# Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Liebmann, Heinrich** (1874–1939)

Titel: **Die einzweideutigen projektiven Punktverwandtschaften der Ebene**

Diss.-Vermerk: Jena, Phil.Fak. Inaug.-Diss. v. 2.11.1895

# Die einzweideutigen projektiven Punktverwandtschaften der Ebene.

---

Inaugural-Dissertation
der
philosophischen Fakultät
an der
**Universität Jena**
zur
Erlangung der Doktorwürde
vorgelegt von

**Heinrich Liebmann**
aus Jena.

JENA.
Druck von Ant. Kämpfe
1895.

Genehmigt von der philosophischen Fakultät der Universität Jena auf Antrag des Herrn Hofrath Prof. Dr THOMAE.

Jena, den 2. Nov. 1895.

Prof. Dr. **Winkelmann,**
d. Z. Dekan der phil. Fakultät.

## § 1. Einleitung.

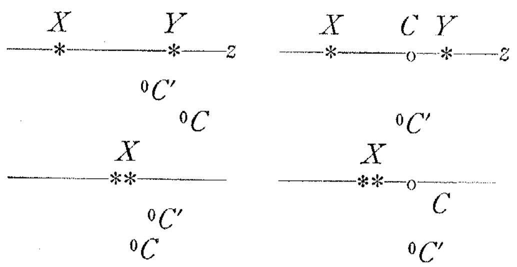
Die Theorie der einzweideutigen Punktverwandtschaften der Ebene ist begründet von Clebsch in seiner Math. Annalen, Bd. III veröffentlichten Arbeit „Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der Abelschen Funktionen." Clebsch untersucht in dieser Arbeit algebraisch die wesentlichen Eigenschaften aller dieser Transformationen und bespricht u. a. auch kurz den Fall, wo den Geraden der Ebene Kegelschnitte zugeordnet werden. In einer ausführlichen Abhandlung hat dann R. de Paolis (Le trasformazioni piane doppie, Atti della Reale Accademia dei Lincei. Roma 1876—77, Ser. III, 1 pag. 511—544) das Problem weiter behandelt. Während Clebsch rein algebraisch verfährt und Paolis mit seinen Betrachtungen immer in der Ebene bleibt und von den Plückerschen Zahlen der algebraischen Kurven wesentlichen Gebrauch macht — ein Verfahren, das man im Gegensatz zum Verfasser doch nicht als rein geometrisch bezeichnen darf — soll im Folgenden wesentlich von der Projektion Gebrauch gemacht werden und ein rein geometrischer Weg eingeschlagen werden, um die Haupteigenschaften der einfachsten einzweideutigen Punktverwandtschaften der Ebene abzuleiten.

Wir nennen sie kurz die projektiven einzweideutigen Punktverwandtschaften und werden drei

Klassen unterscheiden: reducierte, halbreducierte und nicht reducierte. Die Bedeutung dieser Bezeichnungen wird sich später ergeben. Clebsch behandelt von den projektiven P. nur die reducierten, wie aus seinen Formeln hervorgeht. Es ist ihm also entgangen, dass es auch solche P. giebt, die sich nicht reducieren lassen.

Die projektiven e. P. bestehen darin, dass den Geraden der Systemebene $\mathfrak{s}$ die Kegelschnitte eines linearen Bündels, d. h. eines Netzes mit zwei festen Grundpunkten linear zugeordnet werden. Ein Strahlenbüschel verwandelt sich in ein Büschel von Kegelschnitten, das dem Bündel angehört, und ein Punkt $D$ bildet sich ab auf zwei Punkte $E'E''$. Denn er ist Träger eines Strahlenbüschels, das sich auf ein Kegelschnittsbüschel abbildet, das ausser den oben definierten Grundpunkten $XY$ sich noch in zwei andern Punkten $E'$ und $E''$ schneidet. Auf diese Weise werden die Punkte $D$ der Doppelebene zugeordnet gewissen Punktepaaren $E'E''$ der auf ihr liegend gedachten einfachen Ebene.

Ein Bündel von Kegelschnitten ist nun vollständig bestimmt durch die beiden Grundpunkte $X$ und $Y$ und zwei Punkte $C$ und $C'$ die für alle Kegelschnitte des Bündels konjugiert sind. So ergeben sich vier Arten von Bündeln.




Es können nämlich $X$ und $Y$ zusammenfallen (d. h. die Kegelschnitte gehen alle durch einen Punkt und haben in ihm eine gemeinsame Tangente) oder getrennt sein. Ferner kann von dem Paar konjugierter Punkte, das ausserdem noch gegeben sein muss, ein Punkt in der Verbindungslinie $z$ der Grundpunkte liegen, oder das Paar liegt frei. Damit sind alle eigentlichen Fälle erschöpft. Wir haben also vier Systeme von Bündeln und ihnen entsprechenden Verwandtschaften.

## § 2. Die projektiv erweiterte stereographische Projektion.

Um die Haupteigenschaften der verschiedenen Systeme von Kegelschnittbündeln klarzulegen, bedienen wir uns der projektiv erweiterten stereographischen Projektion (man vergleiche die im XXI. Band der Abhandlungen der math.-phys. Klasse der K. S. G. d. W. veröffentlichte Arbeit von Herrn Hofrat Thomä: Untersuchungen über einzweideutige Verwandtschaften und einige Erzeugnisse derselben (§ 5)).

1) Abbildung durch Vermittelung von Flächen zweiten Grades ohne singulären Punkt.

Die Abbildung der Punkte des Raumes auf Kegelschnitte durch zwei Punkte $XY$ wird in folgender Weise geleistet: Zu einem Punkt suche man für eine Fläche zweiten Grades $\Phi$ die Polarebene und projiciere den durch sie aus $\Phi$ geschnittenen Kegelschnitt in die Systemebene $\mathfrak{s}$ von einem beliebig gewählten Punkt $N$ der Fläche aus. Den Punkt $N$ nennen wir den Nordpol, die Tangentialebene in ihm die Nordpolebene ($n$). So verwandeln sich alle Kegelschnitte auf $\Phi$ bez. alle Punkte des Raumes in Kegelschnitte der Ebene $\mathfrak{s}$ durch die beiden Punkte $X$ und $Y$, in denen die durch $N$ gehenden Geraden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\Phi$ die Ebene $\mathfrak{s}$ treffen. Die Punkte der Tangentialebene des Nordpols, bez. die Kegelschnitte durch den Nordpol, bilden sich stereographisch ab auf Gerade (eigentlich plus die Gerade $z$, die $X$ und $Y$ verbindet). Die Geraden von $\Phi$ bilden sich stereographisch ab auf gerade Linien, die derselben Schar wie $\mathfrak{x}$ angehörenden auf gerade Linien durch $Y$, die derselben Schar wie $\mathfrak{y}$ angehörenden auf solche durch $X$.

Eine Gerade $g$ bildet sich ab auf ein Büschel von Kegelschnitten mit den Grundpunkten $XY\ P_1P_2$, wo $P_1P_2$ die Punkte sind, auf die sich die Schnittpunkte der Polaren $p_g$ von $g$ mit $\Phi$ stereographisch projicieren. Die drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels, nämlich $(XY)$ $(P_1P_2)$, ferner $(XP_1)$ $(YP_2)$ und $(XP_2)$ $(YP_1)$, sind die Bilder bez. des Punktes, in dem $g$ die Nordpolebene trifft, und der beiden Punkte, in denen sie $\Phi$ trifft.

Wir nennen $(P_1P_2)$ die Potenzlinie des Büschels, und $(G_1G_2)$ die Verbindungslinie der zwei nicht auf $z$ liegenden Nebenecken $G_1G_2$ des Vierecks $XY\ P_1P_2$, die zugleich die st. Projektionen der Schnittpunkte von $g$ und $\Phi$ sind, die Centrale des Büschels. Sie besitzt die Eigenschaft, Trägerin der Pole der Geraden $z$ für die Kegelschnitte des Büschels zu sein.

Die Polare $p_g$ von $g$ bildet sich ab auf ein Büschel von Kegelschnitten durch $XY\ G_1G_2$, für das $G_1G_2$ Potenzlinie und $P_1P_2$ Centrale ist. Die Tangenten der beiden durch einen Punkt gehenden Kegelschnitte der Büschel $(XY\ P_1P_2)$ und $(XY\ G_1G_2)$ sind harmonisch getrennt von den Verbindungslinien des Punktes mit $X$ und $Y$, weil ihnen auf $\Phi$ konjugierte Richtungen entsprechen. Wir nennen deshalb die beiden Büschel Orthogonalbüschel. Wären nämlich $X$ und $Y$ die absoluten Punkte, so wären die beiden Büschel zwei orthogonale Kreisbüschel. Sind $X$ und $Y$ reelle Punkte (also nur wenn $\Phi$ eine Fläche mit reellen Geraden ist), so sind die beiden Paare $P_1P_2$ und $G_1G_2$ gleichzeitig reell oder ideal aggregiert; sind $X$ und $Y$ ideal aggregiert, so ist immer nur eines der beiden Paare reell.

Der Involution konjugierter Punkte auf einer Geraden $g$ entspricht in der Ebene eine Involution zwischen den Individuen eines Büschels von Kegelschnitten, wobei die zerfallenden Kegelschnitte $(XP_1)$ $(YP_2)$ und $(XP_2)$ $(YP_1)$ Doppelelemente sind.

Eine Gerade $g_n$ der Nordpolebene bildet sich ab auf ein Büschel von Strahlen, dessen Träger der Punkt $Z$ ist, in dem ihre durch $N$ gehende Polare $g_N$ die Ebene $\mathfrak{s}$ trifft. $g_N$ bildet sich ab auf ein Büschel von sich in $X$ und $Y$ berührenden Kegelschnitten, zu denen das Geradenpaar $(ZX)$ $(ZY)$ gehört, denn sie bilden stereographisch solche Kegelschnitte auf $\Phi$ ab, die alle die Ebenen $(g_N\mathfrak{x})$ und $(g_N\mathfrak{y})$ berühren.

Eine Tangente $t$ bildet sich ab auf ein Büschel von Kegelschnitten, die in der Projektion des Berührungspunktes die Projektion der $t$ konjugierten Tangente $t'$ berühren.

Ebenen $(\mathfrak{e})$ kann man in zwei Weisen so durch gerade Linien erzeugen, dass sie die Eigenschaften der sie abbildenden Kegelschnittsmannigfaltigkeiten klar erkennen lassen.

a) Wir bringen die Polare der Geraden $(\mathfrak{e}n)$ zum Schnitt mit $\mathfrak{e}$. Sie geht durch den Pol $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{e}$ und trifft $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{Z}'$. Die Strahlen durch $\mathfrak{Z}'$ bilden sich ab auf Büschel von Kegelschnitten. Zu jedem Büschel gehört das Bild von $\mathfrak{Z}'$, es ist ein Kegelschnitt $\delta$ durch ($X$ und $Y$), für den $z$ und $Z$ Polare und Pol sind. Die Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{n})$ geben Gerade, die $\delta$ in zwei von $Z$ und $z$ harmonisch getrennten Punkten treffen, und die wir deshalb Durchmesser von $\delta$ nennen. Alle Kegelschnitte durch zwei diametral gegenüber, d. h. auf demselben Durchmesser liegende Punkte von $\delta$ und durch $X$ und $Y$, stellen Punkte von $\mathfrak{e}$ dar. Wir nennen deshalb $\delta$ den Diametralkegelschnitt, $Z$ den Mittelpunkt.

b) Denkt man die Ebene erzeugt durch die Tangenten an $\Phi$, die sie enthält (die ideal aggregierten gehören mit dazu), so ordnen sich die Bilder der Punkte in Berührungsbüschel an, d. h. in solche Kegelschnittsbüschel, die ausser $X$ und $Y$ noch einen Punkt und in ihm die Tangente gemein haben. Die Tangenten gehen durch $Z$, und sie sind die Projektionen der den von $\mathfrak{Z}$ an $\Phi$ gelegten

Tangentialkegel erzeugenden Geraden. Die Berührungsbüschel haben also die Eigenschaft, dass ihre gemeinsamen Tangenten alle durch einen Punkt $Z$ gehen, und dass die Berührungspunkte alle auf einem Kegelschnitt $\omega$ liegen, der stereographischen Projektion des Kegelschnitts, indem $\mathfrak{e}$ die Fläche $\Phi$ trifft. In jedem Punkt von $\omega$ ist die Richtung der Tangente an $\omega$ durch die Geraden nach $X$ und $Y$ von der Tangente des Berührungsbüschels harmonisch getrennt. Wir nennen deshalb $\omega$ den Orthogonalkegelschnitt des Bündels.

Folgende zerfallenden Kegelschnitte befinden sich in dem Bündel: die Geradenpaare $(OX)$ $(OY)$ wobei $O$ die Punkte von $\omega$ sind, diese Geradenpaare sind die Bilder der Punkte, in denen $\mathfrak{e}$ und $\Phi$ sich schneiden; ausserdem noch die Geraden durch $Z$ (eigentlich $+ z$).

Sind $X$ und $Y$ reell, so sind $\delta$ und $\omega$ beide reell, denn die Polarebenen der reellen Punkte $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}$ schneiden aus $\Phi$ zwei reelle Kegelschnitte heraus. Sind $X$ und $Y$ aggregiert ideal, so ist immer nur einer der beiden Kegelschnitte reell, der andere imaginär wie z. B. bei linearen Kreisbündeln.

$\delta$ und $\omega$ sind Bilder von $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}$, also von konjugierten Punkten hinsichtlich $\Phi$, also (s. S. 6 unten) ein Paar einer Involution von Kegelschnitten eines Doppelberührungsbüschels, dessen Doppelelemente $z \cdot z$ und $(ZX)$ $(ZY)$, als Bilder der Doppelelemente der im Raum auf $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'$ durch $\Phi$ bestimmten Involution sind. Legt man also durch $X$ (oder $Y$) eine Gerade, so werden, weil auf ihnen die Kegelschnitte eine ihnen projektive Punktreihe bestimmen, entsprechende Kegelschnitte der Involution eine Involution bestimmen, deren Doppelelemente $X$ und der Schnitt der Geraden mit $ZY$ (bez. $Y$ und der Schnitt der Geraden mit $ZX$) sind. Dies sind ja die Punkte, in denen die betr. Gerade von den Doppelelementen der Kegelschnittinvolution, ausser in $X$

bez. in $Y$ aufgefasst als Grundpunkten, noch geschnitten werden. Hieraus ergiebt sich die folgende Konstruktion von $\delta$ mit Hülfe von $\omega$ oder von $\omega$ mit Hülfe von $\delta$. Man ziehe alle Geraden $x$ durch $X$ und konstruiere auf ihnen die von $(x\omega)$ durch $X$ und den Schnitt mit $(YZ)$ harmonisch getrennten Punkte $D$. So erhält man $\delta$. Entsprechend kann man auch $Y$ und die Geraden $y$ durch ihn benutzen.

Geht die Ebene durch den Nordpol, so kann man sie durch lauter Strahlen, die $N$ enthalten, erzeugen. Wir erhalten also lauter Doppelberührungsbüschel mit den Grundpunkten $X$ und $Y$, für welche der Pol. $Z_1$ von $z$ sich auf einer Geraden $z_1$, dem Schnitt von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{s}$, befindet. Der Diametralkegelschnitt besteht hier aus der doppeltzuzählenden Geraden $z$, der Orthogonalkegelschnitt aus $z_1$ und $z_1$. Die Tangenten, durch die man sich hier die Ebene erzeugt denken kann, bilden sich wieder ab auf Berührungsbüschel. $z$ und eine beliebige Gerade durch $Z$, den vom Punkte $(z, z_1)$ durch $X$ und Y harmonisch getrennten Punkt, bilden Geradenpaare, von denen jedes einem solchen Büschel angehört, denn $Z$ ist der Punkt, in dem die Polare der Geraden $(\mathfrak{e}\, n)$ die Ebene $\mathfrak{s}$ trifft.

Es befinden sich also die folgenden Geradenpaare unter dem Bündel: die Verbindungslinien der Punkte von $z_1$ mit $X$ und $Y$, als Bilder der Punkte von $(\mathfrak{e}\ \Phi)$ und die Geraden durch $Z$ (eigentlich $+\ z$) als Bilder der Punkte $(\mathfrak{e}\ n)$.

---

Eine Tangentialebene liefert ein Nullbündel, d. h. ein Netz mit drei Grundpunkten. Wir bekommen nämlich durch die Abbildung dieser Ebene alle Kegelschnitte durch die drei Punkte $X$, $Y$ und $Z$, wo $Z$ die Projektion des Berührungspunktes ist. Enthält $(\mathfrak{e})$ die eine der Geraden $NX$ oder $NY$, so bekommen wir alle Kegelschnitte durch $X$

und $Y$, die in $X$ bez. $Y$ den Schnitt der Ebene mit $\mathfrak{s}$ berühren. Endlich die Nordpolebene $n$ selber bildet sich ab auf die Geraden der Systemebene $\mathfrak{s}$ (eigentlich $+ z$).

2) Die Abbildung durch Vermittelung des Kegels.

Hier können wir nicht in der Weise abbilden, wie bei der allgemeinen Fläche zweiten Grades, da hier keine eineindeutige Beziehung zwischen Pol und Polare besteht. Wir betrachten demnach den Raum als Ebenenmannigfaltigkeit und bilden ab, indem wir die Ebenen mit dem Kegel zum Schnitt bringen und diese Kegelschnitte wieder von $N$ aus auf $\mathfrak{s}$ stereographisch projicieren.

Eine Ebene bildet sich also ab auf einen Kegelschnitt, der auf $\mathfrak{s}$ durch den Punkt $X$ geht, in dem die Gerade $NS$ (unter $S$ die Spitze des Kegels verstanden) die Ebene $\mathfrak{s}$ trifft und dort die Gerade $x$ berührt, in der die Nordpolebene $n$ die Ebene $\mathfrak{s}$ schneidet.

Die Ebenen durch die Spitze bilden sich ab auf Geradenpaare, die Tangentialebenen auf doppeltzuzählende Geraden durch $X$.

Eine Gerade als Trägerin eines Ebenenbüschels bildet sich ab auf ein Büschel von Kegelschnitten, bei denen zwei Grundpunkte zusammenfallen. Sie gehen nämlich durch $X$ und berühren $x$. Die beiden anderen Grundpunkte sind die stereographischen Projektionen $G_1$ $G_2$ der Punkte, in denen die Gerade $g$ den Kegel trifft.

Eine Gerade $s$ durch $S$ bildet sich ab auf die Paare einer Strahleninvolution durch $X$. Doppelelemente sind die Projektionen der beiden Geraden $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{o}_1$, in denen die Polarebene von $s$ den Kegel schneidet.

Die Erzeugenden des Kegels bilden sich ab auf Geradenpaare, wobei ein Strahl des Paares immer die Projektion der Erzeugenden selbst ist. Eine Gerade durch $N$ bildet sich ab auf lauter Gerade, die sich auf den Punkt stützen, indem die Gerade die Ebene $\mathfrak{s}$ trifft. Eine Gerade in der

Ebene $n$ bildet sich ab auf ein Büschel mit vier zusammenfallenden Grundpunkten, eine Tangente auf ein Doppelberührungsbüschel, eine Gerade, die $NS$ schneidet, auf ein Schmiegungsbüschel.

Einen Punkt $\mathfrak{Z}$ bilden wir ab, indem wir alle Ebenen durch ihn legen, sie mit dem Kegel zum Schnitt bringen und die entstehenden Kegelschnitte von $N$ aus auf $\mathfrak{s}$ projicieren. Zunächst legen wir durch $\mathfrak{Z}S$ alle möglichen Ebenen und erhalten so lauter Geradenpaare einer Involution, von der $o$ und $o'$, die Projektionen von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$, die Doppelelemente sind. Ein Paar der Involution sind auch $x$ und $z$, die Gerade, die $X$ mit der Projektion $Z$ von $\mathfrak{Z}$ verbindet.

Wenn wir irgend eine Gerade $g$ ziehen, die $oo'$ in $O$ und $O'$ schneidet, so erhalten wir die zwei Tangenten, die von $Z$ aus an den durch $O$ und $O'$ gehenden Kegelschnitt des Bündels gehen, wenn wir $Z$ mit $O$ und $O'$ verbinden, und $O$ und $O'$ sind die Berührungspunkte. Denn wenn wir durch $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{Z}$ eine Ebene legen, so schneidet sie einen Kegelschnitt heraus, den die Geraden $\mathfrak{Z}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{O}'$ berühren. $g$, $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ sind so bestimmt: $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ sind die Punkte, deren Projektionen $O$ und $O'$ sind, und $\mathfrak{g}$ ihre Verbindungslinie. Die Geraden $\mathfrak{Z}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{O}'$ müssen sich nun einerseits auf $ZO$, $ZO'$ projicieren und andererseits auf die Tangenten des Kegelschnitts, auf den sich der durch $\mathfrak{g}\mathfrak{Z}$ aus dem Kegel herausgeschnittene Kegelschnitt stereographisch projiciert. — Wir erhalten also alle Kegelschnitte des Bündels, wenn wir alle Geraden der Ebene mit $oo'$ zum Schnitt bringen, dann $Z$ mit $O$ und $O'$ verbinden, und Kegelschnitte konstruieren, die $x$ in $X$, $ZO$ in $O$ berühren und $ZO'$ in $O'$. Dies ist nur scheinbar eine Ueberbestimmung der Kegelschnitte.

Zwei beliebige Kegelschnitte des Bündels schneiden sich ausser in $X$ noch in zwei Punkten, die auf einer Geraden durch $Z$ liegen, und deren Schnittpunkte von den Schnittpunkten dieser Geraden mit $o$ und $o'$ harmonisch getrennt liegen.

Zerfallende Kegelschnitte sind die Paare der Strahleninvolution mit den Doppelelementen $o$ und $o'$, und ausserdem die Geraden durch $Z$ (eigentlich $+ x$).

Liegt der Punkt in der Nordpolebene, so fallen die beiden Geraden $x$ und $z$ mit einander und mit einer der beiden Geraden $o$ und $o'$ zusammen, die andere wollen wir $y$ nennen. Wenn wir nun vom Punkt $\mathfrak{Z}$ aus Tangenten an den Kegel nach $\mathfrak{y}$ legen (dem Bild von $y$ auf dem Kegel) und eine Ebene sich um eine solche Tangente $\mathfrak{z}$ drehen lassen, so erhalten wir lauter $\mathfrak{z}$ berührende Kegelschnitte des Kegels, in der Ebene also ein Büschel von sich doppelt berührenden Kegelschnitten. Sie berühren sich einmal auf $x$ in $X$, wo $x$ ihre gemeinsame Tangente ist, und dann berühren sie sich noch einmal auf $y$, und zwar ist dort ihre gemeinsame Tangente eine Gerade $z$ durch $Z$. $z$ ist die Projektion von $\mathfrak{z}$, $Z$ wie immer, die von $\mathfrak{Z}$. Zwei Kegelschnitte des Bündels schneiden sich ausser in $X$ immer noch in zwei Punkten, die auf einer Geraden $z$ liegen und auf ihr durch ihre Schnittpunkte mit $z$ und $y$ harmonisch getrennt werden.

Wenn man von $\mathfrak{Z}$ aus die Tangenten an $NS$ zieht, alle Ebenen durch sie legt und ihre Schnitte mit dem Kegel dann stereographisch projiciert, so erhält man eine Anordnung in unendlich viele sich vierpunktig berührende Kegelschnitte; wir können also unser Bündel auch anordnen in einfach unendlich viele Büschel, jedes derselben mit vier zusammenfallenden Grundpunkten.

Zerfallende Kegelschnitte im Bündel sind die Geraden durch $Z$ (eigentlich $+ x$) und die Paare der Strahleninvolution mit den Doppelelementen $xy$.

Wenn der Punkt auf dem Kegel liegt, so erhalten wir ein Nullbündel mit zwei zusammenfallenden Grundpunkten, der dritte ist die Projektion des Punktes auf die Ebene. Liegt $\mathfrak{Z}$ im besonderen auf $NS$, so erhalten wir ein Schmiegungsbündel. $S$ liefert alle Geradenpaare durch $X$.

## § 3. Die Kegelschnittsbündel.

Wir wollen hier noch einmal die wesentlichen Eigenschaften der Kegelschnittsbündel zusammenstellen, die aus der Abbildung folgen. Zur genaueren Ausführung verweise ich auf die Arbeit von Herrn Hofrat Thomä „Ueber Kreissysteme", die im 29. Jahrgang von Schlömilchs Zeitschrift veröffentlicht ist. Sie enthält die folgenden Sätze zum grossen Teil, aber nicht rein projektiv abgeleitet.

Die Kegelschnittsbündel, wie wir sie definiert haben, sind sämtlich Bilder von zweifachen linearen Mannigfaltigkeiten (den Punkten einer Ebene oder der Ebenen durch einen Punkt). Daraus ergeben sich folgende Sätze:

Durch drei Kegelschnitte, die nicht in einem Büschel liegen und zwei Grundpunkte $XY$ gemein haben (wenn im folgenden von Kegelschnitten die Rede ist, so ist immer angenommen, dass sie durch die beiden Grundpunkte gehen), ist ein Bündel bestimmt.

Ein Büschel hat mit einem Bündel entweder nur einen Kegelschnitt gemein, oder es fällt ganz hinein.

Ein Bündel enthält zweifach unendlich viele Büschel und lässt sich auf zweifach unendliche Weise in Büschel anordnen, die einen Kegelschnitt gemein haben.

Es ergiebt sich folgende Konstruktion, um aus drei Kegelschnitten $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ des Bündels den Orthogonalkegelschnitt zu konstruieren. Man bringe die $(\gamma_1\,\gamma_2)$ gemeinsame Potenzlinie mit der von $(\gamma_2\,\gamma_3)$ zum Schnitt. Durch diesen Schnittpunkt $Z$ geht auch die Potenzlinie von $(\gamma_1\,\gamma_3)$. Von

$Z$ aus lege man die Tangenten an alle drei Kegelschnitte. Die sechs Punkte, in denen sie berühren, sind Punkte von $\omega$. Man kann auch $Z$ mit $X$ und $Y$ verbinden; $\omega$ enthält auch $X$ und $Y$ und berührt $ZX$ bez. $ZY$ in $X$ bez. $Y$.

Die Geraden, auf denen die Punktepaare liegen, in denen die Kegelschnitte eines Bündels sich schneiden, gehen alle durch einen Punkt $Z$, den Potenzpunkt des Bündels. Der Diametralkegelschnitt besteht aus den Punktepaaren auf den Geraden durch $Z$, welche den beiden Involutionen auf diesen Geraden gemein sind, die durch $Z$ und $(\mathfrak{z})$ bez. die Schnittpunkte mit $\omega$ als Doppelelemente bestimmt sind.

Gegenüber-, d. h. auf einer Geraden durch $Z$ liegende Punkte des Orthogonalkegelschnittes besitzen die Eigenschaft, für alle Kegelschnitte eines Bündels konjugiert zu sein. Denn wenn wir einen Punkt $O$ von $\omega$ mit $Z$ durch eine Gerade verbinden, die $\omega$ noch einmal in $O'$ trifft, so bestimmen immer das Geradenpaar $(OX)$ $(OY)$ und ein beliebiger Kegelschnitt $\gamma$ des Bündels ein Büschel, das dem Bündel ganz angehört. Im Raume bedeutet diese Konstruktion, dass wir einen Punkt von $\mathfrak{e}$, den $\gamma$ abbildet, mit dem Punkt $O$ verbinden, wo $O$ einer der beiden Punkte ist, in dem die Tangenten $\Phi$ berühren, die auf $\mathfrak{e}$ von einem Punkte $(\mathfrak{e}\ \mathfrak{n})$ aus gezogen sind, den $(OO'Z)$ abbildet. Die Gerade trifft natürlich auch die andere Tangente, d. h. nach dem, was wir über die Abbildung von Tangenten wissen, unter dem Büschel befindet sich auch ein $OZ$ in $O'$ berührender Kegelschnitt. $OO'$ sind also Doppelpunkte der Involution, die ein Büschel von Kegelschnitten, dem auch $\gamma$ angehört, auf $OO'Z$ bestimmt, also sieht man: Zwei gegenüberliegende Punkte sind für jeden Kegelschnitt des Bündels einander konjugiert.

Umgekehrt beweist man leicht, dass alle Kegelschnitte durch zwei feste Punkte $XY$, für die zwei Punkte $CC'$ einander konjugiert sind, zum Ort der

Paare von allen konjugierten Punkten einen Kegelschnitt $\omega$ besitzen, dass überhaupt die in § 1 gegebene Definition von Kegelschnittsbündeln mit der in § 2 gegebenen vollständig übereinstimmt.

Die vier in § 1 gegebenen Systeme sind dieselben wie in § 2, wovon wir uns überzeugen wollen.

1) $X$ und $Y$ liegen getrennt auf der Geraden $z$, und von den Punkten $C$ und $C'$ liegt keiner auf $z$. Sucht man nun auf $CC'$ den von $(z)$ durch $C$ und $C'$ harmonisch getrennten Punkt $Z$, verbindet $Z$ mit $X$ und $Y$ und legt dann durch $X$ und $Y$ einen $ZX$ und $ZY$ berührenden Kegelschnitt $\omega$ durch $C$, der daher auch $C'$ enthält, so ist $\omega$ der Orthogonalkegelschnitt eines Bündels im Sinne des § 2, und nach dem eben bewiesenen Satze sind $C$ und $C'$ für alle Kegelschnitte des Bündels konjugiert. Jeder Kegelschnitt des Orthogonalbündels $\omega$ gehört also sicher dem Bündel nach der ersten Definition an. Auch das Umgekehrte gilt. Denn gäbe es einen zum $\omega$-Bündel nicht gehörigen Kegelschnitt $\gamma'$ so würde jeder Kegelschnitt durch $XY$ die Eigenschaft haben, dass $C$ und $C'$ für ihn konjugierte Punkte sind. Nehmen wir nämlich einen beliebigen Kegelschnitt $\gamma''$, dann bestimmen $\gamma'\gamma''$ ein Büschel, das mit dem Orthogonalbündel sicher nur einen Kegelschnitt $\gamma'$ gemein hat. $\gamma'\gamma_1$ und ein beliebiger Kegelschnitt $\gamma_2$ des $\omega$-Bündels bestimmten dann ein Bündel, für das $CC'$ ein Paar konjugierter Punkte wäre und dem auch $\gamma''$ angehört, was unmöglich ist, denn es giebt Kegelschnitte, für die $CC'$ nicht konjugiert sind.

2) $X$ und $Y$ fallen zusammen, d. h. die Kegelschnitte sollen eine Gerade $x$ in einem Punkt $X$ berühren, und die Punkte $CC'$ liegen beide von $x$ getrennt. Man konstruiere auf $CC'$ den von $(x)$ durch $C$ und $C'$ harmonisch getrennten Punkt $Z$. $C$ und $C'$ verbinde man mit $X$ durch die Geraden $o$ und $o'$. Wenn man nun alle Kegelschnitte kon-

struiert, die $X$ in $x$ berühren und die Polare von $Z$ auf $o$ und $o'$ schneiden, so erhält man das Bündel.

Hier führen wir den Beweis des Satzes, dass gegenüber liegende Punkte des Orthogonalkegelschnitts $o \cdot o'$ für alle Kegelschnitte des Orthogonalbündels konjugiert sind, besser in der Ebene. Man konstruiere zu einem Punkte $O$ von $o$ die Polare $p$ für einen Kegelschnitt $\gamma$ des Bündels. Sie trifft $x$ in einem Punkte $X'$ und die durch $X'$ gehenden Geraden $X'X = x$ und $X'Z$ sind von $p$ und $X'O$ harmonisch getrennt, da $X'Z$ ja nach der Definition des Bündels den Kegelschnitt $\gamma$ in dem Punkt berührt, wo er $o$ schneidet, oder da die Tangente an $\gamma$ in diesem Punkt, die durch $X'$ geht, auch $Z$ enthalten muss. Die vier genannten Strahlen sind also harmonisch, da sie auf $o$ liegende harmonische Punkte projicieren. Sie müssen also $ZO$ in vier harmonischen Punkten treffen ($X''OZP$). Anderseits wird die Gerade $ZO$ von $x$, $o$, $XZ = z$, $o'$ in vier harmonischen Punkten $X''OZO'$ getroffen, also fallen $O'$ und $P$ zusammen, d. h. die gegenüberliegenden Punkte $OO'$ sind einander konjugiert. Dass auch hier das Bündel eindeutig bestimmt ist, folgt genau wie oben.

3) $X$ und $Y$ liegen getrennt, einer der Punkte des Paares, $C$, liegt auf ihrer Verbindungslinie $z$. Es ist klar, dass ausser $C'$ dem Punkte $C$ noch alle Punkte der Geraden $z$ konjugiert sind, die $C'$ mit dem auf $z$ von $C$ durch $X$ und $Y$ harmonisch getrennten Punkt verbindet. Wir erhalten also dasjenige Kegelschnittsbündel in § 2, das sich durch Abbildung einer durch den Nordpol gelegten Ebene ergab. Im übrigen gilt auch wieder der Satz, dass alle gesuchten Kegelschnitte dem Bündel angehören.

4) Die Kegelschnitte sollen $x$ in $X$ berühren, und es liegt $C$ auf $x$. Hier ist klar, dass jeder Punkt der Verbindungslinie $C'X$ für alle Kegelschnitte des Bündels dem Punkte $C$ konjugiert ist, d. h. wir erhalten das Bündel, das

sich in § 2 durch Abbildung eines Punktes der Nordpolebene des Kegels ergab. $y$ ist hier die Gerade $C'X$, $C$ der Punkt $Z$.

## § 4. Die involutorischen quadratischen Cremonaschen Verwandtschaften.

Für die Theorie der quadratischen Cremonaschen Verwandtschaften lässt sich durch die stereographische Projektion manches gewinnen, und sie lässt sie alle unter einem einheitlichen Gesichtspunkt erscheinen. Da ausserdem diese Verwandtschaften in wichtiger Beziehung zu den einzweideutigen projektiven stehen, so wollen wir hier kurz ihre verschiedenen Arten zusammenstellen.

1) Die Steinersche Verwandtschaft (vgl. J. Thomä, Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung, S. 121).

Ein Kegelschnittsbüschel $\Sigma$ ist gegeben, dann ist jedem Punkt im allgemeinen nur ein Punkt für alle Kegelschnitte des Büschels konjugiert. Dadurch ist eine eineindeutige Beziehung gegeben.

a) Wenn die vier Grundpunkte des Büschels getrennt liegen, so erhalten wir ein Nullbündel von Kegelschnitten durch die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks als Bild der Geradenmannigfaltigkeit.

b) Fallen zwei Grundpunkte des Bündels zusammen, etwa $X_3$ und $X_4$, so dass also die Kegelschnitte $X_1 X_2$ enthalten und $x$ in $X$ berühren, und bezeichnen wir mit $Y$ den Schnittpunkt von $x$ mit $X_1 X_2$, so sehen wir: Wenn ein Punkt eine Gerade durchläuft, so drehen sich seine Polaren für die beiden zerfallenden Kegelschnitte $x \cdot (X_1 X_2)$ und $(XX_1)$ $(XX_2)$ resp. um $Y$ und $X$. Dem Schnittpunkt der Geraden mit $x$ entspricht stets der von $x$ durch $(XX_1)$ und $(XX_2)$ harmonisch getrennte Strahl $y$ hinsichtlich des einen Geradenpaares, und $x$ hinsichtlich des andern Geradenpaares.

$y$ also ist der Strahl, der der Verbindungslinie der Centren der projektiven Strahlenbüschel $Y$ und $X$ in der das Bild der Geraden erzeugenden Projektivität entspricht, d. h. also wir erhalten lauter Kegelschnitte durch $Y$ und $X$, die $y$ in $X$ berühren. Die Geraden durch $Y$ bilden sich ab auf Gerade durch $Y$ $(ty)$, die durch $X$ auf sich selbst $(tx)$.

c) Ein Doppelberührungsbüschel liefert keine Steinersche Verwandtschaft, da der Punkt, der einem bel. Punkt für alle Kegelschnitte konjugiert ist, auf der Doppelsehne, der Verbindungslinie der beiden Grundpunkte liegt (Thomä, Kegelschnitte, S. 122). Einem Punkt auf der Doppelsehne $z$, die die Grundpunkte $X$ und $Y$ verbindet, entspricht ein Strahl durch $Z$, den Pol der Doppelsehne, und den auf $z$ von dem Punkt durch $X$ und $Y$ harmonisch getrennten; umgekehrt einer Geraden durch $Z$ im allgemeinen nur ein Punkt. Nur dem Punkt $Z$ dieser Geraden entspricht die ganze Gerade $z$. Den Punkten $X$ und $Y$ entsprechen die Geraden $ZX$ und $ZY$.

Fallen $X$, $Y$ und $Z$ zusammen, so haben wir ein Büschel mit vier zusammenfallenden Grundpunkten und die Abbildung wird natürlich auch hier uneigentlich. Ein Punkt hat für alle Kegelschnitte dieselbe Polare, wenn er auf der Tangente $x$ durch den Punkt $X$ liegt. Also bilden sich alle Punkte einer Geraden durch $X$ auf einen Punkt von $x$ ab, und $X$ auf alle Punkte von $x$.

d) Das Schmiegungsbüschel.

Sei $x$ die Schmiegungstangente, $X$ der auf ihr liegende dreifache Grundpunkt, und $Y$ der vierte Grundpunkt, ferner sei die Gerade $XY$ mit $y$ bezeichnet. Wenn nun ein Punkt eine Gerade $g$ durchläuft, so dreht sich seine Polare für $x \cdot y$ und $X$, die für einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ des Büschels um den Pol $P$ von $g$ für $\mathfrak{k}$. Dem Punkte $(gx)$ entspricht einerseits die Gerade $PX$ (für $\mathfrak{k}$), andrerseits $x$, d. h. für den Kegelschnitt auf den sich $g$ abbildet, und der durch projektive Strahlenbüschel mit den Trägern $P$ und $X$ erzeugt wird, ist $x$ Tangente in $X$. Wir erhalten also als Bilder der Geraden der Ebene jedenfalls $\infty^2$ Kegelschnitte, die sich in $X$ berühren. Da nun zwei Kegelschnitte der entstehenden Mannigfaltigkeit ausser $X$ nur einen Punkt gemein haben, so folgt, dass sie ein Schmiegungsbündel bilden, für das $x$ Schmiegungstangente ist.

Die Steinersche Verwandtschaft liefert also drei eigentliche Abbildungen, nämlich a, b, und d, bei denen die Geraden sich abbilden auf Kegelschnitte durch drei Grundpunkte, die getrennt liegen, oder von denen zwei, oder die alle drei zusammenfallen.

2) Die Möbiussche Verwandtschaft.

Um einen Punkt $P$ abzubilden, verbinde man ihn mit einem gegebenen festen Punkt $Z$ und bringe diese Gerade zum Schnitt mit der Polare für einen gegebenen festen Kegelschnitt $\omega$.

a) Wenn der Kegelschnitt $\omega$ ein eigentlicher ist, und $XY$ die Punkte sind, in denen die Polare $z$ von $Z$ ihn schneidet, so erhält man als Bilder der Geraden alle Kegelschnitte durch $XYZ$ (vgl. Thomä, Kegelschnitte, S. 121, Zw. — zw. Verw. § 1—3).

b) Wenn $Z$ auf $\omega$ fällt, so erhalten wir ein Schmiegungsbündel. Die entstehenden Kegelschnitte berühren nämlich alle die Tangente $z$ an $\omega$ in $Z$, da dem Punkte $(gz)$ einerseits der Strahl $z$ als Verbindungslinie mit $Z$, andrerseits $(PZ)$ als Polare von $(gz)$ für $\omega$ zugeordnet ist ($P$ ist der Pol von $g$ für $\omega$). Da je zwei Kegelschnitte ausser $Z$ nur einen beweglichen Punkt gemein haben, so folgt, dass $z$ die gemeinsame Schmiegungstangente ist.

c) Wenn $\omega$ zerfällt und $Z$ liegt nicht darauf, so erhalten wir ein Nullbündel mit zwei zusammenfallenden Grundpunkten. Das Bild einer Geraden wird erzeugt durch projektive Zuordnung von zwei Strahlenbüscheln, deren Centren

$Z$ und der Doppelpunkt $X$ von $\omega$ sind. Dem Schnittpunkt von $g$ mit $(XZ)$ entspricht $(XZ)$ und $x$, der von $(XZ)$ durch $\omega$ harmonisch getrennte Strahl. Wir erhalten also Kegelschnitte durch $Z$, die $x$ in $X$ berühren.

d) Wenn $Z$ auf dem zerfallenden $\omega$ liegt, so ergiebt sich die harmonische Homographie als uneigentlicher Fall. Ist $X'$ der Scheitel, so entsprechen den Geraden zerfallende Kegelschnitte, nämlich Paare von Geraden, von denen die eine $(ZX)$ fest ist.

In den Fällen a, b, c werden ebenso wie in den drei Steinerschen Verwandtschaften a, d, b die Geraden den Kegelschnitten eines Nullbündels linear zugeordnet. Daraus folgt, dass jede eigentliche Steinersche sich in eine eigentliche Möbiussche Verwandtschaft überführen lässt und umgekehrt (vgl. Thomä, Zw. — zw. V. § 5).

3) Ableitung der Möbiusschen Verwandtschaften aus dem Raum.

Die Möbiusschen Verwandtschaften kann man alle erhalten, indem man eine Fläche zweiten Grades von zweien ihrer Punkte aus projiciert, oder indem man die Projektionen der beiden Punkte, in denen die von einem Punkt ausserhalb der Fläche zweiten Grades gezogenen Strahlen sie schneiden, von einem ihrer Punkte $N$ aus, einander zuordnet.

Sei also $\Phi$ gegeben und ein Punkt $\mathfrak{Z}$ ausserhalb, und $\mathfrak{z}$ sei die Polarebene von $\mathfrak{Z}$. Wir ziehen dann durch $\mathfrak{Z}$ eine Gerade, die $\Phi$ in $N$ und $N'$ und $\mathfrak{z}$ in $Z$ trifft. Bildet man nun $\mathfrak{z}$ auf sich selbst ab, indem man $\Phi$ von $N$ und $N'$ ausprojiciert, oder indem man die beiden Punkte, in denen ein von $\mathfrak{Z}$ ausgehender Strahl $\Phi$ schneidet, von $N$ oder von $N'$ aus projiciert, so erhält man dreimal dieselbe Möbiussche Verwandtschaft mit drei getrennten Grundpunkten.

a) Wenn wir in irgend einer der drei hier angegebenen Weisen $\Phi$ doppelt projicieren, so bleibt zunächst jeder Punkt der Ebene $\mathfrak{z}$ auf dem Radius vector durch $Z$. Um also eine Vorstellung der Abbildung zu haben, genügt es, wenn man einen Meridianschnitt durch die Achse $ZN\mathfrak{Z}N'$ untersucht. Wenn man nun von $\mathfrak{Z}$ aus einen Strahl zieht, der den Meridianschnitt $\varphi$ von $\Phi$ in $P$ und $P'$ trifft, so erhält man, da $\mathfrak{Z}Z$ und der Schnitt der Meridianebene mit $\mathfrak{z}$ der Voraussetzung nach konjugierte Gerade sind, dasselbe Punktepaar auf $(\mathfrak{z})$, wenn man $P$ und $P'$ von $N$ oder von $N'$ aus projiciert, oder wenn man $P$ oder $P'$ von $N$ und $N'$ aus projiciert. In allen drei Fällen erhalten wir dasselbe Paar $QQ'$ der Involution, die der Kegelschnitt $\varphi$ auf $(\mathfrak{z})$ bestimmt. Dies gilt in jedem Meridianschnitt. Man kann auch sagen: Immer wird einem Punkt $Q$, der auf derselben Geraden durch $Z$ liegende Punkt $Q'$ der dem Kegelschnitt $\omega = (\mathfrak{z}\Phi)$ konjugierten Involution zugeordnet. Wir erhalten also die **Möbiussche** Verwandtschaft mit drei getrennten Grundpunkten $XY$ und $Z$. $XY$ sind die Punkte, in denen das Geradenpaar durch $N$ und durch $N'$ sich auf $\mathfrak{z}$ treffen, sie liegen auf der $NN'$ hinsichtlich $\Phi$ konjugierten Geraden $z$. Umgekehrt kann man jede **Möbiussche** Verwandtschaft durch Doppelprojektion einer Fläche zweiten Grades erzeugen. Man braucht, wenn $\omega$ und $z$ gegeben sind, nur einen beliebigen Punkt $N$ im Raum mit $X$ und $Y$, den Schnittpunkten der Polaren $z$ von $Z$ mit $\omega$, zu verbinden, und durch $\omega$ und $NX$ und $NY$ eine Fläche zweiten Grades zu legen. Die beiden Ebenen $NXZ$ und $NYZ$ sind dann notwendig Tangentialebenen an $\Phi$ in $X$ und $Y$, denn sie enthalten je zwei Tangenten. Sie schneiden sich in einer Geraden durch $N$ und $Z$, die Gerade $NZ$ ist demnach Trägerin des Poles $\mathfrak{Z}$ der Ebene $(\mathfrak{z})$, und wenn wir nun wie oben verfahren, so erhalten wir die **Möbiussche** Verwandtschaft.

b) Beim Kegel erhalten wir, wenn wir eine Ebene durch die Spitze legen, dann irgend einen Pol dieser Ebene

$\mathfrak{Z}$ nehmen, und auf einer Geraden durch ihn die Schnitte $N$ und $N'$ mit dem Kegel, und im übrigen genau verfahren wie unter a, das Bild einer Möbiusschen Verwandtschaft mit zerfallendem $\omega$ (Seite 19, c). $\omega$ ist hier natürlich wieder der Kegelschnitt $(\mathfrak{z}\Phi)$ und $Z$ der Punkt, in dem die Ebene $\mathfrak{z}$ von $(\mathfrak{Z}N)$ getroffen wird.

In diesen beiden Fällen a und b ist es gleichgültig, ob man sagt: Ich projiciere die Fläche von $N$ und $N'$ aus, oder: Ich nehme einen Punkt $\mathfrak{Z}$ an, ziehe durch ihn eine Gerade und projiciere dann die beiden Punkte, in denen er $\Phi$ schneidet, von einem Punkte der Fläche aus.

Es giebt aber auch solche Verwandtschaften, bei denen nur eine der beiden Definition statthaft ist, nämlich:

c) Nimmt man einen Punkt $\mathfrak{Z}$ in der Tangentialebene von $N$ an und legt durch ihn die Geraden und projiciert von $N$ aus die beiden Punkte, in denen sie $\Phi$ schneiden auf die Ebene $\mathfrak{s}$, die nicht mit der Polarebene $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{Z}$ identisch sein darf, so ist hier offenbar nur die zweite Definition zulässig, da $N$ und $N'$ zusammenfallen. Auf jeder Geraden durch $Z$ der Spur von $\mathfrak{Z}N$ auf $\mathfrak{s}$, erhalten wir auch hier eine Involution, wo von $Z$ der eine Doppelpunkt ist und der Schnitt mit $\mathfrak{z}$ der andere. $\omega$ zerfällt also, und wir haben die harmonische Homographie.

d) Dasselbe gilt wenn man $\mathfrak{Z}$ in der Nordpolebene eines Kegels annimmt.

Eine Möbussche Verwandtschaft giebt es auch, bei der nur die erste Definition zulässig ist. Wenn nämlich $N$ und $N'$ auf derselben Erzeugenden eines Kegels liegen, so erhalten wir (S. 13, § 2 am Ende) das Schmiegungsbündel, und es ist auf keine andere Weise möglich, das Schmiegungsbündel zu erhalten.

## § 5. Ueberblick über die verschiedenen Arten von einzw. p. P. und ihre Beziehungen zu den Möbiusschen Verwandtschaften.

In § 1 wurden die projektiven einzweideutigen Punktverwandtschaften definiert durch lineare Zuordnung der Geraden und der Kegelschnitte eines Bündels; in § 2 fanden wir, dass man alle Bündel erhalten kann, indem man alle Ebenen durch einen Punkt legt, sie mit einer Fläche zweiten Grades $\Phi$ zum Schnitt bringt und diesen Schnitt dann von einem Punkt $N$ der Fläche aus projiciert. Hieraus kann man schliessen, und wir werden es später streng beweisen, dass man alle Verwandtschaften durch Doppelprojektion einer Fläche zweiten Grades erhalten kann, indem man als Projectionscentren einen Punkt $N$ auf der Fläche und einen $\mathfrak{Z}$ ausserhalb derselben wählt.

Es giebt nun drei verschiedene Klassen von Verwandtschaften.

1) Am einfachsten ist natürlich die Lage, in der man eine Ebene von ihrem Pol $\mathfrak{Z}$ aus auf die Fläche $\Phi$ projiciert und dann das Punktepaar, indem der Projektionsstrahl die Fläche schneidet, von einem Punkt $N$ der Fläche aus wieder auf die Ebene projiciert. Diese Lage kann man nur bei Bündeln erreichen, in denen $Z$ von $\omega$ getrennt liegt, oder was auf dasselbe hinauskommt, $\mathfrak{Z}$ nicht in der Tangentialebene des Nordpols. Solche Systeme — es sind die in § 3 unter 1 und 2 angeführten (Seite 15) — nennen wir **reducierbar**, denn sie lassen sich durch Kollineation stets in die reducierte Lage bringen, die dadurch charakterisiert ist, dass ein Kegelschnitt Punkt für Punkt nur auf sich selbst abgebildet wird, nämlich der Kegelschnitt ($\Phi\ \mathfrak{s}$).

2) Liegt $\mathfrak{Z}$ in der Nordpolebene, so kann man zur Systemebene niemals die Polarebene von $\mathfrak{Z}$ nehmen, weil diese ja durch $N$, das zweite Projektionscentrum, hindurch-

geht. Hierher gehören die Systeme 3 und 4 (Seite 16). Natürlich kann man aber auch die Kollineation zwischen den Geraden der Ebene und den Kegelschnitten eines Bündels der Form $\underset{\smile}{1}$ oder $\underset{\smile}{2}$ herstellen, in dem man bei der doppelten Projektion von $\Phi$ zum Punkte $\mathfrak{Z}$ nicht den Pol der Ebene $\mathfrak{s}$ wählt. Wir nennen so eine Verwandtschaft halbreduciert. Die halbreducierte Lage ist dadurch charakterisiert, dass jeder Punkt des Kegelschnitts ($\Phi$, $\mathfrak{s}$) einerseits auf sich selbst, andrerseits auf den Punkt eines andern Kegelschnitts abgebildet wird.

3) Reducierte und halbreducierte Verwandtschaft stehen nun in enger Beziehung zu den Möbiusschen Verwandtschaften. Nehmen wir nämlich an, dass die unter 1 und 2 gegebene Definition der r. und h. Verwandtschaften durch Vermittelung von Flächen zweiten Grades wirklich allgemeingültig sind, so sehen wir: Sowohl bei einer reducierten, wie bei einer halbreducierten Verwandtschaft bilden sich Punkte $D$ auf einer Geraden durch $Z$, den Schnittpunkt von $NZ$ mit der Systemebene $\mathfrak{s}$, ab auf ihnen projektiv zugeordnete Paare $E'$ $E''$ einer Involution auf derselben Geraden. Diese Involution ist einfach die Projektion der Involution, die die Strahlen durch $\mathfrak{Z}$ auf dem Kegelschnitt bestimmen, dem die Ebene durch $\mathfrak{Z}N$ und die betrachtete Gerade aus $\Phi$ herausschneidet. Nach § 4, 3 besteht also zwischen den Punkten $E'$ und $E''$ eine Möbiussche Verwandtschaft, und zwar ist dies, wie man sich leicht überzeugt, bei 1 die M. V. mit drei getrennten Grundpunkten, bei 2 fallen zwei Grundpunkte zusammen, bei 3 und 4 die harmonische Homographie. Dagegen giebt es keine e. p. V., bei der die Möbiussche Verwandtschaft $E'$ $E''$ diejenige ist, welche gerade Linien in Kegelschnitte eines Schmiegungsbündels verwandelt; denn es können hier nur solche Verwandtschaften in Betracht kommen, die entstehen wenn man die beiden Punkte, in denen ein von einem Punkt $\mathfrak{Z}$ ausser-

halb $\Phi$ ausgehenden Strahl $\Phi$ schneidet, von $N$ aus projiciert, und zu diesen gehört die letztgenannte nach § 4, 3 d nicht.

4) Fügt man nun zu einer reducierten oder halbreducierten Verwandtschaft noch eine Kollineation, so erhalten wir eine allgemeine einzweideutige Punktverwandtschaft. Dabei giebt es keine Kurve mehr, die Punkt für Punkt auf sich selbst abgebildet wird, sondern wir haben im allgemeinen nur fünf Punkte $D$, die die Eigenschaft besitzen, dass ein Punkt des zugeordneten Paares $E' E''$ mit $D$ zusammenfällt. Diese allgemeine Verwandtschaft nennen wir die nichtreducierte.

Wir wollen nun die drei Arten von Verwandtschaften der Reihe nach untersuchen und bei jeder die Abbildung aus der doppelten in die einfache und aus der einfachen in die doppelte Ebene und die Determination aus der notwendigen und hinreichenden Zahl von Elementen angeben.

## § 6. Die reducierten Verwandtschaften.

Wir beweisen zunächst den allgemeinen Satz: die im vorigen § unter 1 gegebene räumliche Definition von reducierten Verwandtschaften ist identisch mit der folgenden Definition durch gerade Linien: Ist ein Bündel gegeben mit dem Orthogonalkegelschnitt $\omega$ und dem Potenzpunkt $Z$, so bringe man die geraden Linien, um sie abzubilden, mit $\omega$ zum Schnitt und lege durch die beiden Punkte, in denen sie $\omega$ schneiden, die Kegelschnitte des Bündels.

Um die Identität nachzuweisen, bringe man die Polare $z$ von $Z$ mit $\omega$ zum Schnitt und verbinde einen Punkt $N$ im Raum mit den Punkten $X$ und $Y = (z\omega)$ durch gerade Linien, man lege dann durch $\omega$ und das Geradenpaar $(NX)$ $(NY)$ eine Fläche zweiten Grades $\Phi$; der Pol $\mathfrak{Z}$ der Systemebene $\mathfrak{s}$ liegt dann auf der Geraden $\mathfrak{Z}\,Z$. Der nun folgende Beweis ist identisch mit dem auf Seite 20. Wenn man nämlich $\mathfrak{Z}Z$ mit $\Phi$ zum Schnitt bringt, und $\Phi$ von $Z$ und einem der Punkte $N$ aus projiciert, in denen $\mathfrak{Z}Z$ die Fläche $\Phi$ schneidet, so erhält man auf der Ebene $\mathfrak{s}$ eine Zuordnung die die Geraden in die Kegelschnitte des Bündels $(Z\omega)$ verwandelt und $\omega$ auf sich selbst abbildet. Es ist also evident, dass die räumliche Definition und die Definition durch gerade Linien für die unter 1 im vorigen § genannten reducierten Verwandtschaften identisch ist.

Wir wollen, da die räumliche Definition einfacher ist und leichter zu Resultaten führt, nur diese benützen, und behandeln:

I. Die reducierte Verwandtschaft mit nicht zerfallendem $\omega$.

1) Die Abbildung aus der doppelten Ebene $D$ in die einfache $E$.

Wir bilden also folgendermassen ab: Gegeben ist eine Fläche zweiten Grades $\Phi$, ein Punkt $\mathfrak{Z}$ im Raum, dessen Polarebene die Systemebene $\mathfrak{s}$ ist, und der Punkt $N$ auf $\Phi$. Um eine gerade Linie abzubilden, projicieren wir sie von $\mathfrak{Z}$ aus auf $\Phi$ und den entstehenden Kegelschnitt von $N$ aus auf $\mathfrak{s}$.

a) Gerade Linien bilden sich dann nach § 2 ab auf Kegelschnitte eines Bündels, dessen Orthogonalkegelschnitt $\omega = (\mathfrak{s}\Phi)$ und dessen Potenzpunkt $Z$ der Schnitt von $N\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{s}$ ist. Die Geraden eines Strahlenbüschels bilden sich ab auf Kegelschnitte eines Büschels, und die Kegelschnitte sind den Strahlen projectiv zugeordnet, weil diese die Polaren von $Z$ hinsichtlich des entstehenden Kegelschnittbüschels sind. Gerade Linien durch einen Punkt $O$ von $\omega$ geben einen Büschel von Kegelschnitten, die in $O$ die Gerade $OZ$ berühren. Die Geraden durch $X$ liefern ein Büschel, das sich in $X$ an $\omega$ anschmiegt, entsprechend das Büschel durch

$Y$. Die Gerade $z$ bildet sich ab auf den Diametralkegelschnitt, denn eine durch $z$ und $\mathfrak{Z}$ gelegte Ebene ist Polarebene von $Z$, ihr Bild ist also $\delta$.

Die folgenden Geraden bilden sich ab auf zerfallende Kegelschnitte: die Tangenten am $\omega$ geben Geradenpaare $(OX)$ $(OY)$, da die sie projicierenden Ebenen durch $\mathfrak{Z}$ Tangentialebenen sind. Ferner bilden sich die Geraden durch $Z$ ab auf sich selbst $(+z)$, weil die Achse $Z\mathfrak{Z}$ mit $ZN$ zusammenfällt.

b) Abbildung von Punkten.

Ein Punkt allgemeiner Lage bildet sich ab auf zwei Punkte, nämlich auf die von $XY$ verschiedenen Grundpunkte des Büschels, auf den die durch ihn gehenden Geraden sich abbilden.

Auf nur einen Punkt, und zwar auf sich selbst, bilden sich ab die Punkte von $O$, weil die Geraden $\mathfrak{Z}\omega$ Tangenten an $\Phi$ sind. Ein Punkt $O$ bildet sich ab auf zwei zusammenfallende Punkte, und die Kurve $\omega$ nennen wir in ihrer Eigenschaft, Trägerin derjenigen Punkte der Doppelebene zu sein, die nur einem Punkt in der einfachen Ebene entsprechen, also in denen gleichsam die beiden Blätter der Doppelebene zusammenhängen, den Uebergangsort. $Z$ bildet sich unbestimmt ab, nämlich auf $N$ und von da aus auf jeden Punkt von $z$. Ein Punkt $D$ auf $x$ bildet sich ab auf $x$ plus den auf $x$ liegenden, von $X$ durch $D$ und $Z$ harmonisch getrennten Punkt $E$. Denn wenn man die Gerade $XN$ mit $\mathfrak{x}$, die andere durch $X$ gehende Gerade der Fläche mit $\mathfrak{y}'$ bezeichnet, so trifft die Gerade $\mathfrak{Z}D$ die Fläche $\Phi$ in zwei Punkten $P$ auf $\mathfrak{x}$ und $P'$ auf $\mathfrak{y}'$; während $P$ auf $X$ projiciert wird, wird $P'$ auf den genannten Punkt $E$ projiciert, den die vier Strahlen $P'Z$, $\mathfrak{x}'$, $P'\mathfrak{Z}$ und $P'N$, die $ZX$ bez. in $Z$, $E$, $D$ und $X$ treffen, von $P'$ aus die vier harmonischen Punkte $ZN'\mathfrak{Z}N$ projicieren, also selbst harmonisch sind.

Aus dem, was wir bei der Abbildung von Tangenten sahen, ergiebt sich folgende Konstruktion. Man lege von $D$ aus eine Tangente an $\omega$, die etwa in $O$ berührt, dann bringe man $DZ$ zum Schnitt mit $(OX)$ $(OY)$. Die beiden Schnittpunkte $E'$ und $E''$ sind die Bilder von $D$. Dieselben beiden Punkte, nur in anderer Folge, würde man mit Hülfe der anderen Tangente $DO'$ erhalten haben. Einem Punkt auf einer Geraden durch $Z$ wird also ein Paar der dem Kegelschnitt $\omega$ konjugierten Involution auf dieser Geraden zugeordnet, denn $OX$ und $OY$ projicieren den Kegelschnitt auf eine Gerade $DZ$, die $z$ konjugiert ist. Das Paar $E'E''$ ist dasjenige, das von $Z$ und $D$ harmonisch getrennt ist. Dies zeigt ein Meridianschnitt durch $DZN\mathfrak{Z}$.

Damit haben wir eine neue Definition der reducierten Verwandtschaften gewonnen, die Punktdefinition, die wir so aussprechen können:

Gegeben ist ein Kegelschnitt $\omega$ und ein Punkt $Z$; um einen Punkt $D$ abzubilden, verbinde man ihn mit $Z$ und suche auf dieser Geraden dasjenige Paar $E'E''$ der $\omega$ konjugierten Involution, das von $Z$ und $D$ harmonisch getrennt ist.

Auch diese Definition ist mit der räumlichen identisch. Man braucht, um dies nachzuweisen, nur wie oben $N$ im Raum anzunehmen und mit den wie früher bestimmten Punkten $X$ und $Y$ zu verbinden u. s. w. Wenn man dann wieder $\Phi$ in der bekannten Weise abbildet, so wird auf jeder Geraden durch $Z$ ein Punkt $D$ dem Paar der Involution von $\omega$ zugeordnet, das von $Z$ und $D$ harmonisch getrennt wird, wie ein Meridianschnitt durch $\mathfrak{Z}NZ$, zeigt. Statt $N$ kann man auch $N'$ benützen.

c) Abbildung von Kurven.

Eine Kurve $n$-ter Ordnung verwandelt sich in eine Kurve $2n$-ter Ordnung, die in $X$ und $Y$ zwei $n$-fache Punkte hat; denn sie schneidet $XZ$ und $YZ$ ausser in $X$ und $Y$ nur noch in je n Punkten. In den Punkten $O$, wo die Kurve $\omega$ schneidet, berührt die Bildkurve die Grade $OZ$, denn $O\mathfrak{Z}$ ist immer eine Tangente an die Kurve auf $\Phi$, die die Abbildung vermittelt, projiciert sich daher auf eine Tangente $OZ$. So oft wie eine Kurve $X$ und $Y$ enthält, schmiegt sich ihr Bild in $X$ und $Y$ dem Kegelschnitt $\omega$ an.

Besonders wichtig ist, dass die entstehenden Kurven symmetrisch liegen i. B. auf $Z$ und $\omega$, d. h. dass sie durch eine Möbiussche Verwandtschaft mit $\omega$ als Grundkegelschnitt und $Z$ als Centrum auf sich selbst abgebildet werden.

So oft wie eine Kurve den Punkt $Z$ enthält, spaltet sich von ihrem Bild die Gerade $z$ ab.

2) Die Abbildung aus der einfachen in die doppelte Ebene.

Vor allem ist zu bemerken, dass man mit einem Punkte $E'$ zugleich auch den ihm in der Möbiusschen Verwandtschaft adjungierten $E''$ abbildet.

a) Um Punkte abzubilden, hat man einfach die obige Konstruktion von Seite 28 umzukehren, d. h. man hat den Punkt $E'$, den man abbilden will, mit $X$ oder $Y$ zu verbinden, und wenn $E'X$ etwa in $O$ $\omega$ zum zweiten Mal schneidet, in diesem Punkt die Tangente am $\omega$ zu legen und mit $E'Z$ zum Schnitt zu bringen. So erhält man den Bildpunkt $D$. $\omega$ bildet sich dabei Punkt für Punkt auf sich selbst ab, die Punkte von $z$ (mit Ausnahme von $X$ und $Y$) alle auf $Z$, $X$ auf $XZ$, $Y$ auf $YZ$. Die Punkte des Diametralkegelschnitts bilden sich ab auf $z$.

Im Raum hat man die Abbildung zu bewerkstelligen, indem man $E'$ mit $N$ verbindet und den Punkt, in dem diese Gerade $\Phi$ noch einmal trifft, von $\mathfrak{Z}$ aus projiciert.

b) Hieraus erkennt man sofort, dass gerade Linien $g$ sich auf solche Kegelschnitte abbilden, die durch $Z$ gehen und $\omega$ in den beiden Punkten berühren, wo $g$ schneidet.

Gleichzeitig mit der Geraden $g$ bildet man auch ihr Bild in der Möbiusschen Verwandtschaft $E'E''$ ab.

Wenn wir nun durch einen Punkt $E'$ zwei Geraden $g_1$ und $g_2$ legen, so bilden sie sich ab auf zwei Kegelschnitte, die ausser $Z$ noch drei weitere Punkte mit einander gemein haben, von denen nur einer das Bild von $E'$ sein kann, nämlich der Punkt $D$, der mit $E'$ auf einer Geraden durch $Z$ liegt. Die zwei weiteren Punkte kommen davon her, dass eben ein Punkt $E'$ mit dem ihm in der Möbiusschen Verwandtschaft adjungierten $E''$ auf denselben Punkt $D$ abgebildet wird. Wenn man nun $g_1$ abbildet in der M. V. auf einen Kegelschnitt $g$, $(XYZO_1O_2)$ so schneidet dieser Kegelschnitt $g_2$ in zwei Punkten $E_1''$ und $E_2''$. Bezeichnen wir nun mit $E_1'$ und $E_2'$ die Punkte, in denen $g_1$ von $ZE_1''$ und $ZE_2''$ getroffen wird, so bilden sich die Paare $E_1'E_1''$ und $E_2'E_2''$ auf zwei Punkte ab, die auf der Geraden $h$ durch $E'$ liegen. $h$ ist von $E'Z$ durch $g_1$ und $g_2$ harmonisch getrennt. In der That, wenn man die Schnittpunkte der auf diese Weise bestimmten Geraden $h$ mit $ZE_1'E_1''$ und $ZE_2'E_2''$ mit $D_1$ und $D_2$ bezeichnet, so erkennt man leicht, dass $D_1$ und $D_2$ die Bilder der beiden Paare sind. (Vergl. hierzu Clebsch, a. a. O. § 3, die auf 3 folgenden Formeln.)

Ausnahmen bilden hier die Geraden durch $X$ und $Y$, sie bilden sich ab auf Tangenten an $\omega$ in dem Punkt, wo sie $\omega$ treffen, plus $ZX$ bez. $ZY$, die Geraden durch $Z$, die sich auf sich selbst abbilden und die Gerade $z$, die sich auf $Z$ abbildet $(+ (ZX)$ und $(ZY)$.

c) Kurven $n$-ter Ordnung bilden sich ab auf solche $2$-$n$ter Ordnung, denn sie schneiden jeden Kegelschnitt des Bündels $2\,n$ mal. Die entstehenden Kurven haben in $Z$ einen $n$-fachen Punkt und haben mit $\omega$ die Tangenten in den $2\,n$ Punkten gemein, wo sie $\omega$ schneiden. Denn ausser diesen Punkten $O$ hat die Kurve $K_n$ der einfachen Ebene mit den Geradenpaaren $(OX)$ $(OY)$ nur noch je $2n-2$ Punkte gemein, also haben auch die Tangenten an $\omega$ in $O$ in der Doppelebene ausser $O$ nur noch je $2n-2$ Punkte gemein. Auch zeigt die Abbildung aus dem Raum die Berührung. Geht ein Zweig durch $X$ oder $Y$, so spaltet sich $XZ$ bez. $YZ$ ab. Daher kommt es, dass symmetrische Kurven, die stets von gerader ($2n$-ter) Ordnung sein müssen, und stets in $Y$ und $X$ n-fache Punkte besitzen, sich wieder auf Kurven $2.2n-n-n=2$ nter Ordnung abbilden,

II. Die reducierte Verwandtschaft mit zerfallendem $\omega$ bietet nichts wesentlich Neues; der Hauptunterschied ist, dass Kurven $n$-ter Ordnung sich auf solche $2n$-ter Ordnung mit einem $n$-fachen Punkt im Scheitel des Geradenpaares $oo'$ abbilden, dass den Orthogonalkegelschnitt darstellt. Auch berühren alle $n$ Zweige daselbst die Gerade $x$, die von der Verbindungslinie von $Z$ mit dem Scheitel $X$ des Geradenpaares durch dasselbe harmonisch getrennt ist.

III. Die Konstruktion der Verwandtschaft aus der hinreichenden Zahl von Elementen.

Eine reducierte Verwandtschaft ist bestimmt, wenn man $\omega$ und $Z$ kennt, sie hat also genau wie eine Möbiussche Verwandtschaft, sieben wesentliche Bestimmungsstücke, und es muss demnach auch gelingen, sie aus einer gewissen Zahl von Elementen, d. h. Paaren $DE'$ zu bestimmen.

Es ist allgemein zu bemerken, dass wenn ausser $D$ und dem einen Bild $E'$ noch $Z$ bekannt ist, man zugleich auch noch $E''$ hat, da $E'E''$ von $DZ$ harmonisch getrennt werden.

Wie alle r. Verwandtschaften sich aus dem Raum definieren lassen, haben wir oben gesehen. Umgekehrt können wir, wenn die nötige Zahl von Elementen gegeben ist, eine räumliche Konstruktion anwenden, die zeigt, dass und wie die Verwandtschaft dann bestimmbar ist.

Sieben Bestimmungsstücke sind also notwendig und hinreichend; sie werden im allgemeinsten Fall gegeben durch $Z$ und fünf Paare $D_i\, E_i'$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) auf Geraden durch $Z$. Diese Verwandtschaft muss dann räumlich so definiert werden: Eine Fläche zweiten Grades $\Phi$ ist so zu bestimmen, dass wenn man ihre Punkte von einem Punkt $N$ auf ihr und von einem Punkt $\mathfrak{Z}$, dem Pol der Ebene aus, auf sie projiciert, die Punkte $E_i'$ auf $D_i$ abgebildet werden. Natürlich giebt es solcher Flächen unendlich viele, und es muss noch gezeigt werden, dass sie alle aus der Systemebene denselben Kegelschnitt $\omega$ herausschneiden, um die Identität der verschiedenen Verwandtschaften nachzuweisen, die durch die verschiedenen Flächen bestimmt werden.

Um alle diese Flächen zu erhalten, legen wir durch $Z$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{z}$ in den Raum und nehmen auf ihr zwei Punkte $N$ und $\mathfrak{Z}$ an, projicieren dann die Punkte $D_i$ von $\mathfrak{Z}$, die Punkte $E_i'$ von $N$ aus. Die entsprechenden Geraden $\mathfrak{Z}D_i$ und $NE_i'$ schneiden sich, da sie in derselben Ebene liegen, je in einem Punkt, und wir erhalten fünf Punkte $P_i$. Durch $N_1\, P_1\, P_2\, P_3\, P_4\, P_5$ und die Bedingung, dass $\mathfrak{Z}$ und die Systemebene $\mathfrak{S}$ Pol und Polarebene sein sollen, ist eine Fläche zweiten Grades $\Phi$ ausreichend bestimmt, deren Doppelprojektion die gewünschte Verwandtschaft liefert. Nimmt man nun eine andere Gerade $\mathfrak{z}'$ durch $Z$ an, und auf ihr $N'$ und $\mathfrak{Z}'$, so findet man entsprechend $P_1'\, P_2'\, P_3'\, P_4'\, P_5'$ und so eine neue Fläche zweiten Grades, die dasselbe leistet. Wenn man nun $N$ und $N'$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ verbindet, so schneiden sich die beiden Geraden, da sie in einer Ebene $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ liegen, in einem Punkt $\mathfrak{C}$. Macht man nun $\mathfrak{C}$ zum Centrum einer räumlichen Perspektive, die die Systemebene Punkt für Punkt auf sich selbst abbildet, $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{z}'$, $N$ in $N'$ überführt, so ist sie dadurch bestimmt, und sie führt $P_i$ in $P_i'$ über, also $\Phi$ in $\Phi'$. Daraus folgt, dass die beiden Flächen zweiten Grades $\mathfrak{S}$ in demselben Kegelschnitt $\Phi$ treffen.

Liegen $\mathfrak{Z}'$ und $N'$ auf derselben Geraden $\mathfrak{z}$ wie $Z$ und $N$, so lege man durch $Z$ noch eine Gerade $\mathfrak{z}''$, nehme auf ihr $\mathfrak{Z}''$ und $N''$ an, die hierdurch bestimmte Fläche $\Phi''$ schneidet dann nach der vorigen Betrachtung $\mathfrak{S}$ in demselben Kegelschnitt wie $\Phi$ und in demselben wie $\Phi'$, woraus wieder die Bestimmtheit von $\omega$ folgt.

Kann man $N$ und $\mathfrak{Z}$ so wählen, dass sie von einander und von $\mathfrak{S}$ getrennt sind, und doch $\Phi$ nicht bestimmen, so folgt dies wegen der Kollineation für alle Lagen von $N$ und $Z$, bei denen die Punkte von einander und von $\mathfrak{S}$ getrennt und selbstverständlich auf derselben Geraden durch $Z$ liegen. Hieraus ergiebt sich sofort ein ganz allgemeines, notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Determination. $\Phi$ enthält nämlich ausser $N P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ noch die Punkte $N' P_1' P_2' P_3' P_4' P_5'$ die durch harmonische Homographie mit $\mathfrak{Z}$ als Centrum und $\mathfrak{S}$ als Symmetrieebene aus jenen sechs Punkten entstehen, weil ja $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{S}$ Pol und Polare sind. Notwendig und hinreichend für die Determination ist also, dass jene 12 Punkte nicht auf einer Raumkurve vierter Ordnung liegen, was dann und nur dann der Fall ist, wenn man durch $\mathfrak{Z}$ und die sechs Strahlen $ZNN'$, $\mathfrak{Z} P_i P_i'$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ einen Kegel zweiten Grades legen kann. Legt man z. B. durch $\mathfrak{Z}$ $(P_i P_i')$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ einen Kegel zweiten Grades, so ist dieser vollständig bestimmt und enthält, da schon durch acht Punkte die $C_4$ vollständig bestimmt ist, notwendig dieselbe ganz, wie man erkennt, wenn man ihn mit irgend einer Fläche $\Phi$ durch die 12 Punkte zum Schnitt bringt. Der Kegel enthält also sicher dann und nur dann wenn die 12 Punkte auf einer $C_4$ liegen, auch die Punkte $N'$ und $N'$. Er schneidet aber $\mathfrak{S}$ in einem Kegelschnitt durch $D_1 D_2 D_3 D_4 D_5$ und $Z$.

Daraus folgt: Notwendiges und hinreichendes Kriterium für die vollständige Bestimmtheit ist, dass die fünf gegebenen Punkte der Doppelebene nicht mit $Z$ auf einem Kegelschnitt liegen.

## § 7. Die halbreducierten Verwandtschaften.

Wir hatten für die reducierten Verwandtschaften drei Definitionen gefunden und nachgewiesen, dass alle drei einander vollständig äquivalent waren: die räumliche § 5, 1, die durch ein Bündel von Kegelschnitten in § 6, S. 25 und die durch die Involutionen die $\omega$ auf den geraden Linien durch einen Punkt $Z$ bestimmte.

Es giebt nun drei entsprechende Definitionen, auch für die halbreducierten Verwandtschaften, die man durch passende Erweiterung findet und die auch wieder alle drei einander äquivalent sind. Das wollen wir zunächst beweisen. Wir gehen dabei aus von der Punktdefinition. Das reducierte System hatte die folgenden Merkmale:

1) Jeder Punkt $D$ bildete sich ab auf ein Punktpaar, das mit $D$ auf einer Geraden durch einen festen Punkt $Z$ liegt, und zwar war die Zuordnung des Paares $E'E''$ der dem Kegelschnitt $\omega$ konjugierten Involution projektiv.

2) Dieser Kegelschnitt $\omega$ entspricht zugleich sich selbst Punkt für Punkt und ist der Uebergangsort der Doppelebene.

3) Die Zuordnung besteht darin, dass man das von $D$ und $Z$ harmonisch getrennte Paar $E'E''$ der Involution dem Punkte $D$ zuordnet, sie ist also projektiv.

Bei der halbreducierten Verwandtschaft bleibt nur noch 1 bestehen, während die anderen Bestimmungen sich ändern.

2) Zwar giebt es auch hier noch einen sich selbst entsprechenden Kegelschnitt $\varphi_{ed}$, dessen Punkte sich freilich nicht auf Paare zusammenfallender Punkte abbilden, sondern

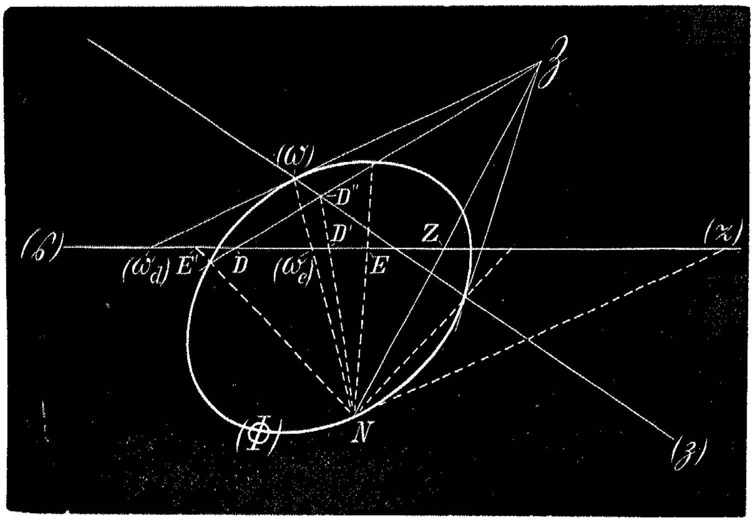
auf getrennte, von denen der eine auf den ersten zu liegen kommt. Es fällt $\varphi_{ed}$ auch nicht mit dem Uebergangsorte zusammen. Der Kegelschnitt $\omega_e$, i. B. a. den $E'E''$ konjugierte Paare sind, ist das Bild des Uebergangsortes. $\omega_e$ enthält $XY$ und die Gerade $z=XY$ ist die Polare von $Z$ bei diesem Kegelschnitt.

3) Die Punkte $D$ sind den Paaren $E'E''$ ebenfalls projektiv zugeordnet, die auf $DZ$ liegen. Die Projektivität ist dadurch vollkommen bestimmt, dass jedem Schnitt einer Geraden durch $Z$ mit dem Kegelschnitt $\varphi_{de}$ das Paar der Involution entsprechen soll, von dem dieser Schnitt ein Punkt ist, und das dem Punkt $Z$ folgendes Paar entspricht: $Z$ und der Schnitt der Geraden mit $z$. Durch diese drei Elementenpaare ist die Projektiavität auf jeder Geraden durch $Z$ und damit die Zuordnung überhaupt vollständig bestimmt. Diese Punktdefinition kann man nun leicht in die räumliche überführen.

Zu dem Ende nehme man einen Punkt $N$ ausserhalb der Systemebene $\mathfrak{s}$ beliebig an, verbinde ihn mit $X$ und $Y$ und lege durch $(NX)$ $(NY)$ und $\varphi_{de}$ eine Fläche zweiten Grades $\Phi$. Sie schneidet den Kegel $\Omega$, der von $N$ aus $\omega_e$ projiciert, ausser in $(NX)$ $(NY)$ noch in einem zweiten Kegelschnitt $\omega$, der in einer Ebene $\mathfrak{z}$ liegt, die die beiden Punkte $X_1 Y_1$ enthält, in denen sich $\omega_e$ und $\varphi_{de}$ ausser in $X$ und $Y$ noch schneiden. Der Pol $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{z}$ für $\Phi$ liegt dann auf der Geraden $ZN$. Wenn wir nämlich in der Ebene $\mathfrak{z}$ an $\omega$ in den Punkten $X'$ und $Y'$ vor $(NX)$ und $(NY)$ treffen, die Tangenten ziehen, so müssen sie sich auf die Tangenten von $\omega_e$ in $X$ und $Y$ projicieren, also auf $XZ$ und $YZ$. Andrerseits aber sind die Projektionsstrahlen, die von $N$ aus durch die genannten Tangenten von $\omega$ gelegt worden, in den Tangentialebenen in $X'$ und $Y'$ enthalten. Daraus folgt, dass diese beiden Tangentialebenen $\mathfrak{s}$ in $ZX$ und $ZY$ schneiden, d. h. dass sie sich in $NZ$ schneiden.

Die Tangentialebenen sind aber die Polarebenen der beiden Punkte $Y'$ und $X'$ der Ebene $\mathfrak{z}$, d. h. der Pol $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{z}$ muss auf $NZ$ liegen.

Wenn man nun wie früher abbildet, indem man $D$ mit $\mathfrak{Z}$ verbindet und die beiden Punkte, in denen $D\mathfrak{Z}$ die Fläche $\Phi$ schneidet, von $N$ aus projiciert, so erhält man die Verwandtschaft. Die Figur ist ein Meridianschnitt durch $(NZ\mathfrak{Z})$.




Die Definition durch ein Bündel lautet hier so: Gegeben ist ein Bündel mit dem Orthogonalkegelschnitt $\omega_c$ und dem Potenzpunkt $Z$, und ein Kegelschnitt $\varphi_{de}$ durch die beiden Grundpunkte $X$ und $Y$, der dem Bündel nicht angehört. Um eine Gerade abzubilden, bringe man sie mit $\varphi_{de}$ zum Schnitt und lege durch die beiden Schnittpunkte den Kegelschnitt des Bündels.

Wenn man nun wieder $N$ im Raum annimmt, und $\Phi_1\, \mathfrak{z}_1\, \mathfrak{Z}$ genau wie bei der räumlichen Definition angegeben wurde, konstruiert, und dann um eine Gerade abzubilden sie von $\mathfrak{Z}$ aus projiciert, so schneidet diese Ebene $\Phi$ in einem Kegelschnitt der, wie wir von früher wissen, sich von $N$ aus auf einen Kegelschnitt des Bündels $(Z\omega_e)$ projiciert, der selbstverständlich durch die beiden Punkte von $\varphi_{de}$ geht, in denen die Gerade schneidet. Ob ich aber sage: ich projiciere eine Gerade von $\mathfrak{Z}$ aus und bringe sie mit $\Phi$ zum Schnitt, den ich dann von $N$ aus projiciere, oder ob ich sage: Ich projiciere einen Punkt von $\mathfrak{Z}$ aus und die beiden Punkte, in denen er $\Phi$ schneidet, von $N$ aus, das ist in beiden beiden Fällen genau dasselbe. Wir sehen also, dass auch die Definition durch das Bündel mit der räumlichen und daher auch mit der Punktdefinition äquivalent ist, ein Umstand, der nur durch Vermittelung des Raumes sich von selbst erklärt.

Nachdem einmal die Aequivalenz der drei verschiedenen Definitionen nachgewiesen ist, bedienen wir uns immer der räumlichen und der beiden anderen Definitionen ohne Unterschied. Wir sagen also: „Wir bringen die Geraden mit $\varphi_{de}$ zum Schnitt und legen dann durch die beiden Schnittpunkte den Kegelschnitt des Bündels $(Z\omega_e)$“ oder: „Wir ordnen einem Punkt $D$ auf einer Geraden durch $Z$ ein Paar der Involution $E'E''$ zu, die die konjugierten Punkte von $\omega_e$ auf dieser Geraden bestimmen, und die Zuordnung definieren wir dadurch, dass $Z$ dem Paar $Z(z)$ und die Schnittpunkte mit einem Kegelschnitt $\varphi_{de}$ durch $XY$ den Paaren zugeordnet werden, von denen jedes je einen dieser Schnittpunkte enthält“, oder endlich: „Wir projicieren eine Fläche $\Phi$ vom zweiten Grade doppelt, von $N$ und von $\mathfrak{Z}$ aus.“ Die Fläche schneidet die Systemebene in einem Kegelschnitt $\varphi_{de}$, $N\mathfrak{Z}$ trifft die Ebene in einem Punkt $Z$, und der Kegelschnitt $\omega$, in dem die Polarebene $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{Z}$ schneidet, projiciert sich von $N$ aus in die Ebene $\mathfrak{s}$ auf $\omega_e$. — Uebrigens werden wir diese räumliche Definition wegen ihrer Einfachheit bevorzugen.

I. Die halbreducierten und ganz reducierbaren Verwandschaften.

Im Raume wird die Verwandschaft so definiert: Man lege durch eine Gerade $g$ auf $\mathfrak{S}$, der Systemebene und durch einen von $\Phi$ getrennten Punkt $\mathfrak{Z}$, dessen Polarebene $\mathfrak{z}$ nicht mit $\mathfrak{S}$ zusammenfällt, da die Verwandtschaft sonst reduciert wäre, und der nicht in die Nordpolebene fällt, weil dann, wie wir später sehen werden, die Verwandtschaft nicht reducierbar wäre, eine Ebene und bringe sie mit $\Phi$ zum Schnitt und projiciere diesen Schnitt dann von $N$ aus wieder auf $\mathfrak{S}$. Man erhält dann eine halbreducierbare Verwandtschaft, bei der jeder Punkt auf einer Geraden durch $Z$ sich abbildet auf ein Paar einer Involution auf derselben Geraden durch $Z$, und zwar auf ein Paar $E'E''$ der Möbiusschen Verwandtschaft mit dem Centrum $Z$ und dem Grundkegelschnitt $\omega_e$, wo $\omega_e$ der Kegelschnitt ist, auf den sich $\omega = (\mathfrak{z}\,\Phi)$ von $N$ aus projiciert. Von $\mathfrak{Z}$ aus projiciert sich $\omega$ auf einen Kegelschnitt $\omega_d$, der der Uebergangsort ist, und das Bild von $\omega_e$ in der Doppelebene. Der Uebergangsort ist also ein Kegelschnitt. $\omega_d$ berührt $\varphi_{ed}$, den Schnitt von $\Phi$ mit $\mathfrak{S}$ in $X_1\,Y_1$, den beiden Punkten, in denen $\omega_e$ und $\varphi_{ed}$ sich ausser in $X$ und $Y$ noch schneiden. Denn die Geraden $\mathfrak{Z}X_1$ und $\mathfrak{Z}Y_1$ sind Tangenten an $\Phi$. Der Kegel, der von $\mathfrak{Z}$ aus $\varphi_{de}$ projiciert, schneidet $\Phi$ ausser in $\varphi_{de}$ noch in einem zweiten Kegelschnitt $\varphi$, der sich von $N$ aus auf einen Kegelschnitt $\varphi e$ durch $X\,Y\,X_1\,Y_1$ projiciert, $\varphi_{de}$ bildet sich also ausser auf sich selbst noch auf einen zweiten Kegelschnitt $\varphi_e$ ab.

Die Tangenten an $\omega_d$ werden von $\mathfrak{Z}$ aus durch Tangentialebenen projiciert, bilden sich also ab auf Geradenpaare durch $XY$ und $P_1\,P_2$, ihre Schnittpunkte mit $\varphi_{de}$. Der Scheitel $O_e$ eines solchen Geradenpaares muss auf $\omega_e$ liegen und ausserdem mit $O_d$, dem Punkt, den die Tangente mit $\omega_d$ gemein hat und $Z$ auf einer Geraden, da ja jeder Punkt $D$, also auch $O_d$ auf der Geraden durch $Z$ bleibt.

Um $D$ in einfacher Weise abzubilden, hat man also den Punkt mit $Z$ zu verbinden und dann von $D$ aus die Tangente an $\omega_d$ zu ziehen, die etwa in $O_d$ berührt. Sie schneidet $\varphi_{de}$ in zwei Punkten $P_1 P_2$; dann muss nach dem eben Bewiesenen durch $P_1 P_2$ ein Geradenpaar $(O_e X)(O_e Y)$ gehen, dessen Scheitel auf $\omega_e$ liegt, und das $P_1$ und $P_2$ enthält. Dieses Geradenpaar bringt man mit $DZ$ zum Schnitt und erhält so $E'E''$.

Die Geraden $XZ$ und $YZ$, die $\varphi_{de}$ bez. in $Y_2$ und $X_2$ noch einmal treffen, berühren den Kegelschnitt $\omega_d$, denn die durch $XZ\mathfrak{Z}$ und $YZ\mathfrak{Z}$ gelegten Ebenen sind Tangentialebenen an $\Phi$, da sie bez. die Geraden $NX$ und $NY$ enthalten. Demnach müssen $XZ$ und $YZ$ als Schnitt der Tangentialebenen die Projektion $\omega_d$ von $\omega$ berühren.

Genauer brauchen wir auf die halbreducierte Verwandtschaft nicht einzugehen, denn wir können leicht nachweisen, dass man sie durch eine Perspektive der Doppelebene wieder in eine reducierte verwandeln kann.

Wenn wir nämlich (s. die Figur) die Punkte der Ebene $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{Z}$ aus auf $\Phi$ und dann von $N$ aus wieder auf $\mathfrak{z}$ projicierten, so hätten wir eine reducierte Verwandtschaft und daran würde sich auch nichts ändern, wenn wir die ganze Verwandtschaft von irgend einem Punkt aus auf die Ebene $\mathfrak{s}$ projicierten. Wir hätten dann auch in $\mathfrak{s}$ eine reducierte Verwandtschaft.

Dies können wir nun wirklich erreichen, wenn wir durch folgende Perspektive die Doppelebene auf sich selbst abbilden. Wir projicieren ihre Punkte $D$ von $\mathfrak{Z}$ aus auf $\mathfrak{z}$ und erhalten $D''$, und $D''$ projicieren wir von $N$ aus wieder auf $\mathfrak{s}$ und erhalten dann $D'$. Zwischen $D'$ und $D$ besteht dann eine Perspektive, und es ist $D'$ $(E'E'')$ eine von

$N$ aus projicierte reducierte Verwandtschaft, deren Systemebene $\mathfrak{z}$, deren Nordpol $N$, und deren Fläche $\Phi$ ist.

Die Perspektive auf $\mathfrak{s}$ hat $Z$ zum Centrum, denn in $Z$ wird $\mathfrak{s}$ von $NZ$ getroffen, und $z_1 = X_1 Y_1$ die Gerade in der sich $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{s}$ schneiden zur Fluchtlinie, $\omega_e$, $\varphi_{de}$ und $\varphi_e$ schneiden sich ausser in $XY$ noch in $X_1, Y_1$ und diese Punkte sind die einzigen, die auf sich selbst doppelt zählend abgebildet werden.

Die Perspektive verwandelt $\omega_d$ in $\omega_e$, ferner die Polare von $Z$ für $\omega_d$ in $z = XY$, dadurch ist sie ausreichend bestimmt, da man ja auch Centrum und Fluchtlinie kennt. Im allgemeinen kann man die Reduktion durch Perspektive ausführen. Unmöglich ist dies dagegen, wenn $Z$ auf $\omega_d$ liegt, und wir haben dann die nicht reducierbaren Verwandtschaften, auf die wir später eingehen.

Kennt man $\omega_e$ und die Perspektive $D'D$, so kann man sofort $\omega_d$ als Bild von $\omega_e$ in der Perspektive konstruieren, und dann $\varphi_{de}$, indem man in den Punkten $O_d$ von $\omega_d$ die Tangenten zieht und sie mit den Geradenpaaren $(O_e X)$ $(O_e Y)$ zum Schnitt bringt, wo $O_e$ das sowohl in der Perspektive, wie in der Verwandtschaft eindeutig bestimmte Bild von $O_d$ ist. Der Schnitt irgend einer solchen Tangente mit dem zugehörigen Geradenpaar stellt zu den vier schon bekannten Punkten von $\varphi_{ed}$, nämlich $X Y X_1 Y_1$ noch zwei weitere dar, so dass $\varphi_{ed}$ genau bestimmt ist, und dann auch $\varphi_e$ Also sind durch $\omega_{ed}$ und die Perspektive auch $\omega_e$, $\varphi_{de}$ und $\varphi_e$, die drei weiteren ausgezeichneten Kegelschnitte und somit die ganze Verwandschaft vollständig bestimmt. —

II. Die halbreducierten und nicht ganz reducierbaren Verwandtschaften.

c) Die halbreducierte Verwandtschaft 3 wird so definiert: Man projiciere eine Fläche zweiten Grades von einem auf ihr gelegenen Punkt $N$ und von einem in der

Nordpolebene $n$ gelegenen Punkt $\mathfrak{Z}$ aus auf eine Ebene $\mathfrak{s}$, die weder $N$ noch $\mathfrak{Z}$ enthält, im übrigen aber vollkommen beliebig gewählt werden darf. Die Definition durch Bündel oder durch Punkte brauchen wir hier nicht zu wiederholen (Seite 37). Die Verwandtschaft ist nicht reducierbar, denn die Perspektive $DD'$ ist hier uneigentlich, da $\mathfrak{z}$ den Punkt $N$ enthält. Die Perspektive projiciert also alle Punkte der Systemebene auf einer Geraden durch $Z$ auf den Punkt, in dem diese Gerade die Gerade $z$, die Achse der Ebenen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{s}$ trifft. Eine Reduction ist demnach unmöglich.

1) Abbildung aus der doppelten in die einfache Ebene. Um eine Gerade abzubilden, haben wir sie mit dem Kegelschnitt $\varphi_{de}$ durch $X$ und $Y$, der dem Bündel nicht angehört, zum Schnitt zu bringen und durch die beiden Schnittpunkte dann den Kegelschnitt des Bündels 3 (Seite 16) zu legen. — Im Raum haben wir durch $g$ und $\mathfrak{Z}$ eine Ebene zu legen und ihren Schnitt mit $\Phi$ von $N$ aus auf $\mathfrak{s}$ zu projicieren. Strahlenbüschel verwandeln sich in Büschel von Kegelschnitten, die ihnen projektiv zugeordnet sind. Auf Gerade bilden sich ab die Geraden durch $Z$, nämlich auf sich selbst $(+z)$; ferner bilden sich die Tangenten an $\omega_d$, den Kegelschnitt, in dem der von $\mathfrak{Z}$ aus an die Fläche gelegte Tangentialkegel $\mathfrak{s}$ schneidet, und der $Z$ enthält und $z$ berührt, ab auf Geradenpaare $(XZ_1)$ $(YZ_1)$, deren Scheitel $Z_1$ auf $z_1$ liegen. $\omega_d$ berührt $\varphi_{de}$ in den beiden Punkten $X_1$ und $Y_1$ wo sich $z_1$ und $\varphi_{de}$ schneiden.

Um einen Punkt $D$ abzubilden, hat man ihn mit $Z$ zu verbinden, ferner an $\omega_d$ die Tangente zu ziehen, die etwa in $O_d$ berührt, und dann $ZD$ mit $(XO_d)$ und $(YO_d)$ zum Schnitt zu bringen. So erhält man $E'E''$. Die Punkte von $\omega_d$ bilden sich ab auf die von $z_1$, $\varphi_{de}$ auf sich selbst plus noch einen Kegelschnitt $\varphi_e$, $Z$ auf die ganze Gerade $z$.

Die Tangente von $D$ aus an $\omega_d$ schneidet $\varphi_{de}$ in zwei Punkten $P_1$ und $P_2$, durch die ein Geradenpaar $(YZ_1)$ $(XZ_1)$

geht, und es liegen $Z$, $Z_1$ und der Berührungspunkt $O_d$ auf einer Geraden. $XY$ und $P_1P_2$ sind Paare einer Projektivität, deren Doppelpunkte $X_1\,Y_1$, sind, und deren Direktionsbüschel sich auf $\omega_d$ stützt. Uebrigens ist $Z$ von $(z)\,(z_1)$ durch $X$ und $Y$ harmonisch getrennt, wie ein Blick auf den Raum lehrt.

Algebraische Kurven $n$-ter Ordnung bilden sich ab auf solche $2n$-ter Ordnung, mit 2 n-fachen Punkten in $X$ und $Y$, weil jeder Punkt von $z$ sich auf $X$ und $Y$ abbildet. Die zugeordneten $K_{2n}$ liegen symmetrisch zu $z_1$, und $Z$, d. h. wenn ein Punkt der Kurve angehört, so gehört ihr auch der von diesem Punkt auf seiner Verbindungslinie mit $Z$ liegende, durch $Z$ und $z_1$, harmonisch getrennte Punkte an.

Die zugeordnete Möbiussche Verwandtschaft ist hier, wie wir von Seite 22 her wissen, die harmonische Homographie.

2) Die Abbildung aus der einfachen in die doppelte Ebene.

Die Kegelschnitte, die die Ebenen durch $N$ aus $\Phi$ herausschneiden, erscheinen von $\mathfrak{Z}$ aus auf $\mathfrak{z}$ projiciert als Kegelschnitte, die $\omega_d$ doppelt berühren, einmal in $Z$ und dann in noch einem Punkte. Die Geraden durch $X$ und $Y$ bilden sich ab auf Tangenten an $\omega_d$, $X$ und $Y$ auf die ganze Gerade $z$.

Punkte werden im allgemeinen zweideutig abgebildet; ausgenommen sind die von $z$, die sich alle auf $z$ abbilden, mit Ausnahme von $X$ und $Y$, die sich auf $Z$ abbilden.

Kurven $n$-ter Ordnung geben solche $2n$-ter, die in $Z$ $n$-fachen Punkt haben, durch den $n$ Zweige gehen, die $z$ berühren, sie berühren ausserdem $\omega_d$ noch in den $n$ Punkten, die den Punkten $(z, K_n)$ entsprechen.

d) Die letzte der halbreducierten Verwandtschaften entsteht durch Doppelprojektion eines Kegels von $N$ und von einem in der Nordpolebene $n$ gelegenen Punkt $\mathfrak{Z}$ aus und steht also zu $c$ in derselben Beziehung, wie II zu 1 in

§ 1. Da alle Verhältnisse analog sind, brauchen wir nicht darauf einzugehen.

III. Die Konstruktion der Verwandtschaft aus der hinreichenden Zahl von Elementen.

Nachdem wir die Theorie der halbreducierten Verwandtschaften behandelt haben, stellt sich die Aufgabe, eine solche Verwandtschaft aus der hinreichenden Zahl von Elementenpaaren zu konstruieren. Eine Verwandtschaft ist vollkommen eindeutig bestimmt, wenn man $\omega_e$, $Z$ und $\varphi_{de}$ hat, dabei muss $\varphi_{de}$ durch die Punkte $XY$ gehen, in denen die Polare von $Z$ für $\omega_e$ $\omega_e$ schneidet. Daraus folgt, dass eine solche Verwandtschaft eine 10fach unendliche Bestimmungsweise zulässt. Ist also $Z$ gegeben und auf acht geraden Linien durch $Z$ Paare $DE'$, so muss die Verwandtschaft dadurch im allgemeinen endlich deutig bestimmt sein, es kann im allgemeinen nur eine diskrete Mannigfaltigkeit von halbreducierten Verwandtschaften geben, die $D_1 .. D_8$ bez. in $E_1' .. E_8'$ überführen.

Dass die Verwandschaft vollkommen bestimmt ist, zeigt eine Betrachtung, die den Raum zu Hülfe nimmt, und auf die man dadurch kommt, dass alle halbreducierten Verwandtschaften durch Doppelprojektion von Flächen zweiten Grades entstehen.

Ist die Systemebene $\mathfrak{s}$ gegeben und auf ihr $Z$ und die acht Paare, so lege man durch $Z$ eine nicht in $\mathfrak{s}$ fallende Gerade $\mathfrak{z}$ und nehme auf ihr die beiden Punkte $N$ und $\mathfrak{Z}$ beliebig, jedoch voneinander und von $Z$ verschieden an. Die entsprechenden Geraden $NE_i'$ und $\mathfrak{Z}D_i$ schneiden sich in acht Punkten, $P_i$ da immer die zwei entsprechenden Geraden in einer Ebene liegen. Durch $N$ und diese acht Punkte $P_i$ ist nun im allgemeinen eine Fläche zweiten Grades $\Phi$ vollkommen bestimmt. Projiciert man dieselbe doppelt von $\mathfrak{Z}$ und $N$ aus, so erhält man auf $\mathfrak{s}$ eine halbreducierte Verwandtschaft, die $D_i$ auf $E_i'$ abbildet, und um nachzuweisen, dass die Verwandtschaft eindeutig bestimmt ist, genügt es zu zeigen, dass alle Flächen zweiten Grades, die die obige Konstruktion bei beliebiger Wahl von $\mathfrak{z}$, $N$ und $\mathfrak{Z}$ liefert, auf $\mathfrak{s}$ dieselbe Verwandtschaft ergeben.

Denken wir uns neben $\mathfrak{z}_1 N_1 Z$ und $\Phi$ noch eine zweite Gerade $\mathfrak{z}'$ durch $Z$ und auf ihr $N'$ und $\mathfrak{Z}'$ so verbinde man $N'$ mit $E_i'$, $Z$ mit $D_i$ und konstruiere $P_i'$, durch $P_i'$ und $N'$ ist dann eine Fläche zweiten Grades $\Phi'$ bestimmt, die wieder $D_i$ auf $E_i'$ abbildet. $NN'$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'$ schneiden sich in einem Punkt $\mathfrak{C}$, und eine räumliche Perspektive mit $\mathfrak{C}$ als Centrum und $\mathfrak{s}$ als Fluchtebene, die $N$ auf $N'$ $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{Z}'$ abbildet, muss $P_i$ in $P_i'$ verwandeln und daher $\Phi$ in $\Phi'$. Beide Flächen treffen also $\mathfrak{s}$ in demselben Kegelschnitt $\varphi_{de}$. Konstruiert man für $\Phi$ die Polarebene $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{Z}$, die $\Phi$ in $\omega$ schneidet und projiciert man $\omega$ von $N$ aus auf $\mathfrak{s}$, so erhält man $\omega_e$. Entsprechend erhält man $\omega_e'$, und es ist klar, dass bei der Perspektive $\omega_e$ in $\omega'_e$ übergeführt wird, d. h., das es mit ihm identisch ist.

Liegen $N\mathfrak{Z}$ $N'\mathfrak{Z}'$ auf derselben Geraden $\mathfrak{z}$, so nehme man eine andere $\mathfrak{z}''$ durch $Z$, und auf ihr $\mathfrak{Z}''N''$. Dann folgt, dass $\Phi''$ auf $\mathfrak{s}$ dieselbe Verwandtschaft bestimmt, wie $\Phi$ und $\Phi'$, d. h. es bestimmen $\Phi$ und $\Phi'$ dieselbe Verwandtschaft. Also: durch $Z$ und acht Elementenpaare $DE'$ ist die Verwandtschaft im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Kann man $N$ und $\mathfrak{Z}$ so bestimmen, dass sie nicht zusammenfallen und nicht aus $\mathfrak{s}$ liegen, und dabei $NP_1 \,..\, P_8$ auf einer Raumkurve vierter Ordnung liegen, so gilt die dies wegen der Perspektive für alle Lagen, dann kann man $\Phi$ also niemals eindeutig bestimmen, sondern erhält ein Büschel, das einfach unendlich viele Verwandtschaften bestimmt. Liegen $NP_1 \,..\, P_8$ auf einer Kurve vierter Ordnung, so projiciert sich diese von $N$ aus auf eine Kurve dritter Ordnung durch $E_1' \,..\, E_8'$. Für $N$ hat hat man dreifach unendlich viele Lagen, und jedesmal erhält man in der Ebene eine Kurve dritter Ordnung ohne einen Doppelpunkt. Daraus folgt:

Die Verwandtschaft ist sicher dann unbestimmt, wenn man durch $E_1' \,..\, E_8'$ dreifach unendlich viele Kurven dritter Ordnung legen kann.

---

Die Konstruktion selbst, die in der Ebene $\mathfrak{E}$ auszuführen ist, besteht nun aus zwei Teilen. Man hat $\varphi_{de}$ zu bestimmen, und dann aus $\varphi_{de}$ und den acht Paaren $DE'$ die übrigen ausgezeichneten Kegelschnitte, die zur Bestimmung der Verwandtschaft nötig sind. Die Konstruktion hat nicht nur für die Verwandtschaft Bedeutung, sondern auch für die Bestimmung der Flächen zweiten Grades aus neun Punkten, indem sie die Aufgabe löst:

Wenn eine Fläche zweiten Grades durch neun Punkte $NP_1P_2 \,..\, P_8$ gegeben ist, ihre Spur auf der Ebene $\mathfrak{E}$ zu zeichnen mit Hülfe der Projektionen der Punkte $P$ von $N$ und einen Punkt $Z$ aus.

Wir können zur Konstruktion von $\varphi_{de}$ folgendes Verfahren einschlagen: Durch irgend eine Perspektive mit $Z$ als Centrum bilden wir $D$ auf $D'$ ab und konstruieren dann die reducierte Verwandtschaft, die $D_1' D_2' D_3' D_4' D_5'$ auf $E_1' E_2' E_3' E_4' E_5'$ abbildet. Die Perspektive, deren es dreifach unendlich viele giebt, wird im allgemeinen $D_6 D_7 D_8$ auf solche Punkte $D_6' D_7' D_8'$ abbilden, deren Bilder $E_6' E_7' E_8'$ nicht sind. Es gilt nun, diejenige Verwandtschaft zu suchen, die dies leistet.

Wenn wir wieder durch $Z$ eine nicht in die Ebene $\mathfrak{E}$ fallende Gerade $\mathfrak{z}$ legen und auf ihr $\mathfrak{Z}$ und $N$ annehmen und $N$ mit $E_1' E_2' \,..\, E_5'$, $\mathfrak{Z}$ mit $D_1 \,..\, D_5$ verbinden, so schneiden sich die entsprechenden Geraden in fünf Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ und $N$ bestimmt mit ihnen zusammen eine dreifach unendliche lineare $M$ von Flächen zweiten Grades $\Phi$ unter denen sich auch sicher eine der Flächen $\Phi$ befindet, die alle Punkte $D$ auf ihre entsprechenden $E'$ abbildet. Die Flächen bestimmen durch ihre Spuren auf $\mathfrak{s}$ eine dreifach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten $\varphi$, unter denen sich auch der gesuchte $\varphi_{de}$ befinden muss. Wenn man $\mathfrak{z}$, $N$ und $\mathfrak{Z}$ variiert, so erhält man eine andere Schar von Flächen $\Phi'$, die aber $\mathfrak{s}$ in denselben Kegelschnitten $\varphi_{de}$ trifft, da die beiden Scharen sich wieder durch eine Perspektive zur Deckung bringen lassen, deren Fluchtebene $\mathfrak{s}$ ist.

Daraus folgt der Satz: Wenn man die fünf Punkte $D_1 D_2 D_3 D_4 D_5$ von $Z$ aus als Centrum durch eine Perspektive abbildet auf $D_1' D_2' \, . \, . \, D_5'$, dann die reducierte Verwandtschaft sucht, die $D_i'$ auf $E_i'$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ abbildet und endlich für jede der halbreducierten Verwandschaften $D_i E_i'$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ die invarianten Kegelschnitte $\varphi$, so bilden die Kegelschnitte eine lineare $M_3$. Der Satz folgt eben daraus, dass wir im Raum, wie in der Ebene alle halbreducierten Verwandtschaften suchen, die $D_1 \, .. \, D_5$ auf $E_1' \, .. \, E_5'$ abbilden, und demnach in beiden Fällen dieselben inv. Kegelschnitte $\varphi$ finden müssen. In der Ebene wäre der Satz viel schwieriger zu erweisen, und es ist um so auffallender, da die Kegelschnitte $\omega_e$, deren wir bei der ebenen Konstruktion bedürfen, keineswegs eine lineare $M_3$ bilden.

Mit der Bestimmung der Schar $\varphi$ ist nun die Konstruktion von $\varphi_{de}$ im Princip geleistet.

Wir erhalten nämlich für je fünf Punktpaare $DE'$ auf diese Weise eine lineare $M_3$ von Kegelschnitten $\varphi$, unter denen sich $\varphi_{de}$ selbst befiinden muss.

Bezeichnen wir jetzt mit $\varphi_{678}$, die durch $D_1 E_1 \ldots D_5 E_5$ bestimmte $M_3$, und entsprechend, so bestimmen $\varphi_{678}$ und $\varphi_{812}$ ein Netz, dem $\varphi_{ed}$ angehört, dieses Netz bestimmt mit $\varphi_{123}$ ein Büschel, dem $\varphi_{ed}$ angehört, und wenn man dieses

Büschel etwa mit der durch $\varphi_{234}$ bestimmten $M_3$ zum Schnitt bringt, so erhält man den gesuchten Kegelschnitt. Dass die angegebenen Mannigfaltigkeiten sich wirklich schneiden, ist an und für sich nicht selbstverständlich, sondern folgt erst durch die räumliche Betrachtung.

## § 8. Die nichtreducierten Verwandtschaften.

Die allgemeinste einzweideutige projektive Punktverwandtschaft, die Gerade in Kegelschnitt eines Bündels verwandelt, entsteht, wenn wir zu der halbreducierten Verwandtschaft noch eine Kollineation dazufügen. Ob diese Kollineation in der einfachen oder in der doppelten Ebene vorgenommen wird, ist gleichgültig; aber es ist für die Vorstellung bequemer, sie in der Doppelebene zu denken. Gegeben sei also eine halbreducierte Verwandtschaft mit dem Uebergangskegelschnitt $\varphi'_{de}$, dem Pol $Z'$, dem Orthogonalkegelschnitt $\omega'_{de}$ u. s. w. Wir fügen nun noch eine Kollineation dazu, die $Z'$ in $Z$, die Punkte $D'$ in $D$ überführt. Die erste Frage ist nun

W i e v i e l s i c h s e l b s t e n t s p r e c h e n d e P u n k t e g i e b t e s, u n d w i e k o n s t r u i e r t m a n d i e s e l b e n?

Wir nennen nämlich dann einen Punkt $D$ sich selbst entsprechend oder invariant, wenn eines seiner Bilder $E'E''$ auf ihn fällt. Bei der Kollineation verwandeln sich die Geraden $s'$ durch $Z'$ in Geraden $s$ durch $Z$. Soll ein Punkt $D$ sich selbst entsprechen, so muss er zugleich auf $s'$ durch $Z'$ und auf der entsprechenden Geraden $s$ liegen, d. h. auf einem Kegelschnitt der durch die projektive Zuordnung $s \pi s'$ entsteht, und $Z$ und $Z'$ enthält. Diesen Kegelschnitt bilden wir durch die Kollineation $D \pi D'$ ab auf einen Kegelschnitt $\delta'$, der $Z'$ enthält, da $Z$ auf $\delta$ liegt, und $Z'$ dem Punkt $Z$ in der Kollineation entspricht, $\delta'$ bilden wir dann weiter ab durch die halbreducierte Verwandtschaft und erhalten dann $z'$ und eine Kurve dritter Ordnung, die $Z'$ enthält. Der Schnitt dieser $C_3$ mit $\delta$ bestimmt die invarianten Punkte. $Z'$ ist ein bereits bekannter Schnittpunkt, ist aber nicht mit zu den invarianten Punkten zu zählen. Die fünf anderen Punkte sind invariant, denn sie liegen zugleich auf den entsprechenden Strahlen $s's$ und auf den entsprechenden Kurven $C_3$ und $\delta$. Die beiden Schnittpunkte von $z'$ und $\delta$ sind keine invarianten Punkte, da $Z$ sich auf $z'$ abbildet, und $(z'\delta)$ zwei Punkte sind, von denen im allgemeinen keiner mit $Z$ zusammenfällt, der dann als invariant zu betrachten wäre. Es giebt also im allgemeinen fünf invariante Punkte.

Im übrigen bieten die allgemeinen Verwandtschaften nichts Neues gegen die halbreducierten, da sie ihnen projektivisch äquivalent sind. Eine allgemeine Verwandtschaft hat $7 + 8 = 15$ einfache Bestimmungsstücke, 7 von der reducierten Verwandtschaft, 8 von der Kollineation, die alle wesentlich sind.

Die zweite Frage, die sich stellt, lautet:

Wie konstruiert man eine Verwandtschaft, wenn die nötige Zahl von Elementen gegeben ist?

Es müssen $15 = 2 \cdot 7 + 1$ einfache Bestimmungsstücke gegeben sein, d. h. sieben Paare von Punkten $D_1\ E_1' \ldots D_7\ E_7'$ und ausserdem noch die Gerade $g$, auf der sich das Bild des Punktes $D_8$ befindet. Ist es gelungen zwei Punkte $Z'$ und $Z$ so zu finden, dass die sieben Strahlen $Z'E_1', E_2' \ldots E'_7$ projektiv zugeordnet sind den sieben Strahlen $ZD_1D_2 \ldots D_7$, so kann man noch durch $\infty^3$ Kollineationen die Strahlen $ZD_i = s_i$ so abbilden, dass sie auf die entsprechenden Strahlen $Z'E_i' = s'_i$ zu liegen kommen. Das Bild von $ZD_8 = s_8$ bezeichnen wir mit $s'_8$ und den Schnitt von $s'_8$ mit $g$ haben wir mit $E'_8$ zu bezeichnen und als Bild von $D_8$ aufzufassen. Die Punkte $D$ bilden sich bei der Kollineation ab auf Punkt $D'$ auf den entsprechenden Geraden $s'$, und es ist nun nach § 7, 3 die Aufgabe zu lösen, die halbreducierte Verwandtschaft zu konstruieren, die $D_i'$ bez. auf $E_i'$ abbildet. Ist $Z$ und $Z'$ einmal gefunden, ferner eine Kollineation vorgenommen, die $s_i$ mit $s_i'$ zur Deckung bringt, und dann die halbreducierte Verwandtschaft konstruiert, so werden jedenfalls $D_i$ ($i = 1,2 \,..\, 8$) mit $E_i'$ ($i = 1,2,3 \,..\, 8$) zur Deckung gebracht, es muss aber noch bewiesen werden, dass die verschiedenen Zerlegungen, die man mit der Verwandtschaft vornehmen kann, alle auf dasselbe Resultat führen, d. h. dass bei den verschiedenen Zerlegungen nicht nur die acht gegebenen Punkte $D_i$ auf die acht Punkte $E_i'$ sondern überhaupt jeder Punkt $D$ auf denselben Punkt $E'$ abgebildet wird. Dieser Beweis wird so geführt. Zunächst ist klar, dass die verschiedenen Systeme $D_i'$ $D_i''$ ..., die ich durch die Abbildung von $s_i$ auf $s_i'$ erhalte, alle sich in Perspektive befinden mit dem Centrum $Z$. Ferner kann ich bei der räumlichen Konstruktion der halbreducierten Verwandtschaften $D_i'$ $E_i'$ $D_i''$ $E_i'$ u. s. w. immer dieselbe Gerade $\mathfrak{z}$ durch $Z$ und denselben Punkt $\mathfrak{Z}$ auf ihr nehmen, da die verschiedenen Flächen, die sich für ein System $D_i'$ $E_i'$ ergeben, alle dieselben Verwandtschaften bestimmen. Demnach ist nur noch zu beweisen: Sind auf acht Geraden durch $Z$ ($s_1 \,..\, s_8$) acht Punkte $E_i'$ gegeben und acht Systeme $D_i'$ $D_i''$ $D_i'''$ ... wo $D_i'$ $D_i''$ $D_i'''$ u. s. w. sich durch Perspektiven mit $Z$ als Centrum zur Deckung bringen lassen, so werden durch $E_i'$ $D_i'$, $E_i''$ $D_i''$ u. s. w. halbreducierte Verwandtschaften bestimmt, die alle sich in den Perspektiven $D_i' \overline{\pi}$ $D_i'' \overline{\pi} D_i'''$ .... entsprechenden Punkte $D'$ $D''$ u. s. f. mit demselben Punkt $E'$ zur Deckung bringen. Bei der Konstruktion der verschiedenen Verwandtschaften darf dasselbe $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{Z}$ benützt werden. Zur Konstruktion der Verwandtschaft $D'E'$ müssen wir noch einem Punkt $N$ auf $\mathfrak{z}$ annehmen, und können dann $\Phi$ und die Verwandtschaft konstruieren. $D''$ und $D'$ sind nun durch eine Perspektive zur

Deckung zu bringen, $Z$ ist das Centrum, also muss man die Perspektive erhalten können, wenn man auf $\mathfrak{z}$ zwei Punkte annimmt und die Ebene $\mathfrak{s}$ von diesen beiden Punkten aus projiciert, denn die Perspektive erhält man immer durch zweifache Projektion einer Ebene. $N$ nehmen wir als Projektionscentrum für die Punkte $D'$, dann können wir immer $N'$ und $\mathfrak{s}$ so bestimmen, dass die entsprechenden Strahlen $ND'$ und $N'D'$ sich in demselben Punkt $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{s}$ treffen. Die Strahlen $\mathfrak{Z}E_i'$ mögen $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{E}_i'$ treffen, und den Schnittpunkt von $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{s}$ nennen wir $Z'$. Die halbreducierte Verwandtschaft, die auf $\mathfrak{s}$ liegt und $\mathfrak{D}_i$ bez. auf $\mathfrak{E}_i'$ abbildet, ist dann eindeutig bestimmt, nach § 7, III. Jedem Punkt $\mathfrak{D}$ ist sein bestimmtes Punktepaar $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''$ zugeordnet. Wenn wir nun $(\mathfrak{D})$ von $N'$ aus auf $(D'')$, von $N$ aus auf $(D')$ projicieren, und $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{Z}$ aus auf $E'$ in $\mathfrak{e}$, so erhalten wir die beiden halbreducierten Verwandtschaften $(D'E')$ und $(D''E')$ in $\mathfrak{e}$. $D'$ und $D''$, die demselben Punktepaar $E'E''$ entsprechen, sind aber als Projektionen desselben Punktes $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{s}$ von $N$ bez. $N'$ aus entsprechende Punkte in der Perspektive $D''\overline{\pi}\,D'D''$. Entsprechende Punkte werden also auf dasselbe Paar $E'E''$ abgebildet, d. h.:

Sind die Centren $Z$ und $Z'$ gefunden, so ist die Verwandschaft $DE'$ im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Es bleibt also noch die Bestimmung von $Z$ und $Z'$ übrig, d. h. die Aufgabe: Gegeben sind sieben Punktepaare $D_i\,E_i'$, es sollen zwei Punkte $Z'$ und $Z$ so bestimmt werden, dass die sieben Strahlen $s_i = ZD_i$ den sieben Strahlen $s_i' = Z'E_i'$ projektiv zugeordnet sind. Dies ist das Problem der Homalographie, von dem Herr Sturm im ersten Band der math. Annalen (das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades) eine rein synthetische Lösung gegeben hat. Es giebt im allgemeinen drei Paare $ZZ'$ und daraus folgt, dass die Verwandtschaft durch die gegebenen Elemente im allgemeinen dreideutig bestimmt ist; denn nach dem $ZZ'$ gefunden sind ist ja, wie wir bewiesen haben, die weitere Konstruktion eindeudig.

## § 9. Anwendungen der Verwandtschaft.

Man kann mit Hülfe der Verwandschaft u. a. zahlreiche Sätze über Kurven vierter Ordnung vom Geschlechte Eins ableiten, es ist jedoch hier aus Mangel an Raum unmöglich, genauer auf dieselben einzugehen. Erwähnt sei daher nur der folgende Satz: Es giebt bei jeder bicirkularen Kurve vierter Ordnung vier Kreise, die Grundkreise von Kreisverwandtschaften sind, welche die Kurve auf sich selbst abbilden. Sie schneiden einander senkrecht, woraus folgt, dass höchstens drei derselben reell sein können. Bei den Cassinischen Kurven verwandeln sich zwei der Kreise in die Symmetrieachsen und die ihnen zugehörigen Verwandtschaften in Spiegelungen an diesen Achsen. Die beiden anderen Kreise sind imaginär bei den einzügigen, dagegen ist einer reell bei den zweizügigen Cassinischen Kurven.

## § 10. Eine einzweideutige Punktgeradenverwandtschaft.

Thomä, Zw. — Zw. V. § 17 ist eine einzweideutige Punktgeraden Verwandtschaft aufgestellt, die den ursprünglichen Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildete. „Projiciert man von zwei Punkten $XY$ eines durch sie gehenden Kegelschnittes $\omega$ die Punkte $\mathfrak{L}$ der Ebene in der $\omega$ liegt, und verbindet die Punkte, die die Projektionsstrahlen auf $\omega$ bestimmen, durch eine Gerade $\mathfrak{l}$, so wird dadurch eine Zuordnung zwischen den Punkten $\mathfrak{L}$ und den Geraden $\mathfrak{l}$ hergestellt, die im allgemeinen eine einzweideutige ist.“ Man sieht sofort, dass, wenn man noch eine Dualität, nämlich die Transformation durch reciproke Polaren mit $\omega$ als Leitkegelschnitt hinzufügt, die $\mathfrak{l}$ auf $D$ abbildet, zwischen $D$ und $\mathfrak{L}$ eine einzweideutige projektive reducierte Verwandtschaft besteht, bei der $\omega$ Grundkegelschnitt, und der Pol $Z$ von $z = (XY)$ des Centrum ist. Fügt man noch eine Kollineation dazu, so erhält man die allgemeinste e. p. Punktgeradenverwandtschaft. Erwähnt sei nur, dass die Coincidenzkurve dieser Verwandtschaft eine Kurve dritter Ordnung ist.