Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Lüroth, Jakob** (1844–1910)

Titel: **Über die Geschichte der Infinitesimalrechnung**
Rede des antretenden Prorektors Hofrat Prof. Dr. Lüroth

Quelle: Reden : gehalten in der Aula am 9. Mai 1889 bei der öffentlichen Feier der Uebergabe des Prorectorats der Universität Freiburg von ... dem antretenden Prorector Hofrat Professor Dr. Lüroth. 1899.
Seite 23 – 51.

17

REDEN

gehalten in der Aula am 9. Mai 1889

bei der öffentlichen Feier der Uebergabe des

PRORECTORATS

der

UNIVERSITÄT FREIBURG

von

dem abtretenden Prorector

Geh. Hofrath Professor Dr. Bäumler

und dem antretenden Prorector

Hofrath Professor Dr. Lüroth.

Freiburg i. B.
Univ.-Buchdruckerei von Chr. Lehmann.
1889.

II.

Rede des antretenden Prorectors

Hofrat Professor Dr. Lüroth.

Königliche Hoheiten!
Hochansehnliche Versammlung!

Um die Neige des 17. Jahrhunderts wurde die wissenschaftliche Welt durch eine wichtige und folgenreiche Entdeckung auf dem Gebiete der Mathematik in Aufregung versetzt. Ein englischer und ein deutscher Gelehrter, Newton und Leibniz, hatten nahezu gleichzeitig die Infinitesimalrechnung erfunden und durch Anwendung auf mathematische und physikalische Probleme die grosse Tragweite des neuen Calcul's gezeigt. Der Beginn des 18. Jahrhunderts aber sah einen der grössten und heftigsten Prioritäts-Streite, die je geführt wurden, wegen dieser Erfindung entbrennen; einen Streit, dessen definitive Erledigung erst in unser Jahrhundert fällt. Wenn ich heute versuche, Ihnen das Wesen und die Bedeutung dieser Erfindung zu schildern, so geschieht das wohl am besten, wenn ich zeige, wie sie sich historisch entwickelte. Ich muss dabei bis zu den grossen griechischen Mathematikern zurückgehen. Schon um das 6. Jahrhundert vor Christus war es diesen gelungen die ebenen Figuren mit geradliniger Begrenzung ihrem Inhalt nach miteinander zu vergleichen. Auf Pythagoras (580—500 v. Ch.) und seine Schüler werden die Methoden zurück geführt, die dazu dienen: Methoden, die auch heute in der Feldmesspraxis noch angewandt werden. Naturgemäss bot sich nach Erledigung dieser die andere Aufgabe dar auch krummlinig begrenzte Figuren mit den geradlinigen, und besonders die zuerst studirte krumme Linie; den Kreis, seinem Inhalt nach, mit einem Rechteck zu vergleichen, spezieller ihn in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Die letztere Aufgabe — die Quadratur des Kreises — rein geometrisch zu lösen, ist, wie wir heute wissen, nicht möglich. Auch die Möglichkeit der ersten wird wohl zu einer Zeit, wo Zeno und die Eleaten die Fragen über die Theilbarkeit und Stetigkeit der Grössen behandelten, bestritten worden sein, weil ja das Krumme und das Gerade ganz heterogene Dinge seien. Da kam ein Sophist Antiphon, um das Jahr 450 vor Christus, auf die Idee, dass man den Kreis durch eingeschriebene Vielecke, von immer grösserer und grösserer Seitenzahl allmählig seinem Inhalt nach erschöpfen könne; und ein andrer Geometer Bryson, Zeitgenosse von Antiphon, nahm auch noch die umgeschriebenen Polygone zu Hülfe. Die Ausführung dieses Gedankens ist der Anfang der Infinitesimal-Rechnung. Indessen machte sie den griechischen Mathematikern noch viele Mühe und erst Hippokrates (etwa 450—400 v. Chr.) soll es gelungen sein zunächst den Nachweis zu führen, dass die Inhalte zweier Kreise sich verhalten, wie die Quadrate der Durchmesser. Sein Beweis ist uns nicht erhalten. Wahrscheinlich aber wird er einen Weg eingeschlagen haben, der mit dem verwandt ist, welchen Archimedes (287—212 v. Chr.) benützte bei seinem Beweis des anderen Satzes, dass die Fläche eines Kreises gleich ist der eines Dreiecks, dessen Grundlinie der Kreis-Umfang und dessen Höhe der Kreisradius ist. Dieser grosse Mathematiker wandte nämlich dabei, um den Beweis streng zu führen, das apagogische Verfahren an, indem er zeigte, dass die Annahme, jener Satz sei falsch, auf Wiedersprüche führe. Die Gesammtheit der hiezu nöthigen Operationen, die Archimedes in verschiedenen Fällen in der scharfsinnigsten Weise verwerthete und die auch die späteren Griechen beständig benutzten, wie sie ja auch heute noch in den Schulen gelehrt werden, bezeichnet man als die Exhaustionsmethode. Um von ihr ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen es handle sich um eben den vorhin angeführten, von Archimedes bewiesenen, Satz. Gesetzt der Inhalt des Kreises sei von dem jenes Dreiecks verschieden und etwa grösser als der des Dreiecks; dann beschreibe man in den Kreis ein regelmässiges Vieleck, dessen Inhalt den des Dreiecks übertrifft. Dies ist möglich, weil, der Annahme nach, der Kreisinhalt grösser ist als der Dreiecksinhalt, und man die Seitenzahl des Vielecks so gross machen kann, dass es sich dem Kreise beliebig nahe anschmiegt. Das Vieleck zerfällt in kleine Dreiecke gleichen Inhaltes, deren Grundlinien eine Summe kleiner als der Kreisumfang geben, deren Höhe kleiner als der Kreisradius ist und die also zusammengenommen eine Fläche geben, kleiner als die des Dreiecks aus Kreisumfang und Radius; so dass das Vieleck gleichzeitig grösser und kleiner als dieses letztere Dreieck sein müsste. Ebenso zeigt man mit Hülfe eines umschriebenen Vielecks, dass die Kreisfläche auch nicht kleiner als jenes Dreieck sein kann. Hiernach müssen also beide Figuren, wie behauptet, gleichen Inhalt haben. Archimedes und die späteren Mathematiker beschränken sich nicht auf diese Aufgaben über den Kreis, sondern behandeln auch noch andere krumme Linien, ja sie untersuchen auch Körper, die von krummen Flächen begrenzt sind, wie die Kugel, den Kegel, den Cylinder, in Bezug auf Oberfläche und Volumen. Neben diesen Problemen gehen andere einher, die mit der Aufgabe zusammenhängen, eine Tangente an eine krumme Linie zu legen. Man hatte vielleicht die Bemerkung gemacht, dass eine Linie durch zwei sehr nahe Punkte einer Curve näherungsweise eine Tangente sei und daraus auf Eigenschaften dieser geschlossen; aber man führte auch hierbei stets noch den apagogischen Beweis der Richtigkeit. Beim Kreise z. B. fand man, dass die Tangente auf dem Radius senkrecht stehe und bewies dies dann, indem man zeigte, dass jede zum Radius schiefe Linie keine Tangente sei. Das Merkwürdige ist nun, dass diese immer wiederkehrende Schlussform selbst von einem so genialen Manne, wie Archimedes es war, nicht zu einem Prinzip erhoben wird; dass das den verschiedenen Anwendungen zu Grunde liegende Gemeinsame nicht in irgend einer passenden Form ein für alle Mal ausgesprochen und bewiesen wird, statt dass man jene ermüdenden Schlüsse in jedem einzelnen Falle wiederholt.

Noch weniger als die Griechen hatten Sinn für diese Zusammenfassung die Mathematiker des Mittelalters, die in der Geometrie im wesentlichen nur die von den Alten überkommenen Lehren reproducirten. Die Erweiterung der Arithmetik und Algebra dagegen, die man dem Mittelalter verdankt, die Einführung des dekadischen Zahlensystems, der Null, der negativen Zahlen und der Wurzeln, die Auflösung von Gleichungen dritten Grades, endlich die Erfindung des Rechnens mit allgemeinen Zahlzeichen — Buchstaben — sind Verbesserungen, die vorangehen mussten ehe Descartes (1596—1650) durch seine Erfindung des Coordinatenprinzips die Geometrie der Rechnung zugänglich machen und umgekehrt der Geometrie dadurch wieder eine unübersehbare Masse neuer Aufgaben liefern konnte. Erst im 15. und 16. Jahrhundert beschäftigte man sich wieder mehr mit Geometrie und begann besonders Archimedes genauer zu studiren. Der andere Geist, der aus der Scholastik das Umgehen mit den Begriffen des Unendlichen gelernt hatte, empfand lebhaft die Schwerfälligkeit der Schlüsse, welche in den überlieferten Schriften vorlagen, und es wurden Anstrengungen gemacht an Stelle jener alten, neue Formen der Beweise zu setzen. Zudem waren die Methoden des Archimedes zwar mit ausserordentlichem Scharfsinn den wenigen krummen Linien, die man geometrisch entstehen lassen konnte, angepasst, aber den neuen Aufgaben gegenüber, die sich auf Curven bezogen, welche nur analytisch, durch ihre Gleichungen, gegeben waren, erwiesen sie sich als unzulänglich. Unter den ersten, die einen Fortschritt anbahnten, war Kepler, der im Jahre 1615 in seiner Stereometria Doliorum eine Reihe von Körperinhalten fassähnlicher Gebilde berechnete, veranlasst durch einen Streit mit seinem betrügerischen Küfer. Als Einleitung behandelt er dabei einige Sätze des Archimedes z. B. den früher erwähnten, indem er einfach sagt: Der Kreis kann betrachtet werden als aus unendlich vielen, unendlich schmalen, gleichseitigen Dreiecken bestehend, die im Mittelpunkte zusammenstossen, deren Höhe also der Kreisradius und deren Grundliniensumme der Kreisumfang ist; woraus sofort der Satz des Archimedes folgt. Man sieht, dass diese Methode nicht streng ist. Indessen geht Kepler aber auch mehr darauf aus die Resultate anschaulich zu machen, als sie genau zu begründen. So leitet er z. B. einen Satz mit dem unübersetzbaren Wortspiel ein: „ego quod non possum apodictice comprobabo dictice“. Auf ihn folgte der Italiener Cavalieri (1598—1647), der in seiner Methodus indivisibilium (1635) eine

Linie als eine Summe von unendlich vielen Punkten, eine Fläche als eine Summe von unendlich vielen Linien, einen Körper als eine Summe von unendlich vielen Ebenen betrachtete und darauf einige richtige Methoden zur Quadratur und Cubatur, d. h. zur Bestimmung von Flächen- und Körperinhalten, gründete. So schliesst man z. B. nach Cavalieri: weil 2 über derselben horizontalen Grundfläche stehende, gleich hohe Pyramiden von jeder Horizontalebene in flächengleichen Figuren geschnitten werden und jede Pyramide die Summe der Schnitte ist, müssen die beiden Pyramiden gleichen Inhalt haben. Die mangelhafte Grundlage, die darin liegt, dass ein Körper als eine Summe von Ebenen betrachtet wird, wurde von Cavalieri selbst gefühlt. Er sagt, dass seine Methode das Richtige liefere, wenn man sie nur richtig gebrauche, was man freilich schliesslich von jeder Methode sagen kann. Pascal verbesserte sie, indem er die Formel anwandte, dass eine Fläche aus unendlich vielen, unendlich schmalen Rechtecken zusammengesetzt sei. Die gleiche Ansicht verfolgen auch Fermat (1608 bis1665) und Personnier nach seinem Geburtsort gewöhnlich Roberval genannt (1602—1675). Bei all diesen Methoden liegt die eigentliche Schwierigkeit, die man nur in wenigen Fällen überwinden konnte, darin, die auftretenden Reihen zu summiren. Durch den genannten Roberval wurde dagegen die zweite der früher genannten Aufgaben, eine Tangente an eine krumme Linie zu legen, bedeutend gefördert. Er zeigte nämlich um 1640, dass wenn sich die krumme Linie durch Zusammensetzung von zwei Bewegungen erzeugen lasse, man das sog. Parallelogramm der Geschwindigkeiten anwenden könne um die Tangente zu finden. Andererseits entdeckte Fermat, um die grössten oder kleinsten Werthe einer Grösse, die von einer anderen Veränderlichen gesetzmässig abhängt oder, wie der Kunstausdruck lautet, einer Funktion, zu bestimmen, ein Verfahren, das, auf eine Bemerkung Keplers fussend, in vielen Fällen anwendbar war. Kepler hatte nämlich darauf hingewiesen, dass die Aenderung einer Funktion in der Nähe eines grössten oder kleinsten Werthes sehr klein ist, oder wie er sagt, dass bei unendlich kleiner Aenderung der Veränderlichen die Funktion sich nicht ändert. Indem Fermat diese Aussage in eine Gleichung umsetzt und diese entwickelt, findet er dass er durch eine unendlich kleine Grösse theilen kann, und indem er diese dann gleich Null setzt, erhält er die gewünschte Bedingung. Die Form derselben ist, wie wir heute wissen, richtig, aber die Begründung mangelhaft. Auch konnte Fermat seine Methode nur für gewisse Funktionsformen anwenden. Dagegen benutzte er eine ganz ähnliche Rechnung um die Tangente einer Curve zu bestimmen indem er diese Linie als Verbindungslinie von zwei unendlich nahen Punkten auffasste. An ihn und Roberval schloss sich Barrow (1630 bis 1677) an, der Lehrer Newton's und sein Vorgänger auf dem mathematischen Lehrstuhl in Cambridge. In Anlehnung an Roberval liess auch er eine krumme Linie entstehen durch zwei Bewegungen, aber durch solche, welche, der Descartesschen Coordinaten-Methode angepasst, rechtwinkelig zueinander stattfanden; und wie Fermat rechnete er mit den unendlich kleinen Grössen. Er führt für die Zuwächse der unabhängigen und der abhängigen Variabeln besondere Zeichen ein und stellt die Regel auf, dass alle Potenzen dieser unendlich Kleinen, mit Ausnahme der ersten, zu vernachlässigen seien. Brüche und Wurzeln waren aber für ihn, wie für seine Vorgänger Hindernisse, die sie durch Umformungen wegschaffen mussten.

Das war der Stand der Dinge als zwei der grössten Männer aller Zeiten, Newton und Leibniz, anfingen sich mit diesen Fragen zu beschäftigen.

Durch Untersuchungen über unendliche Reihen hatte Newton (geb. 1643 zu Whoolsthorpe; gest. 1727 zu London) den sog. binomischen Lehrsatz und eine Methode gefunden um gewisse Gleichungen aufzulösen. Beides lieferte ihm nun Hülfsmittel das Tangentenproblem auch in Fällen zu erledigen, welche Fermat, Roberval und Barrow entgangen waren. 1669 wurden die Resultate an Barrow mitgetheilt, und bis 1672 durch Briefwechsel mehreren Zeitgenossen bekannt. In diese Zeit fallen Leibnizen's (geb. 1646 zu Leipzig gest. 1716 zu Hannover) erste Studien in der höheren Mathematik. Bei einem Aufenthalt in London machte er die Bekanntschaft des damaligen Sekretairs der Royal Society, Oldenburg, und dieser schickte ihm am 24. Okt. 1674 einen Brief Newton's, mit dessen Vorwissen, in welchem dieser seine neuen Funde auseinandersetzt. Seine Methoden verbirgt er aber nach damaliger Sitte, an zwei Stellen des Briefes, in einer Reihe versetzter Buchstaben von denen eine so aussieht: 6 a c c d æ 13 e f f u. s. w. Leibniz empfing diesen Brief nicht mehr in London, sondern erst 1677 in Hannover. Er errieth offenbar aus den Resultaten die Newton mitgetheilt, den Weg, der ihn dazu geführt hatte, und antwortete, am 21. Juni 1677, in einem Briefe, in dem er seinerseits eine Methode darlegte, welche genau dasselbe leistete wie die Newton's und in dem auch schon der Mechanismus der Rechnung vollständig angedeutet ist. Veröffentlicht wurde zunächst, aus unbekannten Gründen, von keinem von beiden etwas, sondern erst 1684 publicirte Leibniz in dem Oktoberheft der Acta Eruditorum zu Leipzig einen Abriss der von ihm gefundenen allgemeinen Methode die Tangenten krummer Linien zu finden, unter dem Titel: Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus. Die Umkehrung dieser Methode, die sog. umgekehrte Tangentenmethode, die, wie er damals schon erkannt hatte, in dem engsten Zusammenhang stand mit den anderen historischen Problemen der Quadratur und Cubatur, hielt er noch zurück und publicirte sie erst 1686. Ein Jahr später, im Jahre 1687, trat dann Newton hervor mit seinen unsterblichen Philosophiae naturalis principia mathematica, in welchem Werke er zum ersten Mal etwas über die von ihm schon 20 Jahre früher entdeckten neuen Rechnungsmethoden vortrug, freilich in ganz geometrischem Gewand, aber wie wir heute anerkennen müssen, auch schon mit grosser Schärfe. Er hatte die geometrische Einkleidung absichtlich gewählt, weil sie ihm allein die nöthige Strenge zu versprechen schien und damit, wie 1715 einer seiner Freunde erklärte: „the system of the heavens be founded upon good geometry". Gefunden aber hatte er die Resultate, wie er selbst 1722 angab, auf analytischem Wege; jedoch sagte er: „scriptus est ille liber per synthesin more veterum ut oportuit." Die Folge war, dass sein System sich viel weniger rasch ausbreitete als das Leibnizische, welches durch die grossen Erfolge, die sein Erfinder und die beiden Bernoulli's, Jakob (1654 bis 1705) und Johann (1667—1748), errangen, sowie durch das del'Hopital'sche Lehrbuch „Analyse des infiniment petits" (1696) auf dem Continent in kurzer Zeit bekannt und adoptirt wurde. Bis zum Jahre 1699 war von Prioritätsstreitigkeiten zwischen den Anhängern beider Systeme nicht die Rede, wenn auch die Freunde Newton's wohl nicht mit günstigem Auge das Wachsthum ihres Rivalen betrachtet haben werden. Ein freundlicher brieflicher Verkehr zwischen den beiden grossen Männern, durch Oldenburg vermittelt, hörte schon mit dessen Tode, August 1677, auf. Nur 1693 wechselten die Beiden noch direkt je einen Brief, in welchen sie in den Ausdrücken grösster Hochachtung von einander sprachen. Da veröffentlichte 1699 der Schweizer Resident in London Fatio Duillier eine Schrift über einen mathematischen Gegenstand, in der er behauptet er habe die von ihm angewandten Differentialmethoden 1687 ebenfalls unabhängig gefunden, Newton jedoch die unbedingte Priorität einräumt und dem Urtheil derer, die Newton's Manuscripte und Briefe einsehen könnten die Entscheidung überlassen zu müssen erklärte, ob Leibniz, der zweite Erfinder, von Newton etwas entlehnt habe. Diese Aeusserung gab das Signal zu einem hässlichen Prioritätsstreit, der wesentlich zwischen Leibniz und den Anhängern Newton's geführt wurde. Es kann nicht die Aufgabe sein heute diesen Streit durch alle seine Phasen zu verfolgen; es sei nur erwähnt, dass Leibniz in einer 1705 erschienenen anonymen Recension einer Newton'schen Schrift Newton des Plagiat's beschuldigt in Ausdrücken, die er später anders zu deuten sucht; dass die Royal Society, deren Vorsitzender Newton war, mit dessen Billigung einen parteiisch gefärbten Bericht unter dem Titel: Commertium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de Analysi promota jussu Societatis Regiae in lucem proditum (1713), heraus gab; dass Versöhnungsversuche scheiterten und dass erst mit dem Tode Leibnizens, 1716, dem er seine letzten Lebensjahre sehr verbittert hatte, der Streit einschlief. Später wurde er nur noch in historischen Darstellungen verfolgt, wobei die Franzosen nicht verfehlten auch die Ansprüche von Roberval und

Fermat auf die Erfindung der neuen Rechnung geltend zu machen. Es lässt sich nicht leugnen, dass Newton würdevoller als sein grosser Gegner war, hatte er ja doch auch in der ersten Auflage der Principia ausdrücklich anerkannt, dass Leibniz die nämliche Erfindung gemacht habe wie er. Er sagt dort: „Jn literis quae mihi cum geometra peritissimo G-G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas et Minimas etc. . . . rescripsit vir clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse . . . .“

Auch in der zweiten Auflage der Principia, 1713, findet sich wörtlich dieselbe Stelle wieder und erst in der dritten die nach Newton's Tod erschien, ist sie weggelassen.

Heute dürfte die Meinung feststehen, dass die Differential- und Integral-Rechnung von Newton und von Leibniz unabhängig gefunden worden ist, dass Newton ohne Zweifel der erste Erfinder ist; dass Leibniz seinerseits selbständig diese Rechnungsart entdeckte, angeregt durch die von Newton ihm mitgetheilten Resultate, aber ohne von Newton's Methoden etwas zu wissen; und dass endlich Leibniz die Priorität der ersten Veröffentlichung hat.

Worin besteht nun der Fortschritt den Newton und Leibniz gegenüber ihren Vorgängern gemacht haben? Bei den letzteren handelte es sich überall entweder, wie beim Tangenten-Problem, darum den Quotienten von 2 unendlich kleinen Grössen zu bestimmen, von welchen die Eine von der Anderen abhängt; oder, bei den Aufgaben über Quadratur und den ähnlichen, um die Bestimmung einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen. Für bestimmte einfache Fälle waren diese Aufgaben von den Fermat, Roberval, Barrow und Anderen gelöst worden. Leibniz als der Erste gab nicht nur eine Reihe von weiteren Beispielen an, sondern zeigte auch Regeln auf, die erlaubten complicirtere Fälle auf einfachere zu reduziren, wenn gleich auch er noch nicht imstande war alle Fälle zu beherrschen. Worin er den Fortschritt erblickt sagt er selbst im Titel seiner Abhandlung: Methodus . . . . . quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur. Er nannte die unendlich kleine Grösse, die stets als Zuwachs einer anderen erscheint, das Differential dieser Letzteren und bezeichnete es durch ein vorgesetztes d. Und eine seiner Aufgaben — die Differentialrechnung — ist nun die das Differential einer Funktion zu bestimmen d. h. den unendlich kleinen Zuwachs, den diese erfährt wenn die Variable sich unendlich wenig ändert. Für die umgekehrte Aufgabe: aus der unendlich kleinen Zunahme die Funktion zu finden, die, wie Leibniz bemerkt, mit der Aufgabe der Quadratur identisch ist, und die man heute Integration nennt, bezeichnet er die gesuchte Funktion, das sog. Integral mit einem vorgesetzten langgezogenen S. Dieser Theil heisst Integralrechnung. Die Einführung dieser der Sache angemessenen Bezeichnung und die Aufstellung von Regeln, wie mit diesen Zeichen zu operiren ist, ist ein Hauptverdienst von Leibniz. Es kann auffallend erscheinen, dass dem so ist; aber in der Mathematik ist die Einführung eines besonderen Zeichens für einen neuen Begriff stets dann am Platze, wenn dieser Begriff oft wiederkehrt und einem wesentlichen Bedürfniss entspricht. Da weiter in der Mathematik das Operiren mit den Zeichen, das bis zu einem gewissen Grade mechanisch wird — manchmal nur zu sehr — an die Stelle des Operirens mit den Begriffen selbst tritt, da die immer wiederholten Denkoperationen mit den Begriffen, durch Rechenoperationen mit den Zeichen ersetzt werden, so sieht man ein, wie wichtig ein passend gewähltes Zeichen ist und dass, für den ökonomischen Zweck der möglichsten Arbeitsersparniss, den es erfüllen soll, seine Wahl nicht gleichgültig ist. Freilich ist eine Aufgabe nicht dadurch gelöst, dass man für die Lösung ein Zeichen einführt; dies ist besonders in der Integralrechnung der Fall, wo eben die Hauptschwierigkeit im Auswerthen des Zeichens liegt.

Ueber die Grundlagen seiner Rechnung war Leibniz sich jedoch keinesweges klar und er kann sich auch gegen die Angriffe Nieuwentijts nur mühsam vertheidigen. Nirgends sagt er was seine unendlich kleinen Grössen sind; sie sollen kleiner sein als jede angebbare Grösse und doch nicht Null, was ein offenbarer Wiederspruch ist; sie dürfen nicht Null selbst sein, weil man mit ihnen dividirt, während ja eine Division mit Null keinen Sinn hat. Oder Leibniz setzt eine

Fläche aus unendlich schmalen Streifen zusammmen, womit wieder angenommen ist, dass diese Streifen eine messbare Breite besitzen, und vernachlässigt andererseits die unendlich kleinen Grössen neben endlichen, ohne Angabe von Gründen. Es ist die Ansicht ausgesprochen worden, dass Leibniz die unendlich kleinen Grössen mit seinen Monaden indentificirt habe und man kann dieser Ansicht einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit nicht absprechen, wenn freilich auch keine direkte Aeusserung von Leibniz darüber vorliegt. Noch unklarer liegt die Sache bei den Differentialen höherer Ordnung, die entstehen, wenn man das unendlich kleine Differential wieder um ein unendlich Kleines abändert. Die Leibniz'sche Bezeichnungsweise ist zudem hier nicht ganz angemessen; sie ist zwar adoptirt und wird auch heute stets noch gebraucht, gibt aber leicht zu Fehlern Veranlassung. Nichtsdestoweniger fand die Leibniz'sche Theorie rasche Verbreitung, weil sie einem allgemein gefühlten Bedürfniss entgegen kam und einen Schritt vorwärts that, der bis dahin vergeblich versucht worden war; weil ihre Rechengesetze, ihr Algorithmus, wie man mit Benutzung des Beinamens eines arabischen Mathematikers zu sagen pflegt, bequem waren und weil die Tendenz damals mehr auf Erweiterung der Wissenschaft, als auf ihre Begründung gerichtet war. In dieser theoretischen Hinsicht war Newton Leibniz überlegen. Newton operirt ebenfalls mit Verhältnissen unendlich kleiner oder vielmehr wie er sagt, verschwindender Grössen und mit Summen solcher Grössen; aber er erklärt ausdrücklich, dass er darunter verstanden wissen wolle: die Grenzwerthe, welchen sich die Quotienten der verschwindenden Grössen, oder die Summen solcher Grössen, immer mehr und mehr annähern, je kleiner diese Grössen werden. Dieser Begriff der Grenze, ist eine der wichtigsten Neuerungen die bei Newton auftreten. Ob derselbe in dieser Verwendung schon vor Newton vorkömmt konnte ich nicht finden. Mit seiner Hülfe und mit Hülfe von ein paar Sätzen über ihn, die Newton in seinen Principia entwickelt, können nun die Beweise durch reductio ad absurdum vermieden, oder vielmehr durch einen einzigen ersetzt werden, der den, an sich klaren, Satz erhärtet, dass eine und dieselbe Veränderliche sich nicht gleichzeitig zwei verschiedenen Werthen annähern kann. In dem früheren Beispiel würde man dann etwa so schliessen: Die Fläche des eingeschriebenen Polygon's ist die Veränderliche, die von der Seitenzahl des Vielecks abhängt und sich mit wachsender Seitenzahl als Grenze dem Kreisinhalt einerseits, andrerseits dem Inhalt des früher genannten Dreiecks nähert, ohne je ihnen gleich zu werden; folglich müssen die Flächeninhalte von Kreis und Dreieck gleich gross sein. Auf Grundlage der erwähnten Sätze geht Newton in den Principia rein geometrisch vor. Es gelingt ihm mit grösstem Scharfsinn und in meisterhafter Weise die Ableitung der Kepler'schen Gesetze, die Theorie der Planetenbewegung, die Erklärung der hauptsächlichsten Störungserscheinungen der Mondbewegung, die Theorie der Ebbe und Fluth und anderes mehr zu behandeln.

Die Bestimmung der Grenze, welcher sich eine Grösse nähert, ist aber nicht immer sehr einfach und naheliegend, und sie wird nun erleichtert durch den Algorithmus, das Formelsystem der Rechnung, die Newton als Fluxionsrechnung bezeichnete und die mit der Leibniz'schen Differentialrechnung im Wesen identisch ist. Die Veränderlichen denkt sich Newton als durch eine stetige Bewegung oder, so zu sagen, ein Fliessen erzeugt und sucht nun die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen oder, genauer gesagt, die Geschwindigkeit mit der die Funktion sich ändert wenn die Geschwindigkeit der Aenderung der Variablen gegeben ist. Er nennt diese Geschwindigkeiten Fluxionen, die Grössen selbst Fluenten, indem er sich an Begriffe anschliesst, die schon vorher durch Barrow aufgestellt waren. Die Aufgaben: zu gegebenen Bewegungen die Geschwindigkeiten zu finden, und umgekehrt Bewegungen zu finden, deren Geschwindigkeiten vorgeschriebene Eigenschaften besitzen, sind nun, in mechanischen Begriffen ausgesprochen, die Probleme, welche Newton in seiner Fluxionsrechnung — Method of Fluxions and infinite series etc. — behandelt; die freilich erst 10 Jahre nach seinem Tode, 1736, publicirt wurde, wenn sie auch schon 1671 geschrieben war. Auch der Begriff der Fluxion von einer Fluxion kommt bei Newton vor, d. h. die Geschwindigkeit mit der die Geschwindigkeit sich ändert, oder, wie wir heute sagen, die Beschleunigung. Da schon Galilei erkannt hatte, dass die Kräfte durch die Beschleunigungen gemessen werden, so kommt die Aufgabe, die Bewegungen bei gegebenen Kräften zu finden, hinaus auf die andere, die Fluenten zu finden, wenn die Fluxionen gegeben sind oder wenigstens Beziehungen zwischen den Fluenten und Fluxionen vorliegen. Entkleidet man Newton's Betrachtungen ihres mechanischen und geometrischen Gewandes so sind sie, rein analytisch genommen und von der Begründung abgesehen, mit Leibnizens Methode identisch und nur der Bezeichnung nach verschieden. Freilich ist auch Newton in der rein analytischen Begründung und Auseinandersetzung seiner Theorie nicht ganz klar und einem kritischen Auge fallen manche Widersprüche auf. Die geometrische Einkleidung die Newton in den Principia gewählt hatte, und die erst 50 Jahre später durch eine analytische ersetzt wurde, hatte aber gewisse Nachtheile zur Folge. Derartige geometrische Ueberlegungen zeichnen sich nämlich dadurch aus, dass sie einer sicheren Methodik ermangeln, dass vielmehr eine jede Aufgabe eine neue Behandlung erheischt, deren Erfindung immer wieder eine besondere Anstrengung des Talents erfordert. Wie sich ja auch schon in den Schulen die mathematische, besonders aber die geometrische, Begabung in der Lösung der geometrischen Aufgaben zeigt, die sich eben nur bis zu einem gewissen Punkte lehren lässt. Während man, nach einem Ausspruch Jacobi's, durch Rechnen zu einem Gedanken kommen kann, d. h. durch eine mechanisch errechnete Lösung einer Aufgabe den Weg zu ihrer wahren Behandlung finden kann, giebt es für die Geometrie kein derartiges Hülfsmittel. Unter den Händen eines so genialen Mannes wie Newton leistete die geometrische Methode sehr viel. Bei Geistern zweiten Ranges war sie im Grossen und Ganzen unfruchtbar. Die von Leibniz eingeführte Bezeichnung dagegen und der dazu gehörige Algorithmus war der Sache gut angepasst und hatte jenen mechanischen Charakter, den man beim Rechnen liebt. In Folge dessen verbreitete sie sich rascher und weiter als die Newton'sche. Vielleicht trug dazu auch bei, dass die festländischen Mathematiker, die jene annahmen, den gleichzeitigen englischen, Newton selbst ausgenommen, an Talent überlegen und, wie besonders die beiden Bernoulli's, Aufgaben schwieriger Art zu lösen imstande waren. Heute werden die Newton'schen geometrischen Methoden, wenigstens auf dem Continent, vielleicht über Gebühr vernachlässigt; man zieht das Rechnen vor. Es liegt nahe zu fragen, wer von den Beiden, Newton oder Leibniz, der Grössere war, wenn man nicht nur ihren Antheil an der Erfindung der Infinitesimalrechnung, sondern ihre gesammte Leistung in der Mathematik abschätzt. Ich will in dieser Hinsicht nur das Urtheil eines der grössten Mathematiker dieses Jahrhunderts, Gauss, anführen. Dieser verglich in Gesprächen oft Leibniz und Newton mit einander; er war der Ansicht, dass Leibniz' Verdienste in Bezug auf Mathematik sich nicht entfernt mit denen Newton's vergleichen liessen; ohne Leibniz hohes Talent abzusprechen, tadelte er es, dass er sich zu sehr zersplittert habe. Newton ist der Einzige, dem Gauss in seinen Schriften das Prädikat summus gibt.

In dem Jahrhundert, das auf Newton und Leibniz folgte, war man bemüht mit Hülfe der neuen Rechnungsmethoden Aufgaben aller Art zu lösen. Die erkenntnisstheoretische Seite der Sache wurde vernachlässigt gegenüber dem Wunsche die Wissenschaft zu erweitern. Einer der grössten Mathematiker dieser Epoche, Lagrange, versuchte das unendlich Kleine ganz zu vermeiden, indem er die sog. Ableitungen oder Derivationen aufstellte, die im Grunde mit Newtons Fluxionen identisch sind. Die Bezeichnungen sind, gegenüber den Newton'schen, verbessert, dagegen ist die Grundlage seiner Schlüsse recht anfechtbar; er setzt die Existenz einer gewissen Reihenentwicklung voraus, die durchaus nicht immer möglich zu sein braucht. Die erste tiefere Betrachtung über die Begründung der Rechnung mit unendlich Kleinen lieferte ein Schriftchen von Carnot, dem Kriegsminister der Republik, dem Grossvater des jetzigen Präsidenten Frankreich's: Réflexions sur la métaphysique du caleul infinitésimal (1797), Carnot zeigte, dass man bei der Rechnung mit unendlich kleinen Grössen eigentlich mit Hülfsgrössen rechnet, die noch veränderlich und von welchen die zu suchenden Grössen ganz unabhängig sind. Diese Hülfsgrössen unterscheiden sich von den Gesuchten um Grössen, die man schwer genau angeben, die man aber schätzen und von welchen man beweisen kann, dass sie beliebig klein zu machen sind. Bei der üblichen Rechnungsweise, mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen gegen die Endlichen, begeht man dann immer mehrere Fehler, die sich aber, und das ist das Hauptergebniss Carnot's, im Schlussresultat compensiren. So sagt man z. B. in dem früheren Beweise: der Kreisinhalt und der Inhalt des Dreiecks aus Kreisumfang und Radius sind sicher ganz unabhängig von der beliebigen und veränderlichen Seitenzahl eines dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Vieleck's. Dessen Inhalt aber kann, wie sich beweisen lässt, sowohl dem Kreisinhalt als dem Dreiecksinhalt durch Vergrösserung der Seitenzahl beliebig nahe gebracht werden oder, wie man sagt, er unterscheidet sich von ihnen nur unendlich wenig. Setzt man nun einerseits den Inhalt des Kreises, andererseits den des Dreiecks, jenem Vielecksinhalt gleich, so begeht man Fehler; aber wenn man daraus schliesst, dass sie unter sich gleich sind, so heben sich die Fehler auf. Der hierbei nöthige Schluss ist ein für allemal zu machen und dient in Verbindung mit einigen Regeln zum sicheren Rechnen mit den „unvollkommnen Gleichungen“ (équations imparfaites), wie Carnot sie nennt. Hätte Archimedes versucht seine apagogischen Beweise in ein System zu bringen, so hätte er auf denselben Satz kommen müssen, der auch der Hauptsatz von Newton's Grenzmethode ist. Der französische Mathematiker Cauchy (geb. 1789, gest. 1857) war es, der um das Jahr 1820 zuerst die Differential- und Integral-Rechnung streng begründete, indem er auf die schon von Newton angewandten Grenzwerthe zurückging. Ihre Benützung gibt das Mittel an die Hand jede Unklarheit aus der Theorie zu bannen und sie in voller Schärfe durchzuführen. Sie gestattet auch die Lehre von den Differentialen auf eine feste Grundlage zu stellen, die von der Carnot'schen verschieden ist und vor ihr manche Vortheile voraus hat. Diese Cauchy'sche Ansicht ist übrigens mit einer Leibniz'schen identisch, die sich in dessen Manuskripten fand, aber erst 1846 bekannt geworden ist.

Die Analysis allein würde die Betrachtung der unendlich kleinen Grössen nicht erfordern, man käme mit der Grenzmethode aus. Weil aber die Anwendungen der Mathematik auf Geometrie, Mechanik und Physik ohne Benützung der Infinitesimalrechnung zu weitläufig würden, so kann man sie auch im Unterricht nicht umgehen und wählt dann für ihre Begründung, je nach Geschmack, die Cauchy'sche oder Carnot'sche Methode.

Die Probleme der Differential- und Integralrechnung sind heute noch dieselben wie vor 200 Jahren: sie lehrt wie man aus den Fluenten die Fluxionen findet und aus diesen jene; ferner wie man aus Beziehungen zwischen den Fluxionen auf die zwischen den Fluenten zurückschliessen kann. Diese Aufgabe, die man heute Integration der Differentialgleichungen unennt, ist eine sehr schwierige, ja in vielen Fällen noch unlösbare. Uebersetzt man sie für einen speziellen Fall in ein Problem aus der Mechanik so heisst dieses, bei gegebenen Geschwindigkeiten oder Kräften die Bewegungen zu finden. Wenn die Geschwindigkeiten oder Kräfte immer in ihrer Abhängigkeit von der Zeit direkt gegeben wären, wäre es nicht sehr schwierig die Aufgabe zu lösen. Gewöhnlich aber ist nur das Gesetz bekannt, das die Kräfte mit der Lage der bewegten Körper verknüpft, die ja selbst erst gesucht werden soll; und dieser Umstand ist es, der jene Aufgabe, welche die ganze mathematische Physik in sich begreift, zu einer so sehr complicirten macht, die nur in wenigen Fällen in der wünschenswerthen Weise zu lösen ist.

Das Material der Wissenschaft, die Abhängigkeitsgesetze, welche man betrachtet, haben sich natürlich im Laufe der Zeit wesentlich vermehrt. Der Begriff der Function hat sich immer mehr verallgemeinert, so sehr, dass, wie neuere Beispiele erkennen lassen, die Begriffe der Infinitesimalrechnung gar nicht mehr anwendbar erscheinen. Man hat Curven, wenn man diesen Namen noch gebrauchen darf, construirt bei welchen eine Tangente nicht mehr existirt, die keine anschauliche Darstellung mehr zulassen, die aber freilich auch, glücklicherweise, in den Anwendungen nicht vorkommen. Die theoretische Einsicht, dass nicht jedes denkbare Abhängigkeitsgesetz auch einer anschaulichen Darstellung in geometrischer Form fähig ist, ist gewiss sehr werthvoll. Natürlich entfernt sich aber mit solchen Speculationen abstracter Natur die Mathematik von den Anwendungen auf andere Wissenszweige. Während noch am Anfang und bis in die Mitte dieses Jahrhunderts unsere Wissenschaft von der Astronomie und der Physik mächtige Anregungen empfing, ist in den letzten vierzig Jahren die Einwirkung jener Naturwissenschaften eine immer geringere geworden. Und besonders bei uns Deutschen ist die Abstraction weiter getrieben worden als bei andern Nationen. Ob zum Vortheil oder zum Nachtheil für die Entwickelung der Wissenschaft kann ein Mitlebender nicht entscheiden.

Ich sagte schon vorhin, dass die Infinitesimalrechnung für die Anwendungen der Mathematik auf Physik unentbehrlich sei. In der That wäre es nämlich ohne die Begriffe des unendlich Kleinen unmöglich die Naturgesetze einfach auszusprechen. Zwei Körper z. B. ziehen sich an und ertheilen sich dadurch gegenseitig complicirte Bewegungen, deren Erforschung und Formulirung in einem Gesetze recht umständlich wäre. Man bemerkt aber, dass, je kleiner die Körper sind, um so einfacher sich das Wesentliche der Bewegungen beschreiben lässt, dass man von den Drehungen absehen darf und nur die Verschiebungen ins Auge zu fassen braucht. Kurz man kommt zu dem Resultate, dass zwei unendlich kleine Körper nach dem so einfachen Newton'schen Gesetze aufeinanderwirken. Man begeht bei dessen Anwendung Fehler, indem man von einer Entfernung und einer Verbindungslinie spricht, während doch noch in jedem der Massentheilchen unzählig viele Punkte vorhanden sind und also auch unzählig viele Entfernungen und Verbindungslinien möglich wären. Benutzt man aber diese Anschauung um die Wirkung von zwei endlichen Körpern aufeinander zu untersuchen, so heben sich nach dem Carnot'schen Satze diese Fehler wieder auf. Aehnlich ist dies bei der Wirkung von zwei elektrischen Strömen aufeinander, die auch nur schwer in ein alle Fälle umfassendes Gesetz zu zwingen wäre, während das daraus abgeleitete, für unendlich kleine Stromstücke geltende, Ampère'sche Gesetz sehr einfach ist. Wie die beiden hier erwähnten so sind alle unsere Naturgesetze Infinitesimalgesetze, die Eigenschaften unendlich kleiner Dinge aussprechen. Will man die beobachtbaren Erscheinungen erklären so muss man von dem unendlich Kleinen aufs Endliche schliessen, und dazu braucht man die Integralrechnung.

Indem die Erfindung von Leibniz und Newton aber erst eine mathematische Physik möglich gemacht hat gab sie auch das Mittel zur Schaffung einer wissenschaftlichen Technik, denn diese ist nichts anderes als Anwendung der mathematischen Physik auf die Praxis des Ingenieurs und Maschinenbauers. Leider ist die Theorie noch nicht soweit um die Probleme der Praxis mit Genauigkeit lösen zu können. Man muss sich mit Annäherungen begnügen. Immerhin geben diese aber dem construirenden Techniker wichtige Fingerzeige wie und wo er an Material sparen kann, um eine leichte und doch möglichst stabile Construction zu erzielen, oder wie eine Feder, ein Gegengewicht anzubringen ist, um den ruhigen Gang einer Maschine zu sichern. Und wenn jetzt um nur Einiges anzuführen, Bauwerke errichtet werden können wie der Eiffelthurm oder die Brücke über den Firth of Forth, wenn wir mit unsern Locomotiven so rasch und sicher fahren können, wenn wir im Stande sind Kabel auf den Meeresboden zu legen und durch sie auf Tausende von Kilometern zu telegraphiren, so sind dies Triumphe der Technik, welche zum guten Theil nur durch die Differential- und Integralrechnung möglich geworden sind.

Dies zeigt aber, dass die Infinitesimalrechnung nicht nur eine rein theoretische Speculation ist, dass ihre Erfindung nicht nur dem Scharfsinn der Mathematiker unzählige neue Probleme liefert, sondern dass ihr auch ein mächtiger Einfluss auf die Gestaltung des modernen Lebens zugeschrieben werden muss.