überraschte, indem mir augenblicklich klar wurde, wie durch ihn beseitigt werden könnte, was mich an der Riemannschen Erklärung der bestimmten Integration, wie gesagt, immer chokiert hatte, — hätte ich den Satz gekannt, so würde ich die angegebene Modifikation dieser Erklärung schon längst vorgeschlagen haben. Daß durch diese Modifikation das Reich der integrierbaren Funktionen erweitert wird, dürfte, wie ich hoffe, gerade Ihnen nicht mißfallen, — während auf der andern Seite Einwendungen, die Sie dagegen erheben möchten, bei mir die gebührende Beachtung finden werden. Ich brauche wohl nicht zu erwähnen, daß von der Funktion $f(x)$, vorläufig wenigstens, vorausgesetzt ist, daß sie nicht soll beliebig große Werte annehmen können.

Würde meine Modifikation der Definition des bestimmten Integrals angenommen, so bliebe in Ihrer „Klassifikation" Nr. I ungeändert, in Nr. II wären zuerst zu erwähnen die Funktionen, die in jedem, noch so kleinen Intervalle Stetigkeitspunkte besitzen, und über diese als eine besondere Klasse die integrierbaren Funktionen hervorzuheben, wobei dann die Höldersche [15], sehr beachtenswerte Ergänzung Ihres Satzes als ein Lehrsatz ihre Stelle finden und nachgewiesen werden müßte, daß eine Funktion, die nicht in jedem Intervall eine unabzählbare Menge von Stetigkeitspunkten besitzt, auch dann nicht integrierbar sein würde, wenn man den Begriff der Integration unter Berücksichtigung der Werte, welche die Funktion in den Unstetigkeitspunkten annimmt, feststellte.

Andere Fragen, die sich an das Vorstehende anknüpfen, behalte ich mir vor, bei anderer Gelegenheit zur Sprache zu bringen [16].

Hölder hat mir seinen Aufsatz zugeschickt. Ich werde denselben kommenden Donnerstag der Akademie vorlegen und drucken lassen, sobald ich erfahre, daß

Hölder wieder in Göttingen ist und ihm dorthin die Korrekturbogen geschickt werden können.

Ihr hochachtungsvoll ergebener
Weierstrass.

Berlin, 20. April 1885.

Hochgeehrter Herr Kollege!

— —

In Beziehung auf Ihre letzten Mitteilungen gebe ich Ihnen vollkommen recht, daß auch dann, wenn eine Modifikation der Riemannschen Definition des bestimmten Integrals angenommen wird, das Dirichletsche Kriterium nicht ausreicht, um die Integrierbarkeit einer Funktion festzustellen. Aber ich ziehe daraus einen anderen Schluß: es muß die Riemannsche Definition noch eingreifender, als ich es getan, modifiziert, d. h. noch mehr von Unwesentlichem befreit werden; gerade die Funktion $f(x)$, welche Sie mir in Ihrem letzten Brief als eine nicht integrierbare bezeichnen, obwohl sie der Dirichletschen Bedingung genügt, läßt sich durch eine Fouriersche Reihe darstellen, wie ich aus meinen Untersuchungen über die Darstellbarkeit von Funktionen durch trigonometrische Reihen (im weiteren Sinne des Wortes) leicht folgere und was sich auch durch die bekannte Methode beweisen läßt.

Dabei ergeben sich die Koeffizienten der Reihe als bestimmte Integrale, wenn man, was für die betrachtete Funktion angeht, den Begriff des bestimmten Integrals so auffaßt, wie es Dirichlet, wie ich Ihnen bereits schrieb, unzweifelhaft getan hat. Dieser Begriff ist jedenfalls zu eng, er kann aber auf eine andere Weise als auf die von Riemann vorgeschlagene so erweitert werden, daß für jede Funktion $f(x)$ des reellen Arguments x, die in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = a'$ so definiert ist, daß sie in jedem noch so kleinen Teile dieses Intervalls Stetigkeitspunkte besitzt,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,$$

wenn x_1, x_2 beide in dem genannten Intervalle liegen, immer eine bestimmte Bedeutung hat und daß dann auch alle wesentliche Sätze, welche aus der bisher angenommenen Definition der bestimmten Integration abgeleitet worden sind, ihre volle Gültigkeit behalten, namentlich das Fundamentaltheorem, nach welchem eine und nur eine in dem Intervalle $a \ldots a'$ stetige Funktion $F(x)$ existiert, welche an einer willkürlich anzunehmenden Stelle

$x = x_0$ verschwindet und in jedem Stetigkeitspunkt der Gleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

genügt.

Wie ich, nunmehr die Riemannsche Definition des bestimmten Integrals ganz verlassend, dazu gelange, den Integrationsbegriff so festzustellen, daß das Reich der integrierbaren Funktionen mit dem Reiche derjenigen Funktionen, die in jedem noch so kleinen Intervalle Stetigkeitspunkte besitzen, völlig zusammenfällt, kann ich in diesem Briefe nicht auseinander setzen und muß mir vorbehalten, mich zunächst mündlich mit Ihnen darüber zu unterhalten, umso mehr, als ich erst gestern abend mir völlig klar darüber geworden bin. Ich denke, es wird mir nicht schwer werden, Sie zu der neuen Lehre zu bekehren, zumal, da Sie ja selbst bereits auf der Fährte waren, auf der weiter vorzugehen ich mich weniger als Sie gescheut habe, weil mein Glaube an die Angemessenheit der Riemannschen Definition bereits wankend geworden war. Dieselbe ganz aufzugeben, daran konnte ich freilich bisher nicht denken, weil mir, was ich nochmals hervorzuheben mich gedrungen fühle, der wichtige Satz fehlte, den Sie auf S. 27 des 79. Bandes von Borchardts Journal schon vor 10 Jahren ausgesprochen haben, der mir leider aber ganz entgangen war.

— —

Freundlichst grüßend
Weierstrass.

Berlin, 23. Juli 1886.

— —

Es wird Sie interessieren und freuen, daß die Göttinger philosophische Fakultät einstimmig bei dem Ministerium die Wiederbesetzung der Enneperschen Professur beantragt hat und daß, wie mir Schwarz heute mitteilt, die ernannte Kommission voraussichtlich mit derselben Einstimmigkeit Dr. Hölder, und zwar diesen allein, für die Stelle in Vorschlag bringen wird.

— —

Wernigerode i. Harz, Müllers Hotel, 7. Juli 1888.

Verehrter Freund!

Sie haben sich meiner während meiner Krankheit in so zuvorkommender und freundlicher Weise angenommen, daß es mich drängt, Ihnen von hier aus, bevor Sie Berlin verlassen, noch einen herzlichen Gruß zu senden. Auch denke ich, Sie werden nicht ohne Teilnahme von mir hören, daß der hiesige Aufenthalt, so viel ich bis jetzt nach der Erfahrung einiger Tage urteilen kann, mir hoffentlich recht wohltätig sich erweisen wird. Der Kopf ist mir schon erheblich freier geworden, der Schlaf ist ruhiger und anhaltender, und während ich in den letzten vierzehn Tagen vor meiner Abreise nicht imstande war, auszugehen, vermag ich doch jetzt wieder einen Spaziergang von $1^1/_2$ Stunde zu machen. Freilich, die Waldluft hier ist doch eine ganz andere als die des Berliner Tiergartens selbst in seinen besten Partien. Mein Hotel, obwohl die Einrichtung desselben ziemlich primitiver Art ist, hat den Vorzug einer freien Lage, und, wenn ich auf meinem Balkon sitze, der die Ausdehnung eines großen Saales hat und dabei isoliert liegt, so ist es so gut, als wenn ich mich im Freien befände. Bis jetzt sind recht wenige Freunde hier; wenn Sie aber, worauf ich sehr rechne, Ihr Versprechen, auf der Rückreise mich besuchen zu wollen, erfüllen, werden Sie doch wohl tun, sich vorher anzumelden, damit ich für Ihr Unterkommen Sorge tragen kann.

Gearbeitet habe ich noch gar nicht. Einige Wochen hindurch werde ich indes Beschäftigung genug haben; denn die Preisausschreibung des Königs von Schweden hat doch den Erfolg gehabt, daß eine ziemlich große Anzahl von Bewerbungsschriften eingegangen sind, und zwei derselben, noch dazu ziemlich umfangreiche, werde ich vor meinen Richterstuhl ziehen müssen, während die anderen Hermite und Mittag-Leffler zufallen.

Von Frau Kowalewsky habe ich noch keine Benachrichtigung über den Zeitpunkt, wo sie hier einzutreffen gedenkt. Sie ist gegenwärtig in Paris. Mittag-Leffler will in den ersten Tagen des August mich besuchen, wenn auch nur auf kurze Zeit.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß die bevorstehenden Ferien recht genußreich für Sie werden mögen.

Ihr hochachtungsvoll ergebener
Weierstrass.

Meine Schwestern lassen sich Ihnen angelegentlichst empfehlen.

Wernigerode, 2. August 1888.

Verehrter Freund!

Wie bedauerlich, daß Ihnen die Ferien durch das fortwährend schlechte Wetter verdorben werden! Mir geht es in dieser Beziehung doch besser. Sonnige Tage zwar, geeignet zu weiteren Ausflügen, habe ich nur wenige gehabt; aber es herrscht wenigstens bei bewölktem Himmel eine angenehme, warme Lufttemperatur, und bis jetzt haben sich noch jeden Tag einige Stunden gefunden, in denen ich mir Bewegung im Freien machen konnte.

Mit meiner Besserung geht es nur langsam vorwärts; doch habe ich die Hoffnung, im Winter wieder lesen zu können, noch nicht aufgegeben [17].

Wie steht es nun aber mit Ihrem mir versprochenen Besuche? Wenn Sie über München heimreisen, so kämen Sie mir allerdings nicht so nahe, wie in dem Falle, daß Sie die Route über Frankfurt wählten. Indessen, da Sie doch wohl jedenfalls Leipzig berühren, so könnten Sie von Bitterfeld (oder Wittenberg) mit einem Retourbillet über Köthen und Halberstadt hierher fahren und sodann Ihr Rundreisebillet bis Berlin ausnützen. Sie würden, wenn Sie sich zu dem vorgeschlagenen Abstecher entschließen, nicht nur mir und den Meinigen eine große Freude bereiten, sondern es würde auch, denke ich mir, für Sie von Interesse sein, Mittag-Leffler und Frau v. Kowalewsky hier anzutreffen, die beide bis zum 15. bleiben. Mittag-Leffler kommt morgen oder übermorgen, Frau Kowalewsky ist schon seit 8 Tagen hier. Dieselbe, die von London und Paris kommt, wo sie sehr gefeiert worden ist, sprudelt über von köstlichem Humor und unterhält uns des Abends vortrefflich durch launige Schilderungen aus der gelehrten Welt von Stockholm, Upsala und der genannten Städte. Tchebychef, Sylvester u. s. w. liefern ihr reichlichen Stoff zu ergötzlichen Mitteilungen, namentlich Sylvester scheint ein alter Gurk zu sein, der z. B. von sich behauptet, daß er seit Milton der einzige Engländer sei, der gute Sonette gedichtet habe. Übrigens interessiert sich Frau Kowalewsky nicht bloß für Mathematik und Mathematiker, sondern beschäftigt sich auch viel mit belletristischer Literatur, schreibt selbst Novellen (leider in schwedischer und russischer Sprache) und macht dramatische Versuche. Dabei berührt es sehr angenehm, daß sie nichts von einem Blaustrumpfe an sich hat, sodaß die Leute, mit denen sie in Berührung kommt, es anfangs für einen Scherz halten, wenn man ihnen sagt, daß sie ein wirklicher Professor sei.

Die von Ihnen erwähnte Schrift Lindemanns ist mir völlig unbekannt geblieben; ich habe selbst gar nicht gewußt, daß Lindemann für dergleichen Untersuchungen Interesse habe.

In Beziehung auf eine beiläufige Bemerkung in Ihrem Briefe möchte ich noch erwähnen, daß auch hier das Bier recht wohl sich trinken läßt. Frau v. Kowalewsky und meine Schwestern lassen Sie freundlichst grüßen und vereinigen sich mit mir zu der Bitte, daß Sie den von mir gemachten Reisevorschlag recht ernstlich in Erwägung ziehen und, wenn möglich, realisieren möchten.

Ihr ergebenster

Weierstrass.

Wernigerode, 24. August 1888.

Verehrter Freund*!

Nun, Sie haben wenigstens Ihr Gepäck wieder erhalten, wir Wernigeroder Sommergäste aber sind um Ihren Besuch gekommen, was sich vielleicht nicht wieder gut machen läßt. Wäre das Wetter besser gewesen, so würde ich Sie gebeten haben, trotz alledem noch auf einige Tage hierher zu kommen, — aber bei der Nässe und Kälte, die in den letzten 14 Tagen den Aufenthalt hier höchst ungemütlich machten, konnte man niemandem zuraten, daß er herkomme. Heute scheint es, als ob endlich der Himmel uns wieder seine Gunst zuwenden wolle, und darum teile ich Ihnen mit, daß wir alle — mit Ausnahme von Mittag-Leffler, der am kommenden Dienstag abreisen muß — bis zum September hier zu bleiben gedenken. Ich selbst werde aber wahrscheinlich — in Thale oder Harzburg — noch etwas länger Harzluft genießen, die trotz der Unbilden der Witterung sich mir wohltätig erwiesen hat. Frau v. Kowalewsky wird auch noch einige Zeit hier verweilen, gedenkt aber auf der Rückreise auch ein paar Tage in Berlin sich aufzuhalten. Also Zeit für Sie zu einem Besuch wäre immer noch; ich möchte Sie nicht drängen, aber wollen Sie versichert sein, daß wir alle uns aufrichtig freuen würden, wenn wir Sie hier haben könnten.

Besuche von Mathematikern haben wir in Fülle gehabt. Außer Hettner, der in der Nähe wohnt, waren da: Tietgen, der Italiener Volterra (Pisa), Hurwitz, Cantor, Schwarz (noch hier), angekündigt sind noch Schering und Koenigsberger, die aber wahrscheinlich nicht kommen werden. Sollten Sie also Gerüchte von einer mathematischen Verschwörung im Harz hören, so können Sie sagen, daß dieselben nicht ganz der tatsächlichen Unterlage entbehren. Die hiesige Gesellschaft, die unseren Diskussionen mit sichtbarem Entsetzen zuhört, glaubt wenigstens daran.

Mit freundlichsten Grüßen von allen

Ihr ergebenster

Weierstrass.

Berlin, 13. Januar 1889.

Verehrter Freund!

— —

Übrigens habe ich in der vergangenen Woche doch noch ein kleines Kolleg

---

* Du Bois-Reymond war durch einen Irrtum des Schaffners nicht nach Wernigerode umgestiegen.

begonnen[17], — bis jetzt ohne zu große Beschwerde, sodaß ich hoffe, es fortsetzen zu können.

Bitte, lassen Sie mir doch gefälligst ein paar Zeilen zukommen, — oder noch besser, wenn Sie können, kommen Sie selbst, wenn Ihr Fuß Ihnen auch nicht erlaubt, mich zu meinem Spaziergang abzuholen. (Ich lese am Mittwoch, Freitag und Sonnabend von 12—1 Uhr.)

Mit freundlichstem Gruß

Ihr ergebenster

WEIERSTRASS.

Anmerkungen zu den Briefen von Weierstraß an du Bois-Reymond.

[1] P. du Bois-Reymond: „Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen", J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 21—37.

Du Bois-Reymond veröffentlicht hier zum ersten Male das bekannte Weierstraßsche Beispiel

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

einer durchweg stetigen Funktion, die in keinem Punkte einen Differentialquotienten besitzt, wobei er die historischen Bemerkungen, welche Weierstraß in seinem Briefe vom 23. November 1873 gibt ausführlich und zum Teil wortgetreu übernimmt.

[2] Tübingen 1870.

[3] A. M. Ampère: „Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées etc." J. École polyt., cah. 13 (1806), p. 148.

Ampère versucht hier die Existenz eines Differentialquotienten für stetige Funktionen zu beweisen.

[4] S. v. Kowalewsky: „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen". J. reine angew. Math. 80 (1875), p. 1—32 = Inauguraldissertation, Göttingen 1874.

[5] Die beiden hier erwähnten Arbeiten sind:

S. v. Kowalewsky: „Zusätze und Bemerkungen zu Laplaces Untersuchungen über die Gestalt der Saturnsringe". Astronomische Nachrichten 111 (1885), p. 37—48.

S. v. Kowalewsky: „Über die Reduktion einer bestimmten Klasse Abelscher Integrale 3. Ranges auf elliptische Integrale". Acta mathematica 4 (1884), p. 393—414.

Die Abhandlungen wurden von der Verfasserin der Göttinger philosophischen Fakultät vorgelegt, um in absentia und ohne mündliche Prüfung promovieren zu können.

[6] Vergl. [1].

[7] „Beispiel einer stetigen nicht differenzierbaren Funktion", Archives sc. phys. nat., Genève 1873, p. 33—38 = Verh. Schweiz. Naturf. Ges. 1873, p. 252—258 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 269—274.

[8] M. Cantor: „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen". J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 258—262. Eine französische Übersetzung findet sich in Acta mathematica 2 (1883), p. 305—310.

In dieser Arbeit wird die Abzählbarkeit der Menge aller reellen algebraischen Zahlen nachgewiesen.

[9] B. Riemann: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe". Inauguraldissertation, Göttingen 1851, 2. Abdr. 1867, Werke p. 3—48.

[10] G. Darboux: „Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues". Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875), p. 57—112.

[11] G. Darboux: „Mémoire sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions et de variables indépendantes". C. R. Acad. sc. Paris 80 (1875), p. 101—104 et 317—319.

[12] Loc. cit [1].

[13] Wahrscheinlich sind hier die Bemerkungen gemeint, die Dirichlet am Schlusse seiner bekannten Abhandlung: „Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données" macht. J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 157—169.

Dirichlet behandelt darin die trigonometrische Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \,.\, \cos x + a_2 \,.\, \cos 2x + \cdots\cdots$$
$$+ b_1 \,.\, \sin x + b_2 \,.\, \sin 2x + \cdots\cdots,$$

in der

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos n x \, d x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin n x \, d x$$

ist, unter der Voraussetzung, daß $\varphi(x)$ endlich und eindeutig ist und im Intervalle $-\pi$ bis $+\pi$ nur eine endliche Anzahl Unstetigkeitsstellen und eine endliche Anzahl Maxima und Minima besitzt. Er sagt dann weiter (p. 169): „Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8.) présente un sens lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante.

Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différents termes de la série sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée".

[14] Du Bois-Reymond gibt l. c. p. 22 die folgende Definition der Integrierbarkeit: „Bilden wir die Summe

$$S = (x_1 - a) \,.\, f(a) + (x_2 - x_1) \,.\, f(x_1) + \cdots + (b - x_{n-1}) \,.\, f(x_{n-1})$$

wo $a < x_1 < \ldots\, x_{n-1} < b$ sei und $x_p - x_{p-1} = \delta_p$ gesetzt werde, so muß die Funktion $f(x)$ so beschaffen sein, daß diese Summe sich einer einzigen bestimmten Grenze nähert, wenn die Größen δ_p mit beliebiger relativer Geschwindigkeit so Null werden, daß ihre Summe $b - a$ unverändert bleibt.

Es bezeichne σ_p die größte Wertdifferenz der Funktion $f(x)$ im Intervall $x_{p-1} \cdots x_p$, so soll gezeigt werden, daß die eben angeführte Bedingung der Integrierbarkeit äquivalent ist mit der, daß unter denselben Voraussetzungen für die δ_p die Summe

$$S = \delta_1 \,.\, \sigma_1 + \delta_2 \,.\, \sigma_2 + \cdots + \delta_n \,.\, \sigma_n$$

der Null sich nähert."

Der von Weierstraß erwähnte Satz steht auf p. 27: „Nennen wir wieder Stetigkeitspunkt einen solchen, wofür

$$\lim_{\varepsilon = 0} \, (f(x) - f(x \pm \varepsilon)) = 0$$

ist, so besitzt deren jede integrierbare Funktion in jedem kleinsten Intervall. Denn es sei δ' ein Intervall, in dem sie keinen Stetigkeitspunkt hätte, und σ' sei der kleinste Wert von $\lim\limits_{\varepsilon=0}(f(x)-f(x\pm\varepsilon))$ in diesem Intervall, so würde der Grenzwert von $\delta_1.\sigma_1+\delta_2.\sigma_2+\cdots+\delta_n'.\sigma_n$ nicht kleiner als $\delta'.\sigma'$ werden können".

[15] O. Hölder: „Über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Funktion durch die Fouriersche Reihe". Stzgsber. Berliner Akademie 1885, p. 419—434. Vorgelegt von Weierstraß am 23. April 1885. Der vorliegende undatierte Brief wird daher um den 20. April 1885 geschrieben sein.

[16] Es mag hier von Interesse sein, die vielleicht nicht allgemein bekannte Tatsache zu erwähnen, daß Weierstraß in einer seiner letzten Vorlesungen eine noch allgemeinere Definition der Integrierbarkeit gegeben hat. Es heißt hier (Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Sommersemester 1886. Nach einer Ausarbeitung von Prof. Schlesinger in Gießen): „Weierstraß findet nämlich, daß jede stets endliche Funktion auch integrierbar sei, daß also die Riemannsche Integrabilitätsbedingung nicht notwendig sei, — z. B. sei gegeben ein Intervall $(a\ldots b)$, und es gebe in jedem noch so kleinen Teile von $(a\ldots b)$ Stellen, wo die Funktion definiert ist. Dann errichte ich an jeder Stelle, wo die Funktion definiert ist, die Ordinate. Dann liegen diese Ordinaten zwar einander unendlich nahe, brauchen aber nicht kontinuierlich auf einander zu folgen. Dann kann $\int_a^b f(x)\,dx$ also nicht definiert werden als die von den Ordinaten erfüllte Fläche, wie es für stetige Funktionen möglich und zulässig ist. Wir stellen nun folgende Definition auf: Denken wir uns jede Ordinate, die existiert, mit einem kleinen Rechteck umgeben, dessen Basis gleich δ ist. Dann greifen diese Rechtecke ineinander. Definieren wir nun jene Punkte, die innerhalb eines solchen Rechtecks liegen, als eine Punktmenge, so sieht man leicht, daß diese ein Kontinuum bildet. Dieses Kontinuum hat einen Inhalt S_δ, der eine Funktion von δ ist. (Wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist, und δ nähert sich der Null, so ist $\lim\limits_{\delta=0} S_\delta$ gleich dem wirklichen Inhalte oder gleich $\int_a^b f(x)\,dx$. So definierte auch Leibniz das Integral.)

Es läßt sich nun zeigen, daß S_δ mit abnehmendem δ abnimmt und sich folglich für $\delta=0$ einer Grenze nähert. Wir definieren nun

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} S_\delta.$$

Diese Definition ist eine berechtigte, da sie für stetige Funktionen mit der gewöhnlichen übereinstimmt, und auch die wesentlichen Eigenschaften des Integrals bestehen bleiben."

In ähnlicher Richtung bewegte sich eine mündliche Äußerung von Weierstraß gegenüber Mittag-Leffler vom 12. August 1888 in Wernigerode. Weierstraß hob dabei hervor, daß die z. B. von Riemann für die Integrierbarkeit einer Funktion aufgestellten Kriterien zu eng seien, und gab die in der vorstehenden Nachschrift Schlesingers angeführte Methode zur Belebung dieses Übelstandes an. Er wies auf das Fortbestehen der Rechenregeln für bestimmte Integrale und des ersten Mittelwertsatzes hin und deutete eine Erweiterung der Definition für den Fall an, daß die zu integrierende Funktion Unendlichkeitsstellen in endlicher oder unendlicher Menge aufweist. Im letzteren Fall dürfen diese freilich im allgemeinen nur in abzählbarer Menge auftreten.

[17] In dem Verzeichnis der Vorlesungen von Weierstraß (Werke 3, p. 355) steht für den Winter 1888—89: Grundbegriffe und Hauptsätze der Funktionenlehre, privatim (3). (Nur angekündigt.)