Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Noether, Max** (1844–1921)

Titel: **Otto Hesse**

Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik / Historisch-literarische Abtheilung.
Band 20.1875.
Seite 77 – 88.

Historisch-literarische Abtheilung.

Otto Hesse

(geb. in Königsberg am 22. April 1811, gest. in München am 4. August 1874).

Von

Prof. M. Noether
in Erlangen.

Innerhalb zweier Jahre hat die deutsche algebraisch-geometrische Wissenschaft ihre beiden grössten Vertreter verloren: seinem so früh dahingeschiedenen Schüler Alfred Clebsch ist der Altmeister Otto Hesse jetzt nachgefolgt. Wir können in dieser Reihe noch den dritten analytischen Geometer anführen, der in Deutschland mit den Synthetikern Möbius und Steiner schon an der Spitze der aufstrebenden Wissenschaft stand und mit ihnen vereint der Geometrie einen wesentlichen Gehalt gab, den vor sechs Jahren einer wieder neu aufgenommenen geometrischen Thätigkeit entrissenen Julius Plücker (1801—1868).

Dem Verdienste dieses Letzteren hat Clebsch eine ausführliche Darstellung gewidmet*, welche auch die Entwickelung der die Geometrie beherrschenden Principien eingehend verfolgt. Auf Hesse, der, wie nach ihm Clebsch selbst, vor Allem Algebraiker war, wird dabei mehr nur wie im Gegensatz zu Plücker hingewiesen. Aber die wissenschaftliche Thätigkeit Hesse's weist in ihrer wichtigsten Seite zunächst auf Jacobi (1804—1851) hin, dessen Schüler im eminenten Sinne des Wortes Hesse war. Und während die späteren Entwickelungen gerade dieser Richtung durch die Darlegung der Arbeiten Clebsch's bereits eine eingehende Behandlung erfahren haben**, erscheint es auch nothwendig, diese Richtung

* A. Clebsch: „Zum Gedächtniss an Julius Plücker." Bd. 16 der Abh. der Gött. Akad. d. Wiss.

** Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen. Von einigen seiner Freunde. (Leipzig, Teubner 1873, aus Math. Ann. VII.)

noch weiter zurück zu verfolgen. Aus diesem Bedürfniss ist der vorliegende Versuch einer Würdigung der Arbeiten Hesse's hervorgegangen.

In der That muss aber bei diesem successiven Zurückverfolgen des historischen Zusammenhanges eine neue Lücke fühlbar werden. Wir können die Beziehungen der Hesse'schen Arbeiten zu denen Jacobi's nicht erledigen, ohne eine Darlegung dieser letzteren auch von algebraischer Seite her vorauszusetzen, wie es für die functionentheoretischen Arbeiten dieses Meisters in der Dirichlet'schen Gedächtnissrede* geschehen ist. Wenn wir also auch jene Beziehungen hier nur unvollkommen anführen können, so bleibt doch unsere eigentliche Aufgabe die Würdigung der Arbeiten Hesse's an sich; und diese wird durch deren ausgesprochene Eigenart und durch den Umstand, dass deren tiefgreifende Einwirkung auf die Entwickelung der Wissenschaft sich rasch vollzogen hat und im Ganzen beendet ist, eine verhältnissmässig einfache.

Diesem Umstande gemäss ist auch die Stellung Hesse's selbst eine anerkannte; und so mögen wir hier schon genauer bezeichnen, worin die Bedeutung desselben beruht. Es ist Hesse, der zuerst erkannt hat, dass die Theorie der homogenen Formen das von aller Geometrie losgelöste Untersuchungsfeld für den Algebraiker bildet, wobei dann die Resultate der Forschung ihre Interpretation in denjenigen geometrischen Eigenschaften der algebraischen Curven und Flächen finden, welche wir die projectivischen nennen. Er hat weiterhin jene Theorie auch wirklich eingeleitet, indem er wenigstens die nächste der von einer Grundform abhängigen Formen, die Determinante, welche jetzt Hesse's Namen trägt, aufstellte und ihre Bedeutung in wichtigen Problemen der Elimination und Geometrie systematisch verfolgte. So knüpfen die ersten Begriffe und die erste Entwickelung der Invariantentheorie an Hesse an. — Sehen wir zunächst, wie dessen Arbeiten selbst auf Jacobi zurückführen.

Die Arbeiten Jacobi's, die nach so vielen Seiten hin bahnbrechend gewirkt haben, sind für diejenigen Hesse's in zwei Richtungen von unmittelbarem Einfluss geworden: zunächst durch ihren gedanklichen Inhalt in den algebraischen Problemen, die sie behandeln, sodann durch die analytischen Methoden, die theils als Hilfsmittel bei Untersuchungen mannichfaltiger Art, theils auch als selbstständige Darstellungen, wie jene der Theorie der Determinanten (1841, Journal Crelle 22), auftreten. Es ist übrigens unmöglich, diese beiden Richtungen in ihrem Einflusse getrennt zu verfolgen. Denn überall zeigt sich bei Jacobi die originale Kraft, die zur Behandlung neuer Probleme neue Hilfsmittel ersinnt oder vorhandene verallgemeinert; und es zeigt sich auf der andern Seite, wie im Anschlusse an die Entwickelung selbst sich auch der Gedankenkreis nach und nach

* Journal Crelle, 52.

erweitert und auseinanderliegende Gebiete Zusammenhang gewinnen. Wir brauchen in diesem Sinne nur an die Vereinfachungen zu erinnern, welche Jacobi z. B. dem Pfaff'schen Probleme und dem der zweiten Variation zu Theil werden liess, um die Quelle genau bezeichnen zu können, aus der er einen wesentlichen Theil seiner folgenreichen Resultate schöpfte: die Macht einer methodisch gebildeten und der Verallgemeinerung fähigen Analyse.

Obwohl diese Art der Ideenerweiterung in keiner der umfassenden Arbeiten Jacobi's zu verkennen ist, so muss eine solche Behandlung doch vor Allem in den algebraischen Untersuchungen hervortreten. Wir denken hier zunächst an diejenigen über die lineare Transformation quadratischer Formen, an die sich die erste Entwickelung der Ideen Hesse's und auch vorzüglich die späteren systematischen Darstellungen der analytischen Geometrie in dessen Lehrbüchern anschlossen. Bei Jacobi erscheint das Problem im Gefolge von Fragen über Transformation vielfacher Integrale (1832, 1833, J. Cr. 8, 10, 12); und wir sehen dabei neben einer fortlaufenden Ausbildung des Determinantencalculs andere weitreichende Hilfsmittel entstehen, wie die elliptischen Coordinaten, die Jacobi über den von Cauchy eingenommenen Standpunkt (*Exerc. de Mathém. t. IV*) hinausführen.

Aus diesen formell vollendeten Arbeiten Jacobi's leiten wir vor Allem den in Hesse's Darstellungen überall hervortretenden Zug ab, die wirkliche algebraische Ausführung an Stelle blosser Deductionen zu setzen, und weiterhin insbesondere die Methode der Zurückführung allgemeiner Formen auf specielle, canonische, aus denen die Eigenschaften der allgemeinen Formen sich ablesen lassen.

Zu dieser Anregung hat sich für Hesse noch als zweite der Einfluss der neuen geometrischen Grundideen, soweit sie in den Werken von Poncelet und Steiner sich enthüllten, gesellt, und ihre Vereinigung erst hat ihm die individuelle Richtung gegeben. Die ersten Arbeiten Hesse's behandeln, abwechselnd auf dem Wege geometrischer Construction und auf analytischem Wege durch Transformation homogener Formen, die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. An Poncelet'sche Entwickelungen über conjugirte Linien dieser Flächen anknüpfend, wird eine Construction ihrer Hauptaxen geliefert (1837, J. Cr. 18); und dann entstehen die Begriffe der Polardreiecke und der Polartetraeder, der „Systeme conjugirter Punkte" (1840, J. Cr. 20), und die Beziehungen zwischen zweien solcher Systeme, als Interpretation analytischer Relationen. Aus diesen Betrachtungen ist die lineare Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung aus sieben gegebenen Schnittpunkten (J. Cr. 20, 26) hervorgegangen, und ferner, in Anlehnung an Steiner'sche Sätze, die lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten (1842, J. Cr. 24). — Hesse ist erst später und nur gelegentlich, wie bei Ausarbeitung des Lehrbuches über Raumgeometrie, auf die quadratischen Formen zurückgekommen. Aber wenn er auch ihre Theorie nicht eigentlich weitergeführt hat, was erst durch Weierstrass (1858) und in Arbeiten, die sich an diesen anschliessen, geschah, so hat er doch noch eine wichtige Anwendung derselben, die auf die Transformation der zweiten Variation eines einfachen Integrals mit einer zu bestimmenden Function, wesentlich gefördert (1857, J. Cr.-Borch. 54). Dem Vorgange Jacobi's folgend, und unter umfassender Anwendung der algebraischen Hilfsmittel, gelang ihm der Beweis der schon oben erwähnten, von diesem gegebenen Reduction des Problems, was dann weiter zur Inangriffnahme und zur Lösung des allgemeinen Problems der Variationsrechnung die Anregung lieferte*.

Von dem tiefsten Einflusse auf den Fortschritt der Wissenschaft ist eine andere Anregung geworden, die Hesse aus den Jacobi'schen Arbeiten empfing. Um die algebraische Operation fähig zu machen, den Gedankengehalt der Geometrie in sich aufzunehmen und die Probleme in eigener freier Gestaltung auszuführen, war vor Allem eine weitere Ausbildung der Theorie der Elimination der Variabeln aus mehreren Gleichungen nothwendig. Im 15. Bande von Crelle's Journal (1835) hatte Jacobi die Eliminationsmethode von Euler und Bézont, welche die Aufgabe für zwei Gleichungen n^{ten} Grades auf die Elimination aus einem System linearer Gleichungen zurückgeführt hatten (der erstere durch successive Eliminationen, der zweite auf directerem Wege), neu dargestellt und die Resultante als n-reihige Determinante gegeben. Aber diese Abhandlung discutirt auch ausführlich die Beziehungen zwischen den in die Formeln eingehenden Coefficientenaggregaten und insbesondere die Gleichungen, welche die Resultante selbst, und ihr Product mit einer bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Function, als Functionen der gegebenen beiden Formen darstellen.

Es lässt sich nun verfolgen, wie sich an diesen letzteren Gedankengang die Entwickelung der Eliminationstheorie anschliesst. Dem Charakter des analytischen Verfahrens entsprechend, strebt diese Ausbildung auch hier grössere Allgemeinheit dadurch an, dass sie nach und nach das von der zufälligen Gestalt der einzelnen Aufgabe Abhängige abstreift. Wenn die Schöpfung solcher Methoden auch einen tiefen Einblick in das Wesen des Problems voraussetzt, so zeigt sich doch, wie sich derselbe erst später, bei fortgesetzter Anwendung, zu völligem Verständniss erhebt.

Nachdem Hesse 1843 selbstständig auf die schon früher von Sylvester erhaltene, von diesem als „dialytische" bezeichnete Methode der Elimination aus zwei Gleichungen, eine Modification des obengenannten Verfahrens, gekommen war, tritt nun in seiner wichtigsten Arbeit „Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen zweiten

* Vergl. die oben citirte Schrift über Clebsch, S. 7.

Grades mit zwei Variabeln" (Jan. 1844, J. Cr. 28) und in der unmittelbar folgenden Abhandlung über die Wendepunkte der Curven, der Gedanke klar hervor: nicht die Darstellung der Endgleichung an sich, sondern der Einblick in die Natur der Functionen, aus denen sie sich zusammensetzt, muss das Ziel sein. So wird denn die einfachste der von den drei quadratischen Grundformen abhängigen Formen, ihre Functionaldeterminante, gebildet und eine beliebige weitere Function dritten Grades linear durch diese vier Formen ausgedrückt, wodurch das Problem zunächst auf ein System linearer Gleichungen zurückgebracht wird. Indem aber weiter die quadratischen Formen sich als Polaren einer neuen Form dritten Grades ergeben, zeigt sich das Problem als zur Theorie einer cubischen ternären Form gehörig, und nun sehen wir, wie sich aus der frühern Eliminationsaufgabe die Theorie einer solchen Form, d. h. der Curven dritter Ordnung, entwickelt. Die bezeichnete Functionaldeterminante geht in die hier zum ersten Male auftretende Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten der cubischen Form, in die Hesse'sche Determinante derselben, über. Und es folgt der Fundamentalsatz der ganzen Theorie: dass die Determinante irgend einer Form $kf + \lambda \Delta$ der linearen Schaar, welche aus der cubischen ternären Form f und ihrer Determinante Δ gebildet ist, ebenfalls eine dieser Schaar angehörige Form ist.

Von dieser Covariante Δ der Form f wird sogleich auch ihre wesentliche Eigenschaft, bei linearer Transformation invariant zu sein, zur Ueberführung von f in eine canonische Form benutzt, welche die zweiten Potenzen der Variabeln nicht mehr enthält, eine auf vier Arten mögliche Reduction. Wenn sich so für die Theorie der homogenen Formen eine erste Grundlegung ergiebt, so geht Hesse auch auf die Interpretation des Zusammenhangs der gefundenen Formen für die Geometrie ein, und er findet das wichtige Resultat, dass die Wendepunkte einer Curve n^{ter} Ordnung allgemein als vollständiger Schnitt derselben mit einer Curve der Ordnung $3(n-2)$, der durch die Determinante gegebenen Hesse'schen Curve der erstern, bestimmt werden, ein Resultat, das vorher nur für Curven dritter Ordnung von Plücker erhalten worden war. Für diese Curven dritter Ordnung selbst ergiebt sich durch die oben erwähnte Reduction die interessante Gruppirung der Wendepunkte.

Hesse hatte den Ausgangspunkt für die Ableitung des allgemeinen, auf die Wendepunkte bezüglichen Satzes in der gewöhnlichen Theorie der Krümmung der Curven genommen, die für die gesuchte Function einen Ausdruck liefert, der in den Coordinaten der Schnittpunkte um zwei Einheiten zu hoch ist. So entstand das erste grössere Beispiel der Reduction der Resultanten mit Hilfe der Gleichung der gegebenen Curve, der Herausschaffung von Factoren, die zu der eigentlichen Frage nicht in Beziehung stehen, vielmehr von der speciellen Eliminationsmethode herrühren. Man kann wohl sagen, dass mit dieser bei Eliminationsfragen immer wiederkehrenden Aufgabe eine ganze Richtung weiterer Untersuchungen angedeutet ist und dass in ihrem Gefolge sich die Invariantentheorie erst entwickelt hat.

Der einfachste Fall einer solchen Aufgabe tritt schon bei der Gleichung der Tangente einer gegebenen Curve auf, wenn die Gleichung der letzteren in nicht homogener Gestalt vorliegt. Auch jene Gleichung wird in den Coordinaten des Berührungspunktes um eine Ordnung zu hoch, aber die Einführung der homogenen Form allein genügt schon, mit Hilfe der Gleichung der Curve den linearen Factor heraustreten zu lassen. Dieses Beispiel weist also auch schon auf die Nothwendigkeit der Einführung der homogenen Formen in die algebraische Theorie der geometrischen Gebilde hin.

Ein wesentliches Mittel zur Erreichung der Reduction der Resultanten hat die von Joachimsthal J. Cr. 33 angegebene Methode, nach der man die Bestimmung der Schnittpunkte einer Curve mit einer Geraden auf zwei in dieser letztern befindliche feste Punkte bezieht, geliefert. Wir finden diese Methode, welche Curvenprobleme theilweise auf solche binärer Formen zurückführt, zuerst in einer Abhandlung von Cayley (1846, J. Cr. 34) benutzt, in der die durch Hesse angeregten Eliminationsfragen nach mehreren Richtungen fortgeführt werden. Indem hier das Problem der Wendepunkte mehr in projectivischem Sinne gefasst wird, gelangt Cayley bereits hier zur Anwendung seiner schon früher aufgestellten symbolischen Methode, und er zeigt wenigstens, dass die weiteren analogen, aber complicirteren Probleme, wie das der Doppeltangenten einer Curve, von einer Ausbildung des Invariantencalculs abhängen.*

An dem Problem der Doppeltangenten vor Allem, insbesondere derjenigen der Curven vierter Ordnung, schreitet nun die Eliminationstheorie weiter. Im 36. Bande von Crelle's Journal (1847) schlägt Hesse denselben Weg ein, den nach dem Obigen Cayley genommen hatte, führt ihn aber in der eleganten und durchsichtigen Darstellung, die allen seinen Arbeiten eigen ist, bis zur Erledigung der Reduction für die Reihe der nächstliegenden Formen durch. Er gelangt so auch zu einer Erniedrigung der von Cayley gegebenen Gleichung, welche die Berührungspunkte der Dop-

* Wir haben hier übrigens zu erwähnen, dass diese Cayley'sche Arbeit verschiedene später erhaltene Resultate schon vorweg genommen hat; so das Verhalten der Hesse'schen Determinante einer Curve in einem Doppel- oder Rückkehrpunkte der letztern (s. Hesse, Brief an Jacobi v. 27. Nov. 1849, J. Cr. 40, und Jacobi's Erwiderung); so ferner das sogenannte „Uebertragungsprincip", das später Clebsch entwickelt hat (das man nicht mit dem von Hesse ebenso genannten, noch unten S. 87 zu besprechenden Princip verwechseln wird). Dasselbe findet sich aber für einen speciellern Fall angewandt, und es ist in der That ja auch nichts Anderes, als eine besondere Form der Anwendung der Joachimsthal'schen Methode.

peltangenten einer Curve vierter Ordnung bestimmt, ohne jedoch damals den letzten noch übrigen quadratischen Factor beseitigen zu können.

Wie sehr diese Fragen alle Kräfte zur Begründung des Problems selbst und zur Schaffung neuer Hilfsmittel anregten, wird durch einen Brief von Hesse an Jacobi (27. Nov. 1849, J. Cr. 40) gezeigt. Jacobi war ein Beweis für die Möglichkeit der Reduction der zuletzt genannten Gleichung gelungen, ein Beweis, der später in seiner einfachsten Form von Clebsch (J. Cr.-Borch. 63) dargestellt worden ist. Hesse, dem ein solcher Beweis zur „Lebensfrage" geworden war, sah sogleich den „unberechenbaren Nutzen desselben für seine eigenen Bemühungen" voraus. Aus dem nächsten Briefe vom 7. December erhellt, wie die neue Anwendung der Determinantentheorie durch Ränderung, die in den späteren Arbeiten Hesse's eine hervorragende Rolle spielt, im Entstehen begriffen ist; und noch in demselben Monat (Brief vom 30. Dec. 1849, J. Cr. 40) gelingt es endlich Hesse, die langgesuchte Gleichung 14. Grades für die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung in reiner Form hinzustellen.

Später hat Salmon eine zweite Methode für dieses specielle Problem angegeben (1858). Die weitere Entwickelung des allgemeinen Problems, die unabhängig von Hesse verlaufen ist, haben wir hier nicht zu verfolgen, um so weniger, als schon in der oben citirten Schrift über Clebsch die Weiterführung der Ideen der Invariantentheorie, zunächst von Seiten der englischen, dann der deutschen Algebraiker, ausführlich betrachtet worden ist. Es möge nur erwähnt werden, dass die wirkliche Ausführung der Reduction um Potenzen linearer Factoren erst in neueren Arbeiten (vergl. Gordan: Ueber Combinanten, Math. Ann. V), in denen die Betrachtung von Formen mit mehreren Systemen von Variabeln, der Joachimsthal'schen Methode analog, wesentlich ist, zu einem gewissen Abschlusse gebracht ist, der aber für das einzelne Problem noch ein weites Feld der Untersuchung übrig lässt.

Dagegen hat Hesse die Reduction für ein weiteres specielles Problem gegeben. Er hat die Aufgabe für die Wendepunkte nochmals direct, und zwar algebraisch von einer neuen Seite her, angefasst, die seitdem auch für höhere Probleme mehrfach angewandt worden ist, nämlich durch Umformung des Determinantenausdrucks, welcher in Differentialform die Bedingung ausdrückt, dass eine Gerade drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemein hat (1849, J. Cr. 41). Und auf dieselbe Weise wird auch das erweiterte Problem behandelt und gelöst: die Gleichung der Schmiegungsebene eines Punktes einer Raumcurve, die der vollständige Schnitt zweier Flächen ist, aufzustellen. Es sind diese Darstellungen aber geeignet, noch in anderem Sinne unser Interesse in Anspruch zu nehmen. Denn die Umformungen erhalten durch die Einführung von geränderten Determinanten eine besondere Leichtigkeit, und die Darstellung wäre sogar durch consequentere Anwendung auch der mehrreihig geränderten Determinanten noch zu vereinfachen gewesen (wie später Clebsch, J. Cr.-Borch. 63, gethan). Auch ist bemerkenswerth, dass nun, was früher bei Hesse nicht der Fall ist, das Problem in durchaus projectivischem Sinne aufgefasst wird, so dass die homogenen Coordinaten ohne Rücksicht auf metrische Bedeutung auftreten, ganz in der Weise, die später Clebsch nach diesem Vorgange allgemein angenommen hat*.

Wir haben schon angedeutet, dass der Gedankenkreis, in welchem sich die zur Invariantentheorie zu rechnenden Arbeiten Hesse's bewegen, der der Untersuchung von canonischen Formen ist; eine Art der Betrachtung, die, von so wichtigen Resultaten sie für speciellere Probleme begleitet sein kann, für die allgemeine Theorie in den Hintergrund treten muss, wie das denn in der That, besonders seit den Arbeiten Aronhold's, geschehen ist. Die geometrischen Resultate für die Curven dritter und vierter Ordnung, die Hesse in einer Reihe reicher und schöner Abhandlungen niedergelegt hat, sind an solche besondere Formen von Curvengleichungen geknüpft, insbesondere an die Darstellung derselben in Form von symmetrischen Determinanten, deren Elemente lineare Functionen der Coordinaten sind. Aus der Thatsache allein, die aus der ersten der Abhandlungen (J. Cr. 28) sich ergab, dass für die Curven dritter Ordnung diese Darstellung auf dreierlei Weise möglich ist, resultirte sofort eine Menge auf die Systeme von Paaren conjugirter Punkte dieser Curven bezüglicher Sätze (1847, J. Cr. 36), sowie Sätze über die mit diesen Systemen zusammenhängenden linearen Systeme von Berührungskegelschnitten, die vielfach über die von Maclaurin, Poncelet, Plücker und Steiner gegebenen Sätze hinausgehen.

Die Behandlung solcher symmetrischen Determinanten, besonders bezüglich ihres Verhaltens bei linearer Transformation der Variabeln und ihrer Beziehungen zu solchen Determinanten, die durch Ränderung, freilich auch hier nur durch eine einzige Ränderung, aus ihnen hervorgehen, bildet von jetzt an den Kern der algebraischen Betrachtungen Hesse's. Wir mögen hierbei an den Unterschied dieses Verfahrens von demjenigen Plücker's erinnern, der vielmehr mit algebraischen Symbolen den geometrischen Constructionen nachfolgte. Dieser Gang und die daraus fliessenden Resultate für die Gruppirung der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung waren von Hesse jedenfalls spätestens 1851 gewonnen (vergl. J. Cr. 45, S. 101), aber die systematische Darstellung ist von ihm erst 1853 (J. Cr. 49) gegeben worden.

Wenn schon diese Methode auch für sich zur Aufstellung von Systemen von Berührungscurven führte und zu Sätzen, die gleichzeitig auch von Steiner (J. Cr. 49) veröffentlicht worden sind (wie auch wenige einzelne derselben vorher schon von Salmon), so wurde jene Gruppirung doch erst

* Hieraus folgte eine Modification der bezüglichen Stelle der Clebsch-Schrift, S. 14.

durch eine elegante Combination der analytischen Behandlung mit der geometrischen Anschauung völlig übersichtlich. Vermöge derselben wird das ebene Problem mit einem Problem im Raume in Verbindung gesetzt und die Beziehungen der 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung an dem Bilde der 28 Verbindungslinien von acht Punkten im Raume erläutert. Und dieses Bild ist auch für alle übrigen Verhältnisse der Curve vierter Ordnung von Bedeutung: es geht direct aus der Darstellung ihrer Gleichung in Form einer vierreihigen symmetrischen Determinante hervor. Denn betrachtet man eine zweifach unendliche Schaar von Flächen zweiter Ordnung mit acht festen Grundpunkten, so genügen die Parameter der Kegelflächen dieser Schaar einer Bedingung, welche eben als jene Gleichung einer Curve vierter Ordnung aufgefasst werden kann.

Dieser Zusammenhang führte vor Allem zu dem Nachweise, dass die besondere Gleichungsform der Curve noch auf 35 weitere, von der ersteren wesentlich verschiedene Arten hergestellt werden kann, wobei man nur eine strengere explicite Begründung des Satzes vermissen mag, dass die allgemeine Curve vierter Ordnung überhaupt die gewählte canonische Gleichungsform erhalten kann. Damit waren denn auch die zweierlei Arten von Systemen von Berührungscurven dritter Ordnung gefunden und die Einordnung der Systeme von Berührungskegelschnitten und Doppeltangenten in jene Systeme klargelegt. Einer spätern Zeit (Clebsch in J. Cr.-Borch. 63) gehört die Erkenntniss der Identität dieser Probleme mit der Theilung der zugehörigen Abel'schen Functionen an.

Es hat sich getroffen, dass einem, gerade aus diesen geometrischen Speculationen abgeleiteten Anspruche Steiner's auf die Ueberlegenheit der synthetischen Methode durch die algebraischen Resultate Hesse's zur selben Zeit, in der er erfolgte (J. Cr. 49) auch begegnet worden ist. In der That ist auch die Grundlage der Steiner'schen Auffassung überhaupt, die projectivische Zuordnung der Gebilde, völlig identisch mit der von Plücker und Hesse angenommenen, bei welcher die Zuordnung dieser Gebilde durch lineare Beziehungen zwischen ihren variabeln Parametern vermittelt wird. Ueber die weiteren Beziehungen Hesse's zu Steiner hat sich Hesse selbst in einem Nachruf an Steiner (J. Cr.-Borch. 62, 1863) ausgesprochen: es waren für ihn die Steiner'schen Entwickelungen von unmittelbarer Anregung geworden, als „ein Wegweiser zur Bildung und Erforschung von Functionen, die in der höhern Algebra von grosser Bedeutung sind".

In diesem Sinne hat Hesse die von ihm eingeführte Determinante einer Function besonders eingehend weiter zu erforschen gesucht. So hat er die Bedeutung ihres identischen Verschwindens, dass die gegebene Form durch lineare Transformation in eine solche von weniger Variabeln übergeführt werden kann, zwar angegeben (J. Cr.-Borch. 42 und 56); indessen existirt bis jetzt meines Wissens kein genügender und vollständiger Beweis dieses wichtigen Satzes. Weiterhin hat er auch die Determinante für die algebraische Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades verwerthet (J. Cr. 38, 41), wobei besonders in der Behandlung der binären biquadratischen Form durch den Umstand, dass ihre Determinante mit ihr vom gleichen Grade wird, die Analogie derselben mit der ternären cubischen Form hervortritt.

Indem wir die algebraischen Gleichungen erwähnen, berühren wir ein neues Gebiet, welches von den Arbeiten Hesse's bereichert worden ist. Durch Abel kannte man eine ganze Classe von algebraisch auflösbaren Gleichungen, die irreducibeln von der Eigenschaft, dass eine Wurzel von einer zweiten durch einen rationalen Ausdruck abhängt, welcher, wiederholt, alle Wurzeln liefert. Bei der Untersuchung der Wendepunkte der Curve dritter Ordnung aber, für welche vorher nur die zwölf Geraden, welche dieselben zu je drei enthalten, bekannt waren, ergab sich durch den Nachweis der vier Dreiseite, in die sich die Geraden gruppiren, ein Einblick in die besondere Natur der Gleichung neunten Grades, welche die neun Punkte bestimmt. Hiermit war nun (J. Cr. 34) eine neue Classe algebraisch lösbarer Gleichungen aufgestellt: die Gleichungen neunten Grades, für welche zwischen irgend zweien der Wurzeln und einer dadurch bestimmten dritten eine rationale Relation vorliegt, von der besondern Art, wie sie durch die Existenz der zwölf Geraden des geometrischen Problems angedeutet ist. Und es war nicht nur ihre, schon durch diese Relationen allein bedingte Zurückführbarkeit auf eine biquadratische und reine cubische Gleichungen nachgewiesen; es war auch ein geometrisches Bild für alle auf die Gruppirungen der Wurzeln bezüglichen Verhältnisse gewonnen. Solche anschauliche speciellere Beispiele haben wesentlich auf die leichtere Auffassung und auch auf die Ausbildung der an sich so abstrusen Substitutionstheorie gewirkt, deren von Galois schon bald nach den Abel'schen Untersuchungen geschaffene Grundlagen auch erst nach dieser Arbeit Hesse's veröffentlicht worden sind. — Die Aufstellung der Resolventen seiner Gleichung in expliciter Form findet sich bei Hesse nicht; sie ist auch erst durch die Fortschritte der neuern Algebra möglich geworden.

Von hier an hat Hesse nicht nur noch weitere specielle, algebraisch auflösbare Gleichungen verfolgt, insbesondere zwei Arten von Gleichungen sechsten Grades, von denen die eine die in der Theorie der Gleichungen vierten Grades auftretende Resolvente ist, die andere drei Punktpaare einer Involution vorstellt; auch eine Reihe seiner geometrischen Untersuchungen lassen sich leicht unter den Gesichtspunkt bringen, die Theorie der algebraischen Gleichungen von geometrischer Seite her zu fördern. Dahin zählen die ausführlichen Darlegungen der Gruppirungen unter den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung; und von demselben Gesichtspunkte aus ist auch die wiederholte Beschäftigung mit der interessanten Figur aufzufassen, die aus dem Pascal'schen Sechseck vermittelst der 15 zugehörigen Steiner'schen Linien und der 20 Punkte, in denen dieselben sich zu je dreien schneiden, sich entwickelt. Es tritt in diesen Arbeiten (J. Cr.-Borch. 66, 68) die doppelte Absicht hervor, einmal für die Gleichungen und ihre Resolventen ein anschauliches Bild in der Ebene zu gewinnen, sodann auch umgekehrt die bekannten Beziehungen bei den algebraischen Gleichungen für die Geometrie der Gebilde von mehreren Dimensionen zu verwerthen. Indess liegen von Seiten Hesse's nur ganz wenige Ausführungen in dieser Richtung vor, ja wir können eigentlich nur auf das „Uebertragungsprincip" (J. Cr.-Borch. 66, Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI) hinweisen, dem eine Gleichung zu Grunde liegt, die linear und homogen in einem System von drei Variabeln, quadratisch und homogen in einem zweiten System von zwei Variabeln ist. Indem vermöge dieser Gleichung die Punktpaare der Geraden den Punkten der Ebene entsprechend gesetzt werden, hat man Coordinaten eingeführt, durch welche wohl noch manches Problem der Ebene, insbesondere wenn ein Kegelschnitt der Ebene ausgezeichnet ist, auf ein binäres Problem zurückgebracht und einer einfachern Behandlung zugänglich wird.

Das Pascal'sche Sechseck hat Hesse auch Gelegenheit gegeben, in ausgedehntem Masse von den durch Bobillier und Plücker eingeführten symbolischen analytischen Darstellungen Gebrauch zu machen. Später (J. Cr.-Borch. 75) erfolgte sogar noch eine zweite analoge Darstellung, in der nur die Symbole geänderte Determinanten sind und die ganze Figur durch einen Cyclus von Identitäten zwischen denselben repräsentirt wird. Es scheint übrigens, dass Hesse sowohl eine genügende Kenntniss des Zusammenhangs der einzelnen auf die Figur bezüglichen Sätze, als auch ein anschauliches Bild der Figur noch vermisste.*

Wir haben uns im Vorhergehenden wesentlich auf die rein wissenschaftliche Thätigkeit Hesse's, die wir mit der Mitte der fünfziger Jahre als abgeschlossen betrachten können, beschränkt. Nur mit den zuletzt genannten Arbeiten haben wir schon ein Gebiet betreten, das mit der seit dieser Zeit entfalteten pädagogischen Wirksamkeit Hesse's zusammenhängt. Denn es war seine Absicht, an der Schwelle der analytischen Geometrie solch einfaches Material zu geben, an dem eine Reihe von Fragen, die später für wichtigere und complicirtere Probleme auftreten, bereits aufgeworfen und mittels analytisch ganz durchgearbeiteter Methoden auch völlig erledigt werden können. In diesem Sinne haben sich die Lehrvorträge Hesse's bewegt und in diesem Sinne sind die beiden geometrischen Lehrbücher, die Geometrie des Raumes (1. Auflage 1861) und die noch mehr elementare Geometrie der Geraden und des Kreises, sowie die später in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. zuerst veröffentlichten Vorlesungen abgefasst.

---

* Vergl. übrigens hierzu Bauer in den Berichten der Münchener Akademie vom December 1874.

Der Inhalt dieser Schriften ist denn auch vor Allem die Darstellung der erwähnten symbolischen Gleichungsformen, die in einer unübertrefflich klaren Form geschieht und von Anfang an sowohl die Macht der Analysis, als den Vortheil einer geometrischen Veranschaulichung fühlen lässt. Der weitere Inhalt der Raumgeometrie ist die an die Polarentheorie anknüpfende Theorie der Formen zweiten Grades, wie sie nach dem Frühern aus Jacobi's und den eigenen Arbeiten Hesse's hervorgegangen ist; und hier tritt besonders die Untersuchung über die beiden Gleichungen hervor, welche die Hauptaxen und die Axen eines ebenen Schnittes der Fläche zweiter Ordnung bestimmen, eine Untersuchung, die nach dem Vorgange Kummer's durch Zerlegung der Discriminante der Gleichungen in eine Summe von Quadraten geführt wird. Obwohl diese Bücher also nicht, wie die Salmon'schen, eine Vielseitigkeit in den Ausführungen und eine umfassende Einführung in alle Methoden der analytischen Geometrie angestrebt haben, so ist ihre Wirksamkeit doch eine bedeutende. Es ist hauptsächlich die durchsichtige Klarheit in der Auseinanderlegung bekannter und neuer Begriffe einfacherer Art und deren Einführung in ganz expliciter Weise, was diesen Hesse'schen Darstellungen ihren Werth verleiht und was wohl als ein Erbtheil der Jacobi'schen analytischen Technik anzusehen ist. Wir haben in diesen Schriften, wie in den classisch gewordenen Abhandlungen Methoden vor uns, die dem oberflächlichen Anblick nur ihre formal vollendete Seite zuwenden mögen, die aber bei näherem Eindringen die neuen Ideen, als deren Ausdruck sie sich nach und nach gebildet haben, und die in ihnen angesammelte Triebkraft zu weiteren Fortschritten der Wissenschaft erkennen lassen.

Heidelberg, im December 1874.