Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Zur Geschichte der **prosthaphaeretischen Methode** in der Trigonometrie

von

Anton von Braunmühl

Leipzig 1899

Quelle:

Zeitschrift für Mathematik und Physik / Supplement 14 (1899)
— zugleich
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. – 9. Heft,
S. 15–29

Anton von Braunmühl (1853–1908) lehrte als Gymaniallehrer und Professor der Technischen Hochschule in München. 1900–1903 publizierte er eine vielbeachtete zweibändige Geschichte der Trigonometrie.

Die prosthaphaeretischen Formenln konvertieren ein Produkt trigonometrischer Funktionen in eine Summe oder Differenz solcher Funktionen. Sie waren vor Erfindung der Logarithmen ein wichtiges Hilfsmittel der Astronomen.
Braunmühl behandelt in diesem Aufsatz den Kenntnisstand Ende des 16. Jahrhunderts.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Neuntes Heft.

Mit einem Porträt in Heliogravüre, zwei Tafeln und 55 Figuren im Text.

Herrn

Hofrat und Professor Dr. Moritz Cantor

bei der 70. Wiederkehr des Tages seiner Geburt am 23. August 1899

dargebracht von seinen Freunden und Verehrern.

Im Auftrage herausgegeben

von

M. Curtze und **S. Günther**

in Thorn. in München.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1899.

Herr M. CANTOR hat an mehreren Stellen[1]) seiner Geschichte der Mathematik darauf aufmerksam gemacht, welche Bedeutung die Methode der Prosthaphäresis vor Erfindung der Logarithmen für die Astronomen besafs, und ihre geschichtliche Entwickelung in allgemeinen Umrissen mit gewohnter Meisterschaft gezeichnet. Vielleicht bietet es daher etwas Interesse, wenn ich hier einige spezielle Bemerkungen über ihren Gebrauch, sowie einige Belege zu ihrer Entstehungs- und Entwickelungsgeschichte mitteile, die mir bei einem eingehenden Studium der trigonometrischen Methoden jener Zeit begegneten.

In einer kleinen Abhandlung, die 1896 in der *Bibliotheca mathematica* (105—108) erschien, glaube ich den Nachweis geführt zu haben, dafs der Erfinder dieser Methode im Abendlande der bekannte JOHANN WERNER von Nürnberg ist, wie dies, allerdings ohne zwingenden Beweis, schon MONTUCLA[2]) behauptete. Da aber WERNER's Schrift „*De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V*", in deren drittem Buche er die Prosthaphäresis auseinandersetzte, nie im Drucke erschien, so geriet die Methode in Vergessenheit uud tauchte erst am Ende des 16. Jahrhunderts wieder von Neuem auf, wo sie ihre volle Ausbildung erfuhr. Über diese Wiedererfindung wollen wir uns etwas näher verbreiten.

Um das Jahr 1584 kam an den Hof des Landgrafen WILHELM IV. von Hessen, der Kassel zu einem Zentralpunkt astronomischer Forschung gemacht hatte, ein gewisser PAUL WITTICH (1555?—1587) aus Breslau, welcher sich von 1580—1581[3]) bei TYCHO BRAHE auf der Insel Hveen aufgehalten hatte, und blieb daselbst längere Zeit. Von ihm berichtet

1) Bd. II, 417, 590, 658.

2) *Histoire des Mathématiques.* I, 584. Im *Cod. lat. mon.* 24101, f. 18 finde ich nachträglich noch eine Bestätigung meiner Ansicht, indem daselbst JOH. PRAETORIUS WERNER direkt als den Erfinder bezeichnet.

3) Diese Datumsbestimmung ergibt sich aus dem Briefwechsel TYCHO's mit HAGECIUS und SCULTETUS. FRIIS, TYCHONIS BRAHE *epistolae ab anno 1568 usque ad annum 1587.* Hauniae 1876—86 in 4°. Aus dem Briefe TYCHO's vom 4. Nov. 1580 an HAGECIUS geht (p. 55) hervor, dafs WITTICH um diese Zeit schon auf Uranienburg war, und aus dem Schreiben an SCULTETUS vom 12. Okt. 1581 (p. 58—59), dafs er die Insel Hveen bereits wieder verlassen hatte.

Raymarus Ursus[4]) (Reimers), „er habe den ersten Fall der sogenannten prosthaphäretischen Methode den Kasseler Astronomen als eine Rechnungsmethode gezeigt, welche schon längere Zeit auf der Uranienburg bei astronomischen Rechnungen angewendet werde, ohne jedoch einen Beweis dafür anzugeben. Jobst Bürgi, der damals Hofuhrenmacher des Landgrafen war, habe dann dafür einen so fruchtbaren Beweis gefunden, daſs aus ihm die anderen prosthaphäretischen Fälle und sein (des Ursus) Beweis, ja die Auflösung aller Dreiecke durch diese Methode vermittelst der Sinusse, Tangenten und Sekanten hergeleitet werden können. Hiervon habe dann Jacob Curtius dem Clavius Nachricht gegeben, der diese Erfindung erweitert und auch dem Tycho 1590 darüber geschrieben habe."

Untersuchen wir die Richtigkeit dieser Erzählung etwas genauer, so haben wir zuerst die Erfindung der Prosthaphäresis auf der Uranienburg zu besprechen. Die Stelle[5]), an welcher Werner mit Hinweis auf seine Dreiecksbücher die prosthaphäretische Methode anwendet, um die Länge der *Spica virginis* zu finden, kannte Tycho Brahe nachweisbar, denn er spricht oft von Werner's Schrift „*De motu octavae sphaerae*" und greift speziell dessen Beobachtung der Spica an[6]). Doch konnte ihn der Wortlaut jener Stelle nur auf die Existenz eines praktischeren Rechnungsverfahrens, als das gewöhnliche ist, aufmerksam machen, das Verfahren selbst war absolut nicht daraus zu entnehmen. Dagegen ist es nicht unmöglich, daſs Tycho in die Dreiecksbücher Werner's direkt Einsicht bekam, als er 1575 Deutschland durchreiste und speziell in Wittenberg war. Denn dieselben waren nach Werner's Tode in die Hände Hartmann's in Nürnberg und von diesem an G. J. Rhaeticus gekommen, der längere Zeit in Wittenberg gelehrt hatte, und in dessen Nachlasse (er starb 1576) sie sich noch fanden, als sie Christmann in Heidelberg erhielt.[7]) Doch abgesehen von dieser wohl kaum mehr beweisbaren Vermutung ist es sicher, daſs

4) Scheibel teilt in seiner Einleitung zur mathem. Bücherkenntnis, 7. Stück, Breslau 1785 mit (p. 17 ff.), daſs Reimers das Angeführte in dem Werke *Tractatus de astronomicis hypothesibus.* Pragae 1597 in 4°. angebe; aber auch in desselben Autors Schrift *Fundamentum astronomicum* 1588 in 4°. finde ich p. 16 den Wittich erwähnt.

5) Dieselbe steht in Jo. Werneri *de motu octavae sphaerae tractatus primus. Propositio II.* Norimbergae 1522. Vgl. Cantor, Geschichte der Mathematik II. 418 ff.

6) Z. B. in seinem Briefe vom 20. Januar 1587 an Rothmann. T. Brahei *Epistolarum astronom. libri.* Norimb. 1601 in 4°. p. 76, ferner in *Astronomiae instauratae Progymnasmata* 1602. p. 221.

7) M. Cantor, Geschichte der Mathematik. II 417 und 555, sowie Christmann, *Theoria lunae ex novis hypothesibus et observationibus demonstrata.* Heidelbergae 1611 fol. p. 124.

TYCHO im Verein mit WITTICH schon 1580 die prosthaphäretische Methode ausarbeitete.

Dies geht zunächst aus jenem Briefe desselben vom 4. November 1580 an HAGECIUS hervor, der den WITTICH an TYCHO empfohlen hatte, indem hier TYCHO ausdrücklich sagt, dafs er sich im Verein mit WITTICH (*communicata opera*) viel mit der Ausbildung der Prosthaphäresis beschäftigte, die von der unangenehmen Multiplikation und Division befreie, und dafs jener die Grundlagen hierzu gelegt habe, allerdings auf Mitteilungen hin, die er seiner Zeit von TYCHO erhalten habe, als dieser mit ihm in Wittenberg zusammen war (1575).[8]) Auch KEPLER nennt die Prosthaphäresis einmal ein *„artificium Tychonicum“*[9]), dann wieder *„negotium Wittichianum“* und *„regula Wittichiana“;* er nahm also wohl auch an, dafs sie durch Zusammenwirken beider zustande kam, wie es auch am wahrscheinlichsten ist. Übrigens war TYCHO bekanntlich viel weniger gewandt im Rechnen, als im Beobachten und verdankte daher ohne Zweifel dem WITTICH nach dieser Richtung viel. In der That bezeichnet er ihn auch wiederholt als sehr geschickt in der Mathematik[10]). Ein weiteres Zeugnis dafür, dafs TYCHO und WITTICH in gemeinsamer Arbeit die fragliche Methode ausbildeten, gibt uns TYCHO's langjähriger Schüler LONGOMONTAN, indem er in seiner *Astronomia Danica* beide ausdrücklich als die Erfinder derselben bezeichnet.[11])

---

8) FRIIS, a. a. O. 55. *„Nam et ego talibus (triangulorum compendiis) insudavi atque in posterum ulterius, volunte numine, insudabo, quo haec ratio quae per προσθαφαίρεσιν procedit absque taediosa multiplicatione et divisione plenius excolatur et locupleatur, in quibus tamen ille necdum satis est versatus sed assuescet successive. Vicus enim is, quod et sponte fatetur, saltem initia quaedam hic iecisse admonitus iis verbis quae se a me audivisse, dum semel Wittembergam ipso illic studente trasirem et me horum studiorum caussa convenisset, licet ego eorum recordari non potuerim.“*

9) *Opera omnia.* ED. FRISCH II. 439 Anmerkung 94.

10) So sagt er in jenem Schreiben an ROTHMANN vom 20. Jan. 1587 „. . . *ob ingeniosam in Mathematicis praesertim quoad Geometriam attinet sollertiam . . .*“ und in einem Briefe vom 15. August 1588 an denselben (p. 113 ebenda) „. . . *in Geometria et Triangulorum ac numerorum tractatione expeditior et felicior erat*“ als im Beobachten nämlich; endlich kommt er am 14. Jan. 1595 ROTHMANN gegenüber noch einmal auf ihn zu sprechen, indem er sagt, er habe WITTICH's Ehre in keiner Weise verletzt (indem er ihn nämlich beschuldigt, dem Landgrafen vieles als seine eigene Erfindung mitgeteilt zu haben, was TYCHO angehöre) sondern *„ubi laude dignus erat Wittichius, videlicet in Geometricis, et compendiis quibusdam triangulorum laudavi etc.“*, a. a. O. 296.

11) A. a. O. p. 10 heifst es: *„Si autem de huius compendii inventore opus quaerat . . .; neminem certe habeo, Tychone nostro et Vitichio Vratislaviensi antiquiorem: quorum scilicet mutua opera primum anno 1582, in Huaena, sphaerica*

In der von mir mitgeteilten Erzählung heifst es weiter, Bürgi habe für den ersten Fall der prosthaphäretischen Methode einen Beweis erdacht u. s. w. Bürgi selbst hat hierüber nichts veröffentlicht, aber Reimers teilt in seinem *Fundamentum astronomicum.* 1588. 16ᵛ und 17ʳ die beiden wichtigsten Regeln mit, indem er bezüglich ihrer Ableitung auf beistehende Diagramme verweist, von denen er das erste dem Paul Wittich, das

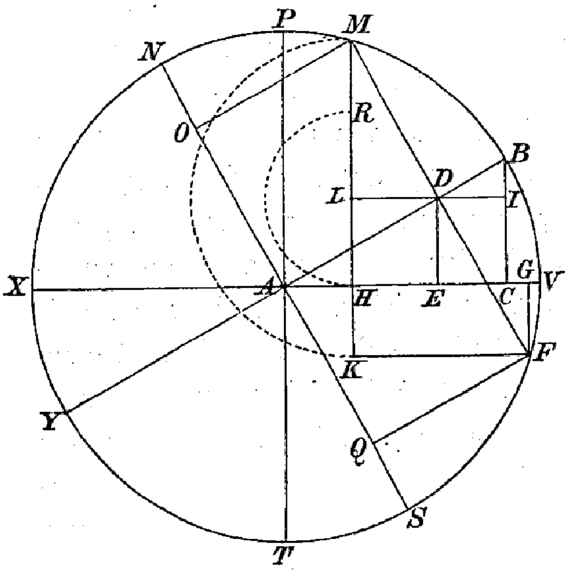

Fig. 1.

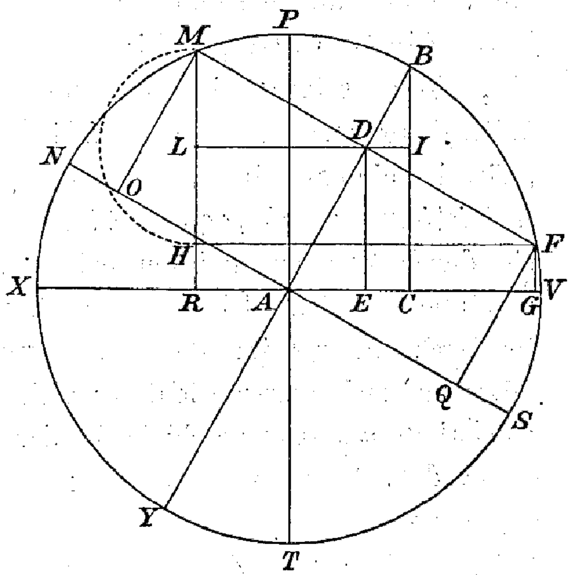

Fig. 2.

zweite dem Bartholomäus Scultetus widmet, der ein Werk über Sonnenuhren geschrieben hatte. Es sei in beiden Figuren arc $BV = \alpha$, arc $SF =$ arc $MN = \beta$, dann ist in der ersten $\alpha + \beta < 90^0$, in der zweiten $\alpha + \beta > 90^0$. Ferner sei $FDM \perp AB$ und BC, DE, FG, $MH \perp AV$ gefällt, $HK = FG = MR$, bezüglich $HR = FG$ gemacht, und MO und $FQ \perp NS$ gezogen, das $\parallel MF$ läuft; macht man dann noch $JDL \parallel AV$, dann ist in der ersten Figur arc $VM = 90^0 - \beta + \alpha$, arc $VF = 90^0 - \beta - \alpha$, $MH = \sin(90^0 - \beta + \alpha)$, $FG = HK = MR = \sin(90^0 - \beta - \alpha)$. Aber $LH = DE = \frac{1}{2} RH = \frac{1}{2}(MH - MR) = \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - \beta + \alpha) - \sin(90^0 - \beta - \alpha)\}$. Ferner ist $BC = \sin\alpha$, $AD = FQ = \sin\beta$ und $AB : AD = BC : DE$, somit für $AB =$ sin tot.

(I) Sin tot: $\sin\beta = \sin\alpha : \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - \beta + \alpha) - \sin(90^0 - \beta - \alpha)\}$,

und aus der zweiten Figur folgt durch analoge Überlegungen

(II) Sin tot: $\cos\beta = \cos\alpha : \frac{1}{2}\{\sin(\beta + 90^0 - \alpha) - \sin(\beta - 90^0 + \alpha)\}$.

Nach dem von R. Wolf beigebrachten Beweismaterial[12]) glaube ich,

---

quaedam triangula tali pragmatriae pro studiosis Uranicis sunt subiecta." Das Datum 1582 ist nach dem oben Bemerkten nicht richtig.

12) Astronomische Mitteilungen XXXII 56—59. Vgl. auch Pitiscus, *Trigonometriae libri quinque Ed. secunda.* Aug. Vind. 1608. in 4⁰. lib. V 159—163.

dafs diese beiden Beweise auf Rechnung Bürgi's zu setzen sind, der sicher auch den III. Fall kannte, welcher für $\alpha + \beta = 90^0$ eintritt und allerdings erst von Clavius publiziert wurde. Dieser, heifst es in unserer Erzählung, habe von Jacob Curtius Nachricht erhalten und die Erfindung erweitert. In der That hat er nicht nur den eben erwähnten Zwischenfall angemerkt, sondern zum erstenmale in einer Druckschrift, in seinem *Astrolabium* von 1593[13]) eine ausführliche Darstellung der prosthaphäretischen Regeln und ihrer Anwendung auf die Berechnung des ebenen Dreieckes und auf alle sechs Fundamentalgleichungen des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes gegeben.

Kamen dabei Tangenten vor, wie z. B. in der Formel $\sin \text{tot} : \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi : x$, so setzte er $\operatorname{tg} \delta = \sin \alpha$, $\operatorname{tg} \varphi = \sin \beta$ und wandte die prosthaphäretische Methode auf diese Funktionen an. Dies ging aber natürlich nur so lange, als der Zahlenwert der Tangente den Sinus totus nicht überschritt; war dies der Fall, also etwa $\operatorname{tg} \varphi > 10^n$, so dividierte er das betreffende Glied mit 10^n, setzte den Rest $= \sin \beta$ und mufste dann nach Anwendung der Prosthaphäresis auf das Produkt $\sin \alpha \sin \beta$ noch das Produkt aus $\sin \alpha$ und dem Quotienten addieren. Ähnlich im Falle beide Faktoren den Radius der Tafel überstiegen. Stand ferner der Sinus totus nicht an der ersten Stelle der Proportion, z. B. $a : 10^n = b : x$, so dafs $x = 10^n \cdot \frac{b}{a}$ zu berechnen war, so setzte er $a = \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, $b = \sin \beta$, woraus sich wieder $x = 10^n \sin \alpha \sin \beta$ ergab, das auf die angeführte Weise weiterbehandelt wurde. Erst durch diese beiden Erweiterungen, die Clavius[14]) zuerst veröffentlichte, womit jedoch nicht gesagt sein soll, dafs sie nicht auch Bürgi und andere schon in Erwägung gezogen hatten, erhielt die Methode jene Allgemeinheit, die sie zur bequemeren Ausführung von Multiplikationen und Divisionen grofser Zahlen befähigte und namentlich für den rechnenden Astronomen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel machte, bis sie durch Erfindung der Logarithmen langsam verdrängt wurde.[15])

---

13) *Opera mathematica* Chr. Clavii. Moguntiae 1612. 2°. t. II 94 ff.

14) Clavius verhehlte sich jedoch keineswegs, dafs die Methode durch das Umrechnen an Genauigkeit verliert, wenn statt der Sinusse die übrigen Funktionen eintreten; man suchte jedoch hierbei durch Benutzung vielstelliger Tafeln abzuhelfen.

15) Dafs auch andere diese Ausdehnung der Methode vor der Veröffentlichung des Clavius schon vornahmen, geht aus einem Schreiben des früheren kais. Prokanzlers Jacob Curtius an Tycho vom Jahre 1590 hervor (*Astronomiae instauratae mechanica* 1602 in fol.). Es heifst daselbst: „*Ex N. N. Plagiarii tui* (nämlich des Ursus) *libello, quem Fundamentum astronomicum inscripsit unicoque eius diagrammate, quod* Paulo Wittichio *dedicavit, construxi ego praeteritis*

Etwas später als CLAVIUS, nämlich 1598[16]), hat ein gewisser MELCHIOR JOESTEL, der aus Dresden[17]) stammte und in Wittenberg Mathematik lehrte, diese Methode für alle möglichen Fälle durchgearbeitet und sie auf die Behandlung aller Dreiecke angewandt. Ob sein ausführlicher Traktat im Drucke erschienen ist, weifs ich nicht, halte es aber nicht für wahrscheinlich; dagegen ist er noch handschriftlich in der Hofbibliothek zu Wien (*Cod. palat.* 10686 Nr. 67) vorhanden[18]), worauf mich Herr MAX CURTZE gütigst aufmerksam machte. Diese Handschrift habe ich eingesehen und mache daraus folgende Mitteilungen. Der erste Traktat, der in dem angeführten Codex enthalten ist, führt den Titel „MELCHIORIS JOSTELII *Logistica Prosthaphaeresis Astronomica*" und umfafst drei Regeln (auf 16 Folioseiten). Die erste (p. 1—12) gibt in einem Wortlaut für die drei Fälle $\alpha + \beta = 90^0$, $\alpha + \beta < 90^0$ und $\alpha + \beta > 90^0$ die prosthaphäretische Umsetzung des Produktes $\sin\alpha \cdot \sin\beta$. Die Beweise stimmen mit denen, die ich oben mitgeteilt habe, überein, werden an schön und exakt gezeichneten Figuren geführt und durch Zahlenbeispiele erläutert. Dabei mag vorübergehend bemerkt werden, dafs JOESTEL sich im Gegensatze zu anderen zeitgenössischen Schriftstellern, die alles in *extenso* ausschreiben, der abkürzenden Schreibweise st = sinus totus, sr = sin. rectus, T = tangens bedient und dieselbe konsequent beibehält. An die erste Regel schliefst sich unter „*Notandum*" die Behandlung der Fälle an, in welchen an zweiter oder dritter Stelle der aufzulösenden Proportion eine Tangente, Sekante, ein Sinusversus oder sonst eine beliebige Zahl steht. Hierbei werden wieder drei Fälle unterschieden, je nachdem jedes dieser Glieder kleiner ist

---

diebus . . . novam sphaericorum triangulorum doctrinam, in qua per tabulam sinuum tangentium et secantium omnes tam rectangulorum quam obliquangulorum casus, sine ulla multiplicatione vel divisione per solam additionem et subtractionem facillime perficiuntur. Eam quoque ad te mitterem, nisi scirem te rem totam, solo eo diagramma inspecto facile executurum." Davon wird CURTIUS in jenem in unserer Erzählung erwähnten Briefe wohl dem CLAVIUS Mitteilung gemacht haben.

16) Dieses Datum gibt LONGOMONTAN, a. a. O. 10 „. . . *Cuius rei* (der Prosthaphäresis) *documentum mihi primum anno 1598 vir ille humanissimus, coram velut amico intimo ostendit."*

17) G. ENESTRÖM, *Bibliotheca mathematica.* Anmerk. *) zu meiner Beantwortung der Anfrage 68.

18) SCHEIBEL teilt in seiner Einleitung zur mathem. Bücherkenntnis, 7. Stück, Breslau 1775 in 8°. p. 19 mit, dafs er sich im Besitze einer Abschrift dieses Traktates befinde. Da aber am Ende derselben steht: *Descripta haec sunt ex ipsius* JOESTELII *Manuscripto Prid. Idus Aug.* CIƆIƆCIX. *m.* DRSS. Wittebergae, das mir vorliegende Manuskript aber gar keine Datumsangabe enthält, so sind sie jedenfalls nicht identisch.

als der Sinus totus, oder eines derselben oder beide den Sinus totus übertreffen. Überall werden Beispiele beigefügt und die Rechnung wird an geometrischen Figuren erläutert. Die zweite Regel (p. 12—15) erstreckt sich auf den Fall, daſs das zweite oder dritte Proportionsglied den Sinus totus enthält, wofür wieder Beispiele gerechnet und an Figuren demonstriert werden. Kommt endlich der Sinus totus in keinem Gliede der Proportion vor, so muſs, wie die dritte Regel (p. 15—17) lehrt, die Prosthaphäresis doppelt angewendet werden. Hat man z. B. x aus der Proportion zu berechnen $a : b = c : x$, so bildet man: $a : b = \sin \operatorname{tot} : y$ und dann $\sin \operatorname{tot} : y = c : x$, und bestimmt zuerst y und dann x mit den vorhergehenden Regeln.

Auf die Anwendungen, die Joestel von dieser bis ins Detail ausgearbeiteten Methode macht, werde ich weiter unten zu sprechen kommen, wenn wir seine Vorläufer darin kennen gelernt haben.

Nachdem die Methode einmal als praktisch erkannt war, wurde sie auch sofort auf die verschiedensten Probleme der sphärischen Astronomie angewendet, selbst wo es sich um die Behandlung schiefwinkliger Dreiecke handelte, und Reimers behauptet,[19]) die Anwendung auf die letzteren rühre ebenfalls von Bürgi her. Sodann löst er „mit der Methode von Bürgi" die beiden Aufgaben, die Winkel aus den drei Seiten und aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen.[20])

Diese Methode ist nichts anderes als die direkt aus der Figur des Analemmas entnommene Umgestaltung des Cosinussatzes mittelst der Prosthaphäresis. Durch Projektion der Kugel auf die Meridianebene gewinnt er direkt aus der Figur als *primum inventum* den Ausdruck[21]) $\frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) + \sin(c - 90^0 + b)\}$ und als *secundum inventum*: $\frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) - \sin(c - 90^0 + b)\}$, denen sich als *inventum tertium* $\sin(90^0 - a) - \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) - \sin(c - 90^0 + b)\}$ anreiht.

Der gesuchte $\sphericalangle A$ folgt dann aus der Proportion:

$$\cos A : \text{sin. tot.} = \textit{invent. tertium} : \textit{invent. primum},$$

d. h. also in unserer Schreibweise, es wird A aus

19) *Fundamentum astr.* 19ᵛ.

20) Es heiſst dort: *„Eodemque Byrgiano modo, verumque Byrgianum myrothecium veramque ac genuinam Cassellanam seu Hassiacam Astronomiam redolente arteficio solvere docebimus"*, und 22ʳ preist er Bürgi in der überschwenglichsten Weise, indem er sagt: „*. . . atque admirare (lector) Byrgianam solertiam . . . ac denique agnosce, quantis molestiis ac tediis ab ipso summo artefice liberati sumus . . .*

21) Das sphärische Dreieck ist hier mit ABC bezeichnet, seine Seiten, wie gebräuchlich, mit a, b, c.

$$\cos A = \frac{\cos a - \frac{1}{2}\{\cos(b-c) + \cos(b+c)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}} \tag{1}$$

berechnet. Um die Einfachheit der Rechnung zu erkennen, beachte man den Gang derselben: Man schlägt zuerst die Sinusse der Summe und der Differenz von c und $90^0 - b$ auf, der erste zum zweiten addiert und die Summe halbiert, gibt das *inv. primum*, dieses von dem ersten Sinus abgezogen, gibt das *inventum secundum*, welches wieder von $\sin(90^0 - a)$ abgezogen, das *inv. tertium* liefert. Die Auflösung der Proportion gibt dann $\sin(90^0 - A)$, zu dem man mittelst der Tafel A bestimmt.

Bei der Lösung der zweiten Aufgabe, welche die Berechnung der Formel

$$\cos a = \tfrac{1}{2}\{\cos(b-c) + \cos(b+c)\} + \tfrac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}\cos A \tag{2}$$

involviert, ist aber Bürgi, wie Wolf[22]) und nach ihm Herr Cantor[23]) mitgeteilt haben, noch weiter gegangen, indem er auch die letzte noch nötige Multiplikation zu ersparen lehrte und hierzu, wie wir heute sagen, einen Hilfswinkel einführte. Wie dies geschah, ist in dem Werke des Bartholomaeus Pitiscus ausgeführt, der die Methode ausdrücklich als von Bürgi herstammend angibt.[24]) Wir wollen seine Rechnung an dem von ihm mitgeteilten Beispiel erläutern, wobei wir uns genau an die dort gegebene Schreibweise halten, um zu zeigen, wie man damals verfuhr. Es sei in Figur 3 gegeben $AB = c = 26^0 20'$, $BC = a = 59^0 58'$, $\sphericalangle B = 50^0 4'$, gesucht $AC = b$.

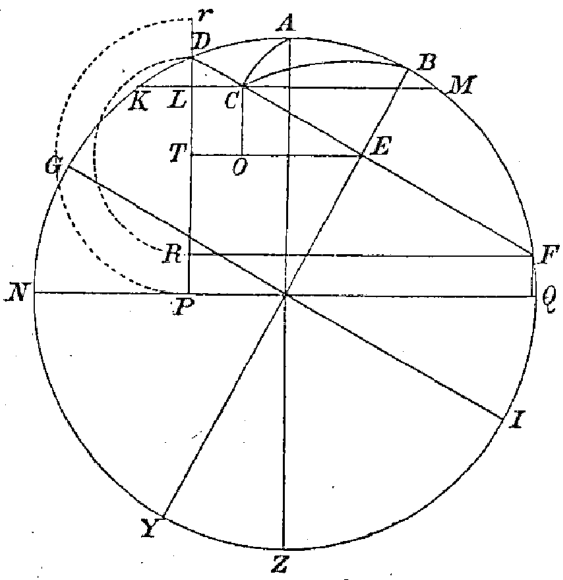

Fig. 3.

	$26^0\ 20'$	($=$ arc $GN = c$)	
	$30^0\ \ 2'$	($=$ arc $FJ =$ arc $GD = 90^0 - a$)	
Summe:	$56^0\ 22'$	($=$ arc DN),	Sin. $= DP = 8325991$
Diff.	$3^0\ 42'$	($=$ arc FQ)	Sin. $= PR = \ \ 645323$ ($= Dr$)
			Summe $Pr = 8971314$
			Hälfte $TP = 4485657 =$ *Invent. I*
			$PR = Dr = \ \ 645323$
			Diff. $DT = 3840334$ ($= \sin x$).

22) Astronomische Mitteilungen XXXII. 61. 23) Cantor II. 590.

24) B. Pitisci, *Trigonometria.* Aufl. v. Jahre 1608. 139. Aufl. v. 1612. 173 Wolf kannte diese Mitteilung des Pitiscus nicht.

Hieraus mittelst der Tafel:

$$
\begin{array}{llr}
 & x = 50^0\ \ 4' & \\
 & \sphericalangle B = 22^0\ 35'\ \ 1{,}5'' & \\
\text{Summe:} & = 72^0\ 39'\ \ 1{,}5'' & \text{Sin.} = 9545031 \\
\text{Diff.} & = 27^0\ 28'\ 58{,}5'' & \text{Sin.} = 4614841 \\
 & & \text{Diff.} = 4930190
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Hälfte} = CO = LT = 2465095 & = \textit{Invent. II.} \\
4485657 & = \textit{Invent. I.} \\
\text{Summe } LP = 6950752 & = \text{Sin. des Compl. der} \\
 & \quad \text{der dritten Seite.}
\end{array}
$$

Die Rechnung wird in unserer Schreibweise durch die Formel

$$\cos b = \tfrac{1}{2}\{\cos(a-c) + \cos(a+c)\} + \tfrac{1}{2}\{\sin(B+x) - \sin(B-x)\} \quad (3)$$

dargestellt, indem $\sin x = \frac{1}{2}\{\cos(a-c) - \cos(a+c)\}$ gesetzt wird.

M. Joestel hat diese Methode auch noch auf den Fall der Gleichung (1) S. 10 ausgedehnt,[25]) indem er daselbst den Zähler $= \sin x$, den Nenner $= \operatorname{cosec} y$ setzte und dann $\frac{\sin x}{\operatorname{cosec} y} = \sin x \sin y$ wieder prosthaphäretisch behandelte.

So unzweifelhaft es mir ist, dafs diese letzten endgiltigen Ver besserungen, d. h. die Einführung der Hilfswinkel Bürgis, beziehungsweise Joestels Eigentum sind, ebenso bin ich überzeugt, dafs, trotz Reimers' gegenteiliger ausdrücklicher Behauptung, die Anwendung der Prosthaphäresis auf die schiefwinkligen Dreiecke, schon von Wittich und Tycho vollzogen wurde. Um diese Ansicht zu begründen, müssen wir zuerst einen Blick auf ein von Tycho hinterlassenes Manuskript[26]) über Trigonometrie werfen, das zwischen 1591 und 1595 niedergeschrieben wurde. Dasselbe ist nach Angabe des Herausgebers dem sogenannten kleinen Kanon des Rhäticus von 1551[27]) angebunden, und schon dieser Umstand weist darauf

---

25) In dem oben zitierten Kodex folgt nämlich nach der *Prosthaphaeresis Astronomica* noch ein Traktat: „Melchioris Joestelii *Triangula Astronomica tum sphaerica, tum rectilinea*" (p. 17—53). Obige Methode findet sich daselbst p. 35 und 39 angewendet.

26) Es führt den Titel: *Triangulorum planorum et sphaericorum praxis mathematica,* befindet sich in der k. k. Universitätsbibliothek zu Prag und ist von F. J. Sstudnička 1886 in Photographotypie herausgegeben worden. Vgl. auch Cantor II 556.

27) Von diesem Kanon, in welchem sich zum erstenmale alle sechs trigonometrischen Funktionen tabellisiert finden, und der schon bald nach seinem Erscheinen zu den gröfsten Seltenheiten zählte, besitzt die Münchener Hof- und Staatsbibliothek ein Exemplar.

hin, daſs es nur Notizen enthält, die Tycho für sich und seine Schüler zum Gebrauche dieses Kanons machte, ohne zunächst an eine Publikation der Schrift zu denken. Diese Ansicht wird noch dadurch bestätigt, daſs die Figuren nur angedeutet, Beweise aber nirgends ausgeführt sind.[28])

In dieser Schrift, die auch sonst manches Interessante enthält, wendet Tycho seine prosthaphäretische Methode auf die Lösung der beiden Aufgaben an, die wir bei Raymarus Ursus fanden (Dogma VI und IX der sphärischen Dreiecke) und zwar ganz in derselben Weise, wie es dieser dem Bürgi zuschreibt, nur kennt er die endgiltige Verbesserung des letzteren noch nicht und behält deshalb die letzte Multiplikation bei. Auch behandelt er in gleicher Weise den einen der polaren Fälle, wobei er jedoch ein falsches Zeichen angibt, da er einfach nur Seiten und Winkel vertauscht (Dogma VII).

Da das vorliegende Manuskript Tycho's frühestens von 1591 stammt, so hätten wir keinen Grund gehabt, oben die von Reimers behauptete Priorität Bürgi's inbezug auf die prosthaphäretische Umgestaltung des Cosinussatzes in Frage zu stellen, wenn nicht verschiedene Stellen in dem uns noch erhaltenen Briefwechsel des dänischen Astronomen darauf hinwiesen, daſs er schon lange im Besitze jener Anwendungen war, ja daſs Exemplare seines Heftes schon früher existierten und sich in den Händen seiner Schüler befanden. Was ich über diesen Punkt auffinden konnte, will ich im Folgenden zusammenstellen.

Anschlieſsend an eine Bemerkung Tychos im zweiten Buche seines Werkes *„De Aetherei mundi recentioribus phaenomenis“*, wo er p. 281 angibt, daſs man aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel die anderen Winkel und die dritte Seite in einem ebenen Dreieck auch ohne Zerfällung desselben in zwei rechtwinklige berechnen könne, ersucht Magini[29]) den Gellius Sascerides,[30]) er möge ihm dieses Verfahren übermitteln. In seiner Antwort auf diesen Brief[31]) teilt ihm Sascerides mit, an diese Methode könne er sich nicht mehr erinnern, dagegen schreibt er ihm „aus dem Gedächtnis“ gerade jene prosthaphäretische Lösung der beiden Aufgaben, aus zwei Seiten

28) In einem Briefe an seinen Schüler Gellius Sascerides vom 1./II. 1591 sagt Tycho allerdings, daſs er diese seine Methode im ersten Teile seiner Astronomie veröffentlichen werde. (An. Favaro. *Carteggio inedito di* Ticone Brahe *etc. con* G. A. Magini. Bologna 1886. in 8°. 204.) Das ist aber nicht geschehen.

29) Brief vom 15. Juli 1590. A. Favaro, *Carteggio.* 387.

30) Gellius Sascerides (1562—1612) studierte 1581—87 in Wittenberg und kam dann zu Tycho, wo er bis 1588 blieb. 1589 lernte er Magini in Padua kennen, mit dem er in lebhaften Briefwechsel trat.

31) *Carteggio.* p. 358 ff.

und dem eingeschlossenen Winkel und aus drei Seiten in einem sphärischen Dreiecke die übrigen Stücke zu finden, die TYCHO in seinem VI. und IX. Dogma gibt und sagt, daſs er sie früher einmal bei TYCHO gelernt habe.[32]) Im weiteren Texte seines Briefes sagt er dann, daſs diese Regeln wohl 1588 von URSUS veröffentlicht worden seien, aber dem TYCHO angehörten; URSUS habe sie, wenn nicht durch TYCHO selbst, bei dem er sich früher ebenfalls aufgehalten, so doch durch den Landgrafen von Hessen erfahren, dem sie ein gewisser PAUL WITTICH mitgeteilt habe. Endlich verspricht er MAGINI, sich wegen der fraglichen Aufgabe über das ebene Dreieck an TYCHO selbst zu wenden. Das thut er denn auch und teilt TYCHOS' Antwort dem MAGINI in einem Briefe vom 1./II. 91 wörtlich mit.[33]) Die für uns wichtige Stelle in diesem Antwortschreiben lautet: „Wie man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel in einem (ebenen) Dreieck das Übrige ohne Benützung der Höhe leichter findet, als gewöhnlich, kannst du ihm aus meinem (TYCHO's) IV. Dogma[34]) über die ebenen Dreiecke erklären, damit er zufrieden ist. Auch ist es mir nicht unangenehm, wenn du ihm die Operationen mittelst des VI. und IX. Dogmas unserer Sätze mitteilst, zumal da ich sehe, daſs gegenwärtig die Beweise für diese und ähnliche Sätze von anderen, die sich mit fremden Federn schmücken, verbreitet werden. Die Sache verhält sich nämlich so, daſs jener Plagiator URSUS[35]) jene Beweise und kompendiosen Zahlenrechnungen inbezug auf die Dreiecke, welche er für die seinigen ausgab, von dem Automatenverfertiger des Landgrafen JUST BÜRGI erhielt, der sie von WITTICH erlangt hatte. Dem WITTICH aber hatte ich, als er vor deiner (SASCERIDES) Ankunft bei mir, einige Zeit hier verweilte, über diese und andere auf leichtere Behandlung der Mathematik bezüglichen Dinge rückhaltlos Mitteilungen gemacht, und dieser verbreitete manche derselben . . ., als er von hier zu dem Landgrafen von Hessen sich begeben hatte. Diese werden nun von anderen schamlos mit frecher Stirn als ihre eigenen Erfindungen ausgegeben, so daſs dem eigentlichen Erfinder fast keine Ehre mehr bleibt . . ."

Da nun bekanntlich TYCHO kein sehr glaubwürdiger Zeuge ist, wenn

---

32) *„Et cum mihi de reliquis non constet, illam supputationem triangularem, cuius facit mentionem* (TYCHO nämlich), *quam ipse aliquando a clarissimo* TYCHONE *accepi, lubens tecum, quantum memoria suppeditat, communicabo.* a. a. O. 388.

33) A. a. O. 200—204.

34) Dieses Dogma enthält den von THOMAS FINK in seiner *Geometria rotundi* 1583 p. 282 und 292 zum erstenmale veröffentlichten Tangentensatz.

35) Auf URSUS war TYCHO schon deshalb sehr erbost, weil jener behauptete, das Tychonische Weltsystem zuerst erfunden zu haben.

es gilt, seinem eigenen Ruhme zu dienen, so möchte ich die Richtigkeit der hier ausgesprochenen Behauptung, seine Sätze seien ganz seine eigene Erfindung, in Zweifel ziehen,[36]) zumal diese Behauptung mit jener weiter oben angeführten Briefstelle, nach welcher WITTICH nicht nur die Grundlagen der Theorie schuf, sondern auch bei ihrer Ausarbeitung stark beteiligt war, nicht übereinstimmt. Dagegen gestattet die angezogene Stelle im Zusammenhalt mit den Aussagen des SASCERIDES wohl den Schlufs, dafs seit WITTICH's Anwesenheit auf Uranienburg jene vereinfachenden Rechnungsmethoden in ihrer ganzen Ausdehnung, also auch auf die schiefwinkligen Dreiecke, daselbst in Anwendung kamen, und die Aufzeichnungen schon existierten, die wir aus TYCHO's Manuskript kennen.

Zum Schlusse meiner Betrachtungen will ich noch kurz auf jenen in Anmerkung 25 zu S. 11 erwähnten zweiten Traktat des MELCHIOR JOESTEL eingehen, weil dieser die vollkommenste Durcharbeitung der Anwendung der Prosthaphäresis auf die Lösung sämtlicher Dreiecksfälle bietet, die damals geleistet wurde, und überdies noch keine Besprechung von Seite eines Geschichtsschreibers erfahren hat.

Anschliefsend an RHAETICUS (das *Opus Palatinum* desselben war 1596 erschienen) gibt er zunächst (p. 18—21) eine Unterscheidung der verschiedenen „Spezies“ oder *„Formae“*, wie sie RHAETICUS nennt, der sphärischen Dreiecke, indem er für die rechtwinkeligen sechs, für die schiefwinkeligen 10 Fälle unterscheidet. Es war dies damals noch nötig, da man ja die Funktionen negativer Winkel oder von Winkeln gröfser als 90^0 (mit Ausnahme des Sinus eines Winkels im zweiten Quadranten) nicht zu bilden verstand. Zur Lösung der bekannten Fundamentalaufgaben der Dreieckslehre gibt er dann 13 Theoreme an, wobei er sich bestrebt, nur die Funktion Sinus zu benützen, da er alle Lösungen mit der prosthaphäretischen Methode behandelt und, wie CLAVIUS, sehr wohl weifs, dafs hierzu die Sinusse am verwendbarsten sind. Die von ihm mitgeteilten Theoreme waren damals sämtlich längst bekannt, neu war nur ihre Formulierung im Sinne der Prosthaphäresis mit Einschlufs aller möglichen Fälle. Gerade dieses Hineinpressen aller Möglichkeiten in den Wortlaut eines einzigen Satzes macht aber die Theoreme äufserst schwerfällig. So nimmt z. B. der Wortlaut des Cosinussatzes eine ganze Folioseite (34) ein.[37]) Dagegen sind die zahlreichen numerischen Beispiele, die jeder Regel beigegeben sind,

---

36) WITTICH gegenüber brauchte sich TYCHO damals auch nicht mehr in Acht zu nehmen, da derselbe bereits 1587 gestorben war.

37) Das Gleiche gilt von dem Cosinussatze für die Winkel (p. 38), der übrigens im Gegensatze zu TYCHO für alle einzelnen Fälle richtig angegeben wird.

in eleganter und übersichtlicher Weise durchgerechnet, ähnlich wie wir das in dem Beispiele aus PITISCUS' Trigonometrie sahen.[38])

JOESTEL's Abhandlung ist weit über die Grenzen Wittenbergs hinaus bekannt geworden, wenn sie auch kaum jemals im Drucke erschienen sein dürfte, und hat jedenfalls dazu beigetragen, dafs sich die Prosthaphäresis noch lange nach Erfindung der Logarithmen erhielt. So schlofs sich LONGOMONTAN in seiner schon erwähnten *Astronomia Danica* 1622 völlig an JOESTEL an und gab der Methode in dieser ausgebildeten Form noch den Vorzug vor den ihm wohlbekannten Logarithmen, „weil nach seiner Ansicht die Lehre von den Logarithmen zu sehr von dem beständigen Einblick in den Gang des Beweises ablenke, der doch den Lernenden ganz besonders notwendig sei" (ebenda p. 10). Dieses Urteil stand damals nicht vereinzelt da und hatte auch eine gewisse Berechtigung, da die Theorie der Logarithmen noch keineswegs so fest fundiert war, wie es heute der Fall ist.

Ein Beweis dafür, wie schwer sich die Astronomen von der liebgewonnenen Methode trennten, ist, dafs noch 1634 der Hamburger FROBENIUS in seinem „*Clavis universae trigonometriae*" neben den Logarithmen sich ihrer bedient, und 1636 der jüdische Astronom EMANUEL PORTO in Padua in seinem „*Porto Astronomico*" an JOESTEL's Abhandlung sich anschliefsend die prosthaphäretische Methode *in extenso* entwickelt.[39])

38) Die drei Theoreme, mit denen die ebene Trigonometrie behandelt ist, bieten kein weiteres Interesse.

39) Vgl. WERTHEIM, Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums. 41. Jahrgang. 616 ff.