



Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

- Autor: **Lüroth, Jakob** (1844–1910)
- Titel: **Rationale Flächen und involutorische Transformationen**
- Quelle: Programm, wodurch zur Feier des Geburtsfestes seiner königlichen Hoheit, unseres durchlauchtigsten Grossherzogs Friedrich im Namen des Academischen Senates die Angehörigen der Albert-Ludwigs-Universität einlädt der gegenwärtige Prorector.
1899. Seite 1 – 25.

13

PROGRAMM

WODURCH

ZUR FEIER DES GEBURTSFESTES

SEINER KÖNIGLICHEN HOHEIT

UNSERES DURCHLAUCHTIGSTEN GROSSHERZOGS

FRIEDRICH

IM NAMEN DES

AKADEMISCHEN SENATS

DIE ANGEHÖRIGEN DER

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT

EINLADET

DER GEGENWÄRTIGE PRORECTOR

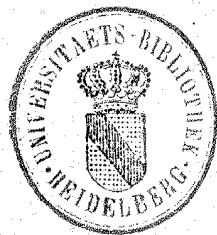
DR. JAKOB LÜROTH

INHALT:

RATIONALE FLÄCHEN UND INVOLUTORISCHE TRANSFORMATIONEN.

FREIBURG 1889.

UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON CHR. LEHMANN.



Als das badische Volk im vergangenen Jahre den neunten September festlich beging, herrschte noch überall das Gefühl der Trauer über die schmerzlichen Verluste, welche unser grossherzogliches Haus in einer so kurzen Spanne Zeit erlitten hatte.

Heute danken wir einem gütigen Geschick, dass unserm vielgeprüften Herrscherpaare weitere Schicksalsschläge erspart blieben und dass, nach Wochen banger Sorge, nachdem Seine Königliche Hoheit der Erbgrossherzog von tückischer Krankheit wieder genesen, es uns vergönnt ist, den Geburtstag unseres erhabenen Rector magnificentissimus in unge-trübter Freude zu feiern.

Wie das badische Land, so darf auch unsere Hochschule an jenem Freudentage auf ein Jahr gedeihlicher Entwicklung

zurückblicken. Die wohlwollende Fürsorge unseres Grossherzogs und seiner erleuchteten Regierung haben uns gestattet im Wettkampfe mit unseren Schwesteranstalten die errungene Stelle zu behaupten.

Neue Institute und Gebäude wuchsen empor, neue Lehrstühle wurden gegründet, ältere durch glückliche Berufungen neu besetzt, und so die Universität immer besser ausgerüstet um ihrer Aufgabe gerecht zu werden die Wissenschaft zu fördern und die studirenden Jünglinge zu tüchtigen, für ihren Beruf wohl vorgebildeten, Männern zu erziehen. Zur Erreichung dieses idealen Zieles ist strenge Pflichterfüllung unerlässlich. Wo aber könnten wir alle, Professoren und Studenten, ein leuchtenderes Vorbild dafür finden als in unserem allverehrten Grossherzog Friedrich?

Möge ein gütiges Geschick Ihn uns und seinem Lande
noch recht lange erhalten, mögen die Gebete Erhörung finden
in welchem am neunten September alle Angehörigen der
Albert-Ludwigs Universität sich vereinen:

GOTT SCHÜTZE

UNSERN DURCHLAUCHTIGSTEN GROSSHERZOG

FRIEDRICH

UND SEIN GANZES HAUS.

Rationale Flächen
und
involutorische Transformationen.

Von
Dr. Jakob Lüroth,
Professor der Mathematik.

Correcturen:

Seite 4, Zeile 1 ist § 3 zu streichen.

„ 12, „ 2 v. u. sind in der Formel P' und G zu vertauschen.

„ 13, „ 5 v. o. ist in der Formel E für ϵ zu schreiben.

„ 16, „ 2 v. u. lies dritte für dicke.

„ 17, „ 10 v. o. haben q und C eine andere Bedeutung wie vorher.

„ 21 In Formel (17) ist im Nenner λ^2 durch xy zu ersetzen.

„ 23, Zeile 3 v. u. ist μ für μ^2 zu schreiben.

„ 22 Bei Formel (21) wurde übersehen, dass auch die Annahme $\gamma=0$ eine Umformung liefert. Man kann dann a von Null verschieden annehmen, weil man sonst auf (14) käme, und, ähnlich wie im Texte auf

$$q=t, r=\frac{a-rt}{r+t}$$

reduciren. Ist $a=0$ so geht diese Transformation durch die Substitution der ersten Zeile von Seite (24) in (14) über. Ist a ungleich Null, so setzt man $\lambda^2=a$, $r=\lambda/v$, $t=\lambda/u$ u. s. w. wodurch ein specieller Fall von (24) entsteht.

Bei einer rationalen Curve können die Coordinaten eines ihrer Punkte als rationale Functionen eines Parameters in solcher Weise dargestellt werden, dass jedem Punkte der Curve nur ein Werth des Parameters entspricht (vergl. Math. Ann. Band 9 Seite 163).

Die Erweiterung dieses Satzes auf Flächen gibt das folgende Theorem:

Wenn eine Fläche auf eine Ebene so bezogen werden kann, dass jedem Punkt der Ebene ein Punkt der Fläche entspricht aber jedem Punkte der Fläche mehrere, etwa n , Punkte der Ebene zugehören, so kann man stets neue Variabeln so einführen, dass die Coordinaten eines Flächenpunktes rationale Functionen der neuen Variabeln werden und jedem Flächenpunkt nur ein System von Werthen der neuen Variabeln entspricht.

Oder analytisch: wenn $f(xy)$, $g(xy)$, $h(xy)$ drei rationale Functionen von zwei Veränderlichen sind, so kann man stets zwei andere rationale Functionen ζ und ϑ von xy finden, so dass sich f , g und h als rationale Functionen von ζ und ϑ darstellen lassen

$$(1) \quad f(xy) = X(\zeta, \vartheta) \quad g(xy) = Y(\zeta, \vartheta) \quad h(xy) = Z(\zeta, \vartheta);$$

und zwar in der Weise, dass die Gleichungen 1) zu jedem Werthsysteme xy nur ein System ζ, ϑ liefern.

Der Beweis dieses Satzes ist viel schwieriger als der des entsprechenden oben erwähnten für Curven, und mir bisher selbst in dem einfachsten Falle, dass einem Flächenpunkte nur zwei Punkte der Ebene entsprechen, noch nicht vollständig gelungen. Ich gebe im Folgenden daher nur einige allgemeine Betrachtungen über die Aufgabe die Functionen ζ und ϑ zu bestimmen, und wende diese sodann auf Beispiele an.

§ 1.

Der bequemeren Darstellung wegen will ich den Flächenpunkt, welcher dem Punkte P , mit den Coordinaten xy , der Ebene entspricht, dessen Raumcoordinaten also $f(xy)$, $g(xy)$, $h(xy)$ sind, mit $F(P)$ bezeichnen. Um zu finden wie viele Punkte der Ebene einem Flächenpunkte zugehören stelle man die 3 Gleichungen auf

$$f(xy) = f(uv) \quad g(xy) = g(uv) \quad h(xy) = h(uv)$$

die man auch in

$$(2) \quad F(P) = F(X)$$

zusammenfassen könnte, und löse sie nach uv auf.

Sie haben die selbstverständliche Lösung $u = x$, $v = y$. Sie können aber auch noch durch andere Punkte erfüllt werden, und zwar einmal durch solche die von P nicht abhängen und andererseits durch Punkte die mit P sich ändern. Nur von den letzteren soll hier die Rede sein. Ihre Zahl sei $n-1$. Dem Punkte P der Ebene entsprechen dann also durch die Gleichungen (2) $n-1$ weitere Punkte $Q, R, \dots$. Da nun $F(Q) = F(P)$ ist, so entspricht auch dem Punkte Q wieder der P . Oder die Punkte der Ebene werden durch die Gleichungen (2) in Gruppen von je n Punkten $P, Q, R, \dots$ zusammengeordnet, so dass einem Punkte der Gruppe durch jene Gleichungen die übrigen $n-1$ zugewiesen sind. Wenn man die Ableitung der Punkte aus dem einen P als eine *Transformation* bezeichnen will, so wird man sie eine *involutorische* nennen müssen.

Die Gruppe zu der auf diese Weise P gehört sei mit $\Gamma(P)$ bezeichnet.

§ 2.

Die drei Gleichungen (2) kann man, nach Herrn *Kroneckers* Vorgang, durch zwei Gleichungen ersetzen wenn man, unter a, b, c, a', b', c' Unbestimmte verstehend,

$$af(xy) + bg(xy) + ch(xy) = \Phi(xy)$$

$$a'f(xy) + b'g(xy) + c'h(xy) = \Psi(xy)$$

setzt. Dann liefern nämlich die Gleichungen

$$(3) \quad \Phi(xy) = \Phi(uv) \qquad \Psi(xy) = \Psi(uv)$$

Werthe von uv , welche theils von den Unbestimmten abhängen, theils von ihnen unabhängig sind. Die letzteren sind die gemeinsamen Wurzeln der (2).

Wie vielfach der Punkt P und die ihm zugeordneten $Q, R, \dots$ in den Lösungen von (3) gerechnet werden, ergibt sich wenn man mit diesen Gleichungen die

$$(3) \quad \alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

combinirt und die uv eliminirt. Man findet als Resultante eine ganze homogene Function von $\alpha\beta\gamma$ die in xy rational ist und in lineare Factoren zerfällt, die aber in den xy nicht alle rational zu sein brauchen. Man kann jene Resultante aber auch in Factoren spalten von welchen einer von den a, b, c, a', b', c' abhängt, während der andere von ihnen unabhängig ist. Der zweite, den man als gemeinsamen Theiler von zwei mit verschiedenen Constanten $a \dots c'$ gebildeten Resultanten findet, entspricht allein den hier gewünschten Lösungen und man kann von ihm noch einen Factor $C(\alpha\beta\gamma)$ abtrennen, der die constanten, von xy nicht abhängenden, Lösungen gibt. Der Rest ist dann eine ganze Function von $\alpha\beta\gamma$, die in xy rational ist und welche die Factoren $\alpha x + \beta y + \gamma, \alpha \xi + \beta \eta + \gamma, \dots$ enthält, die den Punkten $P, Q, \dots$ der $\Gamma(P)$, mit den Coordinaten xy , bez. $\xi \eta, \dots$ entsprechen. Dieser Rest sei mit $R(\alpha\beta\gamma)$ bezeichnet.

Enthielte $R(\alpha\beta\gamma)$ den Factor $\alpha x + \beta y + \gamma$ in höherer als der ersten Potenz, so würden die Gleichungen (3) nicht nur durch $u=x, v=y$ sondern auch durch die unendlich wenig verschiedenen Werthe $u=x+dx, v=y+dy$ erfüllt. Dann wären

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0 \qquad \frac{d\Phi}{d} = 0 \qquad \frac{d\Psi}{dx} = 0 \qquad \frac{d\Psi}{dy} = 0$$

also Φ und Ψ constant, was nur bei constanten f, g, h möglich wäre.

Käme der Factor $\alpha \xi + \beta \eta + \gamma$ mehr als ein Mal vor, so müssten die vier letzten Gleichungen für $x=\xi, y=\eta$ erfüllt sein. Weil aber $\xi \eta$ ebenso ganz beliebig sind wie die xy , würde sich wieder die Constanz der f, g, h ergeben.

§ 3.

Die Coefficienten von $R(a\beta\gamma)$ liefern also die elementaren symmetrischen Functionen der Punkte $P, Q, R \dots$ durch welche sich alle andern rationalen symmetrischen Functionen jener Punkte in rationaler Weise ausdrücken lassen. Diese elementaren symmetrischen Functionen sind rationale Functionen von x, y . Ihre Zahl ist $= \frac{n(n+3)}{2}$. Weil aber $R(a\beta\gamma)$ in lineare Factoren zerlegbar, also in Bezug auf die $a\beta\gamma$ reducibel ist, so bestehen zwischen den elementaren symmetrischen Functionen eine Anzahl von Gleichungen.

Für $n=2$ sei die Function

$$\begin{aligned} R(a\beta\gamma) &= (ax + \beta y + \gamma)(a\xi + \beta\eta + \gamma) \\ &= a^2p + \beta^2\pi + \gamma^2 + a\beta\psi + a\gamma s + \beta\gamma\sigma; \end{aligned}$$

dann ist die Bedingung des Zerfallens

$$(4) \quad 4p\pi + s\sigma\psi - \pi s^2 - p\sigma^2 - \psi^2 = 0$$

so dass in diesem Falle alle rationalen symmetrischen Functionen sich rational durch $p s \sigma \psi$ oder durch $\pi s \sigma \psi$ ausdrücken lassen.

§ 3.

Die Werthe der drei Functionen $f g h$ sind für alle Punkte von $\Gamma(P)$ dieselben. Ist der zu beweisende, in der Einleitung angeführte, Satz richtig, so werden, weil die linken Seiten der Gleichungen (1) für alle Punkte von $\Gamma(P)$ dieselben Werthe haben und diese Gleichungen nur *ein* Werthsystem ζ, ϑ bestimmen sollen, auch ζ und ϑ für alle Punkte von $\Gamma(P)$ dieselben Werthe haben müssen.

Solche rationalen Functionen, welche für alle Punkte der zu P gehörigen Gruppe $\Gamma(P)$ denselben Werth haben, mögen *invariante Functionen* heissen.

Ist $S(P)$ eine Funktion dieser Art, und sind $Q, R, \dots$ die andern zu $\Gamma(P)$ gehörigen Punkte, so ist $S(P) = S(Q) = S(R) = \dots$, daher auch

$$S(P) = \frac{1}{n} \{ S(P) + S(Q) + S(R) + \dots \}.$$

Die rechte Seite ist, weil in den Punkten $P, Q, R \dots$ symmetrisch, als rationale Function der elementaren symmetrischen Functionen darzustellen und $S(P)$ gibt also ihren Werth, wenn man für jene elementaren symmetrischen Functionen ihre Ausdrücke in $x y$ einführt. Ist umgekehrt $G(P, Q, R, \dots)$ eine symmetrische Function der Punkte $P, Q, R, \dots$ so kann man sie durch die elementaren symmetrischen Functionen und dann weiter als rationale Function $H(P)$ des Punktes P darstellen. Will man nun $H(Q)$ bilden so hat man in G für die $P, Q, R, \dots$ die Punkte der Gruppe $\Gamma(Q)$ zu setzen. Weil diese Gruppe aber mit $\Gamma(P)$ identisch ist, wird $H(Q) = H(P)$. Also ist $H(P)$ eine invariante Function.

Alle invarianten Functionen entstehen somit aus symmetrischen Functionen der Punkte einer Gruppe.

Die Function $R(a\beta\gamma) \cdot C(a\beta\gamma)$, als gemeinsamer Theiler von zwei Resultanten der Gleichungen (3), und, weil $C(a\beta\gamma)$ nicht von den $x y$ abhängt, auch $R(a\beta\gamma)$ selbst, ist nicht direct von den $x y$ sondern nur von den drei Functionen f, g, h abhängig; somit lässt sich jede elementare symmetrische Function und folglich auch jede invariante Function rational durch die f, g, h darstellen. Wenn also die Functionen ζ, ϑ existiren, so müssen auch sie sich rational durch die f, g, h ausdrücken lassen. Weil aber auch umgekehrt f, g, h rationale Verbindungen der ζ, ϑ sind, lassen sich dann alle invarianten Functionen in rationaler Weise durch zwei derselben darstellen.

Ein Paar von invarianten Functionen durch welche sich alle andern invarianten Functionen in rationaler Form ausdrücken lassen soll ein *Hauptpaar* genannt werden.

Gesetzt man habe ein Hauptpaar gefunden $z(xy), \lambda(xy)$. Stellt man dann die Gleichungen für uv

$$(5) \quad z(xy) = z(uv) \qquad \lambda(xy) = \lambda(uv)$$

auf und genügt ihnen ein Punkt N , so ist, weil f, g, h rationale Ausdrücke von z und λ sind, $F(N) = F(P)$; also gehört N zu $\Gamma(P)$. Die Gleichungen (5) ersetzen also die Gleichungen (1). Geometrisch gesprochen stellt jede der Gleichungen (5) ein Curvenbüschel dar und eine Gruppe $\Gamma(P)$ erscheint dann als Schnitt der beiden Curven der Büschel, welche durch P gehen.

Die Coordinaten eines Punktes der Fläche sind nun rationale Functionen der z und λ . Aber es ist noch die Frage ob umgekehrt einem Flächenpunkt nur *ein* Werthsystem z, λ zukommt. Um diese Frage zu beantworten seien die Ausdrücke der f, g, h durch die z, λ die folgenden

$$(6) \quad f(xy) = U(z\lambda), \quad g(xy) = V(z\lambda), \quad h(xy) = W(z\lambda)$$

die natürlich in xy identisch sind. Wenn nun die Gleichung

$$U(kl) = U(\alpha\beta), \quad V(kl) = V(\alpha\beta), \quad W(kl) = W(\alpha\beta)$$

wo k, l unbestimmt sind, für α, β mehr als ein Werthsystem lieferten $(\alpha\beta) = (kl)$ und $(\alpha\beta) = (k', l')$, so stelle man die, den Gleichungen (5) entsprechenden,

$$z(uv) = k \quad \lambda(uv) = l$$

auf, welche eine Gruppe $\Gamma(A)$ von n Punkten liefern mögen, und die

$$z(uv) = k' \quad \lambda(uv) = l'$$

welche eine Gruppe $\Gamma(B)$ ergeben sollen. Für alle Punkte von $\Gamma(A)$ liefern dann die Gleichungen (6) einen Punkt der Fläche mit den Coordinaten

$$U(kl) \quad V(kl) \quad W(kl)$$

und die gleichen Coordinaten ergeben sich für die Punkte von $\Gamma(B)$, so dass also diese beiden Gruppen *denselben* Flächenpunkt ergäben. Dies ist aber nicht möglich weil ja einem Flächenpunkt nur *eine* Gruppe von n Punkten der Ebene entsprechen soll.

Das Hauptpaar $z\lambda$ kann somit an Stelle der $\zeta\vartheta$ des zu beweisenden Satzes treten, dessen Beweis somit zurückgeführt ist auf den Nachweis, dass bei jeder involutorischen Transformation ein Hauptpaar existirt. Es gibt aber nicht nur ein Hauptpaar sondern stets unendlich viele. Denn leitet man durch Cremona'sche Transformation aus z, λ ein Functionenpaar μ, ν ab, dessen Functionen rationale Ausdrücke von $z\lambda$ sind, so sind umgekehrt auch z, λ rational durch μ, ν darstellbar und folglich auch alle invarianten Functionen, Und ist ζ, ϑ ein Hauptpaar so lassen sich ζ und ϑ , als invariante Functionen, rational durch $z\lambda$ darstellen und umgekehrt, so dass beide Paare durch Cremona'sche Transformationen zusammenhängen.

§ 4.

Um nun den Beweis zu führen, dass bei jeder involutorischen Transformation ein Hauptpaar existirt, kann man eine solche Transformation durch Einführung neuer Variablen vereinfachen. Es bezeichne nämlich T eine Cremona'sche Transformation, welche aus den Punkten $P, Q, R \dots$ einer Gruppe $\Gamma(P)$ neue Punkte $p, q, r \dots$ producirt, so dass $TP=p, TQ=q, TR=r \dots$ ist. Bezeichnet nun t die Umkehrung von T , ist also $Ttp=p, tTP=P$ so wird $F(tp)=F(tq)=F(tr)=\dots$

Diese Gleichungen verglichen mit (2) zeigen dass auch die Punkte $p, q, r \dots$ einer Gruppe $\gamma(p)$ angehören, deren Punkte freilich durch ein anderes Gesetz verknüpft sind als die der Gruppe $\Gamma(P)$.

Bezeichnet UP irgend einen der $n-1$ Punkte, die mit P zu derselben Gruppe gehören, so kann man sagen Utp ist einer der Punkte $tq, tr \dots$, oder die Transformation $TUtp=V(p)$ liefert zu p einen der Punkte $q, r, \dots$

Ist $i(P)$ eine invariante Function, also $=i(Q)=i(R) \dots$ so ist $i(tp)=i(tq)=i(tr)=\dots$ so dass $i(tp)$ auch eine invariante Function ist, die bei Anwendung der Transformation V ungeändert bleibt. Umgekehrt geht jede invariante Function $j(p)$ von V in eine $j(TP)$ von U über.

Ist $i(P)$ eine rationale Funktion J der beiden invarianten Functionen $k(P)$ und $l(P)$,

$$i(P)=J\{k(P), l(P)\}$$

so ist auch

$$i(tp)=J\{k(tp), l(tp)\}$$

Setzt man also

$$i(tp)=j(p) \quad k(tp)=z(p) \quad l(tp)=\lambda(p)$$

so wird

$$j(p)=J\{z(p), \lambda(p)\}$$

so dass sich $j(p)$ rational durch $z(p)$ und $\lambda(p)$ ausdrücken lässt. Um durch diese Ueberlegung eine bestimmte invariante Function $j(p)$ zu erreichen, braucht man nur $i(P)=j(TP)$ zu nehmen. Besitzt also die Transformation U ein Hauptpaar, so gilt dasselbe von der Transformation V . Um die Exi-

stanz von Hauptpaaren nachzuweisen, braucht man in folge dieser Bemerkung nur diejenigen einfachsten Typen von involutorischen Transformationen zu untersuchen, auf welche sich alle andern durch Cremona'sche Umformungen reduciren lassen.

§ 5.

Im Falle $n=2$ liefern die Gleichungen (3) zu einem Punkte P nur *einen* andern dessen Coordinaten also rationale Functionen von P werden und die Transformation U ist selbst eine involutorische Cremona'sche Transformation. Nun hat *Bertini* diese Umformungen untersucht (*Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, *Annali di matematica* (2) VIII 254—287; und: *Sulle trasformazioni univoche piane e in particolare sulle involutorie* *Rendiconti del R. Istituto Lombardo Serie II. Vol. XIII fasc. XIV*) und gezeigt, dass sie sich auf 4 einfache Typen zurückführen lassen, die durch Cremona'sche Transformationen nicht weiter reducirbar sind. Der Beweis, dass *stets*, auch in den Fällen speziellster Singularitäten, die von Bertini gefundenen Typen in der That die einzigen sind, ist, wie *Nöther* bemerkt hat (*Fortschritte der Mathematik* Band 9. Jahrgang 1877 Seite 578), noch nicht erbracht. Auch kein anderer Mathematiker hat, so viel ich weiss, diese schwierige Frage bisher erledigt. Die folgenden Betrachtungen zeigen also nur, dass in einer Reihe von Fällen die aufgeworfene Frage zu bejahen ist, lassen aber unentschieden ob es Ausnahmen gibt oder nicht.

§ 6.

Die vier von Bertini gefundenen Typen sollen nun der Reihe nach betrachtet werden.

Der *erste* ist die projective involutorische Transformation. Durch passende Wahl der Veränderlichen kann man sie durch die Gleichungen

$$\xi = x \qquad \eta = -y$$

definiren, welche für die elementaren symmetrischen Functionen die Werthe

$$s = 2x \qquad \sigma = 0 \qquad p = x^2 \qquad \pi = -y^2 \qquad \psi = 0$$

liefern. Diese drücken sich alle durch s und π in rationaler Weise aus, so dass diese beiden Functionen ein Hauptpaar bilden.

Der *zweite* Typus wird durch diejenigen Transformationen gebildet bei welchen alle Strahlen eines Linienbüschels wieder in Strahlen desselben Büschels übergehen. Die Transformation dieses Büschels in sich, die dadurch gegeben ist, ist folglich projectiv und involutorisch. Entweder geht nun jeder Strahl in sich über oder in einen andern. Bestimmt man den Strahl durch eine passende Variable x , so ist also entweder $\xi = x$ oder $\xi = -x$.

Ferner ist dabei $\eta = g(x, y)$, wo $g(x, y)$ eine rationale Function bezeichnet. Diese muss, wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit, in y linear sein, so dass

$$(7) \quad \xi = \pm x, \quad \eta = \frac{a + by}{c + dy}$$

zu setzen ist, wobei a, b, c, d noch Functionen von x sind.

Ist $d = 0$ so hat man die einfachere Form

$$(8) \quad \eta = A + By.$$

Ist aber d nicht gleich Null, so kann man beiderseits eine neue Transformation anwenden, nach dem Schema des § 4, um eine weitere Vereinfachung zu erzielen.

Setzt man nämlich $y = w - \frac{c(x)}{d(x)}$, $\eta = \omega - \frac{c(\xi)}{d(\xi)}$ so folgt

$$(9) \quad \omega = \frac{A}{w} + B$$

wenn unter A und B rationale Functionen von x verstanden werden.

Bezeichnet man durch einen Accent der einer Function von x beigesetzt wird, dass x in der Function durch ξ und durch dessen Ausdruck in x ersetzt werde, so ergibt die Forderung, dass (8) einer Involution angehöre die Gleichungen

$$A' + AB' = 0 \quad BB' = 1$$

Ist A nicht $= 0$, so folgt, weil $(A')' = A$ ist,

$$B = -\frac{A}{A'};$$

die zweite Gleichung ist dann von selbst erfüllt und (8) wird

$$\eta = A - \frac{A}{A'} y.$$

Setzt man $y = A' t + \frac{A'}{2}$, $\eta = A \tau + \frac{A}{2}$ so folgt

$$\xi = \pm x \quad \tau = t,$$

eine Transformation die entweder identisch ($\xi = \pm x$) oder nur durch die Bezeichnungen vom ersten Typus verschieden ist.

Für $A = 0$ und $x = \pm \xi$ wird $B^2 = 1$, daher $B = \pm 1$, wieder dem schon absolvirten ersten Fall entsprechend. Ist aber $\xi = -x$, so muss $B(x) B(-x) = 1$

sein. Es sei die rationale Function $B(x) = \frac{R(x)}{S(x)}$, wo R und S ganz und theiler-

fremd sind. Dann muss $R(x) R(-x) = S(x) S(-x)$ also $S(-x)$ durch $R(x)$ theilbar sein. Ist der ganze Quotient $= q(x)$ so folgt weiter

$$R(-x) = q(x) S(x)$$

$$R(x) = q(-x) S(-x)$$

folglich

$$q(x) q(-x) = 1,$$

was nur möglich ist, indem $q(x) = 1$ oder $= -1$ ist. Damit ergibt sich die Transformation

$$\xi = -x; \quad \eta = \pm \frac{R(x)}{R(-x)} y$$

Mit $y = t R(-x)$, $\eta = \tau R(x)$ wird dies $\xi = -x$, $\tau = \pm t$. Setzt man beim unteren Zeichen weiter $t = x w$, $\tau = \xi \omega$, so folgt $\omega = w$, so dass in beiden Fällen ein schon untersuchter Typus sich herausstellt.

§ 7.

Der andere oben erwähnte Fall ist, mit andern Bezeichnungen der Variabeln, durch die Gleichungen

$$\xi = \pm x \quad \eta = \frac{A}{y} + B.$$

gegeben.

Soll dies eine Involution sein, so muss

$$B = 0 \quad A = A' + B B' \quad A B' = 0$$

sein, folglich $B = 0$ und $A = A'$.

Ist $\xi = x$ so ist also $\eta = \frac{A(x)}{y}$ mit den Werthen

$$s = 2x \quad \sigma = y + \frac{A(x)}{y} \quad p = x^2 \quad \pi = A(x)$$

$$\psi = \frac{x A(x)}{y} + xy = x\sigma,$$

woraus sich s und σ als Hauptpaar ergeben. Für $\xi = -x$ folgt aus $A(x) = A(-x)$ dass A nur eine Function von x^2 sein kann. Die Gleichungen

$$\xi = -x \quad \eta = \frac{A(x^2)}{y}$$

liefen dann

$$s = 0 \quad p = -x^2 \quad \sigma = y + \frac{A(x^2)}{y} \quad \pi = A(x^2)$$

$$\psi = x \frac{A(x^2)}{y} - xy,$$

und die Gleichung (4) § 2 wird hier

$$4p\pi - p\sigma^2 - \psi^2 = 0,$$

oder, wenn man $-q$ für p setzt,

$$(10) \quad 4qA(q) - q\sigma^2 + \psi^2 = 0.$$

Deutet man für einen Augenblick $q\sigma\psi$ als Raumcoordinaten, so ist dies die Gleichung einer Fläche die von jeder Ebene $q = \text{Constante}$ in einem Kegelschnitte geschnitten wird und folglich nach den Untersuchungen von *Nöther* (Math. Ann. Bd. 3 Seite 161) abbildbar ist. Um die Abbildung zu leisten muss man zuerst zwei rationale Functionen von q suchen die, für σ und ψ gesetzt, die obige Gleichung erfüllen. Sei

$$4qA(q) = -B(q)^2 \frac{D(q)}{E(q)}$$

wo B eine rationale Function bezeichnet und D und E ganze Functionen sind, die unter sich theilerfremd sind und nur einfache Nullen haben. Wenn man dann die zu suchenden Functionen schreibt

$$\frac{B(q)}{E(q)} U(q) \quad \frac{B(q)}{E(q)} V(q)$$

so müssen U und V , die man als ganz voraussetzen kann, der Gleichung genügen

$$U^2 - qV^2 = DE.$$

Nun seien die Wurzeln der Gleichung $DE = 0$ die Werthe $a^2, b^2, c^2, \dots$. Man bilde, unter a eine noch zu bestimmende Constante verstehend,

$$a(z-a)(z-b)(z-c) \dots$$

und zerlege diese Function in ihren geraden Theil $F(z^2)$ und ihren ungeraden $zG(z^2)$. Dann ist

$$F(a^2) + aG(a^2) = 0.$$

also auch

$$F(a^2)^2 - a^2 G(a^2)^2 = 0.$$

so dass die Function $F(q)^2 - qG(q)^2$ eine Null $= a^2$ hat. Ebenso hat sie noch die Nullen $b^2, c^2, \dots$. Ist DE vom Grade $2m$ so ist F vom Grade m , G vom Grade $m-1$, ist aber der Grad von DE gleich $2m+1$, so sind F und G vom Grade m . In beiden Fällen ist die Function $F(q)^2 - qG(q)^2$ von demselben Grade wie DE und, weil die Nullen beider Functionen übereinstimmen, von ihm nur um eine Constante verschieden; also können durch Wahl von a beide einander gleich gemacht werden. Man kann somit setzen

$$U = F(q) \quad V = G(q)$$

Weil dann

$$4qA(q) = q \frac{B^2}{E^2} F^2 + \frac{B^2}{E^2} G^2 = 0$$

ist so folgt weiter durch Subtraction von (10)

$$\psi^2 - \frac{B^2 F^2}{E^2} - q \left(\sigma^2 - \frac{B^2}{E^2} \right) G = 0.$$

Setzt man jetzt

$$\psi E - B F = q (\sigma E - B G) z$$

so wird

$$\psi \varepsilon + B F = (\sigma E + B G) \frac{1}{z},$$

und aus diesen Gleichungen ergaben sich σ und ψ als rationale Functionen von z und q , während z selbst, als rational in ψ , σ und q , eine invariante Function ist. Folglich bilden z und q zusammen ein Hauptpaar.

§ 8.

Während der zuletzt absolvirte Typus insofern einen allgemeinen Charakter hat als in ihm noch willkürliche Functionen auftreten, ist dies bei den übrigen nicht der Fall.

Beim *dritten* Typus entsprechen einer geraden Linie Curven 8. Ordnung mit 7 dreifachen Fundamentalpunkten. *Bertini* hat gezeigt, dass man eine Transformation dieser Art erhält wenn man in dem Netze von Curven 3. Ordnung, welches die 7 Punkte zu Basispunkten hat, jede Curve sich selbst entsprechen lässt und dass dies die einzige Art ist die gewünschte Transformation zu erlangen. Sind nun $A=0$ $B=0$ $C=0$ die Gleichungen von drei Curven des Netzes, die nicht zu demselben Büschel gehören, so geht durch die Transformation jede Curve des Netzes in sich über, d. h. die Function $\lambda A + \mu B + \nu C$ geht in $\rho (\lambda A + \mu B + \nu C)$ über bei beliebigen λ, μ, ν . Oder $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ bleiben durch die Transformation ungeändert, sind invariante Functionen.

Eine Curve aus dem Büschel $A - kC = 0$ schneidet aber eine aus dem Büschel $B - lC = 0$ in 2 Punkten die sich gegenseitig entsprechen und somit

eine Gruppe bilden. Die symmetrischen Functionen sind also alle durch k und l auszudrücken und folglich bilden $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ ein Hauptpaar.

Der vierte Typus *Bertini's* wird gebildet durch Transformationen 17. Ordnung mit 8 sechsfachen Punkten. Diese 8 Punkte bestimmen eine vierfach unendliche Schaar von Curven sechster Ordnung welche die 8 Punkte zu Doppelpunkten haben, und jede Curve dieser Schaar geht durch die Transformation in sich selbst über. Sind also $A=0$ und $B=0$ die Gleichungen von zwei Curven dieser Schaar so wird $\frac{A}{B}$ durch die Transformation nicht geändert.

Ferner kann man durch die 8 Punkte ein Büschel von Curven dritter Ordnung legen und auch jede solche Curve geht durch die Transformation in sich selbst über. Sind $C=0$ und $D=0$ die Gleichungen von zweien dieser Curven so wird demnach auch $\frac{C}{D}$ eine invariante Function sein müssen. Zwei Curven

$$A - k B = 0 \quad \text{und} \quad C - l D = 0$$

schneiden sich aber in $3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 2$ Punkten, die sich entsprechen. Folglich bilden A/B und C/D ein Hauptpaar.

§ 9.

Wenn ein Flächenpunkt drei Punkte der Ebene bestimmt, so werden die Punkte der Ebene dadurch in Gruppen von je drei Punkten zusammengefasst. Von einer allgemeinen Theorie dieser involutorischen Beziehung ist noch nichts bekannt. Ich habe nur den Fall näher untersucht in dem die Transformation so zu sagen reducibel wird, indem sie aus zwei Cremona'schen besteht.

Ist UP die eine, VP die andere, so dass P, UP, VP die Punkte einer Gruppe bilden, so müssen die U^2P, VUP, UP , die Punkte derselben Gruppe sein. Es wäre nun möglich, dass

$$U^2 P = P \text{ und } VUP = UP \text{ oder } VUP = VP$$

oder dass

$$VUP = P$$

wäre. Im ersten Falle wäre $VP = V$, oder $UP = P$; daher ist nur der zweite möglich. Es ist dann $VP = U^{-1}P$, so dass die drei Punkte sind P, UP und $U^{-1}P$. Setzt man UP für P , so folgen die Punkte UP, U^2P und P , die mit jenen identisch sein müssen. Folglich muss $U^3P = P$ sein.

Die Coordinaten von P seien xy , $\xi\eta$ die von UP und $\zeta\eta$ die von U^2P . Es sollen jetzt weiter nur diejenigen Umformungen UP in's Auge gefasst werden, bei welchen ein Büschel von geraden Linien entweder in sich oder in ein anderes Linienbüschel übergeht. Bestimmt dann x bezw. ξ und ζ die Linien des einen Büschels und y bezw. η und η die des zweiten, so ist entweder ξ nur Function von x oder nur Function von y . Ist ξ nur Function von x , so muss sie, weil ja UP eindeutig umkehrbar sein soll, linear sein und man kann also, wie in § 6, durch eine Substitution, die Beziehung zwischen ξ und x auf eine der Formen reduciren

$$\xi = a + bx$$

$$\xi = \frac{a}{x} + b$$

wo a und b Constante sind. Es folgt dann im ersten Falle, indem man U^2P und U^3P bildet, dass die Gleichungen bestehen müssen

$$b^3 = 1, \quad a(b^2 + b + 1) = 0.$$

Ist $b = 1$ so muss demnach $a = 0$ sein; ist b eine complexe dritte Einheitswurzel ε so ist a beliebig. Dies gibt die Formen $\xi = x$ und $\xi = a + \varepsilon x$.

Setzt man in der letzten $x = t + \frac{a}{1-\varepsilon}\xi = \tau + \frac{a}{1-\varepsilon}$ so erhält man die einfachere Form $\tau = \varepsilon t$.

Wenn man mit $\xi = \frac{a}{x} + b$ U^2 und U^3 bildet, so ergeben sich die Gleichungen

$$a + b^2 = 0 \quad ab + b^3 = 0 \quad a^2 + ab^2 = 0.$$

die mit $a = -b^2$ erfüllt sind. Somit hat man

$$\xi = b - \frac{b^2}{x};$$

dies geht durch $x = bw$, $\xi = b\omega$ in

$$\omega = 1 - \frac{1}{w}$$

und durch Einführung von

$$w = \frac{1+t}{-\varepsilon^2 - \varepsilon t} \quad \omega = \frac{1+\tau}{-\varepsilon^2 - \varepsilon \tau}$$

wo ε eine complexe dritte Einheitswurzel ist, in

$$\tau = \varepsilon t$$

über.

Wenn man die Variablen wieder mit x bzw. ξ bezeichnet, so hat man also nur die beiden Fälle in's Auge zu fassen

$$\xi = x \text{ und } \xi = \varepsilon x.$$

Da U eindeutig umkehrbar sein soll, so muss die Gleichung zwischen η und y in Bezug auf y linear sein und kann also durch Einführung neuer Variablen, für die aber die Bezeichnungen y und η beibehalten sein mögen, wie in § 6, auf eine der beiden Formen gebracht werden

$$(11) \quad \begin{aligned} \text{a) } \eta &= A + By \\ \text{b) } \eta &= \frac{A}{y} + B, \end{aligned}$$

wo nun A und B noch rationale Functionen von x sind. Bezeichnet man, bei einer Function von x , die Anwendung der Transformation U bzw. U^2 durch einen oder zwei Accente, und stellt die Bedingungen auf dass $U^3 P = P$ ist, so folgen im Falle a) die Gleichungen

$$B B' B'' = 1 \quad A B' B'' + A' B' + A'' = 0$$

deren Folgerungen sich verschieden gestalten je nach der Beziehung zwischen ξ und x .

Ist $\xi = x$ so muss sein $B^3 = 1$, $A(B^2 + B + 1) = 0$, daher $B = 1$ und $A = 0$, oder B eine complexe dritte Einheitswurzel ε und A beliebig sein muss. So erhält man die Formen

$$\begin{array}{ll} \xi = x & \eta = y \\ \xi = \varepsilon x & \eta = A + \varepsilon y. \end{array}$$

Die erste fällt weg, die zweite lässt sich ähnlich wie oben auf $\xi = x$ $\omega = \varepsilon w$ reduciren.

Ist $\xi = \varepsilon x$ so sei $B(x) = (x - a)^p (x - \varepsilon a)^q (x - \varepsilon^2 a)^r \cdot C(x)$, wo nun $C(x)$ für $x = a, \varepsilon a, \varepsilon^2 a$ weder Null noch Unendlich wird. Dann muss sein

$$(x^3 - a^3)^{p+q+r} C(x) C(\varepsilon x) C(\varepsilon^2 x) = 1.$$

Nach der Art wie C gewählt ist, ist dies nur möglich wenn $p + q + r = 0$ ist, so dass man

$$B(x) = \frac{(x - a)^p}{(\varepsilon x - a)^p} \frac{(\varepsilon x - a)^q}{(\varepsilon^2 x - a)^q} C(x)$$

setzen kann wo nun $C(x)$ die Gleichung

$$C(x) C(\varepsilon x) C(\varepsilon^2 x) = 1$$

erfüllen muss. Indem man auf $C(x)$ dieselbe Betrachtung anwendet und so fortfährt, findet man dass sich

$$B(x) = \frac{D(x)}{D(\varepsilon x)} \cdot \frac{E(\varepsilon x)}{E(\varepsilon^2 x)} \cdot c$$

ergibt, wo D und E rationale Functionen bezeichnen und die Constante c die Bedingung $c^3 = 1$ erfüllen muss, so dass c selbst wieder eine dritte Einheitswurzel ζ ist. Somit hat man

$$\xi = \varepsilon x \quad \eta = A + \frac{D(x) E(\varepsilon x)}{D(\varepsilon x) E(\varepsilon^2 x)} \zeta y.$$

Setzt man $y = \frac{r}{D(x) E(\varepsilon x)}$ und entsprechend $\eta = \frac{\rho}{D(\varepsilon x) E(\varepsilon^2 x)}$ so folgt

$$\rho = F(x) + \zeta r,$$

wo mit $F(x)$ eine rationale Function von x bezeichnet ist. ζ ist als dritte Einheitswurzel eine Potenz von ε ; es sei $\zeta = \varepsilon^\alpha$ wo $\alpha = 0, 1$ oder 2 sein kann. Macht man nun weiter die umkehrbare Substitution

$$r = x^\alpha w \quad \rho = \xi^\alpha \omega$$

so ergibt sich zwischen w und ω die Gleichung

$$\omega = G(x) + w$$

wo $G(x)$ wieder eine rationale Function von x ist. Weil diese Transformation eine Gruppe von nur drei Punkten liefern soll, muss

$$G(x) + G(\varepsilon x) + G(\varepsilon^2 x) = 0$$

sein. Zerlegt man $G(x)$ in die Summe $H(x^3) + xK(x^3) + x^2L(x^3)$ so folgt hieraus $H(x^3) = 0$ so dass die Transformation durch

$$\xi = \varepsilon x \quad \omega = xK(x^3) + x^2L(x^3) + w$$

gegeben ist. Wenn man nun weiter

$$w = t + x \frac{K(x^3)}{\varepsilon - 1} + x^2 \frac{L(x^3)}{\varepsilon^2 - 1}$$

$$\omega = \tau + \varepsilon x \frac{K(x^3)}{\varepsilon - 1} + \varepsilon^2 x^2 \frac{L(x^3)}{\varepsilon^2 - 1}$$

einführt, so reducirt sich die Beziehung auf

$$\xi = \varepsilon x \quad \tau = t.$$

Im Falle b , Gl. (11) hat man, damit $U^3 P = P$ sei, die Gleichungen $AA'' + AB' B'' = 0$ $A' + BB' = 0$ $AB' = A'' B + B'' A' + BB' B''$ A darf nicht $= 0$ sein, somit folgt $A'' = -B' B''$, $A = -B'' B$, $A' = -BB'$, womit die beiden andern Gleichungen erfüllt sind. Also hat man

$$\eta = B - \frac{BB''}{y},$$

was durch $y = B'' w$, $\eta = B \omega$ in

$$\omega = 1 - \frac{1}{w}$$

übergeht, eine Gleichung die schon oben auf den Typus $\tau = \varepsilon t$ reducirt wurde, so dass entweder

$$\begin{aligned} \xi &= x & \tau &= \varepsilon t \\ \xi &= \varepsilon x & \tau &= \varepsilon t \end{aligned}$$

ist. Wenn man im letzten Falle $t = r x$, $\tau = \rho \xi$ einführt so kommt

$$\xi = \varepsilon x \quad \rho = r.$$

Im Ganzen sind die hier betrachteten Transformationen alle auf den Typus

$$(I) \quad \xi = x \quad \eta = \varepsilon y$$

zu reduciren.

§ 10

Ist ξ eine Function von y allein, $\xi = f(y)$, $\eta = g(xy)$ so muss wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit $f(y)$ in y linear sein. Setzt man daher $f(y) = Z$, $f(\eta) = \xi$ so wird ξ eine rationale Function von x und Z , $G(xZ)$, so dass man, indem man wieder y für Z und η für ξ schreibt, nur die Gleichungen

$$\xi = y \quad \eta = G(xy)$$

zu betrachten braucht. Die Function G ist, wegen der Eindeutigkeit der Umkehrung, in x linear. Nun folgt

$$\xi = \eta = G(xy); \quad \eta = G(\xi \eta)$$

und weil eine nochmalige Anwendung der Transformation wieder xy liefern muss $\eta = x$. Die Gleichungen $\xi = G(xy)$ $\eta = x$ stellen die Transformation U^2 , dar und da auch diese eindeutig umkehrbar ist, muss G auch in Bezug auf y linear sein.

Enthielte G nur x , wäre also $\eta = G(x)$, so wäre $\eta = G(\xi)$ d. h. $x = G(y)$ was nicht möglich ist. Wenn aber $\eta = G(y)$ wäre so würde $\eta = x = G(\eta) = G(G(y))$ folgen, was auch nicht zulässig ist.

Sei nun

$$\xi = y \quad \eta = \frac{A(x) + B(x)y}{C(x) + D(x)y}$$

wo A , B , C , D ganze Functionen ersten Grades bezeichnen, deren Determinante nicht $= 0$ sein darf, weil sonst η nur von y abhängig wäre.

Bildet man η und setzt dies $= x$, so ergibt sich die Gleichung

$$(12) \quad [xC(y) - A(y)][C(x) + yD(x)] = [A(x) + yB(x)][B(y) - xD(y)]$$

aus der die 4 Functionen bestimmt werden müssen.

Sei zunächst $D(x) = 0$ aber $C(x)$ nicht constant so ergibt sich die Gleichung

$$(13) \quad [xC(y) - A(y)]C(x) = [A(x) + yB(x)]B(y)$$

Weil die rechte Seite durch $C(x)$ theilbar sein muss und $C(x)$ nicht constant ist, muss der erste Factor theilbar also

$$A(x) + y B(x) = \mu C(x)$$

sein, mit constantem μ .

Aus dieser Gleichung folgt entweder y gleich einer Function von x , oder $B(x) = 0$, wobei η nur Function von x ist. Beides ist unzulässig.

Somit muss $C(x)$ constant sein.

Ist es $= a$, so wird (13)

$$[ax - A(y)]a = [A(x) + yB(x)]B(y)$$

Ist $B(x)$ nicht constant, so steht rechts y^2 und links fehlt diese Potenz; daher muss $B(y)$ constant $= b$ sein, womit die letzte Gleichung sich

$$a^2x - bA(x) = b^2y + aA(y)$$

schreibt, so dass beide Seiten constant $= c$ sein müssen. Dann ist auch $b^2x + aA(x) = c$, neben $a^2x - bA(x) = c$, woraus

$$A(x) = \frac{a^2x}{b} - \frac{c}{b} = -\frac{b^2x}{a} + \frac{c}{a}$$

Also muss sein $c = 0$ oder $b = -a$. Bei $c = 0$ folgt $a^3 = -b^3$, $b = -\varepsilon a$; dagegen ist bei $b = -a$ das c noch willkürlich. Somit ergeben die Gleichungen

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \xi = y & \eta = -\varepsilon^2 x - \varepsilon y \\ \xi = y & \eta = \beta d - x - y \end{array}$$

mögliche Umformungen (wobei in der zweiten für $\frac{c}{a}$ gesetzt wurde βd).

Ist aber $D(x)$ nicht $= 0$ so muss die linke Seite der Gl. (12) für $x = \frac{B(y)}{D(y)}$ zu Null werden. Der erste Factor kann nicht Null werden, weil sonst η nur von y abhinge, ein Fall der schon erledigt ist. Also muss der zweite Factor $= 0$ sein.

Schreibt man

$$C(x) = ax + \beta \quad D(x) = \gamma x + \delta$$

so folgt

$$(15) \quad (a + \gamma y)B(y) + (\beta + \delta y)D(y) = 0.$$

Diese Gleichung ist auf zwei Arten möglich, indem entweder

$$(16) \quad \begin{array}{l} A) \quad B(y) = \lambda D(y) \\ \text{oder } B) \quad \alpha + \gamma y = \lambda D(y) \end{array}$$

mit constantem λ ist.

Im Falle A) hat man nach (15) weiter

$$\begin{array}{l} \delta = -\lambda \gamma \quad \beta = -\lambda \alpha \\ C(x) = \alpha(x - \lambda) \quad D(x) = \gamma(x - \lambda) \quad B(x) = \lambda \gamma(x - \lambda) \end{array}$$

womit die (12)

$$[A(y) - x C(y)] (\alpha + \gamma y) = [A(x) + y B(x)] \gamma (y - \lambda)$$

liefert. Daher muss $A(\lambda)(\alpha + \gamma \lambda) = 0$ sein. Wäre $A(\lambda) = 0$, so wäre $A(x)$ durch $x - \lambda$ theilbar und γ würde von x unabhängig. Somit muss $\alpha = -\gamma \lambda$ und

$$[A(y) + \gamma \lambda x y - \gamma \lambda^2 x] \gamma = [A(x) + \gamma \lambda x y - \gamma \lambda^2 y] \gamma$$

sein. Also ist entweder $\gamma = 0$ und damit auch $\alpha = 0$, $B = C = D = 0$, η nur Function von x , oder $A(x) = -\gamma \lambda^2 x + \zeta$, wo ζ ganz beliebig. Damit ergeben sich die Formeln

$$(17) \quad \begin{array}{l} \xi = y \\ \eta = \frac{\zeta - \gamma \lambda^2 (x + y) + \gamma \lambda x y}{\gamma \lambda^2 - \gamma \lambda (x + y) + \gamma \lambda^2} \end{array}$$

Im Falle (16) B) ist

$$(18) \quad \alpha + \gamma y = \lambda D(y),$$

folglich nach (15)

$$(19) \quad \beta + \delta y = -\lambda B(y),$$

und

$$C(x) + y D(x) = \lambda (x D(y) - B(y))$$

so dass (12) die Gleichung

$$(20) \quad A(x) - \lambda A(y) = -y B(x) - \lambda x C(y)$$

liefert. Nach (18) ist

$$\gamma = \lambda \gamma \quad \alpha = \lambda \delta$$

Also $\gamma = 0$ oder $\lambda = 1$. Ist letzteres der Fall, also $\alpha = \delta$, so wird

$$D(y) = \alpha + \gamma y \quad B(y) = -\beta - \alpha y,$$

somit nach (20)

$$A(x) - A(y) = y(\beta + \alpha x) - x(\alpha y + \beta) = \beta(y - x)$$

woraus

$$A(x) = -\beta x + \zeta$$

mit beliebigem ζ folgt. Hiemit sind alle Bedingungen erfüllt und

$$(21) \quad \xi = y \quad \eta = \frac{\zeta - \beta(x + y) - \alpha xy}{\beta + \alpha(x + y) + \gamma xy}$$

ist, mit γ ungleich Null, eine mögliche Umformung.

Ist aber $\gamma = 0$, so wird $D(x) = \delta$, $\alpha = \lambda \delta$, $C(x) = \lambda \delta x + \beta$, $B(y) = -\frac{1}{\lambda}(\beta + \delta y)$. Somit nach (20)

$$A(x) - \lambda A(y) = \frac{y}{\lambda}(\delta x + \beta) - \lambda x(\lambda \delta y + \beta).$$

Weil links xy nicht auftritt, muss $\delta(1 - \lambda^3) = 0$ sein. Wäre $\delta = 0$, so wäre $D(x) = 0$ und man käme auf den schon untersuchten Fall zurück. $\lambda = 1$ ist ebenfalls gerade absolvirt, man kann also $\lambda = \varepsilon$ nehmen; die letzte Gleichung zeigt dann, dass

$$A(x) = -\varepsilon \beta x$$

ist und dies liefert in

$$(22) \quad \xi = y \quad \eta = \frac{-\varepsilon \beta x - \varepsilon^2 \beta y - \varepsilon^2 \delta x y}{\beta + \varepsilon \delta x + \delta y}$$

wieder eine Transformation.

§ 11.

Es haben sich also die Umformungen als möglich ergeben, die in den Gll. (14), (17), (21) und (22) vorliegen und von welchen (17) als specieller Fall von (21) erscheint. Man kann (14) noch weiter reduciren. Setzt man in der zweiten

$$\begin{aligned} x &= x' + d & y &= y' + d \\ \xi &= \xi' + d & \eta &= \eta' + d \end{aligned}$$

so erhält man zwischen den neuen Variablen die Gleichungen

$$\xi' = y' \quad \eta' = -x' - y';$$

führt man weiter

$$x' = u + v \quad y' = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$$

und durch die entsprechenden Gleichungen u' und v' für ξ' und η' ein so folgt

$$u' = \varepsilon u \quad v' = \varepsilon^2 v$$

aus der die Substitution $v = tu^2$, $v' = t' u'^2$,

$$u' = \varepsilon u \quad t' = t$$

hervorgehen lässt; dem Typus (I) des § 9 entsprechend. Beim ersten Fall von (14) ergibt die Einführung von

$$x = u + v \quad y = u + \varepsilon^2 v$$

die Gleichungen

$$u' = u \quad v' = \varepsilon^2 v$$

ebenfalls dem Typus (I) zugehörend.

Bestimmt man ferner bei (21) eine Grösse μ aus der Gleichung

$$\gamma \mu^2 + 2a\mu + \beta = 0$$

was möglich ist, weil bei (21) γ nicht $= 0$ ist, und setzt dann

$$\begin{aligned} x &= r + \mu & \xi &= \rho + \mu \\ y &= t + \mu & \eta &= \tau + \mu \end{aligned}$$

so erhält man die Formeln

$$(23) \quad \rho = t \quad \tau = \frac{a + b r t}{-b(r + t) + r t}$$

wobei die Constantenverbindungen mit a und b bezeichnet wurden.

Bestimmt man bei (22) μ aus $\varepsilon \beta - \delta \mu^2 = 0$, was, weil δ nicht Null, möglich ist, so liefert dieselbe Substitution

$$\rho = t \quad \tau = -\frac{r t}{\varepsilon^2 r + \varepsilon t}$$

Setzt man weiter $r = 1/v$, $t = 1/u$, $\rho = 1/v'$, $\tau = 1/u'$ so folgt

$$v' = u \quad u' = -\varepsilon^2 u - \varepsilon v$$

also der erste Fall von (14).

Ist bei (23) $b = 0$ so führt man $r = v/u$, $t = 1/v$, $\rho = v'/u'$, $\tau = 1/v'$ ein, wodurch

$$v' = \frac{1}{au} \quad u' = \frac{v}{au}$$

entsteht. Diese Transformation ist von der ersten Ordnung. In ihr entspricht mindestens ein Punkt sich selbst, also auch jede gerade Linie durch diesen Punkt wieder einer solchen Linie, so dass ein Büschel von Linien in sich selbst übergeht. Eine derartige Umformung wurde aber in § 9 auf den Typus (I) reducirt.

Ist aber b nicht gleich Null, so kann man durch Einführung von $r = b + bu$, $t = b + bv$ und der entsprechenden, (23) zu

$$(24) \quad u' = v \quad v' = \frac{c + u + v}{uv - 1}$$

vereinfachen, wobei c eine Verbindung der Constanten a und b bezeichnet, die, weil b nicht $= 0$, stets existirt.

Genügt f der Gleichung $f^2 + cf + 1 = 0$, so ist f von Null verschieden, und wenn man in (24)

$$\begin{aligned} u &= f + \frac{1}{y} & v &= \frac{1}{f} - \frac{1}{fx} \\ u' &= f + \frac{1}{\eta} & v' &= \frac{1}{f} - \frac{1}{f\xi} \end{aligned}$$

substituirt so folgen die Beziehungen

$$\xi = \frac{x - fy - 1}{(1 - f^2)x - 1} \quad \eta = \frac{fx}{(1 - f^2)x - 1}$$

welche wieder eine Transformation erster Ordnung definiren, die, wie oben erwähnt, auf den Typus (I) reducirbar ist.

Alle Cremona'schen Transformationen U für welche $U^3 P = P$ ist und bei welchen ein Linienbüschel wieder in ein Linienbüschel übergeht, lassen sich also auf den Typus (I) reduciren.

Von den elementaren symmetrischen Functionen sind hier nur die

$$r = x + \xi + \zeta = 3x$$

$$s = x\xi + x\zeta + \xi\zeta = 3x^2$$

$$p = x\xi\zeta = x^3$$

$$\pi = y\eta\vartheta = y^3$$

von Null verschieden. Daher bilden r und π ein Hauptpaar.