Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Mayer, Adolph** (1839–1908)

Titel: **Die Gleichgewichtsbedingungen reibungsloser Punktsysteme und die verschiedenen Arten des Gleichgewichts**

Quelle: Vorangestellt dem Verzeichnis der Promotionen in der phil. Fakultät der Universität Leipzig 1898-1899, Leipzig : Edelmann, 1899. S. 3–23

/17

EX ORDINIS PHILOSOPHORUM MANDATO

RENUNTIANTUR

PHILOSOPHIAE DOCTORES

ET

ARTIUM LIBERALIUM MAGISTRI

RECTORE MAGNIFICO

ALBERTO HAUCK

THEOLOGIAE ET PHILOSOPHIAE DOCTORE THEOLOGIAE PROFESSORE P. O.

DECANO

ADOLPHO MAYER

PHILOSOPHIAE DOCTORE MATHESEOS PROFESSORE P. O.

PROCANCELLARIO

CAROLO LAMPRECHT

PHILOSOPHIAE DOCTORE HISTORIAE PROFESSORE P. O.

INDE A DIE PRIMO MENSIS NOVEMBRIS A. MDCCCLXXXXVIII USQUE AD DIEM ULTIMUM MENSIS OCTOBRIS A. MDCCCLXXXXIX CREATI.

Praemissa est Adolphi Mayer dissertatio: Die Gleichgewichtsbedingungen reibungsloser Punktsysteme und die verschiedenen Arten des Gleichgewichts.

LIPSIAE

TYPIS A. EDELMANNI, TYPOGR. ACAD.

Die Gleichgewichtsbedingungen reibungsloser Punktsysteme und die verschiedenen Arten des Gleichgewichts.

Der vorliegende Aufsatz macht durchaus keinen Anspruch darauf, irgend welche neue Untersuchungen vorzuführen, er bezweckt vielmehr nur, etwas genauer als sonst üblich auf die Gleichgewichtsbedingungen und damit zugleich auf solche Punkte einzugehen, die in den Lehrbüchern meistens bei Seite gelassen werden. Hierzu rechne ich vor allem die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für Punktsysteme, die dem Zwange von Bedingungsungleichungen unterworfen sind, eine Aufgabe, deren Lösung Ostrogradsky's klassischer Abhandlung „Considérations générales sur les momens des forces"*) zu verdanken ist. Auch die rein statischen Ueberlegungen, die man im Anschluss an das Maupertius'sche Gesetz der Ruhe über die verschiedenen Arten des Gleichgewichts und ihre Kriterien angestellt hat, sind, wenngleich sie allerdings diese Fragen noch nicht ganz einwurfsfrei erledigen, doch viel zu anschaulich und lehrreich, als dass ihre Uebergehung gerechtfertigt erscheinen könnte. Von wem dieselben ursprünglich herrühren, ist mir nicht bekannt. Jedenfalls finden sie sich theilweise bereits in Fourier's grundlegendem Mémoire sur la statique, Paris 1800, das überhaupt das Princip der virtuellen Verrückungen zum ersten Male in seiner vollen Allgemeinheit sowohl ausgesprochen als auch streng bewiesen hat. In der Begründung dieser Kriterien der Stabilität und Instabilität des Gleichgewichts schliesse ich mich dem vortrefflichen Werke von E. J.

*) Mém. d. Petersb. Akademie t III. Sc. math. et phys. I.

Routh an, A treatise on analytical Statics, Cambridge, University press, 1891. Das einzige Neue im Folgenden dürfte somit höchstens nur in der Darstellung und in der Anordnung des Stoffes zu suchen sein. —

§ 1.

Die statischen Grundlagen.

Es sei vorgelegt ein System irgendwie mit einander verbundener und in ihrer Beweglichkeit irgendwie beschränkter materieller Punkte $p_1, p_2, \ldots p_n$, an denen gegebene Kräfte wirken. Wir nehmen an, dass die Verbindungen und Beschränkungen des Systems seiner Bewegung keinerlei Reibung entgegensetzen, und betrachten dasselbe in irgend einer bestimmten möglichen Lage, in der, bezogen auf ein beliebiges, im Raume festes rechtwinkliges Axensystem allgemein der Punkt p_h die Coordinaten x_h, y_h, z_h, und die an ihm angreifende Kraft die Componenten X_h, Y_h, Z_h besitze. Ich nenne diese Lage des Systems kurzweg die Lage x_h, y_h, z_h, und bezeichne durch

$$x_h + \delta x_h, \; y_h + \delta y_h, \; z_h + \delta z_h$$

die Coordinaten desselben Punktes p_h in irgend einer andern, der betrachteten unendlich nahen Lage, nach welcher das Punktsystem von dieser aus gelangen kann, ohne seine Bedingungen zu verletzen. Jede Verrückung, welche das System aus der Lage x_h, y_h, z_h in eine solche Nachbarlage bringt, wird eine virtuelle Verrückung des Systems aus der ersten Lage genannt, und dabei werden die Coordinatenvariationen δx_h, δy_h, δz_h so klein angenommen, dass schon ihre Quadrate und die Producte zu zweien zu vernachlässigen sind.

Unter diesen Festsetzungen sagt das Princip der virtuellen Verrückungen aus:

I. Damit das Punktsystem in der Lage x_h, y_h, z_h im Gleichgewicht sei, ist nothwendig und hinreichend, dass es keine virtuelle Verrückung des Systems aus dieser Lage gebe, für welche die Summe der virtuellen Momente aller gegebenen Kräfte, d. h. die Summe:

$$S \equiv \sum_1^n h\,(X_h\,\delta x_h + Y_h\,\delta y_h + Z_h\,\delta z_h) > 0$$

wäre.

Und zwar gründen sich die meisten strengen Beweise dieses Fundamentaltheorems der Statik auf den Satz:

II. Die gegebenen Kräfte X_h, Y_h, Z_h können dem Punktsystem aus der Ruhe in der Lage x_h, y_h, z_h niemals eine solche virtuelle Verrückung beibringen, durch die $S \leqq 0$ würde. —

Die Verbindungen und Beschränkungen des Systems lassen sich nun stets entweder durch Gleichungen, oder aber durch Ungleichungen zwischen den Coordinaten der Punkte analytisch ausdrücken.

Jenachdem z. B. die beiden Punkte p_1 u. p_2 durch eine starre Gerade, oder durch einen unausdehnbaren Faden von der Länge l verbunden sind, hat man zwischen ihren Coordinaten die Bedingungsgleichung:

$$f \equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0,$$

oder aber die Bedingungsungleichung:

$$f \leqq 0.$$

Desgleichen, wenn der Punkt p_1 gezwungen ist, auf einer festen Kugelfläche vom Radius r_1 zu bleiben, deren Mittelpunkt im Coordinatenanfang liegt, so sind seine Coordinaten an die Bedingungsgleichung gebunden:

$$f_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r_1^2 = 0.$$

Soll er dagegen nur innerhalb, resp. nur ausserhalb dieser Kugelfläche bleiben, so tritt dafür die Bedingungsungleichung ein:

$$f_1 \leqq 0, \text{ resp. } -f_1 \leqq 0.$$

§ 2.

Systeme mit blossen Bedingungsgleichungen.

Die Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen gestaltet sich am Einfachsten, wenn das Punktsystem in seinen Verbindungen und Beschränkungen nur durch Bedingungsgleichungen definiert ist. Es ist daher naturgemäss, mit diesem Falle zu beginnen.

Seien also die Coordinaten der n Punkte den r Bedingungsgleichungen unterworfen:

$$1)\quad f_\varrho = 0,\ \varrho = 1, 2, \cdots r,$$

in denen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ gegebene reguläre analytische Functionen der $3n$ Coordinaten x_h, y_h, z_h bedeuten, und natürlich $r < 3n$ sein muss.

Da diese Bedingungsgleichungen des Systems selbstverständlich von einander unabhängig sein sollen, so giebt es unter den $3n$ Coordinaten x_h, y_h, z_h immer r solche, die durch die Gleichungen 1) als Functionen der übrigen definiert werden, oder in Bezug auf welche die Functionaldeterminante der r Functionen $f_1, f_2, \ldots f_r$ nicht identisch Null ist. Wir denken uns überdies die Gleichungen 1) in einer solchen Form zu Grunde gelegt, dass diese Determinante auch nicht in Folge der Gleichungen 1) identisch verschwindet. Trotzdem kann es unter Umständen doch gewisse Lagen des Systems geben, in denen dieselbe verschwindet. Solche besondere Ausnahmelagen des Systems schliessen wir aber ein für allemal von der Betrachtung aus.*)

Die Gleichungen 1) müssen nun ebensowohl in der Lage x_h, y_h, z_h, als auch in der Lage $x_h + \delta x_h, y_h + \delta y_h, z_h + \delta z_h$ erfüllt sein. Giebt man aber in ihnen den Coordinaten die letzten Werthe, entwickelt nach Potenzen der Variationen und bedenkt, dass nach Festsetzung immer nur die in diesen Variationen linearen Glieder beizubehalten sind, und dass das erste Entwicklungsglied in Folge der ursprünglichen Gleichungen be-

*) Sie dürften übrigens auch von selbst unmöglich werden, sobald man die materiellen Punkte nicht als blosse geometrische Punkte, sondern als unendlich kleine starre Körper auffasst. Im Falle eines einzelnen Punktes z. B., dem eine feste Curve vorgeschrieben ist, entsprechen sie der Annahme, dass der Punkt sich gerade an einer Curvenspitze befindet; in eine solche aber kann er gar nicht wirklich gelangen, solange man ihn als einen kleinen Ring betrachtet, der auf der festen Curve hingleiten kann. Andrerseits darf man in der Statik die materiellen Punkte eben nicht als blosse geometrische Punkte ansehen, sonst würde, wie unmittelbar das Beispiel eines schweren Punktes zeigt, der auf der Spitze einer vertikal stehenden Nadel balanciert, das Princip der virtuellen Verrückungen überhaupt gar nicht mehr allgemeine Geltung besitzen.

reits überall Null ist, so erhält man für die virtuellen Verrückungen des Systems aus der Lage x_h, y_h, z_h die r linearen homogenen Gleichungen:

$$2)\quad \delta f_\varrho \equiv \sum_1^n {}^h \left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial x_h}\delta x_h + \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_h}\delta y_h + \frac{\partial f_\varrho}{\partial z_h}\delta z_h\right) = 0,$$
$$\varrho = 1, 2, \ldots r.$$

Damit also das System in der Lage x_h, y_h, z_h im Gleichgewichte sei, ist nach Satz I nothwendig und hinreichend, dass

$$S \leqq 0$$

werde für alle den Gleichungen 2) genügenden Werthe der $3n$ Variationen δx_h, δy_h, δz_h.

Diese Gleichungen sind aber linear und homogen in den Variationen. Wenn ihnen also das Werthsystem:

$$\delta x_h,\ \delta y_h,\ \delta z_h$$

genügt, so genügt ihnen immer zugleich auch das gleiche und entgegengesetzte Werthsystem:

$$-\delta x_h,\ -\delta y_h,\ -\delta z_h.$$

Wäre aber für das erste Werthsystem $S \neq 0$, sondern nur < 0, so würde es für das zweite nothwendig > 0 sein. Für eine jede Gleichgewichtslage x_h, y_h, z_h des Systems ist also nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung:

$$3)\quad S \equiv \sum_1^n {}^h (X_h\,\delta x_h + Y_h\,\delta y_h + Z_h\,\delta z_h) = 0$$

eine blosse Folge der r Gleichungen 2) sei.

Bei unsern Festsetzungen bestimmen nun diese r Gleichungen stets r von den $3n$ Variationen als lineare homogene Functionen der $3n$-r übrigen und durch Substitution der Auflösungen geht daher die Gleichung 3) über in eine lineare homogene Gleichung zwischen den $3n$-r übrigen Variationen. Diese aber sind ganz willkürlich, also müssen ihre Coefficienten einzeln verschwinden. Das liefert $3n$-r Gleichungen zwischen den gegebenen Kräften X_h, Y_h, Z_h und den Coordinaten x_h, y_h, z_h ihrer Angriffspunkte. Zu ihnen treten ausserdem noch die r gegebenen Bedingungsgleichungen 1) des Systems selbst. Man erhält also zur Bestimmung der Gleichgewichtslagen der n Punkte im Ganzen gerade $3n$ Gleichungen.

Auf diesem direkten Wege ergeben sich aber die Gleichgewichtsbedingungen in einer ganz unsymmetrischen und unübersichtlichen Form. Man wendet daher besser die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode an. Diese multipliciert die Bedingungsgleichungen 2) mit vorläufig unbestimmten Factoren $-\lambda_\varrho$ und addiert sie hierauf zu der Forderung 3). Hierdurch entsteht die Gleichung:

$$4)\quad S - \sum_1^r {}_\varrho\, \lambda_\varrho\, \delta f_\varrho = 0.$$

Hat man dieselbe nach den $3n$ Variationen δx_h, δy_h, δz_h geordnet, so kan man die r Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ so bestimmen, dass die Coefficienten solcher r Variationen verschwinden, die sich aus den r Gleichungen 2) durch die $3n - r$ übrigen ausdrücken lassen. Die Gleichung 4) enthält dann nur noch ganz willkürliche Variationen und daher müssen auch ihre Coefficienten einzeln verschwinden. Auf diese Weise erhält man in allem die folgenden $3n$ Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} X_h = \sum_1^r {}_\varrho\, \lambda_\varrho \dfrac{\partial f_\varrho}{\partial x_h}, \\[2ex] Y_h = \sum_1^r {}_\varrho\, \lambda_\varrho \dfrac{\partial f_\varrho}{\partial y_h}, \quad h = 1, 2, \dots n \\[2ex] Z_h = \sum_1^r {}_\varrho\, \lambda_\varrho \dfrac{\partial f_\varrho}{\partial z_h}. \end{cases}$$

Aus diesen $3n$ Gleichungen folgt durch Multiplication mit $\delta x_h, \delta y_h, \delta z_h$ und Summation umgekehrt wieder die Gleichung 4). Sind sie also erfüllt, so gilt diese Gleichung identisch für alle beliebigen Werthe der Variationen und daher ist alsdann die Gleichung 3) stets eine blosse Folge der Gleichungen 2). Die Gleichungen 5) sind also nothwendig und hinreichend für das Gleichgewicht des Systems in der Lage x_h, y_h, z_h.

Ist daher irgend eine bestimmte Lage des Systems, also irgend ein bestimmtes Werthsystem der $3n$ Coordinaten x_h, y_h, z_h gegeben, welches die Bedingungen 1) erfüllt*), so ist es zum Gleichgewicht des Systems in dieser gegebenen Lage nothwendig und hinreichend, dass die Componenten X_h, Y_h, Z_h der an jedem Systempunkte x_h, y_h, z_h wirkenden Kraft Werthe von der Form 5) besitzen, wobei die Multiplicatoren λ_ϱ ganz beliebige endliche reelle Werthe haben können.

Umgekehrt, wenn nicht die Lage des Systems, sondern die Kräfte, also ihre Componenten X_h, Y_h, Z_h gegeben sind als Functionen der Coordinaten, so hat man, um die Gleichgewichtslagen des Systems unter der Einwirkung dieser gegebenen Kräfte zu finden, die $3n+r$ Gleichungen 5) und 1) nach den $3n + r$ Unbekannten x_h, y_h, z_h, λ_ϱ aufzulösen, und jedes System reeller Auflösungen dieser Gleichungen**) fixiert eine Gleichgewichtslage des Punktsystems.

Im Allgemeinen ist daher auch diese umgekehrte Aufgabe möglich und bestimmt und lässt auch nur eine begrenzte Anzahl von Lösungen zu.

Indess gilt dies nicht für jedes willkürlich gewählte Kräftesystem X_h, Y_h, Z_h. Man kann vielmehr die Kräfte auch so wählen, dass die $3n + r$ Gleichungen 5) und 1) einander widersprechen, oder keine reelle Auflösungen zulassen oder endlich nicht mehr alle $3n$ Coordinaten bestimmen.

So können z. B. zwei materielle Punkte, die durch eine starre Gerade verbunden, sonst aber frei sind, niemals in Ruhe bleiben, wenn die beiden an ihnen wirkenden Kräfte eine Koppel bilden. Gleichgewicht kann sich eben nur dann einstellen, wenn man den Kräften die Möglichkeit lässt, die analytische Form 5) annehmen zu können.

Wenn ferner die gegebenen Kräfte nur von den relativen Lagen der Systempunkte gegen einander abhängen, und auch die Bedingungsgleichungen 1) nur diese relativen Lagen beschränken, so bleiben Kräfte

*) und für welches die Gleichungen 2) noch unabhängig von einander bleiben,

**) , wenigstens jedes solche, welches die r Gleichungen 2) unabhängig von einander lässt, oder was dasselbe besagt, welches den Multiplicatoren λ_ϱ bestimmte endliche Werthe vorschreibt, und Systembedingungen ganz ungeändert, wenn das Punktsystem wie ein starrer Körper parallel mit sich selbst verschoben wird. Kommt daher das System überhaupt in irgend einer Lage zum Gleichgewicht, so ist es nothwendig auch in jeder anderen Lage im Gleichgewicht, nach der man es in unveränderter Form durch Verschiebung parallel mit sich selbst bringen kann, d. h. analytisch ausgedrückt: Wenn sowohl die Kräfte X_h, Y_h, Z_h, als auch die Bedingungsgleichungen 1) nur die Coordinatendifferenzen

$$x_i - x_1,\ y_i - y_1,\ z_i - z_1$$

enthalten, so können auch die Gleichungen 1) und 5) neben den λ's immer höchstens nur diese Differenzen, nicht aber die $3n$ Coordinaten selbst bestimmen.

§ 3

Systeme mit Bedingungsungleichungen.

Sei nun unser Punktsystem in seiner Beweglichkeit nicht mehr durch Bedingungsgleichungen, sondern jetzt durch r Bedingungsungleichungen

$$6)\quad f_\varrho \leqq 0\,,\ \varrho = 1, 2, \cdots, r$$

beschränkt, deren linke Seiten wieder Funktionen von derselben Natur wie in § 2 sein sollen.

Freilich ist in diesem Falle die Anzahl r der Systembedingungen keiner Beschränkung mehr unterworfen und kann unter Umständen auch grösser sein als die Anzahl der Coordinaten der Systempunkte. So kann man sich z. B. nach den Gleichgewichtslagen eines einzelnen materiellen Punktes unter der Einwirkung einer gegebenen Kraft im Innern eines festen hohlen Polyeders fragen. Man braucht sich aber nur mit dem Falle $r \leqq 3n$ zu befassen, weil für $r > 3n$ doch immer höchstens nur $3n$ Systembedingungen auf einmal als Gleichungen erfüllt sein können. Ich setze daher auch im Folgenden immer $r \leqq 3n$ voraus.

Das Punktsystem vermag jetzt alle Lagen x_h, y_h, z_h anzunehmen, die den r Ungleichungen 6) genügen.

Lassen wir aber wieder jedes x_h, y_h, z_h übergehen in:

$$x_h + \delta x_h,\ y_h + \delta y_h,\ z_h + \delta z_h,$$

so erhalten wir für die virtuellen Verrückungen des Systems aus der Lage x_h, y_h, z_h nun nicht mehr die Bedingungen 2), sondern an deren Stelle die Bedingungen:

$$7)\quad f_\varrho + \delta f_\varrho \leqq 0, \varrho = 1, 2, \cdots r.$$

So oft jedoch in der Lage x_h, y_h, z_h die Function $f_\varrho \mp 0$, sondern nur < 0 ist, beschränkt die Bedingung 7) die Coordinatenvariationen in keiner Weise. Denn dann ist für alle beliebigen, nur hinreichend kleinen Werthe dieser Variationen stets auch $f_\varrho + \delta f_\varrho < 0$. Unausdehnbare Verbindungsfäden z. B. hemmen die Beweglichkeit der Punkte gar nicht, solange sie locker bleiben. Eine Beschränkung der Variationen durch die Bedingung 7) tritt vielmehr erst dann ein, wenn $f_\varrho = 0$ ist, und jene Bedingung sich also auf:

$$\delta f_\varrho \leqq 0$$

reduciert.

Keine von denjenigen Systembedingungen 6), die in der Lage x_h, y_h, z_h nicht als Gleichungen, sondern nur als Ungleichungen bestehen, beschränkt demnach die virtuellen Verrückungen des Systems aus dieser Lage. Jede solche Bedingung kommt daher für die Frage, ob diese Lage eine Gleichgewichtslage ist oder nicht, gar nicht in Betracht. Aus diesem Grunde will ich annehmen, dass in der Lage x_h, y_h, z_h sämmtliche Systembedingungen 6) als Gleichungen erfüllt seien, dass also in dieser Lage dieselben r Gleichungen 1) bestehen, die im Falle des vorigen § überhaupt die Systembedingungen darstellten.

Die virtuellen Verrückungen des Systems aus der betrachteten Lage sind dann an die r Bedingungen gebunden:

$$8)\quad \delta f_\varrho \leqq 0,\ \varrho = 1, 2, \cdots, r,$$

und damit das System in dieser Lage im Gleichgewichte sei, ist nach I. also nothwendig und hinreichend, dass der Forderung

$$S \leqq 0$$

genügt werde durch alle Werthe der δx_h, δy_h, δz_h, welche die r Bedingungen 8) erfüllen.

Im Besonderen folgt aber hieraus wieder, dass in jeder Gleichgewichtslage x_h, y_h, z_h die Gleichung 3) eine blosse Folge der r Gleichungen 2) sein muss, was mit dem statischen Princip übereinstimmt, dass ein einmal bestehendes Gleichgewicht nicht gestört werden kann, wenn man die Beweglichkeit des Systems noch weiter beschränkt.

Wir erhalten daher wiederum die früheren $3n$ Gleichungen 5)*). Diese Gleichungen sind aber für das Gleichgewicht jetzt nur nothwendig, nicht zugleich auch hinreichend, vielmehr treten nunmehr noch neue Bedingungen zu ihnen hinzu.

In der That, die durch die Gleichungen 5) identische Gleichung 4) reduciert die Bedingungen $S \leqq 0$ auf:

$$9) \quad \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho \, \delta f_\varrho \leqq 0$$

Es muss also überdies auch noch diese Forderung erfüllt sein für alle Werthe der Variationen, welche die r Bedingungen 8) erfüllen.

Hierzu aber ist, wie man unmittelbar sieht, wenn man nur ein einziges $\delta f_\varrho < 0$, alle übrigen dagegen $= 0$ annimmt, das Bestehen der r Ungleichungen nothwendig und hinreichend:

$$10) \quad \lambda_\varrho > 0, \; \varrho = 1, 2, \cdots, r,$$

in denen das Zeichen $>$ die Gleichheit nicht ausschliessen soll.

Wir sind somit zu dem Resultate gelangt:
Damit das vorgelegte Punktsystem in irgend einer, den Systembedingungen 6) und den Voraussetzungen 1) genügenden Lage im Gleichgewichte sei, ist**) nothwendig und hinreichend, dass zwischen seinen Kräften X_h, Y_h, Z_h und den Coordinaten x_h, y_h, z_h ihrer Angriffspunkte die $3n$ Gleichungen 5) bestehen, und dass

---

*) Im Falle $r = 3n$ bieten sich allerdings die Gleichungen 5) nicht mehr in dieser Weise unmittelbar dar; immerhin aber kann man sie noch zur Definition der Multiplicatoren λ_ϱ benutzen, und dann bleibt alles Weitere ganz so wie im Falle $r < 3n$.

**) , immer abgesehen von den in § 2 ausgeschlossenen irregulären Lagen, überdies in diesen Gleichungen kein Multiplicator λ_ϱ einen negativen Werth habe.*)

Ist also irgend eine solche Lage des Systems gegeben, so liefern die Gleichungen 5) bei willkürlichen positiven Werthen der Multiplikatoren λ_ϱ die allgemeinsten Werthe der Kräfte X_h, Y_h, Z_h, welche das System in der gegebenen Lage im Gleichgewicht erhalten.

Will man umgekehrt bei gegebenen Kräften X_h, Y_h, Z_h wissen, in welchen, den Voraussetzungen 1) entsprechenden Lagen das System im Gleichgewicht ist, so hat man wieder die $3n + r$ Gleichungen 5) und 1) nach den $3n + r$ Unbekannten x_h, y_h, z_h, λ_ϱ aufzulösen. Aber nur ein solches System reeller Auflösungen, in welchem kein λ_ϱ einen negativen Werth erhalten hat oder erhalten kann, bestimmt eine Gleichgewichtslage des Punktsystems.

Existiert dagegen kein System Auflösungen der Gleichungen 5) und 1) von dieser Beschaffenheit, so giebt es auch keine, den Annahmen 1) genügende Lage, in der das Punktsystem unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte in Ruhe bliebe.

In einem solchen Falle bleibt nichts übrig, als von den Voraussetzungen 1) eine oder mehrere fallen zu lassen. Man wird also z. B. die Annahme $f_r = 0$ aufgeben und dementsprechend den Multiplicator $\lambda_r = 0$ setzen, und hierauf zusehen, ob die so reducierten Gleichungen 1) und 5) positive Werthe für die übrig gebliebenen Multiplicatoren λ_ϱ und solche Werthe der Coordinaten liefern, für die f_r nicht > 0 ausfällt. Existieren solche Auflösungen, so liefern sie eine Gleichgewichtslage des Systems, die unabhängig von der Systembedingung $f_r \leqq 0$ zu Stande kommt.

*) Man sieht hieraus, dass bei denselben gegebenen Kräften ein Punktsystem im Allgemeinen weniger Gleichgewichtslagen zulassen wird, wenn es Bedingungsungleichungen $f_\varrho \leq 0$, als wenn es den entsprechenden Bedingungsgleichungen $f_\varrho = 0$ unterworfen ist. So besitzt z. B. das starre Pendel zwei verschiedene Gleichgewichtslagen; in der einen (stabilen) befindet sich die Pendellinse vertikal unter, in der andern (labilen) vertikal über dem Drehpunkte des Pendels. Das Fadenpendel dagegen besitzt nur noch die erste Gleichgewichtslage mit der Linse vertikal unter dem Aufhängungspunkte.

Bestehen endlich die Systembedingungen theils aus Gleichungen und theils aus Ungleichungen, so tritt, wie nach dem Vorhergehenden unmittelbar klar ist, nur der Unterschied ein, dass alsdann bloss die den Bedingungsungleichungen $f_\varrho \leqq 0$ entsprechenden Multiplicatoren λ_ϱ positiv sein müssen, während diejenigen λ_σ, welche den Bedingungsgleichungen $f_\sigma = 0$ zugehören, beliebige Vorzeichen haben dürfen.

§ 4.

Das Maupertius'sche Gesetz der Ruhe.

Die vorhergehenden Sätze nehmen eine besonders einfache Gestalt an, so oft die gegebenen Kräfte des Systems eine Kräftefunction besitzen.

Giebt es nämlich eine Function U der $3n$ Coordinaten, durch welche sich für jedes h die Componenten X_h, Y_h, Z_h der am Punkte x_h, y_h, z_h angreifenden Kraft in der Form ausdrücken lassen:

$$11)\quad X_h \equiv \frac{\partial U}{\partial x_h},\quad Y_h \equiv \frac{\partial U}{\partial y_h},\quad Z_h \equiv \frac{\partial U}{\partial z_h},$$

so wird einfach:

$$S \equiv \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial U}{\partial x_h}\delta x_h + \frac{\partial U}{\partial y_h}\delta y_h + \frac{\partial U}{\partial z_h}\delta z_h\right) \equiv \delta U.$$

Ist daher das Punktsystem nur den Bedingungsgleichungen 1) unterworfen, so ist es nach § 2 für das Gleichgewicht desselben unter dem Einfluss der gegebenen Kräftefunction U nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung

$$\delta U = 0$$

eine blosse Folge der r Bedingungsgleichungen 2) sei.

Andrerseits weiss man aus der Differentialrechnung, dass diese Forderung zugleich auch die erste nothwendige Bedingung ist, welche die Werthe der $3n$ Variabeln x_h, y_h, z_h erfüllen müssen, wenn sie unter allen, den Bedingungsgleichungen 1) genügenden Werthen solche sein sollen, für welche die Function U einen grössten oder kleinsten Werth erreicht.

Die Bedingung ist nur nothwendig, nicht zugleich auch hinreichend, d. h. der Werth, den U für ein solches Werthsystem ihrer Variabeln annimmt, braucht noch nicht nothwendig ein grösster oder kleinster unter allen den Werthen zu sein, die diese Function unter den Bedingungen 1) anzunehmen vermag. Nennen wir aber einen Werth von U, der, ohne ein wirkliches Maximum oder Minimum zu sein, doch Werthen der Variabeln entspricht, die dieser ersten Bedingung genügen, einen stationären Werth von U, so können wir sagen:

III. Die Gleichgewichtslagen eines, nur durch Bedingungsgleichungen beschränkten Punktsystems, dessen Kräfte eine Kräftefunktion besitzen, sind unter allen möglichen Lagen des Systems die einzigen regulären Lagen, in denen die Kräftefunction ein Maximum oder ein Minimum oder stationär wird.

Sind ferner die Verbindungen und Beschränkungen unseres Punktsystems durch die r Ungleichungen 6) definiert, und soll dasselbe unter der Einwirkung der gegebenen Kräfte 11) in einer solchen Lage x_h, y_h, z_h im Gleichgewicht sein, die den Voraussetzungen 1) entspricht, so ist nach § 3 hierzu erforderlich und genügend, dass alle Coordinatenvariationen, welche die r Bedingungen 8) erfüllen, zugleich auch der Forderung genügen:

$$12) \quad \delta U \leqq 0.$$

Auch diese Gleichgewichtsbedingung aber lässt sich ganz ähnlich deuten, wie die für ein System mit blossen Bedingungsgleichungen. Sie bietet sich nämlich auch bei der Aufgabe dar:

Unter allen Werthen der $3n$ Variabeln x_h, y_h, z_h, welche die r Bedingungen 6) erfüllen, diejenigen zu finden, für welche die gegebene Funktion U einen grössten Werth annimmt, und zugleich jedes $f_\varrho = 0$ wird.

Um diese Aufgabe soweit zu lösen, als es für unsern Zweck erforderlich ist, mögen jetzt x_h, y_h, z_h eben solche Werthe der Variabeln bezeichnen, für welche U ein Maximum von der verlangten Natur erreicht. Ueberdies verstehe ich unter den δx_h, δy_h, δz_h nunmehr beliebige endliche reelle Grössen, unter ε dagegen eine hinreichend kleine positive Zahl. Bedeuten dann $U(\varepsilon)$ und $f_\varrho(\varepsilon)$ die Werthe, welche die Functionen U und f_ϱ erhalten, wenn jedes

$$x_h,\ y_h,\ z_h \text{ mit } x_h + \varepsilon\delta x_h,\ y_h + \varepsilon\delta y_h,\ z_h + \varepsilon\delta z_h$$

vertauscht wird, so ergiebt sich durch Entwicklung nach dem Taylor'schen Theorem für die betrachteten Werthe x_h, y_h, z_h die Bedingung, dass

$$13)\quad U(\varepsilon) - U \equiv \varepsilon\delta U + \varepsilon^2 R < 0$$

sein muss für alle Werthe der δx_h, δy_h, δz_h, welche mit den r Bedingungen verträglich sind:

$$f_\varrho(\varepsilon) \equiv \varepsilon\delta f_\varrho + \varepsilon^2 R_\varrho \leqq 0,\ \varrho = 1, 2, \ldots r,$$

wo selbstverständlich $\varepsilon^2 R$ und $\varepsilon^2 R_\varrho$ die Reste der Taylor'schen Entwicklungen repräsentieren.

Dividiert man aber durch die positive Zahl ε, so reduciert sich diese Forderung darauf, dass

$$\delta U + \varepsilon R < 0$$

sein muss, so oft jedes

$$\delta f_\varrho + \varepsilon R_\varrho \leqq 0$$

ist, und diese Bedingung muss erfüllt sein, wie klein auch die positive Zahl ε werden mag. Lässt man daher ε sich der Grenze Null nähern, so sieht man, dass

$$\delta U < 0$$

sein muss unter den r Bedingungen:

$$8)\quad \delta f_\varrho \leqq 0,\ \varrho = 1, 2, \ldots r.$$

Als lineare homogene Function der δx_h, δy_h, δz_h kann aber δU nicht für alle den Gleichungen

$$\delta f_\varrho = 0$$

genügenden Werthe dieser Grössen < 0 bleiben, es muss daher im Besondern $= 0$ werden, so oft man jedes $\delta f_\varrho = 0$ setzt.

Damit sind wir zu dem Resultat gekommen:

Werthe der $3n$ Variabeln x_h, y_h, z_h, welche unsere Maximums-Aufgabe lösen, müssen nothwendig der Bedingung genügen, dass alle Werthe der δx_h, δy_h, δz_h, welche die r Bedingungen 8) erfüllen, zugleich auch die Bedingung 12) befriedigen.

Diese Bedingung gilt jedoch wohlbemerkt nur für das Maximum, nicht aber zugleich auch für das Minimum der Function U.

Aendern wir nämlich unsere Aufgabe dahin ab, dass U jetzt nicht einen grössten, sondern vielmehr einen kleinsten Werth erreichen soll, so haben wir in der ursprünglichen Bedingung 13) das Zeichen $<$ durch $>$ zu ersetzen. Dieselbe Vertauschung muss also auch in dem Resultate 12) vorgenommen werden. Die Gleichgewichtslagen unseres Punktsystems sind aber eben gerade an die Bedingung

$$\delta U \leqq 0$$

gebunden. Wenn wir daher Werthe von U, die, ohne wirkliche Maxima zu sein, doch solchen Werthen der Variabeln x_h, y_h, z_h entsprechen, welche die nothwendige Bedingung unserer Maximumsaufgabe erfüllen, stationär grösste Werthe nennen, und die entsprechende Bezeichnung auch nach Ersetzung des Maximums durch das Minimum in dieser Aufgabe benutzen, so können wir sagen:

IV. Bei Existenz einer Kräftefunction U sind für ein, auch dem Zwange von Ungleichungen unterworfenes Punktsystem unter allen überhaupt von diesen Ungleichungen beeinflussten regulären Lagen nur diejenigen Gleichgewichtslagen, in denen die Kräftefunction entweder einen wirklich grössten oder auch nur einen stationär grössten Werth erreicht. Eine Lage dagegen, in der U einen wirklichen oder stationären kleinsten Werth annimmt, ist keine Gleichgewichtslage des Systems.

§ 5.

Die verschiedenen Arten des Gleichgewichts.

Der auffällige Unterschied, der bei Existenz einer Kräftefunction U zwischen dem Gleichgewicht von Punktsystemen mit blossen Bedingungsgleichungen und solchen mit Bedingungsungleichungen in den Sätzen III und IV zu Tage tritt, weist schon darauf hin, dass es voraussichtlich für die Natur des Gleichgewichts auch im Falle von blossen

Bedingungsgleichungen nicht gleichgültig sein wird, ob in der Gleichgewichtslage U einen kleinsten oder einen grössten, oder endlich nur einen stationären Werth erreicht.

In der That, wenn man das Punktsystem, ohne seine Bedingungen zu verletzen, aus der Gleichgewichtslage nach irgend einer anderen benachbarten Lage verschiebt, so ändert hierbei die Kräftefunction U stets ihren Werth, vorausgesetzt, dass die Nachbarlage nicht unendlich nahe an der Gleichgewichtslage angenommen wird.*) Bei hinreichender Nähe an der Gleichgewichtslage kann überdies die Nachbarlage nicht wieder eine Gleichgewichtslage des Systems sein.**) Denkt man sich also das System ruhend in die neue Lage gebracht und hier seinen Kräften überlassen, so kann es nicht in Ruhe bleiben und muss sich folglich nothwendig in Bewegung setzen. Man kann aber leicht einsehen, dass die entstehende Bewegung in den Fällen

$$U = Min. \text{ und } U = Max.$$

s. z. s. ganz verschiedene Richtungen einschlägt, während im Falle

$$U = stationär$$

die Anfangsbewegung des Systems aus gewissen Nachbarlagen wie im Falle $U = Min.$, aus anderen wieder wie im Falle $U = Max.$ vor sich geht.***)

Aus Satz II nämlich folgt unmittelbar:

Wird das gegebene Punktsystem ruhend in irgend eine solche Lage gebracht und hier sich selbst überlassen, in der es seine Kräfte nicht in Ruhe lassen, so bringen ihm diese zunächst immer eine solche virtuelle Verrückung bei, für welche die Summe S ihrer virtuellen Momente > 0 ist.

Besitzen nun aber die gegebenen Kräfte des Systems eine Kräftefunction U, so ist $S = \delta U$, und $\delta U > 0$ sagt aus, dass U bei der virtuellen Verrückung einen positiven Zuwachs erfährt, dass es also wächst.

*) Bei unendlich naher Nachbarlage würde die Aenderung der Kräftefunction $= \delta U$ und damit wenigstens im Falle von blossen Bedingungsgleichungen stets $= 0$ sein.

**) Wegen dieser beiden Behauptungen s. jedoch auch p. 22.

***) Wegen des Folgenden vgl. Routh I § 214 u. 215.

Wird daher ein Punktsystem, das unter dem Einfluss einer Kräftefunction U steht, ruhend in eine Lage gebracht, die keine Gleichgewichtslage des Systems ist, so setzt es sich aus dieser Lage stets in der Weise in Bewegung, dass U zunächst wächst.

Dies vorausgeschickt betrachte man nun eine Gleichgewichtslage des Systems, in der U ein Minimum ist (was nach Satz IV eo ipso voraussetzt, dass das System nur Bedingungsgleichungen unterworfen ist). Verschiebt man dann das System aus dieser Gleichgewichtslage nach irgend einer Nachbarlage, so wächst hierbei die Kräftefunction U. Wurde aber das System ruhend in die Nachbarlage gebracht, so beginnt es sich so zu bewegen, dass auch hierbei wieder U wächst. Die entstehende Bewegung muss also anfänglich wenigstens das System noch weiter von der Lage entfernen, in der U einen kleinsten Werth besass. Man nennt daher das Gleichgewicht des Systems in der ursprünglichen Lage labil.

Ist dagegen in der Gleichgewichtslage U ein Maximum, so nimmt es ab, wenn das System nach irgend einer Nachbarlage verschoben wird. Wird es nun aber wieder in dieser bei anfänglicher Ruhe sich selbst überlassen, so fängt es an, sich zu bewegen, und bei dieser Bewegung wächst U zunächst. Das System nähert sich also zunächst jedenfalls wieder der Lage $U =$ Max., und daher wird das dort bestehende Gleichgewicht stabil genannt.

Ist endlich in der Gleichgewichtslage U nur stationär, so giebt es Nachbarlagen, in denen U einen grössern, und wieder andere, in denen es einen kleineren Werth besitzt, als in der Gleichgewichtslage. Man nennt daher in dieser das Gleichgewicht instabil. Denn nach dem Vorhergehenden verhält sich dasselbe labil gegenüber allen Verrückungen nach Nachbarlagen mit grösseren, und stabil gegen Verrückungen nach Nachbarlagen mit kleineren Werthen von U, und lässt sich daher im Besonderen stabil machen, so oft man durch Einschaltung passender neuer Verbindungen oder Beschränkungen dem System die ersten Verrückungen abzuschneiden vermag.

Da bei Systemen mit Bedingungsungleichungen solche erst durch diese Ungleichungen zu Stande kommenden Lagen, in denen die Kräftefunction U ein Minimum wird (ebenso wie die Lagen, in denen U nur einen stationär kleinsten Werth erreicht) überhaupt keine Gleichgewichtslagen mehr sind, so müsste man streng genommen sagen, dass der Zwang von Bedingungsungleichungen rein labile Gleichgewichtslagen überhaupt nicht hervorrufen kann. Der Unterschied zwischen labil und instabil ist aber häufig ein so geringer, dass man sich besser nicht darauf steift, diese beiden Fälle streng auseinander halten zu wollen.

Ueberhaupt aber muss hervorgehoben werden, dass im Vorhergehenden die Bezeichnungen labil und stabil noch durchaus nicht in dem gewohnten vollen Umfange gebraucht worden sind, nach welchem man das Gleichgewicht labil nennt, wenn jede noch so kleine Störung das System zu einer Bewegung treibt, die es weiter und weiter von der Gleichgewichtslage entfernt, dagegen stabil, wenn das System, durch einen ganz beliebigen, nur hinreichend schwachen Anfangsstoss aus der Gleichgewichtslage vertrieben, doch immer in deren Nähe bleibt und nur um dieselbe herumoscilliert.

Um in diesem allgemeinen Sinne die Natur der Gleichgewichtslagen $U =$ Min. und $U =$ Max. zu entscheiden, genügt es offenbar nicht, bloss die Anfangsbewegung des Systems aus der Ruhe in einer Nachbarlage zu untersuchen, sondern man muss vielmehr die ganze Bewegung des Systems nach seiner Verdrängung aus der Gleichgewichtslage ins Auge fassen. Diese Aufgabe kann daher nicht in der Statik, sondern erst in der Dynamik in Angriff genommen werden.

Immerhin lässt sich (wenn auch allerdings, da man ja eben nicht über den ersten Anfangsmoment der entstehenden Bewegung hinauskömmt, noch nicht mit absoluter Strenge) aus dem Vorhergehenden schliessen, dass man wirklich stabiles Gleichgewicht nur in solchen Systemlagen erwarten darf, in denen die Kräftefunction ein Maximum wird. Das ist aber eigentlich auch alles, was man braucht. Denn nach dem fundamentalen Lagrange-Dirichlet'schen Satze (der freilich bis jetzt nur bewiesen worden ist für Systeme mit blossen Bedingungsgleichungen) findet umgekehrt in solchen Lagen des Punktsystems, in denen die Kräftefunction ein Maximum erreicht, stets, im vollen Umfange des Wortes, stabiles Gleichgewicht statt. —

Die verschiedene Natur des Gleichgewichts erscheint ganz besonders einleuchtend in dem Falle, wo auf das Punktsystem nur die Schwere wirkt.

Legt man nämlich die $+z$-Axe vertikal nach unten und nennt $P_1, P_2, \cdots, P_n$ die Gewichte der n Systempunkte, so wird alsdann:

$$X_h = 0,\ Y_h = 0,\ Z_h = P_h,$$

und daher die Kräftefunction

$$U \equiv \sum_1^n {}_h P_h z_h.$$

Versteht man aber unter $\mathfrak{z}$ die z-Coordinate des Systemschwerpunkts, so hat man:

$$\sum_1^n {}_h P_h z_h \equiv \mathfrak{z} \sum_1^n {}_h P_h,$$

und damit folgt, da der Factor von $\mathfrak{z}$ eine positive Constante ist, im Besonderen für Systeme mit blossen Bedingungsgleichungen aus Satz III unmittelbar:

In den Gleichgewichtslagen eines Systems materieller Punkte, auf welche nur die Schwere wirkt, nimmt der Schwerpunkt des Systems stets eine möglichst tiefe, oder eine möglichst hohe, oder endlich eine stationäre Lage ein. Stabil ist aber das Gleichgewicht nur in solchen Lagen, in denen der Schwerpunkt möglichst tief liegt.

Ein schwerer Punkt, der gezwungen ist, auf einer festen glatten Fläche zu bleiben, bietet auch die einfachste Illustration unserer drei verschiedenen Gleichgewichtsarten dar. Zum Gleichgewicht kommt der Punkt nur an solchen Stellen der Fläche, deren Tangentialebene eine horizontale Lage besitzt. Liegt nun in der Umgebung des Berührungspunktes die horizontale Tangentialebene ganz unter der Fläche, so ist das Gleichgewicht des schweren Punktes stabil. Dagegen ist dasselbe labil, so oft umgekehrt die Tangentialebene ganz über der Fläche verläuft. Wenn endlich die Fläche im Berührungspunkte von der horizontalen Tangentialebene durchsetzt wird und also theils unter, theils über der letzteren liegt, so verhält sich das Gleichgewicht des Punktes instabil, nämlich stabil gegen Verrückungen nach höheren, und labil gegen Verrückungen nach tieferen Theilen der Fläche. —

Um mich kürzer und klarer ausdrücken zu können, habe ich bisher immer stillschweigend angenommen, dass das betrachtete Punktsystem unter dem Einfluss seiner Kräftefunction nur vereinzelte Gleichgewichtslagen zulässt, und daher Systemlagen, die sich hinreichend nahe an einer Gleichgewichtslage befinden, nicht wiederum Gleichgewichtslagen sein können*). Wir sahen aber bereits am Schlusse von § 2, dass die Gleichgewichtsbedingungen nicht immer alle $3n$ Coordinaten bestimmen, vielmehr unter Umständen sich erfüllen lassen, während eine oder mehrere der Coordinaten ganz willkürlich bleiben. In allen solchen Fällen existiert eine continuirliche Aufeinanderfolge unmittelbar sich aneinander reihender Gleichgewichtslagen des Systems, und damit kommt zugleich noch eine vierte Art des Gleichgewichts zum Vorschein, das s. g. indifferente Gleichgewicht. Das Gleichgewicht bleibt dann fortbestehen, wenn man das System aus irgend einer Gleichgewichtslage dieser Art nach einer anderen sich anschliessenden verschiebt. Denn bei allen diesen Verrückungen behält die Kräftefunction U unverändert denselben Werth bei. Dagegen verhält sich das Gleichgewicht wiederum stabil oder labil gegen Verrückungen aus der Gleichgewichtslage in eine benachbarte Nichtgleichgewichtslage, jenachdem dieser constante Werth von U grösser oder kleiner ist als in der Nachbarlage.

Das einfachste Beispiel eines solchen indifferenten, und zwar nur in einer einzigen Richtung indifferenten Gleichgewichts liefert ein schwerer Punkt, der auf einer festen glatten Cylinderfläche mit horizontaler Axe ruht. Der Punkt kommt nur dann ins Gleichgewicht, wenn er auf einer

*) S. p. 18.

horizontalen Erzeugenden dieser Fläche liegt; wo er aber auf dieser Geraden liegt, ist ganz gleichgültig. Der Punkt bleibt auf ihr überall im Gleichgewicht.

Es kann sogar vorkommen, dass alle möglichen Lagen eines Punktsystems Gleichgewichtslagen sind. Dieser Fall tritt ein, so oft

$$U = const.$$

selbst eine Bedingungsgleichung des Systems ist. Denn dann sind ja eben seine virtuellen Verrückungen aus jeder möglichen Lage der Gleichgewichtsbedingung $\delta U = 0$ unterworfen.

So bleibt z. B. ein schwerer starrer Körper in allen möglichen Lagen um seinen Schwerpunkt im Gleichgewicht, so oft dieser im Körper selbst liegt und fest gemacht wurde, und ebenso kann eine homogene schwere Kugel, die gezwungen ist, auf einer festen horizontalen Ebene zu bleiben, überhaupt nur solche Lagen annehmen, die für sie Gleichgewichtslagen sind.