Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Gedächtnissrede

auf

Otto Hesse

gehalten
in der
öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften
zu München
zur Feier ihres einhundert und dreiundzwanzigsten Stiftungstages
am 28 März 1882

von

Gustav Bauer
ordentl. Mitglied der math.-phys. Classe der k. Akademie.

München 1882.
Im Verlage der k. b. Akademie.

Enthält eine Liste der Publikationen O. Hesses

Was ernste Geistesarbeit in stiller Abgeschlossenheit auf irgend einem Gebiete wissenschaftlicher Forschung erfunden oder entdeckt hat, nimmt gewöhnlich schnell seinen Weg in die Welt hinaus und trägt den Namen des Forschers in die weitesten Kreise.

Diess gilt jedoch nicht in gleichem Maasse von Erfindungen in der Wissenschaft der Mathematik; denn selbst bahnbrechende Arbeiten auf diesem Gebiete werden nur der kleinen Zahl von Männern des Faches bekannt und bleiben wegen der Unverständlichkeit der mathematischen Sprache der übrigen Welt verschlossen, es müsste denn eine grosse Entdeckung auf dem Gebiete der Physik, der Astronomie oder der praktischen Mechanik sich an die mathematische Entdeckung knüpfen.

Um so mehr mag es passend erscheinen, von dieser Stelle eines Mannes zu gedenken, der auf dem Gebiete der Mathematik Ungewöhnliches geleistet hat, der noch vor wenigen Jahren unter uns gelebt und gewirkt hat, und als Mitglied unserer Akademie derselben zu immerwährender Zierde gereichen wird.

Das Leben Otto Hesse's bietet keine besondern Wechselfälle dar. Es ist ein Leben wie das von so manchem deutschen Gelehrten — arbeitsame Jugend, langes Docententhum mit Entbehrungen und angestrengtester Arbeit; bis endlich seine wissenschaftlichen Leistungen alle äussern Hindernisse besiegend ihm zugleich mit einem in der Wissenschaft berühmten Namen eine behagliche Lebensstellung verschaffen.

Die Darstellung seines Lebens, wesentlich der Wissenschaft geweiht und durch die Wissenschaft bereichert, beruht daher vorzugsweise auf der Analyse seiner Werke und auf der Darlegung der unvergänglichen Verdienste, die er sich um die Wissenschaft erworben hat.

Ludwig Otto Hesse war zu Königsberg den 22. April 1811 geboren, als Sohn des Kaufmanns Johann Gottlieb Hesse und erhielt seine erste wissenschaftliche Bildung auf dem Altstädtischen Gymnasium seiner Vaterstadt. Im Jahre 1832 von der Schule mit dem Zeugniss der Reife entlassen, bezog er die Königsberger Universität, an welcher er vorzugsweise mathematischen und physikalischen Studien oblag.

Die Königsberger Universität hatte kurze Zeit vorher in Bezug auf das Studium der Mathematik eine höchst günstige Umwandlung erfahren. Als der grosse Astronom Bessel im Jahre 1811 die Professur in Königsberg übernahm, war für die mathematischen Disciplinen so ungenügend vorgesorgt, dass er, um Schüler für die Astronomie heranzuziehen, sich entschliessen musste, neben seinen in grossartigem Maassstabe angelegten Arbeiten, noch Vorlesungen in der reinen Mathematik zu halten. Dieser mangelhafte Zustand änderte sich jedoch plötzlich, als 1825 C. G. J. Jacobi, der damals 21 Jahre alt eben erst seine Lehrthätigkeit an der Berliner Universität begonnen hatte und bereits die Aufmerksamkeit auf sich zog, von der höchsten Unterrichtsbehörde veranlasst wurde, nach Königsberg überzusiedeln. Schon wenige Jahre später trat sein ausgezeichneter Schüler Richelot als Docent der Mathematik ihm zur Seite. Der Lehrstuhl für Physik war in vorzüglicher Weise durch F. Neumann besetzt. So waren denn, als Hesse die Königsberger Universität bezog, die mathematisch-physikalischen Disciplinen an derselben vielseitig und glänzend vertreten, wie kaum auf einer andern Universität. Besonders aber wurde für Hesse Jacobi von eminentester Bedeutung, ein Mann, der fast in allen Theilen der Wissenschaft in vorderster Reihe, in manchen geradezu an der Spitze stand und zugleich eine ungewöhnliche Lehrgabe besass. Der Einfluss dieses ausserordentlichen Mannes auf seine Schüler wurde noch verstärkt, als er 1834 die Idee eines mathematischen Seminars zur Ausführung brachte und dadurch seinen Jüngern Gelegenheit bot, ihre Kenntnisse unter seiner Leitung in eigenen Untersuchungen zu verwerthen.

In dieser Schule wurde Hesse in die neuen Methoden und Ideen eingeweiht, die bei der Entwicklung, welche die Wissenschaft in dieser Zeit erfuhr und von welcher ich sogleich eingehender zu sprechen haben werde, in üppigster Fülle emporschossen.

Die reichen Kenntnisse und die geistige Anregung, welche Hesse auf der Universität gewonnen, zeigten sich schon in dem Oberlehrer-Examen, das er am Ende seiner fünfjährigen Studien 1837 bestand. Die Prüfungscommission, zu deren Mitgliedern Jacobi und Neumann zählten, gab ihm das Zeugniss, dass er gründliche und umfassende Kenntnisse in der Mathematik besitze; seine schriftliche Arbeit zeige von erheblichem speculativem Talent, sowie seine Probe-Lektion von Uebung und Gewandtheit.

Als Hesse hierauf das übliche Probejahr als Lehrer im Kneiphöf'schen Gymnasium abgehalten hatte, trat er als Lehrer in die Königsberger Gewerbeschule ein, an welcher er in Physik und Chemie unterrichtete. Am 27. Januar 1840 erwarb er sich den Doktorgrad mit einer Dissertation „Ueber die Oberflächen zweiter Ordnung" und hiemit eröffnete sich ihm ein höherer Wirkungskreis, indem er noch in demselben Jahre als Docent an der Universität Königsberg auftrat.

Die Stellung des jungen Lehrers neben Männern, wie Bessel, Jacobi, Neumann und Richelot war eine beneidenswerthe; der Eifer und die Arbeitskraft dieser Männer musste ihm ein beständiger Stachel zur Nacheiferung sein. Mit Jacobi trat er bald in engere freundschaftliche Beziehungen, die auch bis zu dem leider frühen Tode Jacobi's anhielten. Obwohl Jacobi nur sechs Jahre älter war als Hesse, so sah letzterer doch immer in demselben seinen geliebten Lehrer und sein Verhältniss zu demselben war wie das zu einem älteren Freunde, dessen Rath man in wichtigen Momenten des Lebens gerne erholt.

Abgesehen von diesen günstigen persönlichen Verhältnissen, war es ein die Leistungen Hesse's höchst fördernder Umstand, dass der Beginn seiner akademischen Laufbahn in eine Zeit des regsten Aufschwungs der mathematischen Wissenschaften fiel. Zumal die Geometrie hatte in den vorhergegangenen 10 Jahren eine Verallgemeinerung und Umwandlung erfahren, wie kaum eine andere Wissenschaft eine ähnliche in so kurzer Zeit erfahren haben mag. Es war eine neue Epoche für die Geometrie eingetreten. Für die Charakterisirung der Arbeiten Hesse's wird es nothwendig sein, diese Umwandlung in Kürze darzulegen.

Dieselbe war vorzugsweise bedingt durch die Entdeckung und rasche Entwicklung der neuern synthetischen Methode. Die Spuren derselben gehen in das Alterthum zurück. Die Geometrie der Alten ist wesentlich synthetisch; indem man die Theile der betrachteten Figur zusammenstellt und vergleicht, und so Schritt für Schritt weiterschreitet, wird das zu Beweisende als ebenso sichere Wahrheit hingestellt, als das Axiom, von dem man ausgegangen. Hierin besteht ihre grosse Klarheit, ihre überzeugende Kraft, aber auch ihre Schwäche. Ihr Gang ist langsam, schüchtern und lässt die Figur nicht aus den Augen. In den Schriften Euclid's, des Appolonius, des Pappus von Alexandrien finden sich schon Sätze, welche in der neuern Geometrie von Wichtigkeit geworden sind. Aber es fehlte ihnen eine allgemeine Methode. Dieselbe Aufgabe erforderte bei anderer Lage der Theile der Figur gegen einander eine andere Lösung; noch weniger konnte das Verfahren, das zur Lösung eines Problems in Bezug auf eine Curve gedient hatte und auf spezielle Eigenschaften dieser Curve basirt war, zur Lösung desselben Problems bei einer andern Curve dienen.

Als nach dem Verfall der alten Welt eine Wiederbelebung der Wissenschaften eingetreten war, machte auch die Geometrie wieder Fortschritte und nahm bald durch die Entdeckung Descartes', dessen Geometrie 1637 erschien, einen Charakter von Allgemeinheit an, den sie vorher nie gehabt. Der grosse Dienst, den Descartes der Geometrie erwies, bestand darin, dass er eine Methode angab, die gegenseitige Lage der Punkte einer geometrischen Figur auf immer gleiche Weise zu bestimmen. Durch diese Methode wird es möglich, die geraden oder krummen Linien, aus welchen eine Figur besteht, sofort in Gleichungen umzusetzen, die alle Eigenthümlichkeiten der Linien und ihre Lage erkennen lassen. Hiedurch war eine rein analytische Methode geschaffen, in dem Sinne, dass die Lösung des Problems nur von den Schwierigkeiten abhängt, die in der Behandlung der analytischen Gleichungen liegt.

Die Geometrie trat durch diese Entdeckung in engste Beziehung mit der Algebra und ermöglichte die Entdeckung der Infinitesimal-Rechnung durch Newton und Leibnitz und empfing von dieser wieder eine mächtige Erweiterung. Das ganze vorige Jahrhundert wurde auf die Verarbeitung dieser grossen Entdeckung verwandt und die staunenswerthen Erfolge der analytischen Methode stellten das durch die Geometrie der Alten Erreichbare so sehr in Schatten, dass selbst einige bedeutsame Anfänge einer Neubelebung derselben, wie sie die Untersuchungen von Désargues, Pascal, De la Hire, Newton, Maclaurin u. a. zeigen, unberücksichtigt blieben und erst in unserem Jahrhundert wieder gewürdigt wurden. Diesem war es vorbehalten, der reinen Geometrie neue Bahnen zu eröffnen und dieselbe zugleich zu ungeahnter Entwicklung zu fördern.

Es war Monge, dem man zunächst den Anstoss hiezu verdankte. Gleich ausgezeichnet als Entdecker der descriptiven Geometrie, wie als Analytiker und als Lehrer, zugleich Begründer der École Polytechnique, hat Monge das Interesse für Geometrie in weiten Kreisen wiederbelebt.[1]) Durch seine descriptive Geometrie, welche lehrt Probleme, die sich auf Gebilde des Raumes beziehen, auf graphischem Wege in der Ebene zu lösen, wurde eine freiere Auffassung der Figuren gewonnen. Auch musste hiedurch die Forschung mehr auf die Untersuchung räumlicher Gebilde hingewiesen werden. Das classische Werk von Monge „Application de l'Analyse à la Géometrie“ (1807), von der Erzeugung und den Eigenschaften der Flächen handelnd, gibt davon Zeugniss, so wie die Arbeiten seiner zahlreichen für ihren Lehrer begeisterten Schüler, der Dupin, Brianchon, Hachette, Biot und besonders Poncelet.

Poncelet gab in seinem grossen Werke „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822) eine Theorie der Projektion der Figuren. Es handelt sich dabei, die allgemeinen Eigenschaften der Figuren aufzusuchen, welche durch die Projektion nicht zerstört werden und sich daher im perspektivischen Bilde wieder finden. Wir nennen diese allgemeinen Eigenschaften projektivische Eigenschaften der Figuren.

Die perspektivische Projektion ist schon früher öfters angewandt werden, so schon von Désargues, Pascal, Newton, und später besonders von Lambert, um schwierigere Aufgaben auf einfachere zurückzuführen. Aber erst Poncelet ersah hierin eine fruchtbare geometrische Methode und gab hiedurch den Anstoss zur Begründung der neuen synthetischen Methode.

Das Werk von Poncelet enthält auch die wichtige Theorie der „Reciproken Polaren“. Es war schon seit lange bekannt, seit De la Hire (1685), dass in der Ebene eines Kegelschnitts jeder Punkt mit einer Geraden und jede Gerade mit einem Punkt in besonderer (polarer) Beziehung steht. Poncelet benützte diese Beziehung zur Transformation einer Figur in eine andere, ihre polare Figur, als geometrische Methode. Gergonne erkannte in dieser Beziehung zweier polaren Figuren ein allgemeines Princip und ist dasselbe seitdem als Princip der Dualität in die Geometrie eingeführt.[2])

Aus der Methode der Projektion von Poncelet erwuchs die neue synthetische Geometrie. Auch sie beschäftigt sich zunächst nur mit den allgemeineren Eigenschaften der Figuren, den projektivischen, wenn es ihr auch später gelang, die nicht-projektivischen (metrischen) Eigenschaften ebenfalls in den Kreis ihrer Betrachtung zu ziehen. Steiner[3]) und der französische Gelehrte Chasles[4]), welche unabhängig von einander die neue synthetische Methode begründet haben, machten die Fundamentalbeziehungen, welche die Projektion zwischen zwei Figuren bestimmt, losgelöst von der perspektivischen Lage der Figuren, zur Grundlage ihres Systems. In seinem grundlegenden Werke „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten“ (1832) sagt Steiner: „Durch diese wenigen Grund-Beziehungen gelangt man gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können. . . . . . Es wird die Art und Weise aufgedeckt, wie die Eigenschaften der Figuren von den einfacheren zu den zusammengesetzteren sich fortpflanzen. Dieser Zusammenhang und Uebergang ist die eigentliche Quelle aller übrigen vereinzelten Aussagen der Geometrie.“

Vergleicht man die Einfachheit der Principien mit der Fruchtbarkeit der Methode, so scheint es in der That, dass hiemit der Kern der geometrischen Forschung aufgedeckt wurde; denn in der kurzen Zeit von ein Paar Jahrzehenten hat sich die neue synthetische Geometrie nicht nur ebenbürtig neben die ältere analytische Geometrie gestellt, sondern das unvergleichliche geometrische Genie Steiner's hat zugleich die Grenzen der Geometrie weit hinausgerückt und, da er im Drange seiner Entdeckungen dieselben meist ohne Beweise mittheilte, seinen Nachfolgern schwere Aufgaben zur Lösung überlassen.

Es konnte nicht fehlen, dass diese Entwicklung der synthetischen Geometrie einen überwiegenden Einfluss auf die analytische Geometrie übte. Es handelte sich darum, die neuen Principien und Anschauungen derselben in die Analyse einzuführen und den Gang des Beweises, den die synthetische Geometrie vorzeichnete, auch analytisch nachzuahmen. Die analytische Geometrie war hiezu vorbereitet, denn sie hatte zu derselben Zeit durch Plücker eine durchgreifende Veränderung erfahren. Derselbe hat ein tieferes Verständniss der analytischen Gleichungen uns gelehrt. Plücker zeigte in seinen „Analytisch geometrischen Entwicklungen“ (1828), wie bei der analytischen Behandlung eines geometrischen Problems aus der Zusammensetzung der Gleichungen sofort die Linien der Figur und die Beziehung in der sie zu einander stehen, gleichsam herauszulesen sind. „Meine Gleichungsformen, sagt Plücker,[5]) sind vollständige Darstellungen graphischer Constructionen, in denen nichts fremdartiges sich findet; es sind ideale mit analytischen Symbolen hingezeichnete Figuren."

Plücker verdankt man ferner eine Erweiterung des Coordinatensystems durch Einführung der sogenannten „homogenen Coordinaten";[6]) ihm verdankt man ferner zumal die Einführung des Begriffs der Coordinaten einer Geraden[7]) und einer Ebene; wobei statt des Punktes die Gerade (resp. Ebene) als das die Figur beschreibende Element angesehen wird. Durch Einführung dieser Coordinaten ist die vorhin besprochene Dualität der geometrischen Figuren schon in der Coordinatenbestimmung zum Ausdruck gelangt.[8]) „Bis auf die neue Zeit, sagt Sylvester, hielt sich die analytische Methode, wie sie Descartes gegeben, gleichsam auf einem Fuss. Plücker war die Ehre vorbehalten, sie fest auf ihre zwei gleichen Stützen zu stellen, dadurch dass er das complementäre Coordinatensystem einführte. Diese Erfindung jedoch war unvermeidlich geworden, nachdem die tiefen Anschauungen von Steiner sich einmal in dem Geiste der Mathematiker festgesetzt hatten".[9])

Man kann daher mit vollem Rechte sagen: Von Plücker datirt die analytische Geometrie in ihrer modernen Gestalt.

Auf diesem so neubearbeiteten Felde der analytischen Geometrie, befruchtet von den Ideen der neuen synthetischen Methode erwuchsen die ersten Arbeiten Hesse's und es blieb dasselbe auch immer vorzugsweise sein Arbeitsfeld.

Seine Arbeiten von 1838—1843 sind noch theilweise rein synthetisch gehalten und handeln fast ausschliesslich von den Flächen 2. Ordnung. Diese Flächen sind im Raume das Analogon der Curven 2. Ordnung, der bekannten Kegelschnitte. Es sind die einfachsten krummen Flächen, wie die Kegelschnitte die einfachsten krummen Linien sind. Aber während letztere schon von den Alten als Schnitte von Kreiskegeln untersucht worden waren, datirt die Kenntniss der allgemeinen Flächen 2. Ordnung erst von Euler her, der zuerst nachwies, dass es fünf Gattungen dieser Flächen gebe.[10]) Die genauere Untersuchung dieser Flächen war unerlässlich, bevor man in der Geometrie des Raums weiter vordringen wollte. Man verdankt dieselbe hauptsächlich Monge und seiner Schule[11]) und wenn auch seitdem noch viele Eigenschaften dieser Flächen aufgefunden worden, so warteten doch noch manche auf sie bezügliche Aufgaben ihrer Lösung. Zu den wichtigsten derselben gehörte die Aufgabe, mit Hülfe von 9 beliebig gegebenen Punkten, welche eine Fläche 2. Ordnung bestimmen, einen beliebigen 10ten Punkt der Fläche zu construiren. Die Akademie zu Brüssel hatte 1825 diese Aufgabe gestellt, aber dieselbe war ohne Lösung geblieben. Die Aufgabe ist für die räumliche Geometrie das Analoge der Aufgabe der ebenen Geometrie: wenn 5 Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, einen beliebigen 6ten Punkt desselben zu construiren. Letztere Aufgabe war schon von Pascal durch sein berühmtes Hexagramm gelöst worden. Von der viel complicirteren räumlichen Aufgabe gab Hesse zuerst eine Lösung und zwar auf rein synthetischem Wege.[12])

Behufs der Lösung geht er von einem System von Flächen 2. Ordnung aus, welche durch 7 gegebene Punkte gehen. Diese Flächen gehen aber, wie schon bekannt war, sämmtlich noch durch einen 8ten Punkt, der schon durch die 7 gegebenen Punkte bestimmt ist. Hieraus entsteht die weitere Aufgabe, welche Hesse viel beschäftigt hat,[13]) und auf welche er noch in seiner letzten Zeit zurückgekommen ist, die Relationen zu bestimmen, welche zwischen den Coordinaten von 8 Punkten im Raume bestehen müssen, wenn sie gemeinsame Schnittpunkte dreier Flächen 2. Ordnung sind und sodann den 8ten Schnittpunkt aus den 7 andern linear zu construiren. Auch diese schwierige Aufgabe hat Hesse zuerst gelöst. Die Lösung führte ihn zugleich zur Auffindung mehrerer Sätze über Curven und Flächen 2. Ordnung bezüglich ihrer Systeme conjugirter Punkte, Sätze, welche wegen ihrer Einfachheit und Wichtigkeit zu den schönsten der projektivischen Geometrie dieser Curven und Flächen gehören.[14])

Wenn schon diese Arbeiten von Scharfsinn und einer ausserordentlichen Gewandtheit in der Analyse Zeugniss geben, so werden dieselben doch weit übertroffen durch seine Untersuchungen über die Curven 3. Ordnung, in welchen der erfinderische Geist Hesse's am glänzendsten zu Tage tritt, und durch welche er vorzugsweise seinen Ruf begründet hat. Dieselben erschienen 1844 im 28. Bande des Crelle'schen Journals, in welchem fast die sämmtlichen Arbeiten Hesse's publicirt sind.

Man hatte zuerst durch die neuern synthetischen Methoden Mittel an die Hand bekommen, Curven von höherem Grade als dem zweiten zu untersuchen. Poncelet, Steiner, Plücker begründeten vorzugsweise ihre Theorie und seitdem wandte sich das allgemeine Interesse der Mathematiker diesen Untersuchungen zu. In der Theorie dieser Curven spielen die Singularitäten derselben, gestaltliche Eigenthümlichkeiten derselben, eine höchst wichtige Rolle. Solche Singularitäten bilden z. B. die Wendepunkte einer Curve, das sind diejenigen Punkte, in welchen dieselbe die Richtung ihrer Convexität ändert und die Doppeltangenten, das sind diejenigen Tangenten, welche in zwei verschiedenen Punkten die Curve berühren. Schon Poncelet hatte in diesen Singularitäten die Erklärung eines Paradoxon gesucht, welches die Theorie der reciproken Polaren darbietet. Plücker hatte sodann aus dieser Theorie die Anzahl der Wendepunkte und der Doppeltangenten, die einer algebraischen Curve von bestimmter Ordnung zukommt, geschlossen; aber der direkte analytische Nachweis dieser Zahlen bot grosse Schwierigkeiten dar, da diese Singularitäten mit tiefliegenden Eigenschaften der analytischen Gleichungen und einem der schwierigsten Theile der Algebra, der Theorie der Elimination, zusammenhängen. Die analytische Untersuchung der höhern algebraischen Curven würde daher noch sehr mangelhaft sein, wenn nicht zu derselben Zeit, in welcher die Geometrie sich in so ungewöhnlichem Grade entwickelte, auch die Algebra eine grosse Umwandlung erfahren hätte durch die Gründung der Theorie der Determinanten.

Diese Theorie knüpft sich an die Elimination der Unbekannten aus einem System von Gleichungen 1ten Grades. Diese Elimination bietet zwar an sich gar keine Schwierigkeit dar; führt aber bei einer auch nur sehr mässigen Anzahl von Gleichungen auf Aggregate, deren unübersehbare Anzahl von Gliedern weder das Gesetz erkennen liess, nach welchem sie gebildet sind, noch weniger mit ihnen zu rechnen gestattete. Diese algebraischen Ausdrücke heissen heutzutage Determinanten. Zwar hatte schon Leibnitz die Anordnung dieser Ausdrücke erkannt und davon dem französischen Gelehrten De l'Hospital in einem höchst interessanten Briefe 1693 Mittheilung gemacht.[15]) Er war sich der Wichtigkeit seiner Entdeckung sehr wohl bewusst. „J'y trouve en très grand avantage pour l'avancement de l'analyse", sagt er. Aber in einem spätern Briefe an De l'Hospital schreibt er demselben, die Entdeckung für sich zu behalten. „Il n'est pas bon de prostituer nos methodes." So gieng die Entdeckung von Leibnitz verloren und ruhte bis in die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts. Jedoch erst nachdem Jacobi 1841 Zerstreutes in eine Theorie zusammengefasst hatte,[16]) wurde die Lehre von den Determinanten Gemeingut der Mathematiker. Nun bezeichnet man diese schwerfälligen Aggregate durch Symbole und nachdem ihre Zusammensetzung und ihre Eigenschaften bekannt sind, gestatten sie eine überraschende Leichtigkeit in ihrer Behandlung. Daher sagt Sylvester: „Die Theorie der Determinanten ist eine Algebra auf Algebra angewandt; ein Calcül, der uns befähigt, die Resultate analytischer Operationen vorherzusagen und zu verbinden, in derselben Weise wie die Algebra selbst uns dispensirt von der Ausführung der speziellen Operationen der Arithmetik."[17])

Man ersieht leicht die Umwandlung, welche die Ausbildung der Theorie der Determinanten in der Algebra hervorgebracht hat, wenn man bedenkt, dass früher ein System von Gleichungen 1ten Grads für die Analyse eine unüberschreitbare Schranke setzte, während man nun im Gegentheil die Lösung eines Problems auf ein solches System von Gleichungen zurückzuführen sucht. Nun wurde die rein algebraische Durchführung der geometrischen Probleme erst möglich und in dieser Richtung liegen die bahnbrechenden Arbeiten Hesse's.

Sylvester und Hesse hatten schon gezeigt, wie mit Hülfe der Determinanten die Elimination von einer Unbekannten aus zwei Gleichungen höhern Grads leicht bewerkstelligt werden kann.[18]) In der hier besprochenen Abhandlung gibt Hesse neue und wichtige Sätze zur Elimination[19]) und wendet dieselbe, als Vorbereitung für die Untersuchung der Curven 3. Ordnung, an auf die Aufgabe, eine Form 3. Grads von drei Veränderlichen (durch lineare Substitution) auf die möglichst einfache Form von nur 4 Gliedern zurückzuführen. Es ist diess eines der bemerkenswerthesten Beispiele des neuen Calcüls zur Lösung einer Aufgabe, die alle Künste der frühern Algebra zu Schanden gemacht hätte.

Die Lösung dieser Aufgabe führt ihn auf eine Determinante aus den zweiten Differentialcoefficienten der Form 3ten Grads gebildet, die hier zuerst in den Calcül eingeführt wird. Hesse hat damit eine Entdeckung gemacht, die eine der wichtigsten der neuern Algebra ist und zugleich das Glück gehabt, dass, wie der Name Pascal's sich an sein Hexagramm, so sich sein Name an seine Determinante heftete. Die Hesse'sche Determinante, le Hessien, the Hessian, il Hessiano hat den Namen Hesse's in alle Länder getragen, in welchen mathematische Studien gepflegt werden, und wird ihn künftigen Jahrhunderten überliefern.

Um die Wichtigkeit dieser Entdeckung einigermassen verständlich zu machen, muss ich noch mit einigen Worten auf die Fortschritte der Algebra eingehen, die sich an die Determinanten-Theorie knüpfte. Die reine Geometrie betrachtet die geometrischen Gebilde an sich; die analytische Geometrie bezieht sie auf ein Coordinatensystem. Die wesentlichen Eigenschaften des Gebildes aber, an sich betrachtet, müssen von dem beliebigen zu Grunde gelegten Coordinatensystem unabhängig sein. Wenn wir uns auf die allgemeineren Eigenschaften beschränken, welche die neuere Geometrie vorzugsweise untersucht, die projektivischen, so sind dieselben nicht nur von dem Coordinatensystem unabhängig, sondern sie bleiben auch durch Projektion ungeändert und finden sich in dem perspektivischen Bilde wieder. Es entsteht mithin die Frage: wenn die Gleichung eines Gebildes z. B. einer Curve gegeben ist, wie können aus den Coefficienten der Gleichung Relationen gebildet werden, welche projektivische Eigenschaften derselben bestimmen, oder allgemeiner die zweite Frage: wie können aus der Gleichung der Curve Gleichungen anderer Gebilde abgeleitet werden, welche zu der Curve in solcher „invarianter“ Beziehung stehen, dass dieselbe durch Projektion nicht zerstört wird. Dieses Problem, dessen Behandlung die Theorie der Determinanten als nothwendiges Hülfsmittel voraussetzt, wurde zuerst von Cayley 1845, also zu derselben Zeit, in welcher Hesse seine Determinante entdeckte, in Angriff genommen und führte zur Gründung der „Theorie der Invarianten,“ welche zumeist den englischen Gelehrten Cayley, Sylvester, Salmon und den deutschen Aronhold, Clebsch, Gordan ihre weitere Entwicklung verdankt. So entstand aus der Determinantentheorie die sogenannte „moderne Algebra.“

Hesse's Name ist nun mit der Gründung der Invarianten-Theorie enge verknüpft. Denn seine Determinante steht in einer solchen invarianten Beziehung zu der Form, aus welcher sie abgeleitet ist und darauf beruht ihre grosse Bedeutung in der modernen Algebra sowie in der Theorie der Curven und Flächen.

Hesse zeigte, dass durch seine Determinante zu jeder Curve eine neue Curve gegeben ist, jetzt die „Hesse'sche Curve“ genannt, welche aus der ersteren die sämmtlichen Wendepunkte, und nur diese, ausschneidet, und ebenso zu jeder algebraischen Fläche eine andere Fläche durch seine Determinante bestimmt wird, welche die Wendepunkte der Fläche (die sog. parabolischen Punkte) ausschneidet. Hiemit verificirte er analytisch die von Plücker gegebene Anzahl der Wendepunkte einer Curve und bestimmte den Grad der sogenannten parabolischen Curve der Fläche.[20])

Zunächst verwerthete Hesse seine Entdeckung für die Theorie der Curven 3. Ordnung, welche 9 Wendepunkte haben, und findet hier den schönen Satz: „Alle Curven 3. Ordnung, welche durch die 9 Wendepunkte einer beliebigen Curve 3. Ordnung gehen, schneiden sich gegenseitig in ihren Wendepunkten," worin die geometrische Deutung einer merkwürdigen analytischen Eigenschaft der Hesse'schen Determinante dieser Curven ausgesprochen ist.[21]) Ueberhaupt verdankt ihm die Theorie der Curven 3. Ordnung, die er in mehreren Abhandlungen verfolgt, viele ihrer wichtigsten Sätze.[22])

Hesse's Untersuchungen über die Curven 3. Ordnung sind aber auch dadurch berühmt geworden, dass sie das erste Beispiel gaben einer neuen Gattung höherer Gleichungen, die zu den algebraisch auflösbaren gehört.

Abel hatte zuerst nachgewiesen, dass Gleichungen von höherem Grade als dem vierten im Allgemeinen nicht durch Wurzelgrössen auflösbar sind. Aber seine Untersuchungen führten ihn, indem er die Methode erweiterte, welche Gauss in seinen Disquisitiones arithmeticae auf die Kreistheilungsgleichungen angewandt hatte, auf eine grosse Classe von Gleichungen, welche algebraisch lösbar sind. Die Gleichung, welche Hesse behandelt, ist die Gleichung 9ten Grads, auf welche die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve 3. Ordnung führt.[23]) Sie ist in ihren Eigenschaften wesentlich von den Abel'schen Gleichungen verschieden. Der Grund ihrer Auflösbarkeit beruht auf einer besondern Lage der Wendepunkte dieser Curven zu einander. Wie schon Maclaurin[24]) gefunden schneidet jede Gerade, welche die Curve in zwei Wendepunkten trifft, dieselbe noch in einem dritten. Ferner hat Plücker[25]) nachgewiesen, dass man auf vier verschiedene Weisen drei Gerade durch die 9 Wendepunkte legen könne. Wie Hesse nun jedes analytische Resultat für die Geometrie zu verwerthen wusste, so ersah er auch sofort den Vortheil, welchen man aus diesen geometrischen Sätzen für die Algebra ziehen könne. Er zeigte, dass daraus gewisse Relationen zwischen den Wurzeln bedingt sind, welche die Auflösung der Gleichung ermöglichen und dass überhaupt die Auflösung jeder Gleichung 9. Grads, deren Wurzeln auf dieselbe Weise von einander abhängig sind, auf die Auflösung einer Gleichung 4. Grads und dreier Gleichungen 3. Grads zurückgeführt werden kann.

Mit dieser Arbeit Hesse's ist ein neuer Weg eingeschlagen worden, und es hat seitdem die Geometrie mehrere bemerkenswerthe Beispiele von algebraisch lösbaren Gleichungen dargeboten.[26]) Seit der Entwicklung der Ideen von Galois,[27]) der zuerst die verborgenen Eigenschaften darlegte, in welchen der wesentliche Charakter jeder Gleichung besteht und durch welche die allenfallsige Auflösung einer Gleichung mittelst anderer Hülfsgleichungen bedingt ist, resumiren sich alle diese Fälle unter einen Gesichtspunkt und erscheinen als spezielle Fälle einer umfassenden, noch in der Ausbildung begriffenen, Theorie.

In mehreren folgenden Abhandlungen zeigt nun Hesse die vielfachen Anwendungen, die seine Determinante gestattet. So weist er nach, wie die Auflösungen der Gleichungen 3. Grads und 4. Grads mit einer Unbekannten ganz wesentlich auf den Eigenschaften der Determinante der Gleichung beruht.[28]) Er findet ferner den wichtigen Satz,[29]) dass das identische Verschwinden der Determinante der Gleichung einer Fläche oder einer Curve die Bedingung liefere, dass die Fläche eine Kegelfläche ist oder die Curve in eine Anzahl von Geraden zerfalle, die durch einen Punkt gehen.[30])

Ueberhaupt war diese Epoche von 1845 bis 1855 die eigentliche Sturm- und Drang-Periode Hesse's. Die grossen Erfolge, welche er erzielt hatte, erhöhen seinen Eifer und steigern gleichsam seine geistige Potenz. Es folgen sich die Abhandlungen Schlag auf Schlag, alle von hohem Interesse, viele eine wesentliche Bereicherung der Wissenschaft liefernd. Von welchem Drange und welcher Schaffelust er damals beseelt war, zeigt sein Briefwechsel aus dieser Epoche mit Jacobi, der seit 1844 nach Berlin übergesiedelt war (Journ. v. Crelle Bd. 40 [1850] S. 316).

„Ihr Brief ist mir von unschätzbarem Werthe, schreibt er an Jacobi, 27. Nov. 1849, weil ich daraus ihre alte Freundschaft entnehme und er mir zugleich das bringt, wonach ich mich lange gesehnt habe. Sie schreiben von meiner Meisterschaft in gewissen mathematischen Dingen und beweisen gleich darauf, wie viel mir daran fehlt. . . . . Ich bedaure nichts mehr, als dass 80 Meilen zwischen uns liegen, was mit einem halben Jahre gleichbedeutend ist. Im Sommer haben Sie den Beweis gemacht, der für mich vielleicht eine Lebensfrage ist und im Winter erst kann ich ihn erfahren."

Der Beweis Jacobi's, auf welchen Hesse in diesem Briefe anspielt, betrifft die Anzahl der Doppeltangenten einer algebraischen Curve. Ich habe bereits erwähnt, dass schon Poncelet auf die Doppeltangenten der Curven als wichtig für die Theorie derselben hingewiesen und dass Plücker die Anzahl derselben aus der Reciprocität der Curven erschlossen hatte. Aber der direkte analytische Nachweis dieser Anzahl wurde erst von Jacobi, nicht ohne grossen Aufwand analytischer Deduktionen, geleistet.[31]) Ueber die Lagerungsverhältnisse der Doppeltangenten, resp. ihrer Berührungspunkte, wusste man gar nichts, selbst bei den einfachsten Curven, welche Doppeltangenten haben, nämlich den Curven 4. Ordnung.[32]) Dieselben haben 28 Doppeltangenten mit 56 Berührungspunkten. Dieser Gegenstand hat seine besondere Schwierigkeiten und reizte eben desshalb das Interesse der Geometer. Hesse, Salmon, Steiner beschäftigten sich zu gleicher Zeit mit dieser Frage. Hesse hatte sich besonders auch viel mit dem Problem bemüht, die Curve 14. Ordnung zu bestimmen, welche aus der Curve 4. Ordnung die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten ausschneidet, ohne dass ihm der Versuch glücken wollte. Endlich kann er in einem folgenden Briefe vom 30. Dec. 1849 an Jacobi schreiben: „Für Ihre Mittheilung des Beweises der Doppeltangenten muss ich Ihnen auch in soferne dankbar sein, als ich mich dadurch aufgefordert fühlte, einen letzten Versuch zu machen, die Curve zu bestimmen, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung hindurchgeht. Der Versuch gelang . . ." und Hesse theilt ihm das Resultat mit. Ebenso hatte Hesse schon damals den Satz gefunden, dass die 56 Berührungspunkte der

Doppeltrangenten einer Curve 4. Ordnung auf 7 Kegelschnitten zu je 8 liegen, ein Satz, auf welchen Salmon wohl zu gleicher Zeit gekommen war.[33])

Die grosse Abhandlung Hesse's aber über die Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung erschien erst einige Jahre später (1855)[34]) zugleich mit einer Abhandlung von Steiner über denselben Gegenstand. Beide Arbeiten, die eine analytisch, die andere synthetisch, stimmen in vielen der erlangten Resultate überein und geben eine Fülle sehr merkwürdiger Sätze über Curven 3. und 2. Ordnung, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten gehen. Besonderes Interesse knüpft sich an Hesse's Analyse.[35]) Auf höchst geistreiche Weise verwerthet Hesse hiebei eine Raumfigur, die er in seinen frühern Arbeiten viel untersucht hatte, nämlich die 8 Punkte, in denen sich drei Flächen 2. Ordnung schneiden. Die 8 Punkte zu zweien durch eine Gerade verbunden liefern 28 Gerade, also gerade so viele als die Curve 4. Ordnung Doppeltangenten hat. Hesse zeigt, wie die Geraden dieser zwei Systeme einzeln entsprechend auf einander bezogen werden können und gewinnt auf diese Weise ein räumliches Bild der Doppeltangenten, vermittelst dessen es möglich wird die Gruppirung derselben je nach der Eigenthümlichkeit in der Lage ihrer Berührungspunkte zu übersehen.

Diese Abhandlung, eine der bedeutendsten Hesse's, schliesst die Königsberger Periode ab.

Mit diesen wissenschaftlichen Erfolgen Hesse's und dem Wachsen seines Rufs hatten seine äussern Verhältnisse nicht Schritt gehalten. Zu wiederholtem Male hatte die Fakultät Hesse zu einer ausserordentlichen Professur vorgeschlagen, aber ohne Erfolg. Indessen wurde durch den Abgang Jacobi's nach Berlin 1844 und den bald darauf erfolgten Tod Bessel's der Verbleib Hesse's an der Universität noch wichtiger. Die Aufgabe Jacobi zu ersetzen fiel zunächst dem ältern Richelot zu, der zugleich die Leitung des mathematischen Seminars übernahm. Aber wenn auch nach Abgang Jacobi's die mathematischen Fächer in den verschiedenen Richtungen vorzüglich vertreten waren, so gebührt Hesse hieran ein hervorragender Antheil. Dass derselbe auch als Lehrer sich bewährte, zeigen die Arbeiten seiner Schüler aus der Königsberger Zeit, unter welchen ich nur Durège, Carl Neumann, Alfred Clebsch, Kirchhoff nenne, und es mag hier erwähnt sein, dass 1853 bei Gelegenheit einer Unterredung mit dem Minister v. Raumer Hesse die Genugthuung hatte, eine Reihe selbstständiger Arbeiten seines Schülers Alfred Clebsch, welche derselbe an seine Vorträge anknüpfend verfertigt hatte, vorlegen zu können, ebenso wohl als Zeichen des Erfolgs seiner Lehrthätigkeit, wie als Beweis der aussergewöhnlichen Begabung seines Schülers.

Endlich im Herbst 1845 erhielt Hesse sein Bestallungsdekret als ausserordentlicher Professor, aber mit dem unliebsamen Beisatz: „da keine Mittel vorhanden, vorläufig ohne Gehalt." Diess war ein harter Schlag für Hesse. Denn derselbe hatte schon bei Beginn seiner akademischen Laufbahn sich mit Fräulein Dulk, Tochter des Professors der Chemie an der Königsberger Universität, vermählt und hatte nun für Frau und Kinder zu sorgen. Diese Rücksicht gab ihm den Gedanken ein, die Universität zu verlassen und sich nach einer einträglicheren Stellung umzusehen. In dieser erregten Stimmung wandte er sich brieflich an Jacobi, um dessen Ansicht hierüber zu erholen. Jacobi lehnte es zwar ab, einen Rath zu ertheilen, da ihm die vollständige Kenntniss der Verhältnisse abgehe; doch hielt dieser Briefwechsel Hesse von einem übereilten Schritte ab.

Das Jahr darauf wurde Hesse zwar ein Gehalt zuerkannt; derselbe war aber so unbedeutend, dass der Wunsch Hesse's an einer andern Universität eine vortheilhaftere Stellung zu gewinnen, sehr erklärlich schien. Diese Hoffnung sollte indessen noch nicht sobald erfüllt werden.

Als 1850 eine Professur für Mathematik an der Dorpater Universität erledigt war, wurde Hesse von dem Concilium primo loco für diese Stelle vorgeschlagen. Aber die politischen Verhältnisse waren ungünstig. Seine dortigen Freunde hatten ihm schon vorher angedeutet, dass, wenn er auch gewählt werde, die Bestätigung der

Wahl höchst zweifelhaft sei, indem man gegenwärtig Anstand nehme, einen Ausländer, zumal einen deutschen Gelehrten zu berufen. Und so kam es auch; aber erst nachdem Hesse ein volles Jahr auf die Entscheidung geharrt hatte, erhielt er (1851) die Nachricht, dass eine Hoffnung für seine Berufung nicht mehr bestehe.

Nicht mehr Glück hatte Hesse bei andern Anlässen und Unterhandlungen. Zehn Jahre hatte er als ausserordentlicher Professor an der Universität Königsberg ausgeharrt, als er endlich nach Abgang Joachimsthal's von der Universität Halle als ordentlicher Professor in Vorschlag gebracht und als solcher von dem damaligen Minister v. Raumer bestätigt wurde.

Im Herbst 1855 bezog Hesse die Universität Halle. Aber sein dortiger Aufenthalt dauerte nur ein Semester. Denn schon im April des nächsten Jahres (1856) erhielt er einen höchst ehrenvollen Ruf an die Universität Heidelberg, den er auch nach kurzer Unterhandlung annahm. Als von Seiten der Universität Halle Schritte gethan wurden, den Verlust abzuwenden, war die Angelegenheit schon zum Abschluss gelangt.

Der Aufenthalt Hesse's in Heidelberg währte bis 1868. Diese Periode seines Lebens war, wie Hesse später öfters erwähnte, die glücklichste seines Lebens. Er erinnerte sich gerne der heitern Stunden, die er daselbst mit seinem frühern Schüler Kirchhoff und andern hervorragenden Männern zugebracht hat. Auch sein Studium wurde ein anderes. Er ruhte nicht aus, aber er arbeitete nicht mehr mit der Hast, wie in der Königsberger Periode. Er durchgieng seine früheren Arbeiten, ergänzte, verbesserte, fasste andere zusammen und so entstand das bedeutendste Werk dieser Periode, die „Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raums, insbesondere über Oberflächen 2. Ordnung," welche 1861 erschienen. Bei der Verallgemeinerung, welche die Geometrie erfahren, und der Vervielfältigung ihrer Methoden kann ein Lehrbuch der analytischen Geometrie heutzutage, abgesehen von den Grenzen, die demselben gesteckt werden, auf sehr verschiedene Weise abgefasst werden. Man kann die räumliche Anschauung mehr oder weniger zu Hülfe nehmen und die durch sie gewonnene Lösung in die analytische Form kleiden; man kann hiebei an den verschiedenen Problemen die verschiedenen geometrischen Methoden und Auffassungen zeigen, mittelst welcher sie gelöst werden können. Bei Hesse's Lehrbuch tritt die geometrische Anschauung sehr zurück. Hesse hat in seinem Lehrbuch ganz den algebraischen Standpunkt festgehalten; jedes geometrische Problem führt er sofort auf ein algebraisches Problem zurück. Durch consequente Festhaltung dieses Standpunkts, durch die feste Gliederung des Stoffs und die Eleganz in der analytischen Behandlung erscheint das Werk nicht nur wie aus einem Gusse hervorgegangen, sondern fesselt auch die Leser durch ein gewisses, ich möchte sagen, ästhetisches Interesse. Das Werk ist daher auch bei Lehrern und Lernenden gleich hoch geschätzt und hat weit über die Grenzen Deutschlands hinaus Verbreitung gefunden.[36]) Einige Jahre später liess er ein kleineres Werkchen „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Geraden, des Punkts und des Kreises in der Ebene“ folgen, welches, obwohl elementarer, doch mit dem grössern Werke die Vorzüge gemein hat.

Die meisten Arbeiten, welche Hesse ausserdem in dieser Periode publicirte, sind theils Vorstudien zu diesen Werken, theils weitere Ausführungen einzelner Theile derselben. Jedoch sind noch zwei Arbeiten aus dieser Epoche hervorzuheben, die eine eine grössere Abhandlung „über die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale“[37]) vom Jahre 1857 und eine andere vom Jahre 1866 „ein Uebertragungsprincip“ betitelt. Ich gehe hier nur auf das letztere mit einigen Worten ein.

Wenn wir ein ebenes Gebilde auf eine andere Ebene projiciren, so übertragen sich gewisse Eigenschaften der ersten Figur, nämlich ihre projektivischen Eigenschaften, auf die zweite Figur. In ähnlicher Weise aber können wir, indem wir von einem festen Punkt einer Kugel aus die andern Punkte derselben projiciren, Figuren, auf einer Kugel verzeichnet, auf einer Ebene abbilden, und aus den Eigenschaften der ersteren auf die der so erhaltenen ebenen Figuren schliessen, wie das bei der stereographischen Kartenprojektion der Fall ist. So stellen sich neben die projektivische Geometrie andere geometrische Methoden, welchen andere Uebertragungsprincipien zu Grunde liegen, durch welche Figuren, auf Flächen verzeichnet, auf andere Flächen oder räumliche Gebilde in andere räumliche Gebilden übertragen werden. Doch möchte es zunächst als unmöglich erscheinen, Figuren einer Ebene auf eine gerade Linie zu übertragen, indem eine Ebene als eine Ausdehnung von zwei Dimensionen eine zweifach so grosse Mannigfaltigkeit von Punkten enthält, als eine Gerade. Die Möglichkeit der Uebertragung leuchtet aber sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Ebene ebensoviele Punkte besitzt, als sich die Punkte einer Geraden in Punktpaare zusammenfassen lassen. Man kann mithin, wie Hesse gethan, ein Uebertragungsprincip aufstellen, nach welchem jedem Punkt der Ebene ein bestimmtes Punktpaar der Geraden entspricht. Diess ist das sogenannte Hesse'sche Uebertragungsprincip. „Mit der Lösung der Aufgabe, sagt Hesse, kann man die breitere Basis der Ebene verlassen und sich auf eine gerade Linie beschränken, ohne die Herrschaft über die Ebene aufzugeben.“[38])

1868 wurde Hesse nach München berufen an die neuerrichtete technische Hochschule. Die Verhältnisse, in welche er in Bezug auf seine Lehrthätigkeit hiemit versetzt wurde, waren von den früheren wesentlich verschieden. Das in grossartigem Maassstabe errichtete Institut versammelte von seiner Entstehung an eine ungewöhnlich grosse Anzahl von Schülern. Während Hesse früher vor einem kleinen, mathematisch gebildeten, Kreise über selbstgewählte Themate vortrug, hatte er nun vor einem grossen Publikum mit sehr verschiedener Vorbildung vorgeschriebene Vorlesungen zu halten. Die literarischen Arbeiten dieser Zeit sind daher auch vorzugsweise für das Bedürfniss dieses Zuhörerkreises berechnet. Man durfte hoffen, dass nach Ueberwindung dieses Uebergangsstadiums Hesse sich wieder grössern Arbeiten zuwenden werde. Indessen bald zeigte sich, dass seine physische Kraft gebrochen war. Wenn man freilich den grossen und starken Mann durch die Strassen Münchens wandeln sah, den weiten Mantel um die Schulter geschlagen und den breitkrämpigen Hut tief in die Stirne gedrückt, so konnte man kaum glauben, dass er an einem ernsten Uebel leide. Bis in seine letzte Zeit war er in geselliger Unterhaltung heiter und voll Humor. Gleichwohl klagte er in den letzten Jahren öfters über seine Gesundheit und die schnelle Entwicklung, die das Uebel, ein Leberleiden, zuletzt genommen, zeigte, dass dasselbe schon lange Zeit vorbereitet war. Im Sommer 1874 musste er seine Vorlesungen unterbrechen um in Karlsbad Heilung zu suchen. Die Hoffnung auf die Wirkung des Bades erwies sich als trügerisch; denn er kehrte dem Tode nahe von Karlsbad zurück. Am 4. August 1874 verschied er im Kreise seiner Familie. Welch liebevoller Vater er seinen Kindern gewesen, bezeugte noch sein letzter Wunsch, in Heidelberg an der Seite seines Kindes begraben zu werden, das ihm im Jahre 1861 vorausgegangen war.

Wenn Hesse auch mühsam sich emporarbeiten musste, die Anerkennung seiner wissenschaftlichen Leistungen hat ihm nicht gefehlt. Er war correspondirendes Mitglied der Akademien zu Berlin und Göttingen und 1869 in die hiesige Akademie aufgenommen worden. Die Londner mathematische Societät ernannte ihn zu ihrem auswärtigen Mitgliede „in Anbetracht der eminenten Dienste die er der Mathematik geleistet." Mit den bedeutendsten Gelehrten des In- und Auslands stand er in wissenschaftlichem Verkehr. Die zwei ausgezeichneten Männer, denen er zeitweise am nächsten gestanden, sein Lehrer Jacobi und sein früherer Schüler Clebsch, der recht eigentlich in die wissenschaftlichen Geleise Hesse's eingetreten war und in denselben so Ausserordentliches geleistet hat, sie waren ihm beide im Tode vorangegangen; Jacobi lange vorher 1851, Clebsch zwei Jahre vorher 1872. Zwischen diesen beiden Männern wird Hesse immer als würdiges Mittelglied seinen Platz in der Geschichte der Wissenschaft behaupten.

Anmerkungen.

1) Die ersten öffentlichen Vorträge über die Géometrie descriptive hielt Monge 1794. — Neben Monge ist noch Carnot zu nennen, dessen Géometrie de Position 1806 und Theorie der Transversalen 1808 erschien. In letzterer fand er mehrere schon von den Alten, sowie von Désargues u. A. gefundene fundamentale Sätze wieder auf, fügte neue derselben Art hinzu und zeigte, welch' bedeutender Ausdehnung dieselben fähig sind. Diese Sätze betreffen projectivische Eigenschaften der Figuren und sind desshalb von Wichtigkeit für die Entwicklung der neuen Geometrie geworden, wie aus Poncelet's Traité des Propr. proj. d. fig. zu ersehen.

2) Die zwei deutschen Gelehrten Plücker und Möbius waren kurze Zeit darauf selbstständig auf dieses Princip gekommen, s. Plücker Anal. Geom. Entw. 1828 und Möbius barycentrischer Calcul. 1827.

3) Ausser Steiner ist hier noch Möbius anzuführen, der in seinem baryc. Calc. 1827 zuerst eine vollständige Darlegung des Doppelverhältnisses (Möbius nennt es „Doppelschnittverhältniss"), der Verwandtschaft der Collineation und Reciprocität gegeben. Auch hat derselbe (J. Crelle Bd. 10. 1833) zuerst die besondere Art von Reciprocität betrachtet, die jetzt nach Staudt „Nullsystem" genannt wird.

4) Aperçu historique sur l'origine et le développement des methodes en Géometrie, particulièrement de celles, qui se rapportent à la Géometrie moderne 1837 und Géometrie supérieure 1852. Viele seiner Arbeiten fallen vor 1830. Ihm verdankt man besonders die Hereinziehung der nichtprojektivischen Eigenschaften der Figuren in die projektivische Geometrie mittelst des unendlich entfernten imaginären Kugelkreises.

5) „Ueber Curven 3. Ordnung". J. Crelle Bd. 34 S. 332. „Von Monge habe ich gelernt" sagt Plücker.

6) „Ueber ein neues Coordinatensystem". J. Crelle Bd. 5 (1830).

7) Analytisch-geometrische Entwicklungen. Th. II 1831.

8) „Es ist eine der schönsten Erweiterungen der neuen Geometrie, dass wir vermöge dieser dualen Auffassung der Gebilde, uns einmal eine Curve durch die Bewegung eines Punktes, das andere Mal durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben denken. Im ersten Falle brauchen wir um zu dem Begriff einer Curve zu gelangen durchaus nicht den Begriff einer geraden Linie, das andere Mal brauchen wir hiezu durchaus nicht den Begriff eines Punkts.“ Plücker, Alg. Curven. 1839. S. 206 Anm.

Uebrigens gebührt auch Möbius ein wesentliches Verdienst an der Entdeckung der homogenen Coordinaten und der Coordinaten einer Geraden. Die Bemerkung, dass dreien Punkten A, B, C immer solche Gewichte α, β, γ beigelegt werden können, dass irgend ein vierter Punkt M ihrer Ebene Schwerpunkt wird, führte Möbius in seinem baryc. Calcul. (1827) unmittelbar zu einer neuen Bestimmung der Lage eines Punkts in der Ebene. Möbius schreibt:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = M$$

Man sieht, dass diese Bezeichnung nur durch die Verquickung mit den statischen Begriffen von der Gleichung des Punkts in Liniencoordinaten A, B, C $\alpha A + \beta B + \gamma C = o$ verschieden ist. Möbius hat somit das Verdienst zu gleicher Zeit den Anstoss zu der Einführung der Liniencoordinaten und auch des homogenen Coordinatensystems gegeben zu haben.

9) „Additions to the article, On a new Class of Theorems etc.“ Philos. Mag. Bd. 37 3th Series (1850) S. 363.

10) Introductio in Analysin Infinitorum. Th. II. Anhang. 1748. Nach Chasles „Aperçu hist.“ kannten die Alten von den Flächen 2. Ordnung ausser Cylinder und Kegel nur die durch Umdrehung der Ellipse und der Parabel um ihre Axe erzeugten Flächen.

11) Dieser Schule verdankt man erst die Theorie der Kreisschnitte dieser Flächen, sowie die doppelte Erzeugung des allgemeinen (Nicht-Rotations-) Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids durch eine bewegliche Gerade. (Für das Rotationshyperboloid ist diese Erzeugungsweise schon von Wren 1669 gefunden worden, nach Chasles' Aperçu hist. S. 239 (Anm.) der Uebers.)

12) Journ. Crelle Bd. 24 (1842) S. 36. Diese Aufgabe ist seitdem vielfach gelöst worden. Wie die hinterlassenen Manuscripte Steiner's ergaben, hatte auch Steiner schon 1836 zwei Lösungen der Aufgabe gefunden, aber dieselben wohl desshalb nicht publicirt, weil sie nicht einfach genug und nicht linear waren. Eine dieser Lösungen ist von C. F. Geiser in vereinfachter Form im Journ. v. Crelle-Borchardt Bd. 68 S. 191 mitgetheilt worden.

13) J. Crelle Bd. 20 S. 285; Bd. 26 S. 147; Bd. 73 S. 371; Bd. 85 S. 304, letztere Arbeit aus den hinterlassenen Papieren von Gundelfinger mitgetheilt.

14) Hesse gibt hier die bekannten Sätze: „Sind zwei Paar gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits conjugirte Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt, so gilt dasselbe von dem 3. Paar."

„Zwei Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen auf einem andern Kegelschnitt" und dazu den analogen Satz im Raum: „Zwei Polartetraeder einer Fläche 2. Ordnung sind so gelegen, dass alle Oberflächen 2. Ordnung durch 7 ihrer Ecken gehend auch durch den 8^{ten} gehen." Mittelst dieses Satzes gelingt Hesse die Construction des 8^{ten} Schnittpunkts dreier Flächen 2. Ordnung aus den 7 andern.

In einem spätern Aufsatze (J. Crelle Bd. 26 S. 147) gibt Hesse noch eine andere Lösung der Aufgabe auf rein synthetischem Wege, durch Construction von Sechsecken auf einem Hyperboloid.

15) Leibnitz mathem. Schriften, herausgegeben von C. L. Gerhardt. I. Abth. Bd. 2 S. 239.

16) De formatione et proprietatibus determinantium. J. Crelle Bd. 22 (1841) S. 285.

17) Philos. Mag. Vol. I. 4^{th} Ser. 1851. S. 295.

18) Das sogenannte dialytische Verfahren von Sylvester (Phil. Mag. 1840). Hesse war selbstständig darauf gekommen, ohne von der frühern Abhandlung Sylvester's Kenntniss zu haben. J. Crelle Bd. 27 (1844).

19) Die hier besprochene Abhandlung im 28. Bd. des J. Crelle (1844) S. 68 ist betitelt „Ueber die Elimination der Variablen aus drei alg. Gleichungen 2^{ten} Grads mit 2 Variablen." Die Sätze, mittelst welcher er die Elimination bewirkt, beruhen auf den Eigenschaften der Funktional- (Jacobi'schen) Determinante der drei Formen.

Weitere Anwendung dieser Sätze in allgemeinerer Form gibt Hesse im J. Crelle Bd. 41 (1850) S. 285 „Ueber die homogenen Funktionen 3. und 4. Ordnung zwischen 3 Variablen."

20) Hesse bestimmt die Anzahl der Wendepunkte einer Curve, indem er von dem Krümmungshalbmesser ausgeht und nachweist, wie bei algebraischen Curven durch Einführung homogener Coordinaten im Nenner eine Reduktion um zwei Einheiten im Grade eintritt. In ähnlicher Weise tritt eine Reduktion von zwei Einheiten im Grade in dem Produkt der zwei Hauptkrümmungsradien einer Fläche ein, und dadurch entsprechende Reduktion im Grade der parabolischen Curve. J. Crelle Bd. 28 (1844) S. 97.

21) Der geometrische Satz folgt aus der von Hesse gefundenen Eigenschaft der Determinante H einer cubischen Form f, dass die Determinante der Form $\lambda f + \mu H$ sich wieder in derselben Form nur mit andern Constanten λ, μ ergibt. Dieser fundamentale Satz der ternären cubischen Formen diente ihm eben zur Reduction der cubischen Form auf die canonische Form in der vorhergehenden Abhandlung „Ueber die Elimination etc.“

22) Ausser der schon angeführten Abh. J. Crelle Bd. 28 S. 97 siehe ebendas. Bd. 36 S. 143; Bd. 38 (1849) S. 241 und S. 257. Unter anderm betrachtet Hesse auch zuerst die Curve 3. Classe, welche von den Verbindungslinien zweier conjugirter Punkte der Hesse'schen Curve umhüllt wird und nun die Cayley'sche Curve genannt wird (Bd. 38 S. 241).

23) „Allgemeine Auflösung des 9^{ten} Grads etc.“ J. Crelle Bd. 34 (1847) S. 193. Ueber die Auflösung dieser Gleichung Hesse's siehe auch Aronhold „Zur Theorie der homogenen Funktionen 3^{ten} Grads von 3 Variabeln.“ J. Crelle Bd. 39 S. 140; ferner Clebsch, Theorie der binären Formen S. 234, und Camille Jordan, Traité des Substitutions p. 302.

24) De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus. London, 1748.

25) System der analytischen Geometrie. S. 284.

26) Hesse selbst hat noch zwei Beispiele solcher auflösbarer „geometrischer“ Gleichungen gegeben; die eine ist die Gleichung 6^{ten} Grads, welche die Auflösung einer biquadratischen Gleichung vermittelt, J. Crelle Bd. 41 (1850) S. 243 (s. hierüber auch Clebsch „Binäre Formen“ § 45); die andere diejenige Gleichung 6^{ten} Grads, deren Wurzeln sechs Punkte einer Involution auf einer Geraden darstellen. J. Crelle Bd. 41 S. 264.

27) Die Sätze von Galois, 1831 der Pariser Akademie vorgelegt, wurden erst 1846 im Journ. von Liouville T. XI veröffentlicht.

28) Im J. Crelle Bd. 38 (1849) S. 262 „Transformation einer beliebigen homogenen Function 3^{ten} Grads in 2 Variablen etc.“ zeigt Hesse, dass die Auflösung einer cubischen Gleichung wesentlich auf die Zerlegung der in diesem Falle quadratischen Determinante der cubischen Form in ihre Faktoren zurückkommt.

In der Abhandlung „Transformation einer beliebigen homogenen Funktion 4^{ten} Grads von zwei Variabeln etc.“ J. Crelle Bd. 41 (1850) S. 243 bemerkt Hesse, dass, wie bei der cubischen ternären Form, so auch bei der biquadratischen binären Form die Determinante von demselben Grad ist, wie die Form, aus der sie abgeleitet. Er weist nach, dass bei beiden Formen eine auffallende Analogie statt hat, indem, wenn f die biquadratische Form, H ihre Determinante ist, die

Determinante von $\lambda f + \mu H$ sich wieder in derselben Form ergibt, wie das bei der cubischen ternären Form statt hat; er zeigt, wie dadurch die Auflösung der biquadratischen Form vermittelt wird; er weist ferner die Auflösbarkeit der Gleichung $T = o$ nach, wenn T die Covariante 6^{ten} Grads von f ist und gibt deren geometrische Deutung (s. hierüber Clebsch, „Binäre Formen" §§ 44, 45 u. 51).

29) Hesse gibt den allgemeinen Satz: das identische Verschwinden der Determinante sei die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Funktion von n Variablen durch lineare Substitution auf eine homogene Funktion von weniger Variabeln sich zurückführen lasse. J. Crelle Bd. 42 (1851) S. 117. Er kam auf diesen Satz zurück, um ihn näher zu begründen, im J. Crelle Bd. 56 (1859) S. 263. Aber wie seitdem Max Nöther nachgewiesen hat, ist der Satz für mehr als 4 Variabeln nicht mehr allgemein richtig (Sitz.-Ber. der phys.-medic. Societät zu Erlangen 1876).

30) Auch die elegante Form, in welche Hesse die Gleichung der Schmiegungsebene einer Curve doppelter Krümmung bringt, welche der Schnitt zweier algebraischen Flächen ist, verdient hier noch erwähnt zu werden. Es zeigt sich hier, bei Anwendung homogener Coordinaten ebenfalls eine Reduktion im Grad in Bezug auf die Coordinaten des Berührungspunkts um zwei Einheiten. J. Crelle Bd. 41 (1850) S. 272.

31) J. Crelle Bd. 40 S. 237 „Beweis des Satzes etc."

32) Der von Plücker in seiner Theorie der algebraischen Curven (S. 231) gegebene Satz über Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung ist in seiner Allgemeinheit nicht gültig; und daher auch die Berechnung der Anzahl der Kegelschnitte, welche durch 8 Berührungspunkte gehen (S. 246), unrichtig.

33) Der Brief ist, J. Crelle Bd. 40 S. 260, als Anhang zu dem Aufsatz Jacobi's über die Anzahl der Doppeltangenten abgedruckt. Die Gleichung der Curve 14. Ordnung ist in dem Briefe gegeben. In Bd. 41 S. 285 „Ueber homogene Funktionen 3. und 4. Ordnung zwischen 3 Variabeln" wird sie abgeleitet. Hesse kommt auf die Gleichung der Curve 14. Ordnung zurück J. Crelle Bd. 52 (1856) S. 97. Dieselbe Curve, sowie die 7 Kegelschnitte durch die 56 Berührungspunkte hat wohl Salmon um dieselbe Zeit wie Hesse gefunden (A Treatise on higher plane curves, 1852 p. 89 u. 198.)

34) J. Crelle Bd. 49 (1855) S. 243 „Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven 4. Ordnung" und als Fortsetzung: S. 279 „Ueber die Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung." Die beiden Abhandlungen datiren vom Jahre 1853. Die Abhandlung Steiner's (ebendas. S. 265) enthält nur Sätze ohne Beweis. Hesse wurde durch diese Arbeit Steiner's

veranlasst, nochmals auf den Gegenstand zurückzukommen, um die Uebereinstimmung beider Arbeiten zu zeigen, J. Crelle Bd. 55 (1858) S. 83.

35) Hesse führt das Problem der Doppeltangenten auf die Transformation des gegebenen Ausdrucks 4. Ordnung von 3 Variabeln in die Form einer symmetrischen Determinante mit linearen Elementen zurück. Determinantenrelationen liefern ihm sodann Sätze über Berührungscurven 3[ten] und 2[ten] Grads. Die Doppeltangenten treten hierauf in diese Sätze als Theile zerfallener Berührungscurven ein.

In der zweiten Abhandlung geht er von den Kegeln aus, welche durch die 8 Punkte gehen, in denen sich drei Flächen 2. Ordnung schneiden. Die Parameter derselben genügen einer Determinantengleichung, die als allgemeine Curve 4. Ordnung in der Ebene angesehen werden kann. Dadurch ist die ebene Curve mit der Raumcurve 6. Ordnung, in welcher die Spitzen dieser Kegel liegen, in Beziehung gebracht. Hesse zeigt sodann, dass die Gerade, welche zwei der 8 Punkte verbindet, diese Curve in zwei Punkten trifft, welche den Berührungspunkten einer Doppeltangente der Curve 4. Ordnung entsprechen.

36) In seiner Geometrie des Raums sind besonders hervorzuheben: die 20. Vorl. über Transformation homogener Formen 2. Ordnung durch lineare Substitution, worin eine frühere Arbeit (J. Crelle Bd. 45 (1853) S. 93) aufgenommen ist; dann die 27. Vorl. die Bedingungen für Rotationsflächen enthaltend, wobei er an Jacobi'sche Relationen anknüpft und die Kummer'sche Zerlegung des verschwindenden Ausdrucks in eine Summe von Quadraten gibt (J. Crelle-Borch. Bd. 57 (1860) S. 175 und Bd. 60 (1862) S. 305); ebenso die 28. Vorl. die Zerlegung der Bedingungsgleichung für Kreisschnitte enthaltend; endlich die 22. Vorl., worin Hesse an dem beim Hauptaxenproblem auftretenden Formeln passende Veränderungen anbringt und dadurch gewisse Differentialausdrücke der rechtwinkligen Coordinaten in solche der elliptischen Coordinaten überführt. Die Integration der Differentialgleichungen für die Krümmungscurven und geodätischen Linien auf Flächen 2. Ordnung wird hiedurch wesentlich vereinfacht. Aehnliche Uebertragung auf das Problem der Axen eines Schnitts angewandt, s. Gundelfinger, J. Crelle-Borch. Bd. 85 (1878) S. 80.

37) J. Crelle-Borch. Bd. 54 (1857) S. 227. Damit wirkliches Maximum oder Minimum stattfinde, darf die 2. Variation des Integrals nicht verschwinden. Diese Untersuchung führt auf neue Differentialgleichungen, deren Integration jedoch aus der der Differentialgleichungen der 1. Variation abgeleitet werden kann, wie Jacobi in einer berühmten Abhandlung (J. Crelle Bd. 17) gezeigt hat. Hesse versucht die eigentliche Quelle aufzudecken, aus der Jacobi seine Resultate schöpfte; und sodann die Jacobi'sche Transformation der 2. Variation auf die Spitzer'sche (Sitz.-Ber. der Wiener Ak. 1854 S. 1014) zurückzuführen. Be-

sondere Schwierigkeiten macht hiebei die nöthige Beschränkung überzähliger Constanten, welche in die Form eingehen und durch Bedingungsgleichungen an einander gebunden sind.

Bei der Analyse kommen besonders die Eigenschaften der homogenen Funktionen 2ten Grads und die Theorie der Determinanten zur Verwendung und die Gewandtheit, welche Hesse in diesen Theorien besass, mag ihn wohl hauptsächlich veranlasst haben, dieses Problem in Angriff zu nehmen.

38) Die Uebertragung wird bewerkstelligt mittelst eines festen in der Ebene angenommenen Kegelschnitts. Unter Zugrundelegung eines festen Kegelschnitts lässt sich mithin die projektivische Geometrie der Ebene auf die Geometrie der Punkte einer Geraden zurückführen, d. h. auf die Theorie der binären Formen (siehe F. Klein „Vergleichende Betrachtungen der neuern geom. Forschung" (1872) S. 17, § 5).

39) Hiezu gehören ein elementares Werkchen über „Determinanten," sowie einzelne „Vorlesungen über die analytische Geometrie der Kegelschnitte," wodurch er die früher erschienenen Vorlesungen über die analytische Geometrie der Ebene ergänzen wollte. Von andern Arbeiten der Münchner Periode führe ich nur an „Ein Cyclus von Determinantengleichungen (eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorems)" in d. Abh. d. Münchner Ak. Bd. XI 1. Abth. 1871. S. 175. Das Pascal'sche Theorem hatte Hesse viel beschäftigt, schon in der Königsberger Periode (J. Crelle Bd. 41 (1850) S. 269) und besonders in Heidelberg (analytische Geom. der Ebene, 12. Vorl.). Es handelt sich in diesen Arbeiten wesentlich um die besondere Lage, welche die 15 Plücker'schen Geraden und die 20 Steiner'schen Punkte darbieten; Hesse hat diese Figur in höchst eleganter Weise durch ein System analytischer Relationen dargestellt. In seinem „Cyclus von Determinanten-Gleichungen" betrachtet er geränderte Determinanten, welche ein ähnliches System von Relationen erfüllen.

Um die Erklärung der Reciprocität, welche die vollständige Figur des Hexagramm's beherrscht, hat sich Hesse in Heidelberg vergeblich bemüht (J. Crelle-Borch. Bd. 68 (1868) S. 193 „Ueber die Reciprocität etc.") Siehe hierüber meine Abhandlung „Ueber das Pascal'sche Theorem" in den Abh. d. k. b. Ak. d. W. II. Cl. XI. Bd. III. Abth. 1874.

Liste der Publikationen.

A. Im Crelle-Borchardt'schen Journal.

Bd. 18 (1838) S. 101. Ueber Oberflächen 2. Ordnung.

Bd. 20 (1840) S. 285. De curvis et superficiebus secundi ordinis.

Bd. 24 (1842) S. 36. Ueber die Construction der Oberflächen 2. Ordnung, von welchen beliebige 9 Punkte gegeben sind.

" " S. 40. Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid.

Bd. 25 (1843) S. 171. De integratione aequationis differentialis partialis

$$A_1 - A_2 \frac{dx_1}{dx_2} - A_3 \frac{dx_1}{dx_3} - \cdots - A_{n-1} \frac{dx_1}{dx_{n-1}}$$

$$+ A_n \left(x_2 \frac{dx_1}{dx_2} + x_3 \frac{dx_1}{dx_3} \cdots + x_{n-1} \frac{dx_1}{dx_{n-1}} - x_1\right\} = o,$$

designantibus $A_1 \ldots A_n$ functiones quaslibet variabilium $x_1 \ldots x_{n-1}$ lineares.

Bd. 26 (1843) S. 147. Ueber die lineare Construction des 8ten Schnittpunkts dreier Oberflächen 2. Ordnung, wenn 7 Schnittpunkte derselben gegeben sind.

Bd. 27 (1844) S. 1. Ueber die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variablen aus zwei alg. Gleichungen hervorgeht, und Bestimmung ihres Grads.

Bd. 28 (1844) S. 68. Ueber die Elimination der Var. aus drei alg. Gleichungen vom 2ten Grad mit zwei Veränderlichen.

" " S. 97. Ueber die Wendepunkte der Curve 3. Ordnung (Fortsetzung der vorigen Abh).

Bd. 34 (1847) S. 193. Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9^{ten} Grads, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rat. symmetrische Funktion $\Theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln eine 3^{te} Wurzel $x_\varkappa$ gibt, so dass gleichzeitig

$$x_\varkappa = \Theta(x_\lambda, x_\mu),\ x_\lambda = \Theta(x_\mu, x_\varkappa),\ x_\mu = \Theta(x_\varkappa, x_\lambda).$$

Bd. 36 (1848) S. 143. Ueber Curven 3. Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren. (Forts. der Abh. im 28. Bd.).

Bd. 38 (1849) S. 241. Ueber Curven 3. Ordnung und 3. Classe.

" " S. 257. Eigenschaften der Wendepunkte der Curven 3. Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven 3. Classe.

" " S. 262. Transformation einer beliebigen hom. Funktion 3^{ten} Grads von zwei Var. durch lineare Substitution in eine Form, welche nur die 3^{ten} Potenzen der neuen Var. enthält.

Bd. 40 (1850) S. 316. Auszug zweier Briefe von Hesse an Jacobi und eines von Jacobi an Hesse.

" " S. 260. Brief von Hesse an Jacobi vom 30. December 1849, als Anhang zu der Abh. von Jacobi über die Anzahl der Doppeltangenten.

Bd. 41 (1850) S. 243. Transformation einer beliebigen gegebenen hom. Funktion 4^{ten} Grads von zwei Var. durch lineare Substitution in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Var. enthält.

" " S. 264. Algebraische Auflösung derjenigen Gleichung 6^{ten} Grads zwischen deren Wurzeln $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ die Bedingungsgleichung

$$(x_1 - y_2)(x_2 - y_3)(x_3 - y_1) + (y_1 - x_2)(y_2 - x_3)(y_3 - x_1) = 0$$

stattfindet.

" " S. 269. Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem.

" " S. 272. Ueber die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven und der Schmiegungsebenen der Curven doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier alg. Oberflächen entstehen.

" " S. 285. Ueber die homogenen Funktionen 3. und 4. Ordnung zwischen 3 Var.

Bd. 42 (1851) S. 117. Ueber die Bedingung, unter welcher eine hom. ganze Funktion von n unabhängigen Var. durch lineare Substitution von n andern unabhängigen Var. auf eine hom. Funktion sich zurückführen lässt, die eine Var. weniger enthält.

Bd. 45 (1853) S. 93. Ueber die Eigenschaften der linearen Substitution, durch welche eine hom. ganze Funktion 2^{ten} Grads, welche nur die Quadrate von 4 Var. enthält, in eine Funktion von derselben Form transformirt wird.

Bd. 49 (1855) S. 243. Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven 4. Ordnung.

„ „ S. 279. Ueber die Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung.

Bd. 52 (1856) S. 97. Transformation der Gleichung der Curve 14. Ordnung, welche eine gegebene Curve 4^{ten} Grads in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneidet.

Bd. 54 (1857) S. 227. Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

Bd. 55 (1858) S. 83. Zu den Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung.

Bd. 56 (1859) S. 263. Zur Theorie der ganzen homogenen Funktionen.

Bd. 57 (1860) S. 175. Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche eine gegebene hom. Funktion 2^{ten} Grads in andere transformiren, die nur die Quadrate der Var. enthält.

Bd. 60 (1862) S. 305. Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche 2. Ordnung liegenden Kegelschnitts in die Summe von Quadraten.

Bd. 62 (1863) S. 188. Cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. Chasles abhängt.

„ „ S. 199. Jacob Steiner.

Bd. 63 (1864) S. 179. Zur Involution.

„ „ S. 247. Transformationsformeln für rechtwinklige Coordinaten.

Bd. 65 (1866) S. 384. Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten.

Bd. 66 (1866) S. 15. Ein Uebertragungsprincip.

Bd. 68 (1868) S. 193. Ueber die Reciprocität der Pascal-Steiner'schen und Kirkman-Cayley-Salmon'schen Sätze vom Hexagrammum mysticum.

Bd. 69 (1868) S. 319. Ein Determinantensatz.

Bd. 73 (1871) S. 371. Note über die 8 Schnittpunkte dreier Oberflächen 2. Ordnung.

*Bd. 74 (1872) S. 97. Ueber das Problem der drei Körper.
*Bd. 75 (1873) S. 1. Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorems).

Die zwei letzten mit * bezeichneten Abhandlungen erschienen zuerst in den Abhandlungen der Münchner Akademie der Wissenschaften. —

Bd. 85 (1878) S. 304. Ueber Sechsecke im Raum, aus den hinterlassenen Papieren mitgetheilt von S. Gundelfinger.

B. In der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Jahrgang XI. S. 369. Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.
" XIX. S. 1. Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.
" XXI. S. 1. Fortsetzung der Vorlesungen im XIX. Jahrgang.
" XXI. S. 73. Eine Aufgabe.

Die Jahrgänge sind von 1856 an gezählt.

C. Abhandlungen der k. b. Akademie der Wissenschaften
(math.-phys. Classe).

Bd. XI. 1. Abth. (1871) S. 53. Ueber das Problem der drei Körper.
" " " S. 175. Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorems).
" 3. Abth. (1874) S. 1. Die Reciprocität von Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Sekante haben und den confocalen Kegelschnitten.

D. Selbstständige Werke.

Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raums. Leipzig 1861. 3. Aufl. rev. v. S. Gundelfinger 1876.
Analytische Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene. Leipzig 1865. 3. Aufl. rev. von S. Gundelfinger. 1881.
Die Determinanten. Leipzig 1871. 2. Aufl. 1872.
Die 4 Species. Leipzig 1872.