Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Liebmann, Heinrich** (1874–1939)

Titel: **Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung**

Univ.Schrift: Leipzig, Phil. Habil.-Schr. v. 27.10.1899

3

ÜBER DIE VERBIEGUNG DER GESCHLOSSENEN FLÄCHEN POSITIVER KRÜMMUNG.

HABILITATIONSSCHRIFT

DURCH WELCHE

MIT ZUSTIMMUNG DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

ZU SEINER

FREITAG, DEN 27. OCTOBER, NACHMITTAGS 3 UHR

IM CZERMAKEION (BRÜDERSTRASSE 34)

ZU HALTENDEN PROBEVORLESUNG:

ÜBER DEN VERLAUF DER GEODÄTISCHEN LINIEN AUF ANALYTISCHEN FLÄCHEN

ERGEBENST EINLADET

DR. HEINRICH LIEBMANN.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1899.

SONDERABDRUCK AUS DEN „MATHEMATISCHEN ANNALEN“, BAND LIII.

§ 1.

Einleitung.

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit dem zu behandelnden Problem vertraut machen, indem wir uns an ein ähnliches, bereits gelöstes, erinnern. Gleichzeitig werden wir den in den folgenden Paragraphen entwickelten Gedankengang skizziren.

1. *Der Euclidische Polyedersatz.* Viele mathematische Sätze theilen mit einander das Schicksal, dass ihre Wahrheit schon lange gefunden worden ist, bevor ein strenger Beweis für dieselben gegeben wurde.

Hierhin gehört auch der von Euclid*) aufgestellte Satz:

Zwei Polyeder sind congruent, wenn sie von congruenten ebenen Figuren begrenzt werden.

Einen Beweis dieses Satzes, der übrigens nur für convexe Polyeder gilt, hat Euclid nicht gegeben.

Erst Cauchy**) ist es vielmehr, welcher den Satz scharf formulirt und streng bewiesen hat. In dieser Fassung lautet er dann so:

Ein convexes Polyeder ist vollkommen bestimmt, wenn das Polyedernetz gegeben ist, d. h. die Seitenflächen mit der Angabe der Reihenfolge, in welcher sie aneinander geheftet werden sollen.

Seitdem ist der Satz in viele elementare Lehrbücher übergegangen***).

Der Cauchy'sche Satz gilt übrigens nur für convexe Polyeder. Ueber das Verhalten von nicht convexen Polyedern sind allgemeine Sätze bis jetzt noch nicht aufgestellt und man muss von jedem geschlossenen nicht

---

*) Euclid's Elemente, Buch 11, Definition 10.

**) Cauchy, Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Journal de l'école polytechnique 16, p. 87.

***) Z. B. Rausenberger, Elementargeometrie (Leipzig 1887), § 45, 15 (p. 212).

convexen Polyeder erst untersuchen, ob es in sich beweglich ist oder nicht. (Als Beispiel eines beweglichen Polyeders sei das Bricard'sche*) octaèdre articulé genannt.)

Man kann sich dasselbe leicht construiren, indem man auf einen Papierstreifen in der Weise, wie es Figur 1 zeigt, sechs rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke zeichnet und die Figuren dann ausschneidet und zu einem Polyeder zusammenbiegt, welches dann die Gestalt von Figur 2 hat. Wir erhalten dann ein Polyeder, welches von sechs rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken, nämlich ABC, BCD, CDE, DEF, EFA und FAB und zwei gleichseitigen Dreiecken, nämlich BDF und ACE gebildet wird, und sich deformiren lässt. Dieses Octaeder besitzt übrigens noch andere merkwürdige Eigenschaften: es ist einseitig und trennt den Raum nicht in zwei Theile**). — In neuester Zeit endlich hat man sich auch viel beschäftigt mit der Beweglichkeit von ungeschlossenen Polyedernetzen***).

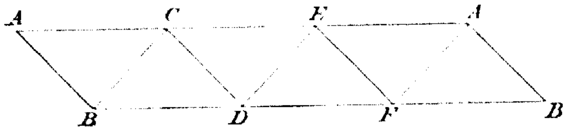

Fig. 1.

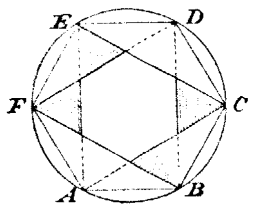

Fig. 2.

2. *Der Minding'sche Satz über Ovaloide.*

Während man bei den Polyedern erst die geschlossenen untersucht und neuerdings erst die ungeschlossenen in Betracht gezogen hat, gilt

---

*) R. Bricard, Sur la théorie de l'octaèdre articulé. Liouville's Journal Ser. V, T. 3 (1894), p. 113 ff.

**) Eine noch einfachere Construction eines beweglichen Polyeders hat Herr Geh. Rath Neumann angegeben: Man construire aus vier Dreiecken eine räumliche Ecke. Aus der nebenstehenden Figur wird man eine solche Ecke erhalten, indem man sie ausschneidet und die Kanten, die mit AB bezeichnet sind, zusammenfügt. Die auf solche Weise erhaltene Figur stelle man so auf, dass die Linien BD und CE horizontal sind, dann denke man sich die Figur an der durch CE gehenden Verticalebene gespiegelt; das auf diese Weise (durch Hinzufügung des Spiegelbildes) entstehende Polyeder besitzt dann die gewünschte Eigenschaft.

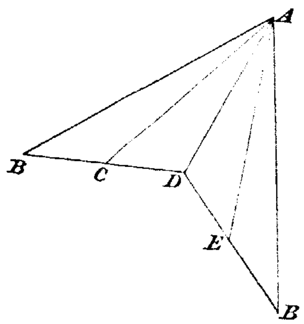

Fig. 3.

***) Pizetti, Sui poliedri deformabili (Rend. delle R. Acad. d. Lincei, 1898, Juli 3). Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung VI, 2 (Leipzig 1899) (vergl. besonders p. 61—62).

von den Gebilden, die sich aus ihnen durch Grenzübergang ableiten lassen, den Flächen, gerade das Umgekehrte. Seit Gauss sich zuerst mit der Verbiegung von Flächen beschäftigt hat, hat die Flächentheorie sehr zahlreiche Bearbeiter gefunden und ist zu einer besonderen Disciplin herangewachsen. Man hat namentlich auch die Frage der Deformation, d. h. der Verbiegung ohne Zerrung behandelt*). Doch wurden dabei immer nur einzelne Flächenstücke untersucht, ohne dass man die Berandung berücksichtigte. Es sind dies also Untersuchungen, welche denen über ungeschlossene Polyedernetze entsprechen.

Dagegen ist ein Satz, der dem Cauchy'schen Satz über convexe Polyeder entspricht, zwar schon lange von Minding ausgesprochen worden**), doch fehlt es bis jetzt an einem Beweis. Minding sagt nämlich in einer Arbeit gelegentlich:

Um Missverständnissen vorzubeugen, bemerke ich noch, dass bekanntlich eine in sich geschlossene convexe Fläche als unversehrtes Ganzes unbiegsam ist.

Auch dieser Satz, für den sich in der Litteratur nirgends ein Beweis findet, bedarf erst einer scharfen Formulirung, entsprechend wie sie Cauchy dem Euclidischen gegeben hat.

Statt im allgemeinen von convexen Flächen zu reden, werden wir im speciellen die *analytische Entwickelbarkeit* voraussetzen, d. h. dass die Fläche sich in jedem Punkt bei geeigneter Wahl des rechtwinkligen Coordinatensystems durch die Gleichung darstellen lässt:

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2} + \cdots$$

wo a und b positive (von Null verschiedene) Constanten sind, die natürlich in den verschiedenen Punkten der Fläche verschiedene Werthe haben können. (Wir wollen das Coordinatensystem, bei dem also die z-Axe in der Richtung der inneren Normale, die x- und y-Axe in die Richtungen der Tangenten an die Krümmungslinien fallen, kurzweg das *natürliche Coordinatensystem* der Fläche in dem betreffenden Punkt nennen.)

*Eine solche geschlossene Fläche bezeichnen wir mit dem Namen Ovaloid****).

(Zu den Ovaloiden gehört also die Kugel und das Ellipsoid, ferner jede Fläche, die durch Rotation eines symmetrischen (analytischen) Ovales

*) Vergl. z. B. Stäckel, Ueber Biegungen und conjugirte Systeme, Math. Annalen 49, p. 255—310, wo auch die Litteratur citirt ist.

**) Minding, Ueber die Biegung gewisser Flächen, Crelle's Journal 18 (Berlin 1838), p. 365—368.

***) In viel weiterem Sinne wird der Name „convexe Fläche" oder auch „Eifläche" gebraucht von H. Brunn in seiner Dissertation (München 1887) und von H. Minkowski (Geometrie der Zahlen I, Leipzig 1896, p. 38 ff.).

um seine Symmetrieaxe entsteht, dagegen z. B. nicht der Würfel, sowie eine Fläche, welche durch Rotation eines vom Halbkreis verschiedenen Kreisbogens um seine Sehne entsteht.)

Auf solche Ovaloide also werden wir allein Rücksicht nehmen.

3. *Infinitesimale Verbiegungen.* Auch den Begriff der Verbiegung müssen wir schärfer fassen.

Wir werden nämlich nur infinitesimale Verbiegungen betrachten, wie sie in der Variationsrechnung und bei der Lie'schen Theorie*) gebraucht werden.

Diese Verbiegungen sind gegeben durch die Formeln

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta.$$

Ferner sollen $\xi\eta\zeta$ analytische Functionen von x und y sein, die im betrachteten Gebiet endlich bleiben.

Wir sagen also: $\xi\eta\zeta$ definiren eine infinitesimale Verbiegung, wenn sie analytische Functionen sind, die die Relation

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0$$

identisch erfüllen, unter xyz die Coordinaten des Ovaloides verstanden. —

Weil nämlich die betrachtete infinitesimale Transformation eine Verbiegung ohne Zerrung ist, so muss

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = d(x+\varepsilon\xi)^2 + d(y+\varepsilon\eta)^2 + d(z+\varepsilon\zeta)^2$$
$$= dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sein; d. h.

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0 \text{**)}.$$

Auf Grund dieser Definitionen werden wir dann den Satz beweisen:

Ein Ovaloid als geschlossene Fläche gestattet keine infinitesimale Verbiegung ohne Zerrung.

4. *Gültigkeitsbereich des Minding'schen Satzes.* Unser Beweis schliesst die Möglichkeit nicht aus, dass die Fläche eine endliche Verbiegung gestattet, d. h. dass es ein von dem gegebenen Ovaloid gänzlich verschiedenes giebt, welches mit ihm in den kleinsten Theilen congruent ist, sich aber nicht durch eine continuirliche Reihenfolge von Verbiegungen in dasselbe überführen lässt.

Um die Möglichkeit eines solchen Falles zu illustriren, wollen wir uns an ein Problem aus der Variationsrechnung erinnern, wo ähnliche Verhältnisse auftreten.

---

*) S. Lie, Differentialgleichungen mit inf. Transformationen (Leipzig 1891), p. 30.

**) Man vergl. L. Bianchi, Differentialgeometrie, übersetzt von Lukat (Leipzig 1896), p. 287.

Bekanntlich hat Jacobi bewiesen, dass auf den Flächen negativer Krümmung die geodätischen Linien ihrer ganzen Ausdehnung nach kürzeste Linien sind.

Bei diesem Beweis werden indessen die geodätischen Linien nicht mit allen möglichen Verbindungslinien verglichen, sondern nur mit den „unendlich benachbarten".

Thatsächlich aber kann es auch auf Flächen negativer Krümmung zwischen zwei Punkten verschiedene geodätische Linien geben*) von verschiedener Länge, und unter diesen kann natürlich nicht jede die kürzeste sein. Obwohl also jede geodätische Linie, verglichen mit einer *unendlich benachbarten*, kürzeste ist, braucht sie doch in Wirklichkeit nicht kürzeste zu sein. Analog könnte mit den Ovaloiden der Fall eintreten, dass es zwar kein „unendlich benachbartes" congruentes Ovaloid giebt, aber doch überhaupt *verschiedene* congruente Ovaloide.

Noch auf eine weitere Einschränkung sei hier hingewiesen. Wir beweisen den Satz nicht für jede geschlossene Fläche, sondern nur für solche von positiver Krümmung, obwohl er jedenfalls noch für sehr viele andere gilt. Ist doch bis jetzt überhaupt noch keine in sich geschlossene zusammenhängende *verbiegbare* Fläche behandelt, die etwa dem Bricard'schen octaèdre articulé entspricht!

5. *Flächen constanter positiver Krümmung.*

Bei den Ovaloiden betrachten wir nur infinitesimale Transformationen. In viel allgemeinerem Umfang können wir aber den Beweis führen bei einem speciellen Ovaloid, der Kugel**).

Wir werden nämlich zeigen, dass die Kugel das einzige Ovaloid constanter Krümmung ist, und dass ein entsprechender Satz in ebenen Räumen von beliebig viel Dimensionen gilt.

Wir ziehen also nicht nur endliche Transformationen in Betracht, sondern wir verallgemeinern den Satz auch für höhere Dimensionen. —

Der für Gebilde constanter Krümmung ausgesprochene Satz deckt sich übrigens mit dem für Ovaloide nur im dreidimensionalen Raum, und auch da, wie wir gesehen haben, nur theilweise.

In der Ebene nämlich lässt sich jede geschlossene Curve verbiegen, während der Kreis die einzige Curve constanter Krümmung ist. Im ebenen Raum von mehr als drei Dimensionen aber, wo wir mit Kronecker***)

---

*) Man vergl. J. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. Liouville's Journal, Ser. V, T. 3, p. 27 ff.

**) Eine Skizzirung des Beweises ist schon früher publicirt. (Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys. Classe, 1899, Heft 1.)

***) Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Berliner Academieberichte 1869, p. 688 ff.

die Krümmung der $n-1$-dimensionalen Fläche als das reciproke Product der $n-1$ Hauptkrümmungsradien definiren, lässt sich eine solche Fläche, wenn ihre Krümmung positiv ist, im allgemeinen überhaupt nicht verbiegen*). Dagegen bleibt die Möglichkeit offen, dass es von der Hypersphäre verschiedene geschlossene Flächen constanter Kronecker'scher Krümmung giebt, die ebenfalls in jedem Punkt analytisch sind. Dass dies aber nicht der Fall sein kann, werden wir streng beweisen.

6. *Uebersicht über die folgenden Paragraphen.*

Die zu entwickelnden Unmöglichkeitsbeweise laufen darauf hinaus, aus der Existenz der gedachten Verbiegungen Widersprüche abzuleiten. Es müssten nämlich dann gewisse Hilfsflächen, die ihrer Natur nach im Endlichen verlaufen, sich ins Unendliche erstrecken, worin ein Widerspruch liegt. Wie dies gemeint ist, wird in § 2 genauer entwickelt. § 3 enthält Kriterien für den indefiniten**) Charakter von Formen, welche für die folgenden Untersuchungen nöthig sind. In § 4 behandeln wir dann die Ovaloide und zeigen, dass ihre Verbiegung unmöglich ist. In § 5 wird der allgemeinere Beweis für die Kugel gegeben. Nebenbei ergiebt sich in § 6 zugleich ein Beweis des Satzes, dass die Kugel die einzige geschlossene Fläche constanter positiver mittlerer Krümmung ist. § 6 endlich behandelt die Flächen constanter Krümmung in höheren Räumen.

§ 2.

Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken.

Wie schon in Nr. 6 des vorigen Paragraphen erwähnt, werden wir uns der indirecten Beweismethode bedienen. Wir werden nämlich zeigen, dass die infinitesimale Verbiegung eines Ovaloides und ebenso die Existenz eines von der Kugel verschiedenen Ovaloides nothwendig die Existenz von Flächen nach sich ziehen würde (diese Flächen werden in den folgenden Paragraphen unter dem Namen „Verbiegungsfläche“ bez. „Kernfläche“ eingeführt), die wegen ihrer Eigenschaft, im allgemeinen negative Krümmung zu besitzen, sich ins Unendliche erstrecken müssen, die andrerseits aber ganz im Endlichen verlaufen. Inwiefern hierin ein Widerspruch liegt, soll in diesem Paragraphen genauer ausgeführt werden.

1. *Flächen negativer Krümmung ohne singuläre Punkte.*

Eine Fläche negativer Krümmung erstreckt sich, wenn sie keine singulären Punkte hat, ins Unendliche. Diesen einfachen Satz wird man

*) F. Schur, Ueber Räume constanten Krümmungsmasses. Math. Annalen XXVII, p. 163 ff. (cf. besonders p. 172: *Ein Raum von n Dimensionen kann in einem ebenen Raum von $n-1$ Dimensionen im allgemeinen nicht deformirt werden*).

**) *Indefinit* nennen wir eine Form, welche für reelle Werthe der Variabeln ihr Vorzeichen wechselt.

folgendermassen beweisen: Zunächst ist klar, dass jede Ebene, welche einen Punkt der Fläche enthält, dieselbe in zwei Theile zerlegt. Ist die Ebene nicht Tangentialebene, dann ist diese Eigenschaft klar; ist sie aber Tangentialebene, so schneidet sie die Fläche auch wegen der negativen Krümmung.

Wenn man jetzt durch einen Punkt der Fläche eine Ebene parallel zur x-Ebene legt, so schneidet die Ebene, und auf beiden Seiten befinden sich in endlichem Abstand wieder Punkte der Fläche. Durch je einen dieser Punkte auf jeder Seite der Ebene legt man wieder eine Ebene u. s. w. x kann also kein Maximum haben.

Bliebe nun die Fläche ganz im Endlichen, so müsste x nach dem Satz von Weierstrass, dass eine stetige Function in einem endlichen Gebiet einen oberen Grenzwerth hat und diesen Grenzwerth wirklich erreicht, nothwendig ein Maximum haben; Das kann aber, wie wir eben gesehen haben, nicht eintreten. Die Annahme, dass die Fläche ganz im Endlichen bleibt, ist also falsch; sie muss sich ins Unendliche erstrecken. — Wir wollen hervorheben, dass aus unserem Beweis nur folgt, dass die Fläche sich ins Unendliche erstreckt; nicht etwa dass sie sich in der Richtung der x Axe ins Unendliche erstreckt. (Beispielsweise erstreckt sich die Fläche negativer Krümmung $z^2 + y^2 = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ins Unendliche. Trotzdem ist sie zwischen den Ebenen $x = 1$ und $x = -1$ eingeschlossen.)

2. *Punkte vom Charakter negativer Krümmung.*

Eine Fläche negativer Krümmung kann singuläre Punkte haben, wo überhaupt keine Krümmung existirt, oder auch singuläre Linien dieser Art (man erinnere sich z. B. an die Pseudosphäre und ihre Rückkehrkante). In solchen Punkten wird es im allgemeinen Ebenen geben, welche die Fläche begrenzen*) d. h. den Raum in zwei Theile zerlegen, von denen nur der eine Punkte der Fläche enthält.

Wir machen darauf aufmerksam, dass der Begriff der „begrenzenden Ebene“ viel allgemeiner ist als der Begriff der Tangentialebene. Bei Flächen positiver Krümmung würde jede Tangentialebene (in der Umgebung des Berührungspunktes) als abgrenzende Ebene zu bezeichnen sein. Bei Flächen negativer Krümmung aber, die eine Tangentialebene niemals abgrenzen kann, giebt es sehr wohl begrenzende Ebenen in singulären Punkten!

Dagegen können auch singuläre Punkte vorhanden sein, in denen der Charakter der negativen Krümmung gewahrt bleibt, d. h. welche die Eigenschaft haben, dass jede durch sie gehende Ebene die Fläche in zwei

*) Herr Minkowski bezeichnet eine solche Ebene mit dem Namen *Stützebene*.

Theile zerschneidet. Wie solche Punkte beschaffen sind, wollen wir jetzt genauer auseinandersetzen.

Ist $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ ein Punkt der Fläche, und sind $\xi \eta \zeta$ analytische Functionen, so wird eine Ebene $0 = \alpha(x - \xi_0) + \beta(y - \eta_0) + \gamma(z - \zeta_0)$, die durch den Punkt $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ geht, die Fläche in zwei Theile zerschneiden, wenn der Ausdruck

$$\alpha(\xi - \xi_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0)$$

in der Umgebung von $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$ verschiedene Vorzeichen hat, je nach der Wahl von $\xi \eta \zeta$.

Da $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ analytische Functionen sind von zwei Parametern (etwa u und v), so genügt es zu zeigen, dass die Glieder niedrigster Ordnung in dem obigen Ausdruck je nach der Wahl der Parameter verschiedenes Vorzeichen haben. Beginnt die Reihenentwicklung mit Gliedern ungerader Ordnung, dann ist dieser Zeichenwechsel selbstverständlich, beginnt sie mit solchen von gerader Ordnung, so muss man zeigen, dass diese Glieder niedrigster Ordnung eine indefinite Form darstellen.

Ist dies aber gezeigt, dann ist damit bewiesen, dass die Ebene in dem Punkt die Fläche schneidet.

Wenn also die Glieder niedrigster Ordnung in

$$\alpha(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0)$$

und zwar für jedes Werthsystem $\alpha \beta \gamma$ indefinit sind, so schneidet jede Ebene, und die Fläche hat dann in diesem Punkte den Charakter der negativen Krümmung.

3. *Ein Widerspruch.* Wir behaupten nun: Flächen negativer Krümmung, welche nur reguläre Punkte und singuläre Punkte der Art haben, haben, dass in diesen der Charakter der negativen Krümmung erhalten bleibt, welche ausserdem ganz im Endlichen bleiben, giebt es nicht.

Bliebe nämlich die Fläche im Endlichen, so müsste etwa ζ irgendwo ein Maximum haben, was unmöglich ist, weil $\zeta - \zeta_0$ der Annahme nach mit Gliedern beginnt, welche eine indefinite Form darstellen (nicht etwa eine definite oder semidefinite).

Die Fläche müsste sich also ins Unendliche erstrecken, was ein Widerspruch ist. Wenn also aus einem Satz folgt, dass es eine im Endlichen bleibende Fläche negativer Krümmung mit singulärem Punkt giebt, in denen der Charakter der negativen Krümmung nicht aufhört, so ist dies ein Widerspruch, und der Satz, aus dem dies folgt, kann nicht richtig sein.

Auf diesen Widerspruch werden wir in § 5 geführt werden, bei der „Kernfläche".

4. *Seminegative Krümmung.* Damit eine Fläche sich ins Unendliche erstreckt, ist es zwar hinreichend, aber keineswegs nothwendig, dass sie

in jedem ihrer Punkte den Charakter der negativen Krümmung hat. Es genügt, wenn diese Bedingung in einer einzigen Richtung erfüllt ist, d. h. wenn etwa jede Ebene parallel zur x-Ebene, welche durch einen Punkt der Fläche geht, diese in zwei Theile theilt. Denn dann kann x kein Maximum haben, die Fläche also nicht im Endlichen bleiben.

Die negative Krümmung darf also in einzelnen Punkten aufhören. Dies geschieht z. B., wenn in einem Punkte die Fläche eine Spitze hat, oder auch wenn durch einen Punkt eine Rückkehrkante der Fläche geht. Auch andere Möglichkeiten giebt es. Die Fläche kann vielleicht in einzelnen Punkten *seminegative Krümmung* haben, welche so definirt sein soll: *Wenn alle Ebenen durch einen Punkt der Fläche, welche die Fläche abgrenzen, einen Theil des Büschels bilden, so heisst in diesem Punkt die Krümmung seminegativ**). Beispielsweise würden also die Punkte des grössten Parallelkreises auf der Pseudosphäre oder Rotationstractrix als Punkte seminegativer Krümmung zu bezeichnen sein. —

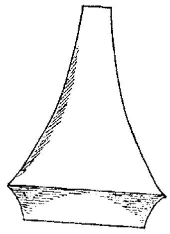
Fig. 4.

Wenn nun eine Fläche, die im übrigen lauter Punkte negativer Krümmung enthält, Punkte seminegativer Krümmung in endlicher Anzahl hat, kann sie nicht im Endlichen bleiben, wie die folgende Betrachtung zeigt:

Man kann dann immer Ebenen finden, welche keine Parallele zu einer Axe eines im Punkte seminegativer Krümmung abtrennenden*) Ebenenbüschels enthalten.

Ja noch mehr! Wir behaupten nämlich:

Eine im Endlichen gelegene Fläche, welche negative Krümmung hat, und unendlich viele, aber isolirte Punkte seminegativer Krümmung, kann nicht existiren.

*Isolirt***) nennen wir die Punkte eines Systems, wenn jeder Punkt die Eigenschaft hat, dass sich in endlicher, wenn auch noch so kleiner Entfernung von einem jeden kein anderer Punkt des Systems befindet.

Wir tragen zum Beweise der Behauptung die Richtungen, durch welche abtrennende Ebenen gehen müssen, im Coordinatenanfang ab. Sie bilden eine abzählbare Menge***).

Nun nehme man eine beliebige andere Richtung, d. h. eine andere

---

*) Ein Ebenenbüschel trennt ab oder begrenzt d. h. natürlich nicht, dass jede Ebene begrenzt, weil sich die Fläche sonst auf eine Gerade reduciren würde, sondern nur, dass sich unter den Ebenen des Büschels eine stetige Menge von abtrennenden Ebenen befindet.

**) Schönflies, Referat über Cantor'sche Mengenlehre (in der Math. Encyklopädie I, p. 185 ff., Nr. 11, Allgemeine Definitionen).

***) Isolirte Punkte können nur eine abzählbare Menge bilden.

Linie durch den Coordinatenanfang. Gesetzt nun, es wäre jede Ebene durch diese Richtung eine abtrennende, oder vielmehr parallel einer solchen abtrennenden Ebene, so müsste jede Ebene durch die genannte Gerade eine Gerade enthalten, die parallel ist zur Axe eines abtrennenden Ebenenbüschels. Da diese nur in abzählbarer Menge vorhanden sind, so hätten wir eine Abbildung einer abzählbaren Menge auf ein Continuum (alle Ebenen eines Büschels), was unmöglich ist*).

Demnach giebt es unendlich viele Ebenen, welche nicht abtrennen; man kann unendlich viele Ebenen durch den Coordinatenanfang legen, welche die Eigenschaft haben, dass es parallel zu ihnen eine die Fläche begrenzende Ebene nicht giebt, d. h. die Fläche erstreckt sich ins Unendliche.

Damit ist die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes bewiesen. Wir werden in § 4, wenn wir die „Verbiegungsfläche“ behandeln, davon Gebrauch machen.

§ 3.

Kriterien für den indefiniten Charakter einer (geraden) Form.

In Nr. 2 des vorigen Paragraphen wurde bereits erwähnt, dass u. a. sich die Aufgabe stellen wird, zu entscheiden, ob eine vorgelegte (gerade) Form indefinit ist, d. h. ob sie das Zeichen wechselt bei geeigneter Wahl der (reellen) Werthe der Variabeln. Hinreichende Kriterien, welche für die in Betracht kommenden Fälle diese Frage zu entscheiden gestatten, sollen in diesem Paragraphen entwickelt werden. Da diese Kriterien wohl zum Theil neu sind, ausserdem aber ein allgemeineres Interesse besitzen (sie sind ja bekanntlich für die Theorie der Maxima und Minima**) von Functionen von mehreren Variabeln von Bedeutung), so wollen wir sie in etwas allgemeinerer Form beweisen, als streng genommen nothwendig ist. Als Hülfsmittel benützen wir dabei nur den Green'schen Satz, den wir hier nicht nur für höhere Dimensionen brauchen, sondern auch in bequemer Weise so umformen, wie wir ihn dann auf homogene Functionen oder Formen anwenden wollen. — Beiläufig bemerkt, lassen sich die hier entwickelten hinreichenden Kriterien vermuthlich durch einfache Modificationen in nothwendige verwandeln; doch wollen wir hierbei nicht verweilen, weil diese Untersuchung nicht hierher gehört.

---

*) Schönflies, a. a. O. Nr. 2 (p. 186), wo auch die Cantor'schen Arbeiten genau citirt sind.

**) Man vergl. z. B. Genochi-Peano, Differential- und Integralrechnung, übersetzt von Bohlmann und Schepp (Leipzig 1898), p. 183 ff.

1. *Der Green'sche Satz.* Der Green'sche Satz, mit dessen Hülfe man ein Flächenintegral in ein Randintegral verwandeln kann, wird bekanntlich durch die Formel ausgedrückt

$$\int_s \frac{\partial f}{\partial n} ds = \int \Delta f \, d\sigma.$$

Hier bedeutet $\frac{\partial f}{\partial n}$ den Differentialquotienten nach der äusseren Normale der geschlossenen Curve, über welche das erste Integral zu erstrecken ist, Δf bedeutet den Ausdruck $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und das Integral auf der rechten Seite ist über das Innere des Flächenstückes zu erstrecken*).

Diesen Satz kann man unmittelbar auf Gebiete von höheren Dimensionen verallgemeinern, und er lautet dann

$$\int \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = \int \Delta f \, d\tau,$$

wo n wieder die äussere Normale eines Elementes der $n-1$ dimensionalen geschlossenen Fläche ist, welche den n-dimensionalen Raum begrenzt, über den das Integral zur Rechten erstreckt wird. Das Integral zur Linken ist auszudehnen über die geschlossene Fläche. Ferner ist

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

2. *Eine Differentialrelation.* Wenn f eine homogene Function der n Variabeln

$$x_1 \, x_2 \ldots x_n$$

ist, wenn wir ferner die Bezeichnung

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

einführen, so ist

$$r \frac{\partial f}{\partial r} = mf,$$

unter m den Grad der Function verstanden.

Da weiterhin Δf vom Grade $m-2$ ist, so besteht für eine Form vom Grade m die Identität:

$$r \frac{\partial \Delta f}{\partial r} = (m-2) \Delta f.$$

3. *Der Green'sche Satz in allgemeinerer Gestalt für homogene Formen mit beliebig vielen Variabeln.* Den Green'schen Satz wollen wir nun auf eine homogene Form $2m^{\text{ter}}$ Ordnung anwenden, wobei wir die eben ent-

*) Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Green'schen Satzes sind im Folgenden überall erfüllt.

wickelte Differentialrelation brauchen und als Fläche immer eine „Kugel" um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt benützen.

Die Differentiation nach der äusseren Normale ist dann also identisch mit der Differentiation nach r.

Es ist dann ferner

$$2mf = r\frac{\partial f}{\partial r},$$

und weiter

$$2m\int f\,d\sigma = R_1\int\frac{\partial f}{\partial r}\,d\sigma = R_1\int\limits_{(R_1)}\Delta f\,d\tau.$$

Hier ist das Flächenintegral erstreckt über die Oberfläche einer Kugel vom Radius R_1, das Raumintegral über ihr Inneres, angedeutet durch die Bezeichnung (R_1).

Dieses Raumintegral formen wir nun noch weiter um.

Es ist nämlich

$$\int\limits_{(R_1)}\Delta f\,d\tau = \int\limits_0^{R_1} dR_2\int\Delta f\,d\sigma = \frac{1}{2m-2}\int\limits_0^{R_1} R_2\,dR_2\int\frac{\partial\Delta f}{\partial r}\,d\sigma,$$

wobei das Flächenintegral wieder über eine Kugel vom Radius R_2 zu erstrecken ist. Dieses Integral kann nun wieder in ein Raumintegral verwandelt werden, so dass man schliesslich erhält:

$$2m(2m-2)\int f\,d\sigma = R_1\int\limits_0^{R_1} R_2\,dR_2\int\limits_{(R_2)}\Delta\Delta f\,d\tau.$$

Wenden wir dieses Verfahren μ-mal an, und bezeichnen wir zur Abkürzung die μ-malige Operation der Bildung von Δ mit $\Delta_\mu f$, so bekommen wir entsprechend

$$2m\cdot(2m-2)\cdots(2m-2\mu+2)\int f\,d\sigma$$
$$= R_1\int\limits_0^{R_1} R_2\,dR_2\int\limits_0^{R_2} R_3\,dR_3\cdots\int\limits_0^{R_{\mu-1}} R_\mu\,dR_\mu\int\limits_{(R_\mu)}\Delta_\mu f\,d\tau.$$

Das Integral zur Linken ist über die Oberfläche der Kugel vom Radius R_1, das Integral $\int\limits_{(R_\mu)}$ über das Innere der Kugel vom Radius R_μ zu erstrecken.

4. *Kriterien für indefinite Formen.* Mit Hülfe des in Nr. 3 bewiesenen Satzes können wir nun sofort zeigen:

Erfüllt eine Form $2m^{ten}$ Grades die Relation

$$\Delta_\mu f = \sigma \quad (\mu \leqq m),$$

so ist sie indefinit (nicht etwa nur semidefinit!).

Dann verschwindet nämlich in der vorigen Formel das Integral auf der rechten Seite, also auch das Integral auf der linken Seite. Hieraus aber folgt, da die Elemente dv immer positiv sind, mit Nothwendigkeit, dass f für verschiedene Punkte verschiedenes Zeichen haben muss, nicht in allen positiv oder in allen negativ sein kann. — Ferner besteht der Satz: Genügt eine Form der Differentialgleichung $\Delta_\mu f = 0$ so ist auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine indefinite Form. Es folgt dies daraus, dass

$$\Delta_\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \Delta_\mu f}{\partial x_i} = 0$$

ist.

Weitere Kriterien erhält man, wenn man bedenkt, dass eine Form ihren (definiten oder indefiniten) Charakter bei linearer Substitution nicht ändert.

Hieraus folgt z. B. der Satz:

Genügt eine binäre Form der Differentialgleichung:

$$\Delta_{a,b} f = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

wo a und b beide positiv sind, so ist sie indefinit.

Durch die Substitution

$$x_1 = x\sqrt{a}, \quad y_1 = y\sqrt{b},$$

verwandelt sich nämlich diese Differentialgleichung in

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} = 0,$$

f also in eine indefinite Function von $x_1 y_1$, d. h. aber, dass f eine definite Function von x, y, also auch von x und y ist.

Weiter ist auch eine Form indefinit, wenn $\Delta_{a.b}\Delta_{a,b}f = 0$ ist u. s. w. — wir werden diese Kriterien für indefinite Formen jetzt brauchen, um zu zeigen, dass in gewissen singulären Punkten der zu construirenden Hülfsflächen der Charakter der negativen Krümmung besteht.

§ 4.

Die Ovaloide.

Um jetzt zuerst die Verbiegung der Ovaloide zu untersuchen, zeigen wir, dass jeder infinitesimalen Verbiegung eine gewisse „Verbiegungsfläche“ sich zuordnen lässt, welche verschiedene, nach § 2, Nr. 3 sich widersprechende Eigenschaften in sich vereinigen müsste. (Eine eingehende Untersuchung der verschiedenen Singularitäten, welche diese Verbiegungsfläche aufweisen kann, lässt sich dabei nicht vermeiden.) Hieraus folgt dann, dass eine solche Verbiegungsfläche, also auch eine infinitesimale Verbiegung des Ovaloides nicht existiren kann.

1. *Die Verbiegungsfläche.* Zu jeder infinitesimalen Verbiegung

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta$$

kann man sich eine gewisse Fläche construiren, welche uns ein Bild der Verbiegung giebt. Diese Fläche, die man erhält, indem man $\xi\eta\zeta$ als rechtwinklige Coordinaten auffasst, wollen wir mit dem Namen „Verbiegungsfläche" bezeichnen. Ein einfaches Beispiel einer solchen Verbiegungsfläche erhalten wir, wenn wir etwa eine infinitesimale Drehung eines Ovaloides (z. B. einer Kugel) um seinen Mittelpunkt betrachten.

Die Verbiegungsfläche ist dann das von der Kugel begrenzte Stück der senkrecht zur Rotationsaxe durch den Kugelmittelpunkt gelegten Ebene*).

Man erkennt dies, wenn man als Rotationsaxe die z-Axe nimmt, wobei dann die Formeln lauten

$$x_1 = x + \varepsilon y, \quad y_1 = y - \varepsilon x, \quad z_1 = z;$$

also

$$\xi = y, \quad \eta = -x, \quad \zeta = 0.$$

Die Verbiegungsfläche ist also hier die xy Ebene ($\zeta = 0$); genauer gesagt, derjenige Theil, für den xy einen reellen Werth von z liefert, d. h. einen reellen Punkt der Kugel.

Diese Verbiegungsfläche nun ist im Endlichen gelegen, da $\xi\eta\zeta$ endlich bleiben nach den in § 1 *Nr.* 4 *genannten Voraussetzungen.* Dazu kommen eine Reihe weiterer Eigenschaften. Wir werden, um dieselben zu untersuchen, auf der Fläche verschiedene Arten von Punkten unterscheiden, nämlich reguläre Punkte, singuläre Punkte vom Charakter negativer Krümmung, und endlich Punkte seminegativer Krümmung. Diese letzte Classe von Punkten ist es, welche der Untersuchung eine besondere Schwierigkeit entgegenstellt**).

2. *Die negative Krümmung einer Verbiegungsfläche.* Hat die Verbiegungsfläche schon in dem einfachen Fall der Drehung eine ziemlich

*) Vergl. Bianchi, a. a. O., p. 287, Anmerkung: Man erhält die zu einer Drehung gehörige Verbiegungsfläche, indem man eine Orthogonalprojection des Ovaloides auf eine Ebene senkrecht zur Rotationsaxe vornimmt. Man erhält dann eine doppelt belegte Scheibe, deren Rand die Projection derjenigen Curve des Ovaloids ist, wo die Tangentialebenen der Rotationsaxe parallel sind. Diese Scheibe ist noch um 90° zu drehen.

**) Wir wollen noch erwähnen, dass die Verbiegungsfläche sich selbst durchdringen kann. Die Punkte der Verbiegungsfläche aber sind eindeutig den Punkten des Ovaloides zugeordnet. Und wenn wir im Folgenden von einem bestimmten Punkt $\xi\eta\zeta$ der Verbiegungsfläche reden, so ist damit eben ein Punkt gemeint, der einem bestimmten Punkt des Ovaloides entspricht; mit anderen Worten: es kommt nicht auf die Werthe $\xi\eta\zeta$, sondern auf die Zuordnung an, wie beispielsweise auch bei den Sätzen über Parallelcurven.

complicirte Gestalt (sie ist dann eine doppelt belegte Scheibe, wie oben ausgeführt; man vergleiche auch die nebenstehende Figur), so wird sie im allgemeinen Fall noch complicirter aussehen, sie wird nämlich Spitzen und Kanten besitzen, sie wird in einzelnen Curven sich selbst durchdringen u. s. w.

Eine Eigenschaft können wir aber doch nachweisen, nämlich dass sie in ihren regulären Punkten negative Krümmung hat.

Wir wenden, um das zu beweisen, das natürliche Coordinatensystem (§ 1, Nr. 2) an: so dass die Gleichung lautet

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2} + \cdots.$$

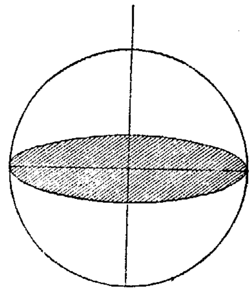

Fig. 5.

Für den Punkt $\xi\eta\zeta$, welcher diesem Punkt entspricht, besteht dann die Relation

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0,$$

welche sich in die folgenden drei Relationen zerlegt:

$$\xi_x + ax\,\zeta_x = 0,$$
$$\eta_y + by\,\zeta_y = 0,$$
$$\xi_y + \eta_x + ax\,\zeta_y + by\,\zeta_y = 0\text{*)}.$$

(Die partiellen Differentialquotienten sind hier zur Abkürzung durch den Index bezeichnet.)

Wir wollen annehmen, dass ζ mit quadratischen Gliedern beginnt (die anderen Fälle werden später untersucht) und ξ und η mit linearen Gliedern. Die Constanten, welche noch vor diese Glieder treten, lassen wir fort, weil wir ja die Verbiegungsfläche so verschieben können, dass diese Constanten verschwinden.

Dann ist

$$\xi = \alpha y + \cdots,$$
$$\eta = -\alpha x + \cdots,$$
$$\zeta = \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2 + \cdots,$$

wo die quadratische Function indefinit ist. Dieser letztere Umstand ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung:

Die dritte der Relationen kann man auch schreiben

$$\xi_y = -ax\,\zeta_y + \lambda, \quad \eta_x = -by\,\zeta_x - \lambda,$$

(wobei λ von der zweiten Ordnung ist), woraus weiter folgt

*) Eigentlich müsste man schreiben $\frac{\partial z}{\partial x}$ statt ax, $\frac{\partial z}{\partial y}$ statt by. Doch werden hier nur diese niedrigsten Glieder gebraucht.

$$\xi_{xy} = -a\zeta_y - ax\zeta_{xy} + \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\eta_{xy} = -b\zeta_x - by\zeta_{xy} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

Combinirt man dies mit den Werthen

$$\xi_{xy} = -ax\zeta_{xy},$$
$$\eta_{xy} = -by\zeta_{xy},$$

die sich aus den ersten beiden Relationen ergeben, so folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = a\zeta_y, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -b\zeta_x,$$

und hieraus, wegen

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial x} = 0,$$

weiter:

$$a\frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial x^2} = 0.$$

Die Relation, welche für die Glieder zweiter Ordnung von ζ besteht (die Glieder höherer Ordnung sind gar nicht mit in Rechnung gezogen worden), lehrt uns nach § 3, Nr. 4, dass ζ indefinit ist, w. z. b. w.

Wenn wir nun weiterhin berücksichtigen, dass für $x = y = 0$ noch

$$\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\alpha^2} a_{11}, \quad \frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{\alpha^2} a_{12}$$

und

$$\frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\alpha^2} a_{22}$$

ist, so sehen wir, dass die Krümmung

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2\right)^2} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\alpha^4}$$

negativ ist, eben weil die Form $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ indefinit, also $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ ist.

*Die Verbiegungsfläche hat also in ihren regulären Punkten negative Krümmung**).

3. *Singuläre Punkte vom Charakter negativer Krümmung auf der Verbiegungsfläche.* Wir untersuchen nun den Fall, wo ζ mit Gliedern mindestens von zweiter, ξ und η mit Gliedern mindestens von dritter

*) Der Satz, dass die Verbiegungsfläche einer Fläche positiver Krümmung selbst im allgemeinen negative Krümmung hat, ist schon bekannt. Vgl. **Bianchi** a. a. O. p. 30.

Ordnung in x und y beginnen. (Beginnt ζ mit Gliedern von höherer als der zweiten Ordnung, so müssen ξ und η mit Gliedern beginnen, deren Ordnungszahl um eine Einheit grösser ist, als die von ζ.)

Bezeichnen wir nun die Glieder niedrigster Ordnung von ζ mit $\zeta^{(m)}$, die von ξ und η entsprechend mit $\xi^{(m+1)}$ und $\eta^{(m+1)}$, so bestehen genau wie in Nr. 4 die Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial x} + ax\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \eta^{(m+1)}}{\partial y} + by\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial y} + \frac{\partial \eta^{(m+1)}}{\partial x} + ax\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} + by\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} = 0.$$

Hieraus folgt wieder, genau wie oben, dass

$$\text{I)} \quad a\frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial x^2} = 0$$

ist. Weiter aber folgt noch, dass $\lambda^{(m)}$ die Differentialgleichung erfüllt

$$b\frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial y^2} = 0.$$

(Weil nämlich

$$\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial x} = a\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial y} = -b\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}$$

ist.)

Ferner ist

$$\xi^{(m+1)} = \left(x\frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial x} + y\frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{m+1} = \frac{u}{m+1},$$

wo also

$$u = -ax^2\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} - axy\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} + \lambda^{(m)}y$$
$$= -\frac{ax}{m}\zeta^{(m)} + \lambda^{(m)}y$$

ist.

Hieraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a}{m}\zeta^{(m)} - \frac{ax}{m}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} + y\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\frac{a}{m}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} - \frac{ax}{m}\frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial x^2}$$

ferner

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{ax}{m}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} + \lambda^{(m)} + y\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{ax}{m}\frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y} + y\frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial y^2}.$$

Hieraus folgt weiter

$$b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2ab}{m}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}+2a\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y}.$$

Bezeichnen wir noch die Operation

$$b\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

mit $\Delta_{ba}f$, so schreibt sich diese letzte Formel:

$$\Delta_{ba}f=-2a\left(\frac{b}{m}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}-\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y}\right).$$

Weil nun aber

$$\Delta_{ba}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Delta_{ba}\zeta^{(m)}=0$$

ist, und ebenso

$$\Delta_{ba}\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y}=0,$$

so erhalten wir schliesslich

$$\text{II)}\quad \Delta_{ba}\Delta_{ba}\xi^{(m+1)}=0.$$

Eine analoge Rechnung für η, die wir hier nicht durchführen wollen, würde das Resultat liefern:

$$\text{III)}\quad \Delta_{ba}\Delta_{ba}\eta^{(m+1)}=0.$$

Aus den Formeln I), II), III) folgt noch wegen § 3, Nr. 4 der Satz:

Die Functionen $\zeta^{(m)}$ und $\xi^{(m+1)}$, $\eta^{(m+1)}$ sind immer indefinit, ebenso jede lineare Combination

$$\alpha\xi^{(m+1)}+\beta\eta^{(m+1)}+\gamma\zeta^{(m)}.$$

Ist in dieser Formel $\gamma \neq 0$ und m gerade oder ungerade, so ist der Ausdruck, in dem $\zeta^{(m)}$ das Vorzeichen bestimmt, indefinit.

Ist aber $\gamma=0$, so erfüllt

$$w=\alpha\xi^{(m+1)}+\beta\eta^{(m+1)}$$

immer die Relation

$$\Delta_{ba}\Delta_{ba}w=0,$$

w ist also indefinit, auch wenn die Form gerade ist.

Nach § 2, Nr. 2 können wir also den Satz aussprechen:

Der Charakter der negativen Krümmung hört in den singulären Punkten ($m \geq 2$, ξ und η von der Ordnung $m+1$) *der Verbiegungsfläche eines Ovaloides nicht auf.*

4. *Der Fall, wo ξ, η und ζ linear beginnen.* Untersuchen wir nun den Fall, wo ζ mit linearen Gliedern beginnt, und wo, wie wir zunächst annehmen wollen, auch ξ und η mit linearen Gliedern beginnen.

Die Gleichungen

$$\xi_x + ax\zeta_x = 0,$$
$$\eta_y + by\zeta_y = 0,$$
$$\eta_x + \xi_y + ax\zeta_y + by\zeta_x = 0$$

zeigen dann, dass die Entwickelungen folgendermassen beginnen müssen:

$$\zeta = \beta x - \alpha y + \cdots,$$
$$\xi = \gamma y - \beta\left(\frac{ax^2+by^2}{2}\right) + \cdots,$$
$$\eta = \alpha\left(\frac{ax^2+by^2}{2}\right) - \gamma x + \cdots,$$

wo die weitere Reihenentwickelung von ζ mit Gliedern zweiter, die von ξ und η mit Gliedern dritter Ordnung beginnt.

Ferner gilt der Satz:

Ist

$$\zeta = \beta x - \alpha y + \zeta^{(m)} + \cdots,$$
$$\xi = \gamma y - \beta(z^{(2)} + \cdots + z^{(m)}) + \xi^{(m+1)} + \cdots,$$
$$\eta = \gamma x + \alpha(z^{(2)} + \cdots + z^{(m)}) + \eta^{(m+1)} + \cdots{}^{*}),$$

wo die oberen Indices die Ordnung der betreffenden Glieder angeben, so ist

$$\xi_x^{(m+1)} + ax\zeta_x^{(m)} = 0,$$
$$\eta_y^{(m+1)} + by\zeta_y^{(m)} = 0,$$
$$\eta_x^{(m+1)} + \xi_y^{(m+1)} + ax\zeta_y^{(m)} + by\zeta_x^{(m)} = 0.$$

Der Satz ist leicht zu beweisen. Setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$\frac{\partial z^{(i)}}{\partial x} = p_{i-1}, \quad \frac{\partial z^{(i)}}{\partial y} = q_{i-1},$$

so lauten die Gleichungen, welche an Stelle der Fundamentalgleichungen $\xi_x + ax\zeta_x = 0$ u. s. w. treten, jetzt folgendermassen:

$$-\beta(p_1 + p_2 + p_{m-1}) + \xi_x^{(m+1)} + (p_1 + \cdots + p_{m-1})\beta + \beta ax\zeta_x^{(m)} = 0,$$
$$\alpha(q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-1}) - \alpha(q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-1}) - \alpha by\zeta_y^{(m)} = 0,$$
$$\alpha(p_1 + \cdots + p_{m-1}) - \gamma + \eta_x^{(m+1)} - \beta(q_1 + \cdots + q_{m-1}) + \xi_y^{(m+1)}$$
$$- \alpha(p_1 + \cdots + p_{m-1}) + ax\zeta_y^{(m)} + by\zeta_x^{(m)} = 0.$$

(Hier haben wir nur die Glieder nullter bis m^{ter} Ordnung hingeschrieben.) In diesen Gleichungen hebt sich alles übrige weg, und es bleibt nur

---

*) In diesen Formeln sind natürlich $z^{(m)}$ die Glieder m^{ter} Ordnung bei der Reihenentwickelung von z verstanden.

$$\xi_x^{(m+1)} + a x \zeta_x^{(m)} = 0,$$
$$\eta_y^{(m+1)} + b y \zeta_y^{(m)} = 0,$$
$$\xi_y^{(m+1)} + \eta_x^{(m+1)} + a x \zeta_y^{(m)} + b \eta \zeta_x^{(m)} = 0.$$

Wir schliessen hieraus, wie in der vorigen Nummer, dass $\zeta^{(m)}$ sowohl wie jede lineare Verbindung $\bar{a}\xi^{(m+1)} + \bar{b}\eta^{(m+1)}$ indefinit ist.

Wie steht es nun in einem solchen Punkt der Verbiegungsfläche mit begrenzenden Ebenen? Da ξ, η und ζ linear beginnen, so giebt es eine Tangentialebene, und nur diese könnte begrenzen.

Es ist dies die Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$. Bilden wir aber den Ausdruck $a\xi + b\eta + \gamma\zeta$, so sehen wir, dass er mit den Gliedern
$$\alpha\xi^{(m+1)} + \beta\eta^{(m+1)} + \gamma\zeta^{(m)}$$
beginnt, was immer ein indefiniter Ausdruck ist.

Die Tangentialebene schneidet also; sie ist keine begrenzende Ebene.

5. *Die Punkte seminegativer Krümmung.* Es bleiben noch die Punkte, wo die Entwickelung von ζ mit linearen, die von ξ und η aber mit quadratischen Gliedern beginnt.

Dann ist
$$\zeta = \beta x - \alpha y + \cdots,$$
$$\xi = -\beta\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) + \cdots,$$
$$\eta = \alpha\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) + \cdots.$$

In diesem Falle giebt es abtrennende Ebenen. Wir haben nämlich dann die Reihenentwickelung:
$$\bar{\alpha}\xi + \bar{\beta}\eta + \gamma\zeta = (\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha})\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) + \gamma(\beta x - \alpha y) + \cdots.$$

Dieser Ausdruck ist definit, sobald $\gamma = 0$. Also ein ganzes Büschel von Ebenen, welche die Verbindungsfläche begrenzen (d. h. begrenzen im Infinitesimalen), ist hier vorhanden. Es sind dies alle Ebenen, welche durch den betreffenden Punkt der Verbiegungsfläche hindurchgehen und parallel zur Normale des Ovaloides in dem entsprechenden Punkte sind.

Diese Punkte können entweder isolirt sein, oder aber, sie können eine Curve bilden*).

*) Dass die Punkte seminegativer Krümmung durch analytische Gleichungen bestimmt werden, ist evident; diese Gleichungen lauten:
$$\varphi_1 = \xi_y \eta_x - \eta_y \xi_x = 0,$$
$$\varphi_2 = \eta_y \zeta_x - \zeta_y \eta_x = 0,$$
$$\varphi_3 = \zeta_y \xi_x - \xi_y \zeta_x = 0.$$
Wir suchen reelle Punkte in denen alle drei Gleichungen erfüllt sind. In diesen

Wir wollen beweisen, dass, wenn letzteres der Fall ist, die Verbiegung überhaupt eine Bewegung ist.

Hat die Verbiegungsfläche ein Curve seminegativer Krümmung oder Rückkehrkante, so liegen zwei Möglichkeiten vor, entweder es ist die Verbiegung eine Bewegung. (Die Verbiegungsfläche reducirt sich dann auf eine Scheibe mit Rand und der Rand ist dann eben die Rückkehrkante. $\xi\eta\zeta$ haben dann die Werthe

$$\xi = \gamma y - \beta z, \quad \eta = \alpha z - \gamma x, \quad \zeta = \beta x - \alpha y,$$

wo $\alpha\beta\gamma$ Constanten sind.) Oder die Verbiegung ist keine Bewegung. Wir wollen zeigen, dass dieser zweite Fall ausgeschlossen ist. $\xi\eta\zeta$ erfüllen wie bisher, die Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\xi_x + p\,\zeta_x = 0, \\ (1) \qquad &\eta_y + q\,\zeta_y = 0, \\ &\eta_x + \xi_y + p\,\zeta_y + q\,\zeta_x = 0. \end{aligned}$$

Ferner müssen längs der angenommenen Rückkehrkante nach bekannten Sätzen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} &\xi_y\,\eta_x - \eta_y\,\xi_x = 0, \\ (2) \qquad &\eta_y\,\zeta_x - \zeta_y\,\eta_x = 0, \\ &\zeta_y\,\xi_x - \xi_y\,\zeta_x = 0. \end{aligned}$$

Nun stellen wir weiter die folgenden Ueberlegungen an: da die Verbiegungsfläche ganz im Endlichen bleibt, muss es einen Punkt derselben geben, für den der Abstand vom Coordinatenanfang ein Maximum ist. In diesem Punkte ist

$$\begin{aligned} (3) \qquad &\xi\xi_x + \eta\eta_x + \zeta\zeta_x = 0, \\ &\xi\xi_y + \eta\eta_y + \zeta\zeta_y = 0. \end{aligned}$$

Dieser Punkt muss ferner auf der Rückkehrkante liegen, da der Maximalabstand nicht bei einem regulären Punkt vorhanden sein kann (wegen der negativen Krümmung). In diesem Punkt der Rückkehrkante sind aber nicht nur die Gleichungen (1) und (3) sondern auch die Gleichungen (2) erfüllt, woraus folgt, dass

$$\xi_x = \eta_y = \zeta_x = \xi_y = \eta_y = \zeta_y = 0$$

ist. Aus diesen Gleichungen aber folgt wiederum, dass die Entwickelung von $\xi\eta\zeta$ mit Gliedern *zweiter Ordnung* beginnen müsste, oder wenn wir

Punkten muss $\varphi_1{}^2 + \varphi_2{}^2 = 0$ sein. Die Curve, längs deren diese Bedingung erfüllt ist, ist analytisch und hat nur ausserwesentliche singuläre Stellen (man vergleiche hierzu die sorgfältigen Untersuchungen in dem neuen Werke von Ch. Meray, Analyse infinitesimale Bd. 2, Paris 1895, p. 147 ff.). *Ihre reellen Punkte sind also, wenn sie keinen continuirlichen Zug ergeben, isolirt.*

ein dem natürlichen Coordinatensystem paralleles Coordinatensystem zu Grunde legen, so folgt nach Nr. 3, es müsste die Reihenentwickelung von ζ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnen, die von $\xi\eta$ aber mit Gliedern dritter Ordnung.

Der betreffende Punkt wäre dann also nach Nr. 3 dieses Paragraphen ein solcher, *in welchem es eine abtrennende Ebene überhaupt nicht giebt.* In diesem Punkt könnte also die Fläche unmöglich den grössten Abstand vom Coordinatenanfang haben, während es doch einen solchen Punkt auf der Rückkehrkante geben muss.

Wir schliessen hieraus, dass eine eigentliche Verbiegungsfläche mit Rückkehrkante nicht auftreten kann. Es wird vielmehr, wenn eine Rückkehrkante auftritt, die Verbiegungsfläche nothwendig eine Scheibe mit Rand, die Verbiegung also entsprechend eine Bewegung sein.

Wir entnehmen hieraus den Satz: *Bei einer eigentlichen Verbiegung können nur isolirte Punkte seminegativer Krümmung auftreten, in allen übrigen regulären sowohl wie singulären Punkten hat die Verbiegungsfläche entweder negative Krümmung oder doch den Charakter negativer Krümmung.*

6. *Folgerung für die Ovaloide.* Da die Verbiegungsfläche, welche zu einer wirklichen Verbiegung gehört, Eigenschaften in sich vereinigt, welche nach § 2, Nr. 4 einander widersprechen (sie muss im Endlichen bleiben und sie hat, abgesehen von isolirten Punkten, überall negative Krümmung), so schliessen wir hieraus:

Ein Ovaloid als geschlossene Fläche kann nicht verbogen werden.

Damit ist der Minding'sche Satz, allerdings mit gewissen Einschränkungen, bewiesen*).

§ 5.

Die Kugel als einziges Sphäroid.

Die Untersuchung der infinitesimalen Verbiegung des allgemeinen Ovaloides erforderte ziemlich eingehende Studien. Namentlich bereiteten die Punkte, seminegativer Krümmung gewisse Schwierigkeiten. Viel einfacher gestaltet sich nun alles bei der Kugel. Es liegt dies daran, dass wir hier eine Fläche construiren, die „Kernfläche“, bei der, kurz gesagt, der Begriff der Bewegung schon von vornherein eliminirt ist. Auch ist die Eigenschaft der Kernfläche, in jedem Punkte negative Krümmung

*) Z. B. bleibt die Möglichkeit offen, dass es Verbiegungen giebt, bei denen Falten auftreten. Solche Flächen, bei denen Falten sich vorfinden, sind neuerdings durch die schon oben erwähnten Untersuchungen von Finsterwalder in den Vordergrund des Interesses getreten.

zu besitzen, viel einfacher nachzuweisen, als die entsprechende der Verbiegungsfläche*).

1. *Parallelflächen zu Flächen constanten positiven Krümmungsmasses.* Bonnet**) hat zuerst gezeigt, dass sich zu jeder Fläche constanten positiven Krümmungsmasses (wir setzen dasselbe gleich 1) zwei gewisse Parallelflächen constanter mittlerer Krümmung construiren lassen.

Der Satz ist eine leicht zu beweisende Folgerung aus dem Satz, dass, wenn man zu einer Fläche die Parallelfläche construirt, d. h. auf den Normalen gleiche Stücke abträgt, diese Parallelfläche Krümmungsradien hat, welche sich nur um den Betrag des Parallelabstandes von den Radien der gegebenen Fläche unterscheiden.

Trägt man also insbesondere auf der Normale einer Fläche c. Kr. $(=1)$ die Strecke 1 nach aussen ab, so haben die Krümmungsradien dieser Fläche die Werthe

$$R_1 = r_1 + 1,$$
$$R_2 = r_2 + 1,$$

wo $r_1 r_2 = 1$ ist. Die mittlere Krümmung dieser äusseren Parallelfläche ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_2+2}{r_1+r_2+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Entsprechend haben wir für die innere Parallelfläche

$$\varrho_1 = r_1 - 1,$$
$$\varrho_2 = r_2 - 1,$$

also

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1-1} + \frac{1}{r_2-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_2-2}{2-r_1-r_2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

2. *Sphäroid, Kernfläche, Mantelfläche.* Wir wollen nun annehmen, es gäbe ein von der Kugel verschiedenes Ovaloid c. p. K., welches wir kurzweg mit den Namen „Sphäroid“ bezeichnen wollen. Zu diesem könnte man dann eine innere Parallelfläche constanter negativer mittlerer Krümmung construiren (die wir mit dem Namen „Kernfläche“ bezeichnen) und ebenso eine äussere, die den Namen „Mantelfläche“ erhalten möge. Die Kernfläche reducirt sich, wenn das Sphäroid eine Kugel ist, auf den Mittel-

*) Wir wollen an dieser Stelle noch einmal den Charakter der Beweisführung skizziren: Construirt wird eine Hülfsfläche, die, wenn die ursprüngliche Fläche nicht im Endlichen bleibt oder irgend welche Singularitäten aufweist, keine sich widersprechende Eigenschaften hat. Sowie man aber verlangt, dass die ursprüngliche Fläche von Singularitäten frei wird, treten an der Hülfsfläche Eigenschaften auf, die sich widersprechen, ausgenommen in dem Fall, wo die ursprüngliche Fläche eine ganz bestimmte ist (in unserm Fall jetzt die Kugel).

**) Vgl. Bianchi, a. a. O., p. 205.

punkt der Kugel, aus der Mantelfläche wird dann eine Kugel vom Radius 2 (wenn der Radius der gegebenen Kugel gleich 1 ist). —

Wir werden jetzt zeigen, dass die Kernfläche niemals endliche Ausdehnung haben kann, sondern sich immer auf einen Punkt reduciren muss.

3. *Die singulären Punkte der Kernfläche. Da die Kernfläche in ihren regulären Punkten negative Krümmung hat, so giebt es in denselben keine abtrennende Ebene.* Einer besonderen Untersuchung bedürfen dagegen die singulären Punkte N_k, welche den Nabelpunkten N_s des Sphäroides entsprechen. In diesen Punkten verschwinden die Krümmungsradien (wenn $r_1 = r_2 = 1$, so ist $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$), also treten die Singularitäten auf, welche wir genauer besprechen müssen.

In einem Nabelpunkt N_s können wir (da die Reihenentwickelung von z beginnen muss mit

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2})$$

das Sphäroid darstellen durch die Formel

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \varphi(x, y),$$

wo $\varphi(x, y)$ eine Potenzreihe ist, welche mit Gliedern von mindestens dritter Ordnung beginnt.

Die Coordinaten der Kernfläche, welche ja die innere Parallelfläche im Abstand 1 ist, werden gegeben durch die Formeln

$$\xi = x + \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\eta = y + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\zeta = z - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Wir wollen sehen, mit welchen Gliedern ξ, η und ζ beginnen, wenn φ mit Gliedern m^{ter} Ordnung beginnt, die wir einfach mit $\varphi_m(x, y)$ bezeichnen.

Es ist allgemein

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{1-x^2-y^2}\right)\left(1-x^2-y^2+\left(-x+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(-y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2\right).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck lautet bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\left(1-x^2-y^2+x^2+y^2-2x\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}-2y\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}\right).$$

Also wird

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x+\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots}{\sqrt{1-2x\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}-2y\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots}}=-x+\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots$$

und analog

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-y+\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots,$$

demnach

$$\xi=x-x+\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots=\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots,$$
$$\eta=y-y+\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots=\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots,$$

und für ζ bekommen wir den Ausdruck

$$\zeta=\sqrt{1-x^2-y^2}+\varphi^{(m)}-\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\left(1-2x\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}-2y\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots\right)^{\frac{1}{2}}},$$
$$=\varphi^{(m)}-x\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x}-y\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots$$
$$=(1-m)\varphi^{(m)}+\cdots.$$

4. *Der indefinite Charakter von* $\varphi^{(m)}$. In der vorigen Nummer ist über die Function $\varphi^{(m)}$ keine bestimmte Voraussetzung gemacht. Es ist aber klar, dass die Function $\varphi^{(m)}$, weil eben das Sphäroid eine Fläche constanten positiven Krümmungsmasses ist, nicht vollkommen willkürlich sein kann. Diese Function wird vielmehr eine bestimmte Differentialgleichung erfüllen, die wir jetzt aufstellen wollen.

Zu dem Ende müssen wir noch berechnen, welche Werthe die drei zweiten Differentialquotienten von z annehmen. Dabei ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - 1}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Die Thatsache nun, dass das Sphäroid constantes positives Krümmungsmass $(=1)$ hat, drückt sich dadurch aus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^2 = 0$$

ist, d. h.

$$\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{(1-x^2-y^2)^3} + \frac{x^2-1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{y^2-1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^3} + \frac{2xy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\right)^2$$
$$- \left(1 + \left\{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} - \frac{2x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left. + \left\{\frac{y^2}{1-x^2-y^2} - \frac{2y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}\right)^2 = 0.$$

Hierin genügen die von φ freien Glieder identisch der Differentialgleichung, weil $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ die Gleichung der Kugel ist; im übrigen lauten die Glieder niedrigster Ordnung:

$$-\frac{\partial^2\varphi^{(m)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi^{(m)}}{\partial y^2}.$$

Es muss also

$$\frac{\partial^2\varphi^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^{(m)}}{\partial y^2} = 0$$

sein. Hieraus schliessen wir (§ 3, Nr. 4):

Die Function $\varphi^{(m)}$ sowohl, wie ihre partiellen Differentialquotienten sind immer indefinit.

5. *Folgerung für das Sphäroid.* Da $\varphi^{(m)}$ indefinit ist, da ferner

$$\xi = \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x} + \cdots,$$
$$\eta = \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y} + \cdots,$$
$$\zeta = (1-m)\varphi^{(m)} + \cdots,$$

so schliessen wir nach § 3 weiter, dass auch

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

immer, in jedem singulären Punkt und für jedes Werthsystem $\alpha\beta\gamma$ indefinit ist, d. h. (wie in Nr. 5 des vorigen Paragraphen):

Die Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$ *schneidet die Kernfläche immer*, oder:

Die Kernfläche verliert in keinem Punkt den Charakter der negativen Krümmung.

Hierin liegt aber, da die Kernfläche ihrer Construction nach ganz im Endlichen verläuft, nach § 2, Nr. 3 ein Widerspruch. Eine Kernfläche von endlicher Ausdehnung ist also unmöglich.

Es folgt also:

Die Kugel ist das einzige Sphäroid).*

§ 6.

Die Minimaleigenschaft der Kugel.

Wie uns die Kernfläche auf den Satz führte, dass die Kugel das einzige Sphäroid ist, so wird sie uns noch weitere Dienste leisten, um einen von Lindelöf in seiner Variationsrechnung angefangenen Beweis des Satzes von der Minimaleigenschaft der Kugel (dass die Kugel bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche hat) nach einer Richtung zu vervollständigen. Lindelöf gelangt nämlich durch Rechnung zu dem Resultat, dass die betreffende Fläche nothwendig constante mittlere positive Krümmung haben muss. Indessen gelingt es ihm nicht, zu beweisen, dass die einzige Fläche, welche diese Eigenschaft besitzt, die Kugel ist. (Wenn dies gezeigt ist, folgt freilich nur, dass ausser der Kugel keine andere Fläche die Minimaleigenschaften haben kann. Dass die Kugel sie wirklich hat, ist damit noch nicht bewiesen.) Dies gelingt aber leicht mit den hier entwickelten Hülfsmitteln, wenn man, wie dies Lindelöf stillschweigend thut, den analytischen Charakter der Fläche voraussetzt.

1. *Mantelfläche und Kernfläche. Unter der Mantelfläche verstehen wir ein Ovaloid constanter mittlerer Krümmung* $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)=1\right)$, *unter der zugehörigen Kernfläche ihre innere Parallelfläche im Abstand* 1. (Wir wollen hervorheben, dass der Begriff „äussere Parallelfläche c. mittlerer Krümmung zum Sphäroid“ und „Mantelfläche“, wie er hier definirt ist, sich keineswegs decken.)

*) Auf ganz anderem Wege ist, wie mir Herr Prof. Hilbert gütigst mitgetheilt hat, Herr Minkowski zu diesem Satz gelangt. Er leitet nämlich durch Grenzübergang aus seinen über convexe Polyeder aufgestellten Sätzen [Gött. Nachr. 1897, p. 198] den allgemeinen Satz ab: Ein Ovaloid ist vollkommen bestimmt, wenn man den zu jeder Normalrichtung gehörigen Werth des Krümmungsmasses kennt. Hieraus folgt dann von selbst der Satz, dass die Kugel das einzige Sphäroid ist.

Die Kernfläche hat im allgemeinen constante negative mittlere Krümmung ($=-1$) und einer besonderen Untersuchung bedürfen auch wieder nur die Punkte N_K, die den Punkten N_M entsprechen, wo

$$r_1 = r_2 = 1,$$

also

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 0$$

ist.

2. *Die singulären Punkte der Kernfläche.* In den Nabelpunkten N_M wird sich die Mantelfläche darstellen lassen durch die Entwickelung:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \psi,$$

wo wieder ψ mit Gliedern m^{ter} Ordnung beginnt $(\psi^{(m)})\,(m > 2)$.

Für ψ bekommen wir aus der Forderung, dass die mittlere Krümmung der Mantelfläche $=1$ sein soll, also

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right\}$$
$$:\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} = 1,$$

die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\left(1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)$$
$$+\left(\frac{y^2-1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\left(1+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)$$
$$-2\left(\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{-xy}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^3}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$-2\left(1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Das giebt wieder für $\psi^{(m)}$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi^{(m)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi^{(m)}}{\partial y^2} = 0.$$

Da auch die Reihenentwickelungen für die Coordinaten der Kernfläche in den Punkten N_K wieder mit den Gliedern

$$\xi = \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial x} + \cdots,$$

$$\eta = \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial y} + \cdots,$$

$$\zeta = (1-m)\,\psi^{(m)} + \cdots$$

beginnen, so schliessen wir, genau wie im vorigen Paragraphen: Eine Kernfläche von endlicher Ausdehnung kann nicht existiren, d. h.

Die Kugel ist die einzige Mantelfläche.

Damit ist die Lücke in dem Beweis von Lindelöf ausgefüllt*).

§ 7.

Flächen constanten Krümmungsmasses in höheren Räumen.

Der Satz, dass die Kugel das einzige Sphäroid ist, verallgemeinert sich entsprechend für höhere Dimensionen. Als Krümmungsmass definiren wir hier das reciproke Product der $n-1$ Hauptkrümmungsradien.

Wir wollen zunächst zeigen, dass es auch in höheren (ebenen) Räumen einfache von der Kugel (die wir dann als Hypersphäre bezeichnen) verschiedene Flächen c. K. giebt. Sodann werden wir, durch Verallgemeinerung des angewendeten Schlussverfahrens, beweisen, dass die $n-1$ dimensionale Hypersphäre das einzige Hypersphäroid ist, für Räume von n Dimensionen.

1. *Die Rotationsflächen constanten Krümmungsmasses.* Dass es Flächen constanten Krümmungsmasses giebt, welche von der Hypersphäre verschieden sind, folgt daraus, dass diese Flächen durch eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung bestimmt werden. Diese Differentialgleichung muss jedenfalls ausser der reellen Lösung, welche die Hypersphäre des betreffenden Raumes darstellt und $n+2$ Constanten hat (wenn $n+1$ die Dimensionszahl des Raumes ist), noch andere reelle Lösungen haben.

Sie lautet

$$\frac{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix}}{(1+z_1^2+\cdots+z_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} = 1,$$

wo z_i zur Abkürzung für $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ und z_{ik} zur Abkürzung für $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ gesetzt ist.

Dies sind die Flächen constanter Krümmung im $n+1$-dimensionalen ebenen Raum, wo wir die rechtwinkligen Coordinaten $z, x_1, x_2, \ldots x_n$ eingeführt haben.

*) Wir dürfen uns aber nicht verhehlen, dass der Beweis von H. A. Schwarz (Gesammelte Abhandlungen II, p. 327) für die Minimaleigenschaft viel allgemeiner ist. Des weiteren aber gilt wie oben die Bemerkung, dass man noch viel allgemeinere Voraussetzungen machen müsste. Hat doch Finsterwalder (a. a. O., p. 79 ff.) gezeigt, dass schon ganz einfache Gleichgewichtsprobleme (die sich ja mit Variationsproblemen decken) auf Flächen ohne Tangentialebenen führen.

Ein einfaches Beispiel dieser Flächencategorie würden in erster Linie die Rotationsflächen constanter Krümmung sein, deren Axe die z-Axe ist.

Wir wollen hier wenigstens die Differentialgleichung derselben aufstellen.

Es sei also

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

und wir wollen suchen, ob man allgemein z so bestimmen kann, dass es eine Function von r allein ist. (Im Raum von drei Dimensionen ist das ja möglich.)

Wir setzen $r^2 = u$, und haben dann:

$$z_i = 2\frac{\partial z}{\partial u} x_i, \quad z_{ik} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} x_i x_k,$$

$$z_{ii} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot x_i^2.$$

Durch diese Substitution verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$\frac{\begin{vmatrix} 2z' + 4z'' x_1^2 & 4z'' x_1 x_2 & \cdots & 4z'' x_1 x_n \\ 4z'' x_2 x_1 & 2z' + 4z'' x_2^2 & \cdots & 4z'' x_2 x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 4z'' x_n x_1 & \cdot & \cdots & 2z' + 4z'' x_n^2 \end{vmatrix}}{\left(1 + 4x_1^2 z'^2 \cdots + 4x_n^2 z'^2\right)^{\frac{n}{2}-1}} = 1,$$

wo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = z', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = z''$$

gesetzt ist.

Entwickelt man die Determinante, so kommt

$$\frac{2^n (z')^n + 2^{n+1} (z')^{n-1} (z'')}{(1 + 4uz'^2)^{\frac{n}{2}+1}} = 1.$$

Alle übrigen Ausdrücke fallen fort, weil jede Potenz $(z')^i (z'')^k$ mit einer Summe von identisch verschwindenden Determinanten multiplicirt im Endresultat erscheint.

Damit haben wir eine Differentialgleichung gewonnen, welche diese Rotationsflächen bestimmt, und es ist klar, dass es, da dieselbe von zweiter Ordnung ist, ausser den Kugeln, welche ihren Mittelpunkt auf der z-Axe haben, und deren Gleichung lautet

$$(z - a)^2 + u = 1$$

(die betreffende Lösung der Differentialgleichung ist

$$z - a = (-1)^n \sqrt{1 - u}),$$

noch andere Rotationsflächen constanten positiven Krümmungsmasses giebt. Denn die Lösung, welche die Kugeln bestimmt, hat nur *eine* Integrationsconstante, während die Differentialgleichung doch von der *zweiten* Ordnung ist.

2. *Die Parallelflächen constanter Krümmung.* Wir wollen hier die innere Parallelfläche construiren und zeigen, dass in einem regulären Punkt derselben jede Ebene schneidet.

Die Krümmungsradien, welche den Hauptkrümmungsradien der Flächen constanter Krümmung entsprechen, sind wieder Hauptkrümmungsradien der inneren Parallelfläche und unterscheiden sich um die Einheit von denen der Fläche constanter Krümmung, also

$$\varrho_1 = r_1 - 1.$$

Hieraus folgt (da nicht alle ϱ_i negativ sein können, es wären sonst alle $r < 1$, was unmöglich ist), dass einige negativ, andere aber positiv sind.

Die innere Parallelfläche, welche durch die Gleichung

$$\zeta = 2\left(\frac{x_1^2}{\varrho_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{\varrho_1}\right) + \cdots$$

dargestellt wird (wenn $\varrho_i = 0$, so fällt das betreffende Glied in dieser Gleichung fort), beginnt also mit Gliedern zweiter Ordnung, welche eine indefinite Form darstellen, weil sie aus einer Summe von Quadraten mit Coefficienten besteht, unter denen sich sowohl positive wie negative befinden. Hieraus folgert man, dass alle Ebenen ausnahmslos, auch die Tangentialebene ($\zeta = 0$), in dem betreffenden Punkt die innere Parallelfläche schneiden.

3. *Die singulären Punkte.* Wir können nun auch leicht zeigen, dass in den Punkten N_k, welche den Nabelpunkten N_s des Hypersphäroides entsprechen, die Kernfläche den Charakter der negativen Krümmung nicht verliert.

Setzen wir nämlich in einem solchen Nabelpunkt (was bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems immer möglich ist):

$$z = \sqrt{1 - \Sigma x_i^2} + \psi,$$

wo ψ mit Gliedern $m(>2)^{\text{ter}}$ Ordnung beginnt, so bekommen wir für die Coordinaten ξ_i, ζ der Kernfläche die Reihenentwickelung:

$$\xi_i = x_i + \frac{-\dfrac{x_i}{\sqrt{1-\Sigma x_i^2}} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \Sigma\left(\dfrac{-x_k}{\sqrt{1}} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2}}$$

also

$$\xi_i = \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial x_i} + \cdots$$

und

$$\zeta = z - \frac{1}{\sqrt{1 + \Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}} = (1 - m)\,\psi^{(m)}.$$

Ferner aber beginnt die Entwickelung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix} - (1 + \Sigma z_i^2)^{\frac{n}{2} - 1} = 0$$

wo für z die Substitution gemacht wird

$$z = \sqrt{1 - \Sigma x_k^2} + \psi$$

mit den Gliedern niedrigster Ordnung

$$(-1)^{m-1}\left(\frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x_n^2}\right).$$

Dieser Ausdruck muss also verschwinden. Hieraus folgt, dass $\psi^{(m)}$ und damit auch $\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x_i}$ immer indefinit ist, dass es also in keinem Punkte der Kernfläche eine abgrenzende Ebene giebt. —

Eine Kernfläche endlicher Ausdehnung ist also unmöglich, und hieraus folgt der Satz: *Die Hypersphäre ist das einzige Hypersphäroid.*

um seine Symmetrieaxe entsteht, dagegen z. B. nicht der Würfel, sowie eine Fläche, welche durch Rotation eines vom Halbkreis verschiedenen Kreisbogens um seine Sehne entsteht.)

Auf solche Ovaloide also werden wir allein Rücksicht nehmen.

3. *Infinitesimale Verbiegungen.* Auch den Begriff der Verbiegung müssen wir schärfer fassen.

Wir werden nämlich nur infinitesimale Verbiegungen betrachten, wie sie in der Variationsrechnung und bei der Lie'schen Theorie*) gebraucht werden.

Diese Verbiegungen sind gegeben durch die Formeln

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta.$$

Ferner sollen $\xi\eta\zeta$ *analytische Functionen von* x *und* y *sein, die im betrachteten Gebiet endlich bleiben.*

Wir sagen also: $\xi\eta\zeta$ *definiren eine infinitesimale Verbiegung, wenn sie analytische Functionen sind, die die Relation*

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0$$

identisch erfüllen, unter xyz *die Coordinaten des Ovaloides verstanden.* —

Weil nämlich die betrachtete infinitesimale Transformation eine Verbiegung ohne Zerrung ist, so muss

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = d(x+\varepsilon\xi)^2 + d(y+\varepsilon\eta)^2 + d(z+\varepsilon\zeta)^2$$
$$= dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sein; d. h.

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0 \text{**)}.$$

Auf Grund dieser Definitionen werden wir dann den Satz beweisen:

Ein Ovaloid als geschlossene Fläche gestattet keine infinitesimale Verbiegung ohne Zerrung.

4. *Gültigkeitsbereich des Minding'schen Satzes.* Unser Beweis schliesst die Möglichkeit nicht aus, dass die Fläche eine endliche Verbiegung gestattet, d. h. dass es ein von dem gegebenen Ovaloid gänzlich verschiedenes giebt, welches mit ihm in den kleinsten Theilen congruent ist, sich aber nicht durch eine continuirliche Reihenfolge von Verbiegungen in dasselbe überführen lässt.

Um die Möglichkeit eines solchen Falles zu illustriren, wollen wir uns an ein Problem aus der Variationsrechnung erinnern, wo ähnliche Verhältnisse auftreten.

---

*) S. Lie, Differentialgleichungen mit inf. Transformationen (Leipzig 1891), p. 30.

**) Man vergl. L. Bianchi, Differentialgeometrie, übersetzt von Lukat (Leipzig 1896), p. 287.

und

$$\zeta = z - \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}} = (1-m)\,\psi^{(m)}.$$

Ferner aber beginnt die Entwickelung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix} - (1+\Sigma z_i^2)^{\frac{n}{2}-1} = 0$$

wo für z die Substitution gemacht wird

$$z = \sqrt{1-\Sigma x_k^2} + \psi$$

mit den Gliedern niedrigster Ordnung

$$(-1)^{m-1}\left(\frac{\partial^2\psi^{(m)}}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2\psi^{(m)}}{\partial x_n^2}\right).$$

Dieser Ausdruck muss also verschwinden. Hieraus folgt, dass $\psi^{(m)}$ und damit auch $\frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial x_i}$ immer indefinit ist, dass es also in keinem Punkte der Kernfläche eine abgrenzende Ebene giebt. —

Eine Kernfläche endlicher Ausdehnung ist also unmöglich, und hieraus folgt der Satz: *Die Hypersphäre ist das einzige Hypersphäroid.*