Bericht

über die

Königl. Polytechnische Schule zu München

für das Studienjahr

1874–1875.

MÜNCHEN
Akademische Buchdruckerei von F. Straub
1875.

Otto Hesse.

Am 4. August des vorigen Jahres starb nach längerer Krankheit Otto Hesse, seit 1868 Professor für Differential- und Integral-Rechnung, analytische Geometrie und Mechanik am hiesigen Polytechnikum, aber weit über die Kreise desselben hinaus gefeiert und verehrt als einer der hauptsächlichen Begründer der neueren analytischen Geometrie.

Ludwig Otto Hesse war den 22. April 1811 zu Königsberg geboren. Nachdem er das dortige Gymnasium absolvirt und sich, an der Universität, fünf Jahre lang mathematischen Studien hingegeben hatte (1832—37), übernahm er zunächst, ebendort, nach abgelegtem Oberlehrerexamen, eine mathematische Lehrstelle am Gymnasium, dann weiter den physikalischen und chemischen Unterricht an der Gewerbeschule. Erst dem bestimmenden Einflusse Jacobi's scheint es zuzuschreiben, dass er im Jahre 1840 promovirte und sich zugleich an der Universität Königsberg als Privatdocent niederliess. Seine Ernennung zum Professor extraordinarius daselbst erfolgte 1845; 1855 gelangte er als ordentlicher Professor nach Halle, 1856 nach Heidelberg, von wo er 1868 nach München übersiedelte.

Das sind die wenigen äusseren Erlebnisse, innerhalb deren sich die wissenschaftliche Entwickelung vollzog, deren Schilderung die Aufgabe der folgenden Zeilen ist.

Hesse's Stellung innerhalb der mathematischen Forschung ist im Allgemeinen einfach zu bezeichnen. Durch Monge und seine Schule hatte die Geometrie ein neues Leben gewonnen; es hatte Poncelet, dann weiter Steiner die sog. neuere synthetische Geometrie geschaffen; es hatten andererseits Moebius und besonders Plücker die analytische Geometrie umgestaltet. Aber die Methode der Letztgenannten war keine rein analytische, sofern bei ihnen die unmittelbare geometrische Anschauung vielfach die von der Analysis geforderten Eliminationen zu vertreten hatte. Und hier eben hat Hesse, als Schüler Jacobi's, eingegriffen: er hat gezeigt, dass die Probleme der neueren Geometrie als algebraische aufgefasst und mit algebraischen Mitteln durchgeführt werden können.

Die ersten Arbeiten*) Hesse's tragen noch nicht diesen bestimmten Charakter, sie bekunden den geschickten aber noch nicht den bahnbrechenden Geometer. Er behandelt Sätze und Constructionsaufgaben betreffend Gebilde zweiten Grades. Ihr Gegenstand ist grossentheils Poncelet entnommen; die analytischen Hülfsmittel sind noch ganz diejenigen Plücker's: die homogenen Coordinaten treten (wie es übrigens Hesse stets beibehielt) nur als formal von den gewöhnlichen verschieden auf, das Haupthülfsmittel zum Beweise ist das identische Umformen der Gleichungen, das Lesen in den Gleichungen, wie man es genannt hat. Noch fehlt das später immer angewandte Rechnungsinstrument, die Determinante. Dafür tritt das rein geometrische Interesse mehr in den Vordergrund. So entwickelt Hesse den Begriff der „conjugirten Puncte" bei Curven und Flächen zweiten Grades und untersucht die von verschiedenen derartigen Punctepaaren zusammengesetzten Figuren; so gibt er, der erste, eine Lösung der Aufgabe: aus neun Puncten einer Fläche zweiten Grades beliebig viele andere zu construiren, u. s. f.

Wenig später sehen wir Hesse mit rein algebraischen Fragen betr. Elimination beschäftigt. Er entdeckte die allerdings vorher schon von Sylvester gefundene „dialytische Methode" zur Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen beliebigen Grades. Er versuchte weiter, bei drei Gleichungen mit zwei Unbekannten ein ähnlich einfaches Resultat zu gewinnen. Diess gelang, auf eine durchaus neue Weise, wenn die Gleichungen als nur vom zweiten Grade vorausgesetzt wurden, wo sie denn geometrisch Kegelschnitte vorstellen. Hesse betrachtet die aus ihren ersten Differentialquotienten gebildete Determinante (die sog. Jacobi'sche Form), welche, gleich Null gesetzt, eine Curve dritter Ordnung repräsentirt. Sind die drei gegebenen Gleichungen mit einander verträglich, so verschwindet nicht nur diese Determinante, sondern es verschwinden auch ihre drei nach den homogenen Coordinaten genommenen Differentialquotienten, und man hat also sechs quadratische Gleichungen, aus denen man die linear vorkommenden Quadrate und Producte der Variabeln nach gewöhnlichen Regeln eliminiren kann.

War Hesse so von algebraischer Seite zur Betrachtung von Curven dritter Ordnung gekommen, so hatten dieselben auch rein geometrisch sein Interesse auf sich gezogen. Nachdem zuerst**) Poncelet eine Reihe merkwürdiger Theoreme über diese Curven aufgestellt, hatte Plücker dieselben einer eingehenden Discussion unterworfen und namentlich gezeigt, dass diese Curven neun Wendepunkte besitzen (von denen sechs imaginär), die in der merkwürdigen Weise angeordnet sind, dass sie zwölfmal zu drei auf einer Geraden liegen. Die Bestimmung dieser Wendepunkte erfolgte bei Plücker durch den Schnitt mit einer Curve vierter Ordnung, die noch drei überflüssige Puncte mit der Curve dritter Ordnung gemein hat, die un-

*) Dieselben beginnen mit dem Jahre 1838 und sind fast alle in „Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik" enthalten.

**) Es scheint damals unbekannt gewesen zu sein, dass bereits 1748 Maclaurin einen Theil der von Poncelet und Plücker aufgestellten Sätze gefunden hatte.

endlich weiten Puncte derselben. Hesse zeigte, dass man bei durchgängigem Gebrauche homogener Coordinaten statt dieser Curve eine solche von der dritten Ordnung angeben kann, welche die neun Wendepuncte allein aus der gegebenen Curve ausschneidet: die gemeinte Curve ist dargestellt durch die gleich Null gesetzte Determinante der zweiten Differentialquotienten der Grundcurve.

Diese Hesse'sche Determinante, wie sie jetzt allgemein genannt wird, sollte für alle einschlägigen Fragen und insbesondere für Hesse's eigene Arbeiten von der weitgreifendsten Bedeutung werden. Hesse bewies, dass sie in einer Weise von der Grundform abhängt, welche durch beliebige lineare Transformation der Veränderlichen ungeändert bleibt: es entstand die Aufgabe, alle bei algebraischen Problemen auftretenden Verhältnisse durch analoge Bildungen darzustellen. Es mag in dieser Hinsicht namentlich der schönen Form gedacht werden, welche Hesse fernerhin für die Osculationsebene einer Raumcurve aufstellte, die als Schnitt zweier Flächen gegeben ist. Andererseits aber ergab die Determinante selbst neue Fragestellungen; indem Hesse ihr Verhalten auch bei anderen Formen untersuchte, erhielt er eine Reihe schöner Resultate, die sogleich noch angeführt werden sollen.

Bei den Curven dritter Ordnung erörterte Hesse namentlich auch den Zusammenhang zwischen der Determinante und der Grundform. Indem er Sätze entwickelte wie etwa diese: dass die Determinante der Determinante eine lineare Combination derselben und der Grundform ist, dass jede Curve dritter Ordnung als Determinante dreier anderen aufgefasst werden kann etc., ward er der Begründer der Theorie der ternären cubischen Formen und damit eines der wichtigsten Theile der Invariantentheorie. Andererseits ergriff Hesse das Problem der algebraischen Bestimmung der neun Wendepunkte. Weil man die zwölf Linien, auf welchen dieselben zu drei vertheilt liegen, in vier Dreiecke ordnen kann, hängt die Lösung der betr. Gleichung neunten Grades von einer Gleichung vierten Grades ab. Es war dies ein erstes merkwürdiges Beispiel, welches die Geometrie für diejenige Theorie der Gleichungen lieferte, die es mit den besonderen Affecten der Auflösbarkeit zu thun hat. Jacobi, den das Hesse'sche Resultat in dieser Richtung besonders interessirte, regte Hesse an, derartige Gleichungen neunten Grades an sich zu studiren. Hesse gab weiterhin eine Darstellung der betr. Verhältnisse. Aber er hat diese Fragen nicht eigentlich weiter verfolgt; seine Stärke lag in der eleganten rechnerischen Behandlung bereits formulirter Probleme.

Unter den Anwendungen, die Hesse fernerhin von seiner Determinante machte, erwähnen wir zunächst die Bestimmung der sog. parabolischen Curve auf einer beliebigen Fläche. Er betrachtet die Determinante ferner bei Gleichungen mit nur einer Veränderlichen und findet, dass man mit ihrer Hülfe die Auflösung der Gleichungen dritten Grades in übersichtlichster Weise gestalten kann. Er untersucht ihr Verhalten bei biquadratischen Gleichungen und entwickelt die merkwürdige Analogie, welche zwischen diesen Gleichungen und den Curven dritter Ordnung besteht. Er gibt endlich den wichtigen Satz, dessen strenger Beweis bis jetzt freilich nur in einzelnen Fällen hat geleistet werden können, dass das identische Verschwinden der Determinante einer Form mit n Veränderlichen die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür abgibt, dass dieselbe durch lineare Substitution in eine Form mit nur n—1 Veränderlichen verwandelt werden könne.

Von den Curven dritter Ordnung wurde Hesse naturgemäss zu den Curven vierter Ordnung geführt. Auch hier wieder knüpfte er an Plücker an, der zuerst die Existenz der 28 Doppeltangenten dieser Curven nachgewiesen und schon begonnen hatte, deren Gruppirungen zu studiren. Bald darauf hatten die englischen Geometer Cayley und Salmon den merkwürdigen Gegenstand in Angriff genommen, in einer Weise, die Hesse's eigenen Intentionen ziemlich nahe lag; es dauerte aber lange Zeit, bis die beiderseitigen Entdeckungen als zusammengehörig verstanden wurden. Andererseits concurrirte Hesse bei diesen Untersuchungen mit Steiner. Derselbe beeilte sich, als Hesse's erste Resultate bekannt wurden, seinerseits eine grosse und inhaltreiche Abhandlung über den Gegenstand zu veröffentlichen, leider, wie er in späterer Zeit pflegte, ohne Beweise und selbst ohne Andeutung der Beweismethode. Hesse's Arbeit gibt nicht nur klar und deutlich den Ausgangspunkt, sondern zeigt auch, was noch zu leisten ist. Denn im Vergleiche mit dem, was Hesse bei den Curven dritter Ordnung gelungen war und was er zweifellos auch bei den Curven vierter Ordnung erstrebte, ist diese Untersuchung Hesse's nur erst ein Anfang, über den man allerdings noch nicht weit hinausgekommen ist.

Das Problem, welches Hesse voranstellt, ist dasselbe, welches ihn bei den Curven dritter Ordnung beschäftigt hatte, die Darstellung der Curvengleichung in Gestalt einer symmetrischen Determinante. Aber es gelingt ihm nur auf einem Umwege, zu schliessen, dass eine solche Darstellung auf 36 wesentlich verschiedene Weisen möglich ist; algebraisch wird bloss gezeigt, wie man die 35 anderen Arten finden kann, wenn eine bekannt ist. — Aus der so gewonnenen Gleichungsform fliesst dann unmittelbar eine Menge der merkwürdigsten Sätze, namentlich über Berührungscurven dritter Ordnung, weiterhin auch über berührende Kegelschnitte. Dabei macht Hesse von einem Hülfsmittel Gebrauch, welches seitdem, in verallgemeinerter Form, eines der fruchtbarsten der modernen Geometrie geworden ist: er bezieht die Curve vierter Ordnung eindeutig auf eine Raumcurve der sechsten Ordnung und untersucht die für erstere geltenden Verhältnisse an der letzteren, bei der sie zum grossen Theile übersichtlicher werden. Die 28 Doppeltangenten z. B. erscheinen dabei als die Verbindungsgeraden von acht Puncten im Raume.

Mit diesen Untersuchungen über Curven vierter Ordnung, die wir freilich nur andeutungsweise haben wiedergeben können, hat Hesse's eigentliche productive Thätigkeit ihr Ende erreicht. Denn die späteren Abhandlungen, in denen er bestimmte Probleme erledigt, z B. die grosse Untersuchung über die zweite Variation, enthalten nicht eigentlich neue Methoden, sondern verwerthen nur die algebraische Geschicklichkeit, die er sich durch seine früheren Arbeiten erworben hatte. In anderen

Aufsätzen wieder macht Hesse auf Problemstellungen aufmerksam, deren Verfolg ihm interessant erscheint, die er aber nicht selbst zum Abschlusse führt.

Dagegen begann er nun, die von ihm ausgebildete Behandlungsweise der analytischen Geometrie einem grösseren Leserkreise zugänglich zu machen. Die „Vorlesungen über Geometrie des Raumes" erschienen zuerst 1861. In gefälliger Form, mit vollendeter Durchsichtigkeit und Symmetrie der Behandlung, sind diejenigen Probleme der Raumgeometrie vorgetragen, welche sich auf Gleichungen des ersten und zweiten Grades beziehen. Der Leser, welcher das Buch zum ersten Male studirt, wird durch Gegenstand und Methode in gleicher Weise gefesselt. Aber es sei damit zugleich die Beschränkung bezeichnet, die dem Buche anhaftet: die geometrische Anschauung tritt zu Gunsten der algebraischen Behandlung wohl zu sehr zurück, und die abgeschlossene Form lässt nicht leicht das Bedürfniss nach selbstständiger Weiterforschung entstehen.

Hesse hat später Vorlesungen aus der Geometrie der Ebene folgen lassen, er hat endlich Darstellungen auch elementarerer Gegenstände gegeben (Die Determinanten, 1871, die 4 Species, 1872.) Wenn er bei letzteren auch wieder das Hauptgewicht mehr auf elegante Darstellung als auf Consequenz der Begründung gelegt hat, so wird doch der Mathematiker diese Schriften nicht ohne Interesse durchlesen, insofern in ihnen an vielen Stellen eine höhere Gesammtauffassung zum Ausdrucke kommt. —

Was Hesse an neuen mathematischen Gedanken gefunden, hat rasch in die Weiterentwickelung der Wissenschaft eingegriffen. Auf Hesse weiterarbeitend haben die englischen Mathematiker Cayley und Sylvester und von den deutschen Geometern Aronhold die wichtige algebraische Theorie geschaffen, die man als Invariantentheorie bezeichnet. Es hat Hesse's Schüler Clebsch vermocht, die Geometrie mit den elliptischen und Abel'schen Functionen in Zusammenhang zu bringen, und die Sätze, welche sich dabei in erster Linie von neuem ergaben, sind eben diejenigen, die Hesse bei den Curven dritter und vierter Ordnung gefunden. Die Mathematik strebt in neuerer Zeit wieder dahin, die verschiedenen Gebiete, welche lange als besondere Disciplinen behandelt wurden, zu vereinen; es ist kein Zweifel, dass Hesse's algebraische Methoden in demselben Maasse, als dies gelingt, noch allgemeinere Wichtigkeit und ausgedehntere Verwendung gewinnen werden.

Klein.