



Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

- Autor: **Philipp von Jolly** (1809-1884)
- Titel: **Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation**
- Quelle: Annalen der Physik
241. 1878 = Folge 3, Bd 5
Seite 112 – 134.
Signatur UB Heidelberg: O 4001::241.1878

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND V.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT EINUNDVIERZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST DREI FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1878.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Tabelle V.

$$\frac{P_a V_a}{P_b V_b}$$

Nr.	beob.	ber.	Differenz.	Nr.	beob.	ber.	Differenz.
11.	1,00265	1,00273	+0,00008	14.	1,00381	1,00393	+0,00012
12.	1,00281	1,00273	-0,00008	15.	1,00373	1,00393	+0,00020
13.	1,00285	1,00280	-0,00005	16.	1,00428	1,00399	-0,00029
				17.	1,00426	1,00399	-0,00027

Die Mittheilung der Versuche über den Ausdehnungscoëfficienten des Aethylens bei constantem Volumen, welche mit Anwendung des Jolly'schen Luftthermometers ausgeführt wurden, und die sich hieran schliessende Berechnung des Ausdehnungscoëfficienten bei constantem Druck, die mit Hülfe der vorstehenden Versuche durchzuführen ist, behalte ich dem zweiten Theile der Arbeit vor.

Hohenheim, Juni 1878.

VI. *Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation; von Ph. v. Jolly.*

(Aus den Abh. d. K. Bayr. Akad. II. Cl. XIII. Bd. 1 mitgetheilt vom Herrn Verfasser.)

Die Vervollkommnung der Waage in Construction und Ausführung gibt Veranlassung zu neuen Anwendungen der Waage. Die Leistungsfähigkeit dieses ältesten der Messinstrumente lässt sich dahin bezeichnen, dass in Vergleichung zweier Kilogrammstücke gleichen Materials mit einmaliger Wägung der unvermeidlichen Fehler auf $\pm 0,05$ mg, dass also in dem arithmetischen Mittel der Resultate wiederholter Wägungen der Fehler leicht auf $\pm 0,01$ mg eingeengt erscheint. Um dies zu erreichen, müssen einerseits in Construction und Ausführung der Waage gleich

näher zu bezeichnende Bedingungen erfüllt sein, und müssen andererseits bei Aufstellung und Gebrauch der Waage bestimmte Vorschriften beachtet werden.

Die analytischen Waagen sind meist mit Balken- und Schalenarretirungen versehen. Es reicht dies nicht aus um Gewichtsunterschiede zweier Kilogrammstücke bis auf Bruchtheile eines Milligramms festzustellen. Eine minimale Aenderung in den Auflagen der Achatplatten auf den Endschneiden des Waagebalkens hat eine Aenderung in der Länge der Hebelarme zum Erfolg. Beträgt diese auch nur den zehnmillionten Theil der Länge des Hebelarmes, so verschiebt sich dem entsprechend die Einstellung des Zeigers der Waage. Bei einer Belastung von 1 kg ändert sich in diesem Falle die Angabe der Waage schon um 0,1 mg. Ist die Waage nur mit Balken und Schalenarretirung versehen, so erfolgt die Auflage des Gehänges beinahe nach jeder Auslösung auf einer anderen Linie der Endschneiden. Die Schneide ist eben auch bei sorgfältigster Ausführung nicht eine mathematische Linie, und die Achatplatte des leicht beweglichen Gehänges legt sich mit der Lösung der Schalenarretirung bald auf eine der Drehungsaxe der Waage näher bald entfernter liegende Linie der Endschneide auf. Das Einspielen der Zunge erfolgt daher nach jeder Lösung der Arretirung an einem anderen Punkte der Scala. Die Angaben der Waage werden um so übereinstimmender ausfallen, je mehr die Unveränderlichkeit aller Auflagenlinien gesichert wird. Durch Arretirung der Endschneiden und passende Führung des Gehänges wird dies wesentlich gefördert. Die Auslösung muss auf beiden Seiten möglichst gleichzeitig erfolgen und muss in der Art sanft eingeleitet werden, dass jede Erschütterung des Waagebalkens vermieden erscheint.

Ein zweiter Punkt, der in der Construction analytischer Waagen nicht selten unbeachtet bleibt, besteht in einer Vorrichtung zur Parallelstellung der Schneiden. Meist wird diese Parallelstellung vom Mechaniker nach dem Augenmaasse ausgeführt. Methodisch kann sie durch passend

zur Bewegung der Endprismen angebrachte Stellschrauben erreicht werden. Die Prüfung erfolgt am exactesten nach der schon von Gauss angegebenen Methode. Ist die Endschneide parallel mit der Mittelschneide, so beschreibt sie bei der Schwingung die Oberfläche eines Cylinders, in jedem andern Falle die eines Kegels. Ein kleiner mit dem Gehänge zu verbindender Planspiegel giebt nur in dem ersten Falle die mit einem Ablesefernrohr zu beobachtenden Spiegelbilder in ungeänderter Lage. Die Correction lässt sich unter Anwendung der Stellschrauben mit grosser Exactheit ausführen.

Der geradlinige Verlauf der Schneiden, der Härtegrad des Stahles und die Ebenheit der Achatplatten sind Punkte, auf welche der Mechaniker bei der Ausführung eine besondere Achtsamkeit zu verwenden hat. Zeigen die Schneiden unter der Maximalbelastung nach vierundzwanzigstündiger Belastung keine Verbreiterung der überhaupt nur äusserst feinen Glanzlinie, so wird man darauf rechnen können, dass auch nach jahrelangem Gebrauche Empfindlichkeit und Richtigkeit der Waage ungeändert bleiben.

Die Ablesung der Stellung des Waagebalkens mit Zeiger am Gradbogen ist zur Bestimmung der Zehntel der Milligramme nicht mehr ausreichend. Erst unter Anwendung von Spiegelablesungen können kleine Differenzen in der Stellung des Balkens noch mit Exactheit verfolgt werden. Der Spiegel ist über der Mitte des Waagebalkens, senkrecht zur Längenrichtung des Balkens, befestigt, die Scala in einer Entfernung von beiläufig 3 m aufgestellt und die Ablesung erfolgt mit einem Ablesefernrohr. An einer von mir gebrauchten Waage erzeugte bei einer Belastung von einem Kilogramm ein Uebergewicht von 2 mg einen Ausschlag von 17,9 Scalentheilen. Ein Scalentheil entspricht also einem Uebergewichte von 0,1173 mg.

Sind vom Mechaniker die Bedingungen erfüllt, welche Empfindlichkeit und Richtigkeit der Waage sichern, so hat man zunächst ein brauchbares Messinstrument. Bei

Erprobung der Leistungsfähigkeit des Instrumentes müssen selbstverständlich alle Ursachen, die eine Aenderung der Hebelarme oder eine Störung in der Ablesung zur Folge haben könnten, fern gehalten werden. Zunächst ist also für erschütterungsfreie Aufstellung der Waage, der Scala und des Ablesefernrohres zu sorgen, ebenso müssen die Auslösung der Arretirung und der Reiterverschiebung ohne Erschütterung der Waage erfolgen.

Man wird auch unter Beachtung dieser naheliegenden Vorsichtsmaassregeln bemerken, dass nicht selten bei zwei aufeinander folgenden Versuchen das Einspielen der Waage nicht an exact gleicher Stelle der Scala eintritt. Der Grund hiervon liegt beinahe ausschliesslich in eingetretenen Temperaturänderungen. Ein Oeffnen und Wiederschliessen des Waagekastens ist ausreichend Temperaturdifferenzen der Hebelarme herbeizuführen, welche eine geänderte Länge der Hebelarme, also auch eine geänderte Einstellung zur Folge haben. Es dauert je nach der Grösse dieser Temperaturdifferenz längere oder kürzere Zeit, bis der Waagebalken nach Schliessung des Kastens in seiner ganzen Ausdehnung gleiche Temperatur besitzt.

Absichtlich zu diesem Zwecke ausgeführte Versuche lassen die Wirkungen solcher ausnehmend kleinen Temperaturdifferenzen nachweisen. Die Waage zeigt sich nach denselben als ein Thermoskop, welches an Empfindlichkeit mit der Thermosäule wetteifert. In der That beträgt die Temperaturdifferenz auch nur $0,01^{\circ}$ C., so berechnet sich unter Zugrundlegung des bekannten Ausdehnungscoefficienten des Messings die eintretende Verlängerung zu 0,000 000 186. Das statische Moment des Kilogrammstückes nimmt also gerade so zu, wie dies bei ungeänderter Länge des Hebelarmes durch eine Gewichtszulage von 0,186 mg eingetreten wäre, und bei der Waage von der oben angegebenen Empfindlichkeit wird die Aenderung des Ausschlages 1,6 Scalentheile betragen.

Zweierlei Wege wurden, um den Einfluss der Temperaturdifferenzen zu messen, eingeschlagen. Im ersten

Falle wurde eine brennende Stearinkerze in der Entfernung von 1,5 m in der verlängerten Richtung des Waagebalkens ausserhalb des geschlossenen Waagekastens aufgestellt. Die von der Kerze ausgehenden Wärmestrahlen konnten also erst nach ihrem Durchgange durch die Glastafel, welche die Seitenwand des Waagekastens bildet, zum Waagebalken gelangen. Nach 7 Minuten zeigte sich im Ausschlag der Waage eine Aenderung von 10 Scalentheilen in dem Sinne einer Verlängerung des der Kerze zugewendeten Hebelarmes, während ein in der Nähe des Waagebalkens befestigtes Thermometer eine Temperaturzunahme von noch nicht $0,1^{\circ}$ C. zeigte.

In einer zweiten Versuchsreihe war der Waagekasten mit einem zweiten Kasten überstülpt, der aussen und innen mit Silberpapier überzogen war. Die vordere Seite dieses athermanen Kastens bestand aus zwei beweglichen Hälften. Je nachdem rechts oder links einer dieser Hälften entfernt wurde, war der rechte oder der linke Hebelarm der im verschlossenen Glaskasten befindlichen Waage der Bestrahlung durch die gegenüber liegenden Objecte ausgesetzt. Bei den Versuchen bestanden diese Objecte einfach in der der Waage in einem Abstände von 3,5 m gegenüberstehenden Wand. Dieselbe ist beleuchtet durch den Reflex der dem Fenster des Waagezimmers gegenüberliegenden Gebäude, und sendet der Waage je nach der Bewölkung des Himmels mehr oder weniger Wärmestrahlen zu. Wurde nach dem Einspielen der Waage der athermane Schirm rechts entfernt, so wurde beispielsweise nach 20 Minuten eine Verschiebung von 2,8 Scalentheilen im Sinne einer Verlängerung des Balkens bemerkt. Wurde der Schirm wieder vorgesetzt, so verminderte sich der Ausschlag, aber erst nach einer Stunde war das Einspielen wieder nahezu an der Ausgangsstelle eingetreten. Wurde endlich der athermane Schirm links entfernt, so war noch wieder nach 20 Minuten eine Verschiebung und zwar in entgegengesetzter Richtung wie bei dem ersten Versuche und in beiläufig gleichem Betrage zu bemerken. Werden beide athermanen Schirme gleichzeitig

entfernt, so bleibt das Einspielen der Waage selten ungeändert, ein Beweis, dass die Zustrahlung auf die beiden Hebelarme nicht vollkommen die gleiche ist. Man entgeht aber sofort diesen Ungleichheiten im Ausschlage, wenn man durch Vorsetzen der athermanen Schirme gleiche Zustrahlung sichert.

Ein besonderer Fall der Wirkung der Wärme ist noch ausdrücklich hervorzuheben. Es kann vorkommen, dass die Hebelarme rechts und links nicht absolut gleiche Verlängerung bei gleicher Temperaturerhöhung erfahren. Der Waagebalken ist durch Guss hergestellt, er wird mit der Feile bearbeitet, vielleicht auch mit dem Hammer gerichtet. Auf vollkommen gleiche Molecularanordnung beider Hälften und auf vollkommen gleiche Spannung wird man also nicht rechnen dürfen. Eine Differenz in den Ausdehnungscoefficienten der Hebelarme rechts und links wird hievon die Folge sein. Eine sehr kleine Differenz reicht aber hin, um mit geänderter Temperatur des Waagebalkens auch eine Aenderung im Ausschlage hervortreten zu machen. Folgende Versuche bestätigen dies, und geben zugleich Anhaltspunkte, um die etwa vorhandene Verschiedenheit der Ausdehnungscoefficienten der beiden Hebelarme zu berechnen.

Der Waagekasten war bei allen Versuchen unter einem zweiten mit Silberpapier überzogenen Kasten aufgestellt. Die Versuche wurden in frühen Tagesstunden ausgeführt, in welchen der Wechsel der Temperatur ausnehmend klein sich zeigte, meist $0,1^{\circ}$ nicht erreichte. Die Wägungen wurden nach der Methode der Vertauschung der Gewichtsstücke rechts und links vollzogen. Die Gewichtsstücke waren Kilogramme aus Messing und galvanoplastisch mit Nickel überzogen. Sie waren vor der Vernickelung sorgfältig polirt und wurden nach der Vernickelung mit dem Polirstahl geglättet. Unter den gewöhnlichen atmosphärischen Einflüssen zeigen sie sich nach bald einjähriger Dauer vollkommen ungeändert. In der folgenden Tabelle enthält die erste Columne die Tem-

peraturen des Waagekastens, die zweite und dritte die Oerter der Gewichtsstücke sammt Zulagegewichten in Grammen, und die vierte Columne die an der Scala abgelesene Zahl. Die Kilogrammstücke sind mit K_1 und K_2 bezeichnet.

Temperatur.	Schale links.	Schale rechts.	Scala.	Temperatur.	Schale links.	Schale rechts.	Scala.
+ 5,1	$K_1 + 0,0056$	K_2	741,6	- 0,6	$K_1 + 0,0056$	K_2	734,2
	$K_2 + 0,003$	K_1	741,2		$K_2 + 0,003$	K_1	735,2
+ 3,5	$K_1 + 0,0056$	K_2	739,0	+ 6,6	$K_1 + 0,0056$	K_2	743,1
	$K_2 + 0,003$	K_1	737,0		$K_2 + 0,003$	K_1	741,7.

Da ein Zulagegewicht auf der Scala rechts von 0,1173 mg eine Erhöhung der Scalenzahl um eine Einheit bewirkt, so können die bei gleichen Temperaturen erhaltenen Scalenzahlen auf gleiche Einspielungsstellen an der Scale umgerechnet werden. Man erhält:

Temperatur.	Schale links.	Schale rechts.	Scala.	Temperatur.	Schale links.	Schale rechts.	Scala.
+ 5,2	$K_1 + 0,0056$	K_2	741,6	- 0,6	$K_1 + 0,0056$	K_2	734,2
	$K_2 + 0,0029531$	K_1	741,6		$K_2 + 0,0028827$	K_1	734,2
+ 3,5	$K_1 + 0,0056$	K_2	739,0	+ 6,6	$K_1 + 0,0056$	K_2	743,1
	$K_2 + 0,0027654$	K_1	739,0		$K_2 + 0,0028358$	K_1	743,1.

Diese vier, jeweils bei gleichen Temperaturen ausgeführten Gewichtsvergleichungen von K_1 und K_2 geben nach der Reihe:

$$K_2 = K_1 + 0,0013234, \quad 0,0014173, \quad 0,0013586 \quad 0,0013821$$

$$\text{Mittel } K_2 = K_1 + 0,0013703.$$

Die Abweichungen der Einzelversuche vom Mittel betragen noch nicht $\pm 0,05$ mg, und bezeichnen hiermit die mit der benützten Waage erreichbare Genauigkeit. Zugleich geben die angeführten Beobachtungen unzweideutig zu erkennen, dass bei gleicher Belastung aber geänderter Temperatur des Waagebalkens das Einspielen der Waage an verschiedenen Stellen der Scala erfolgt, und zwar bei der gebrauchten Waage in der Art verschieden, dass eine Temperaturerhöhung auch eine Erhöhung der abgelesenen Scalenzahl zur Folge hat. Der Hebelarm rechts wird also bei gleicher Temperaturzunahme stärker ausgedehnt als der links.

Die Differenz der Ausdehnungscoefficienten der beiden Hebelarme lässt sich, gestützt auf die Differenz im Ausschlage der Waage, berechnen. Ich wähle hierzu die bei den weitest auseinander liegenden Temperaturen gemachten Beobachtungen.

Das Einspielen der Waage erfolgte in der Temperatur $-0,6^{\circ}$ C. an der Scale bei 734,2, und bei ungeänderter Belastung, aber in der Temperatur $6,6^{\circ}$ C. bei 743,1. Eine Temperaturdifferenz von $7,2^{\circ}$ hatte also eine Erhöhung von 8,9 Scalentheilen zum Erfolg. Hätte man bei $-0,6^{\circ}$ ein Einspielen bei 743,1 erzielen wollen, so hätte man auf der rechten Seite ein Gewicht von $0,1173 \cdot 8,9 = 1,0439$ mg zulegen, oder das Zulagegewicht auf der linken Seite um den gleichen Betrag vermindern müssen. Berücksichtigt man zugleich, dass $K_2 = K_1 + 0,0013703$, so hat man:

Temperatur	Schale links	Schale rechts	Scale
$-0,6$	$K_1 + 0,0032091$	K_1	743,1
$+6,6$	$K_1 + 0,0042061$	K_2	743,1

Diese beiden Beobachtungen reichen aus um die Differenz der Ausdehnungscoefficienten α und β des rechten und des linken Hebelarmes zu berechnen. Aus der ersten Beobachtung erhält man, wenn l und r die Längen der Hebelarme links und rechts bezeichnen:

$$l(K_1 + 0,0032091) = r K_1,$$

und aus der zweiten folgt:

$$l(1 + \beta \cdot 7,2)(K_1 + 0,0042061) = r(1 + \alpha \cdot 7,2)K_1.$$

Durch Division der ersten durch die zweite Gleichung fallen l und r heraus, und man erhält unter Berücksichtigung, dass $K_1 = 1000$:

$$\alpha - \beta = 0,000000138.$$

Nach Messungen von Lavoisier und Laplace ist der Ausdehnungscoefficient gegossenen Messings $0,000018667$ und der gehämmerten Messings $0,000018897$. Der Unterschied ist $0,00000023$, also beträchtlich grösser, als der

für beide Hebelarme erhaltene. Die Ungleichheiten in den Molecularspannungen, die durch ungleich rasche Abkühlung nach dem Gusse und durch Bearbeitung eingetreten sind, erzeugten bei der geprüften Waage nur eine beiläufig halb so grosse Differenz der Ausdehnungscoefficienten, als dieser zwischen gegossenem und gehämmertem Messing auftritt.

Es war vorauszusehen, dass jede Waage individuell andere Werthe für die Differenz $\alpha - \beta$ zeigen werde. So fand ich mit einer anderen Waage, mit derselben, mit welcher ich die später zu erwähnenden Untersuchungen ausführte:

Temperatur	Schale links	Schale rechts	Scale	Temperatur	Schale links	Schale rechts	Scale
5,0	K_1	$K_2 + 0,003$	260,1	11,0	K_1	$K_2 + 0,003$	252,2
	K_2	$K_1 + 0,005$			K_2	$K_1 + 0,005$	
10,6	K_1	$K_2 + 0,003$	253,9	13,5	K_1	$K_2 + 0,003$	249,3
	K_2	$K_1 + 0,005$			K_2	$K_1 + 0,005$	

Die Prüfung auf Empfindlichkeit der Waage ergab, dass ein Zulagegewicht von 0,182 mg in der Schale rechts eine Erhöhung um einen Scalentheil im Ausschlag der Waage zur Folge hat. Für gleiche Temperatur und gleichen Ausschlag nach vertauschten Gewichten erhält man demnach:

5,0	K_1	$K_2 + 0,003$	260,1	11,0	K_1	$K_2 + 0,003$	252,2
	K_2	$K_1 + 0,0057462$			K_2	$K_1 + 0,0057644$	
10,6	K_1	$K_2 + 0,003$	263,9	13,5	K_1	$K_2 + 0,003$	249,3
	K_2	$K_1 + 0,0056006$			K_2	$K_1 + 0,0057826$	

Diese vier Gewichtsvergleichungen ergeben nach der Reihe:

$$K_2 = K_1 + 0,0013731, \quad K_2 = K_1 + 0,0013003$$

$$K_2 = K_1 + 0,0013822, \quad K_2 = K_1 + 0,0013913$$

$$\text{Mittel: } K_2 = K_1 + 0,0013617.$$

Die Differenz im Einspielen bei 5° und bei 13,5° beträgt 10,8 Scalentheile. Da eine Erhöhung von einem Scalentheil ein Zulagegewicht rechts von 0,182 mg erfordert, so ist, wenn bei der Temperatur 13,5 das Einspielen

an der Scale bei 260,1 erfolgen soll, eine Zulage von $0,182 \cdot 10,8 = 1,9656$ mg erforderlich. Berücksichtigt man zugleich, dass $K_1 = K_2 + 0,0013617$, so hat man:

Temperatur	Schale links	Schale rechts	Scale
5,0	K_1	$K_1 + 0,0043617$	260,1
13,5	K_1	$K_1 + 0,0063273$	260,1.

Man findet hiernach:

$$\alpha - \beta = -0,000000231.$$

Der Ausdehnungscoefficient des linken Hebelarmes ist also bei der Waage Nr. 2 grösser als der des rechten.

Hat man für eine Waage den Werth von $\alpha - \beta$ bestimmt und ebenso das Zulagegewicht, welches bei einer Belastung von 1 kg eine Aenderung im Ausschlage von einem Scalentheile bewirkt, so können auch Wägungen, die in verschiedenen Temperaturen ausgeführt sind, in Vergleich gebracht werden. Für die Waage Nr. 1 ist für eine Temperaturänderung von je 1° eine Aenderung im Ausschlage von $\frac{0,138}{0,117} = 1,18$, und für die Waage Nr. 2 von $\frac{0,231}{0,182} = 1,27$ Scalentheilen in Rechnung zu bringen. Es wird indess immer vorzuziehen sein, die Gewichtsvergleichen, sei dies unter Anwendung der Methode ver-tauschter Gewichte oder der mit Tara, bei möglichst un-geänderter Temperatur des Waagebalkens auszuführen. Der Werth von $\alpha - \beta$ ist eben eine gemessene Grösse, die also ihrerseits schon mit einem unvermeidlichen Fehler behaftet ist.

Die nur äusserst geringe Aenderung, welche in den Längen der Hebelarme mit der Temperaturzunahme eintritt, ist der Grund, aus welchem der eben hiervon ab-hängende veränderte Ausschlag der Waage nur bei grösse-
rer Belastung messbar hervortritt. In der That wächst bei der Waage Nr. 1 mit einer Temperaturzunahme von 1° das statische Moment auf der rechten Seite um $0,000000128 K_1$, entspricht also für $K = 1000$ g einer Ge-wichtszulage von $0,138$ mg, und ändert den Ausschlag

um 1,18 Scalentheile. Ein Gewicht von nur 10 g würde bei der gleichen Temperaturerhöhung des Balkens den Ausschlag nur um 0,018 Scalentheile, also um eine selbst mit dem Ablesefernrohr nicht mehr erkennbare Grösse ändern.

Die Ausführung exacter Messungen ist unvermeidlich mit Schwierigkeiten und mit nicht unbeträchtlichem Zeitaufwande verbunden. Kennt man aber die Bedingungen, unter welchen erst exacte Resultate gesichert erscheinen, so kann durch methodisch geordnete Beobachtungen rascher das Ziel erreicht werden. Gewichtsvergleichungen grösserer Gewichtsstücke erfordern eine Fernhaltung aller Temperaturstörungen. Ein zweiter Kasten mit athermanen Wänden und mit keiner grösseren als zum Anblick des Spiegels erforderlichen Oeffnung sichert die gleichförmige Zustrahlung, und in frühen Morgenstunden zeigt sich die Temperatur in einem nach Norden gelegenen Waagezimmer ausreichend constant. Die Beobachtungszeiten auf diese Stunden verlegt führen rasch zu vergleichbaren Resultaten. Die Auslösung der Waage lässt sich leicht in der Art vollziehen, dass der Schwingungsbogen kaum 20 Scalentheile umfasst; nach einer halben Stunde ist er auf 2 bis 3 Scalentheile vermindert. Zwei Ablesungen reichen dann aus, den Ausschlag zu bestimmen.

Die Gewichtsvergleichungen zweier mit Nickel überzogener Kilogrammstücke, welche mit den Waagen Nr. 1 und Nr. 2 ausgeführt wurden, liegen der Zeit nach um 4 Monate auseinander. Die erhaltenen Resultate weichen nur um 0,0086 mg von einander ab, und kennzeichnen damit einerseits die Leistungsfähigkeit der Waage und andererseits die Unveränderlichkeit der Nickelüberzüge. Man müsste denn lieber annehmen wollen, dass die Aenderungen beider Stücke in 4 Monaten sich in absolut gleicher Weise vollzogen hätten.

Gewichtsvergleichungen zweier Gewichtsstücke verschiedenen Materials, wie etwa aus Bergkrystall und aus Platin, können nicht mit gleicher Genauigkeit, wie jene

der Gewichtsstücke gleichen Materiales ausgeführt werden. Es liegt dies nicht daran, dass die Erfahrungsconstanten, die zur Berechnung der Luftgewichte zur Anwendung kommen, nicht mit genügender Genauigkeit bekannt wären, sondern in der nicht erreichbaren Gleichheit der Temperaturen der Gewichtsstücke. Die ungleiche Wärmecapacität bringt es mit sich, dass in einem Raume wechselnder Temperaturen, wie solche im Verlaufe von 24 Stunden eintreten, die Gewichtsstücke ungleichen Gang in den Temperaturen einhalten. Man kann sich aber leicht überzeugen, dass ein in Luft eingetauchter Körper, auch wenn seine Temperatur nur um Bruchtheile eines Grades die des umgebenden Mediums übertrifft oder dagegen zurückbleibt, scheinbar leichter oder schwerer wird. Es wäre erst besonders zu untersuchen, welchen Antheil dabei sich geltend machende Luftströmungen oder die an der Oberfläche absorbirten Luftgewichte an der Erscheinung haben. Einige in dieser Richtung ausgeführte Versuche machen es wahrscheinlich, dass lediglich Luftströmungen, an wärmeren Körpern nach aufwärts, an kälteren nach abwärts, die Ursache der Anomalien sind. Wie sich dies immer verhalten mag, sicher ist, dass Gewichtsvergleichen von Gewichtsstücken ungleichen Materiales erst durch Wägungen im luftleeren Raume mit grösserer Exactheit sich vollziehen lassen.

Nachdem Aenderungen im Drucke eines Kilogramms, welche den zehnmillionten Theil des Gewichtsstückes betragen, messbar sind; liegt es nahe, Probleme aufzusuchen, in welchen solche kleine Druckdifferenzen in Frage kommen.

Zunächst bietet die Wirkung der Schwere der Erde solche Fälle. Die Beschleunigung durch die Schwere nimmt nach dem Gravitationsgesetze mit dem Quadrate der Entfernung vom Erdmittelpunkte ab, in gleichem Verhältnisse nimmt also auch der Druck eines Körpers auf die Unterlage ab. Ein Körper vom Gewichte Q_1 in

der Entfernung r vom Erdmittelpunkte hat in der Entfernung $r + h$ nur noch ein Gewicht $Q_2 = Q_1 \cdot \frac{r^2}{(r + h)^2}$. Ist r der Radius der Erde an der Meeresoberfläche und h eine Höhe von nur wenigen Metern, so können die höheren Potenzen von $\frac{h}{r}$ vernachlässigt werden, und man hat daher $Q_2 = Q_1 \cdot \left(1 - \frac{2h}{r}\right)$. Für $h = 5$ m würde, der mittlere Erdhalbmesser $= 6\,366\,189$ m gesetzt, die Gewichtsabnahme eines Kilogrammes sich schon zu 1,57 mg berechnen.

Die experimentelle Bestimmung von $\frac{Q_1}{Q_2}$ unterliegt keiner Schwierigkeit. Die Waage Nr. 2, dieselbe welche bei einem Uebergewicht von 0,182 mg eine Zunahme des Ausschlages von einem Scalentheile zeigte, wurde in einer Höhe von 5,5 m über dem Fussboden des Laboratoriums auf einem an der Wand befestigten Tische aufgestellt. Der Boden des Waagekastens war durchbohrt und an Haken der Schalen waren Drähte aufgehängt, die an ihren unteren Enden Waagschalen trugen. An jedem Hebelarm bestand also das Gehänge aus zwei Waagschalen, einer oberen und einer unteren. Der Abstand beider Schalen betrug 5,29 m. Die herabhängenden Drähte waren gegen Bewegung durch Luftzug durch hölzerne Canäle geschützt, die in verschliessbaren Kästen zur Aufnahme der unteren Waagschalen endeten.

Die Gewichtsvergleichen wurden in der Art ausgeführt, dass zunächst die Kilogrammstücke in den oberen Schalen sich befanden, dass in einem zweiten Versuche das eine Kilogrammstück in einer der oberen, das andere in einer der unteren Schalen aufgelegt wurde. Die Methode der Wägung war die der Vertauschung der Gewichtsstücke rechts und links. Nach einer jeden Wägung, in welcher ein Gewichtsstück sich oben, das andere sich unten befand, wurden beide Gewichtsstücke in den oberen Schalen aufgelegt und verglichen, um in dieser Weise

etwaige Aenderungen, welche die Kilogrammstücke durch atmosphärische Einflüsse erfahren haben könnten, zur Wahrnehmung zu bringen. Die Versuche wurden zehnmal wiederholt und ebenso viele Gewichtsvergleichungen der Gewichtsstücke bei gleicher Entfernung vom Erdmittelpunkte wurden in der bezeichneten Ordnung ausgeführt. Die Messungen und Beobachtungen wurden sämtlich in frühen Morgenstunden vollzogen, weil nur auf diese Weise eine genügende Unveränderlichkeit der Temperatur gesichert erschien. Die Gewichtsverluste der Gewichtsstücke in den oberen und unteren Schalen sind um so unerlässlicher in Rechnung zu ziehen, als die Temperaturen unten und oben, auch in nicht geheizten Zimmern, nicht unbedeutend voneinander abweichen. Thermometer im oberen Waagekasten und im Kasten, der die unteren Schalen einschloss, dienten zur Ablesung der Temperatur. Beide Thermometer waren vorausgehend nach dem Gange eines Luftthermometer abgeaicht, und waren in Zehntel Grade getheilt. Die Resultate der Beobachtungen sind in folgenden Tabellen niedergelegt.

Erste Versuchsreihe.

I. Beide Kilogrammstücke K_1 und K_2 in den oberen Schalen.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	255,1	K_2	$K_1 + 0,005$	251,1

Unter Berücksichtigung, dass ein Zulagegewicht von 0,182 mg in der Schale rechts den Ausschlag um einen Scalentheil erhöht, erhält man:

$$K_2 = K_1 + 0,0013640.$$

II. K_1 unten, K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_2	$K_1 + 0,005$	9,6	10,8	721,9	721,45	253,9
K_1	$K_2 + 0,003$	9,6	10,8	721,9	721,45	251,0

Man erhält hiernach:

$$K_1 = K_2 - 0,0007361.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste von K_1 und K_2 berechnet sich, unter Zugrundelegung des specifischen Gewichts des Messings zu 8,4, in bekannter Weise zu 0,0006864. Die Hygrometerstände waren notirt, ihr Einfluss auf die Differenz der Gewichtsverluste macht sich aber erst in den Tausendsteln der Milligramme geltend, und wurde daher in dieser wie in allen folgenden Berechnungen ausser Acht gelassen.

Da die Gewichtszunahme von K_1 im leeren Raume um 0,0006864 grösser ist als die von K_2 , so hat man im leeren Raume:

$$K_1 = K_2 - 0,000497.$$

Die Differenz der Drucke von K_1 unten und K_1 oben ist demnach:

$$- 0,000497 + 0,0013640 = 0,0013143.$$

Zweite Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	251,9	K_2	$K_1 + 0,005$	248,0

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0013549.$$

II. K_1 unten, K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	9,5	10,8	721,9	721,45	250,2
K_2	$K_1 + 0,005$	9,5	10,8	721,9	721,45	252,5

Man erhält hiernach:

$$K_1 = K_2 - 0,0006992.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste von K_1 unten und K_2 oben ist 0,0007371. Da K_1 im leeren Raume um den

gleichen Betrag mehr zunimmt als K_2 , so hat man im leeren Raume:

$$K_1 = K_2 - 0,000379.$$

Der Unterschied der Gewichte von K_1 unten und K_1 oben ist daher:

$$- 0,000379 + 0,0013549 = 0,001170.$$

Dritte Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	249,3	K_2	$K_1 + 0,005$	245,0

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0013913.$$

II. K_1 unten, K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	12,4	13,2	716,32	715,87	246,1
K_2	$K_1 + 0,005$	12,4	13,2	716,32	715,87	252,4

Man erhält hiernach:

$$K_1 = K_2 - 0,0004265.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste von K_1 unten und K_2 oben ist 0,00048195. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_1 = K_2 + 0,000552.$$

Der Unterschied der Gewichte von K_1 unten und K_1 oben ist daher:

$$+ 0,000552 + 0,0013913 = 0,0019433.$$

Vierte Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	255,1	K_2	$K_1 + 0,005$	251,3

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0013457.$$

II. K_1 unten, K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	11,3	12,1	723,38	722,73	245,5
K_2	$K_1 + 0,005$	11,3	12,1	723,38	722,73	252,8

Man erhält hiernach:

$$K_1 = K_2 - 0,0003357.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste von K_1 unten und K_2 oben berechnet sich zu 0,0005204. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_1 = K_2 + 0,0001846.$$

Der Unterschied der Gewichte von K_1 unten und K_1 oben ist daher:

$$0,0001847 + 0,0013457 = 0,0015304.$$

Fünfte Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	254,3	K_2	$K_1 + 0,005$	250,1

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0013822.$$

II. K_1 unten, K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	6,8	8,6	724,6	724,15	253,1
K_2	$K_1 + 0,005$	6,8	8,6	724,6	724,15	254,2

Man erhält hiernach:

$$K_1 = K_2 - 0,0008998.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste berechnet sich zu 0,0012008. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_1 = K_2 + 0,0003010.$$

Der Unterschied der Gewichte von K_1 unten und K_1 oben ist daher:

$$0,0003010 + 0,0013822 = 0,0016832.$$

Sechste Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	252,2	K_2	$K_1 + 0,005$	248,2

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0013640.$$

II. K_1 oben, K_2 unten.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	7,8	9,4	725,4	724,95	257,5
K_2	$K_1 + 0,005$	7,8	9,4	725,4	724,95	246,4

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0020102.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste berechnet sich zu 0,0008971. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_2 = K_1 + 0,0029073.$$

Der Unterschied der Gewichte von K_2 unten und K_2 oben ist daher:

$$0,0029073 - 0,0013640 = 0,0015397.$$

Siebente Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	251,2	K_2	$K_1 + 0,005$	248,2

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0012730.$$

II. K_1 oben, K_2 unten.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	7,8	9,2	724,5	724,15	258,0
K_2	$K_1 + 0,005$	7,8	9,2	724,5	724,15	247,0

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0020010.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste berechnet sich zu 0,0007776. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_2 = K_1 + 0,0027786.$$

Die Differenz der Gewichte von K_2 unten und K_2 oben ist daher:

$$0,0027786 - 0,001273 = 0,0015056.$$

Achte Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	252,0	K_2	$K_1 + 0,005$	247,6

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0014004.$$

II. K_1 oben, K_2 unten.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	8,2	9,6	724,5	724,05	259,2
K_2	$K_1 + 0,005$	8,2	9,6	724,5	724,05	248,0

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0020192.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste berechnet sich zu 0,0007952. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_2 = K_1 + 0,0028150.$$

Die Differenz der Gewichte von K_2 unten und K_2 oben ist daher:

$$0,0028150 - 0,0014004 = 0,0014146.$$

Neunte Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	252,0	K_2	$K_1 + 0,005$	248,2

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0013458.$$

II. K_2 oben, K_2 unten.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	8,0	10,0	706,3	705,85	257,9
K_2	$K_1 + 0,005$	8,0	10,0	706,3	705,85	248,0

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0019009.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste berechnet sich zu 0,0010449. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_2 = K_1 + 0,0029458.$$

Die Differenz der Gewichte von K_2 unten und K_2 oben ist daher:

$$0,0029458 - 0,0013458 = 0,0016000.$$

Zehnte Versuchsreihe.

I. K_1 und K_2 oben.

Schale links	Schale rechts	Scale	Schale links	Schale rechts	Scale
K_1	$K_2 + 0,003$	254,2	K_2	$K_1 + 0,005$	250,7

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0013185.$$

II. K_1 oben, K_2 unten.

Schale links	Schale rechts	Thermometer		Barometer		Scale
		unten	oben	unten	oben	
K_1	$K_2 + 0,003$	8,7	10,9	705,0	704,55	256,0
K_2	$K_1 + 0,005$	8,7	10,9	705,0	704,55	247,7

Man erhält hiernach:

$$K_2 = K_1 + 0,0018463.$$

Die Differenz der Gewichtsverluste berechnet sich zu 0,0011400. Im leeren Raume ist demnach:

$$K_2 = K_1 + 0,0029863.$$

Die Differenz der Gewichte K_2 unten und K_2 oben ist daher:

$$0,0029863 - 0,0013185 = 0,0016678.$$

Die zehn Gewichtsvergleichungen der Gewichtsstücke in gleichem Abstände vom Erdmittelpunkte ergaben nach der Reihe:

$$K_2 = K_1 + 0,0013640, \quad 0,0013549, \quad 0,0013913, \quad 0,0013457, \\ 0,0013822, \quad 0,0013640, \quad 0,0012730, \quad 0,0014004, \quad 0,0013458, \\ 0,0013185, \quad \text{Mittel } K_2 = K_1 + 0,0013539.$$

Die grösste Abweichung der einzelnen Versuche vom Mittel beträgt nur 0,08 mg, und spricht dafür, dass überhaupt die erhaltenen Abweichungen nur den unvermeidlichen Fehlern, nicht aber der Veränderlichkeit der Gewichtsstücke zuzuschreiben sind.

Die Gewichtsabnahmen, welche nach einer Zunahme der Entfernung von 5,29 m vom Erdmittelpunkte eintreten, zeigen nicht die gleiche Uebereinstimmung. In Milligrammen ausgedrückt ergab sich für diese Gewichtsabnahmen nach der Reihe:

$$1,3153, \quad 1,3928, \quad 1,4465, \quad 1,5304, \quad 1,6822, \quad 1,5433, \quad 1,5056, \\ 1,4146, \quad 1,6000, \quad 1,6675, \quad \text{Mittel } 1,5099.$$

Die Abweichungen treten hier schon in den Zehnten der Milligramme auf. Da sie nicht auf eine Veränderlichkeit der Gewichtsstücke zurückzuführen sind, so liegt der Grund wohl ohne Zweifel nur darin, dass Gewichtsvergleichungen von Gewichtsstücken, die in Luft ungleicher Temperatur und ungleichen Druckes aufgehangen sind, mit grösseren unvermeidlichen Beobachtungsfehlern sich behaftet zeigen. In der That macht auch ein Fehler von $0,2^\circ \text{ C.}$ in der Temperaturdifferenz der unteren und oberen Station sich schon in den Zehnteln der Milligramme geltend.

Nachdem die Versuche ergaben, dass am Ort München ein Gewichtsstück Q_1 von einem Kilogramm, von einer unteren Station auf eine um 5,29 m höhere Station gebracht, um 1,5099 mg abnimmt, so hat man:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1000000 - 1,5099}{1000000}.$$

Nach dem Gravitationsgesetze ist:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{2.5,29}{6366189} = \frac{1000000 - 1,662}{1000000}$$

Man hätte also eine Abnahme von 1,662 mg erwarten sollen. Der Unterschied ist allerdings klein und beträgt nur 0,152 mg, auch ist auf die Fehlerquellen, die in der Reduction der Gewichte auf den leeren Raum auftreten, aufmerksam zu machen. Immerhin ist aber der Unterschied grösser, als man bei einer so ausgedehnten Versuchsreihe hätte erwarten sollen. Man könnte daher die Frage aufwerfen, ob die Art der Ausführung des Versuches auch vollkommen im Einklange stehet mit der unter Anwendung des Gravitationsgesetzes gemachten Voraussetzung. Das physikalische Institut liegt in einem der tieferen Stadttheile, ist massiv gebaut und ist von massiven Gebäuden umgeben oder denselben naheliegend, während in der Rechnung vorausgesetzt ist, dass keine störenden Ursachen einwirken. Versuche in einem isolirt stehenden Thurm würden durch die Lage selbst und würden dadurch, dass grössere Abstände der Waagschalen in Anwendung gebracht werden könnten, vielleicht auch durch mindere Veränderlichkeit der Temperaturen der unteren und oberen Stationen, exactere Resultate liefern. Ich werde nicht versäumen eine sich mir eben bietende Gelegenheit zur Wiederholung der Versuche zu benutzen.

Günstige äussere Verhältnisse würden auch erlauben einen Versuch der Wägung der Erde auszuführen, d. h. zu bestimmen, wieviel mal mehr materielle Punkte die Erde besitzt als ein Körper bekannter Grösse und bekannter Dichtigkeit. Bei gleicher Aufstellung der Waage und bei den eben erwähnten Versuchen würde eine unter der unteren Waagschale aufgestellte, aus Bleibarren gebildete Kugel eine entsprechende Vermehrung des Zuges, also Erhöhung des Gewichtes erzeugen. Unter Zugrundelegung der für die mittlere Dichtigkeit der Erde aufgefundenen Zahl lässt sich der Halbmesser einer Bleikugel bestimmen,

welche eine Gewichtszunahme eines Kilogrammstückes von 1 mg bewirken könnte. Es ist mir einige Aussicht zur Ausführung des Versuches gegeben, der dann rückwärts auf einem neuen Wege zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde benutzt werden könnte.

VII. *Ein neuer Satz in der Theorie der Diffraction und dessen Anwendung; von J. Fröhlich in Budapest.*

Der mathematische Ausdruck, welcher zur Berechnung der Intensität des gebeugten Lichtes dient, führt nach einigen einfachen Betrachtungen zu einem eigenthümlichen Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie des von einem leuchtenden Flächenelemente ausgehenden, auf einen unendlich grossen auffangenden Schirm fallenden gebeugten Lichtes einerseits und der Energie des von einer sehr grossen leuchtenden Fläche herrührenden, jedoch nur auf ein Element des Schirmes fallenden gebeugten Lichtes andererseits.

Insbesondere ist dies Verhältniss seiner leichten Anwendbarkeit wegen beachtenswerth; es ergibt dieselbe eine einfache Beobachtungsmethode, welche die Frage der Gleichheit der kinetischen Energien des einfallenden und des gebeugten Lichtes für jede Oeffnung sofort experimentell zu entscheiden gestattet.

Zur Herleitung dieses Satzes machen wir folgende Voraussetzungen:

Es sei eine beugende Oeffnung \mathfrak{J} (Fig. 1), welche durch eine beliebige, ebene oder räumliche Curve begrenzt ist, deren Dimensionen zur Lichtwellenlänge sehr gross sind, so dass die Amplitude des gebeugten Lichtes nur bei kleinen Beugungswinkeln endlichen Werth besitze, sonst aber verschwinde. Ferner sei eine gleichmässig leuchtende Licht-