Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Stäckel, Paul** (1862–1919)

Titel: **Über die Integration der Hamilton-Jacobischen-Differentialgleichung mittels der Separation der Variabeln**

Univ.-Schrift: Halle, Phil. Fak., Habil.-Schr. v. 6. April 1891

Wenn eine Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung mit n Variablen in n Gleichungen aufgespalten werden kann, die jeweils nur eine der Variablen und ihre Ableitungen enthält, kann die ursprüngliche Gleichung vollständig gelöst werden.

ÜBER DIE INTEGRATION

DER

HAMILTON-JACOBISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

MITTELST SEPARATION DER VARIABELN.

HABILITATIONSSCHRIFT,

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT VON

DR. PAUL STÄCKEL.

HALLE A/S.

1891.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

Existiert bei einem dynamischen Problem (vergl. meine Abhandlung: „Über die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Äquivalenz dynamischer Probleme", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 107, S. 319) eine Kräftefunktion $\Pi(p_1, p_2, \cdots p_n)$, so läfst sich nach den Untersuchungen von Hamilton und Jacobi die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückführen auf die Ermittelung einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(1) \qquad H = \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda} \frac{\partial W}{\partial p_\varkappa} \frac{\partial W}{\partial p_\lambda} - (\Pi + \alpha_1) = 0 \quad (A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa}),$$

wo α_1 eine willkürliche Konstante bedeutet.

Ist W^0 eine vollständige Lösung der Gleichung $H = 0$, d. h. eine solche, die aufser der mit ihr additiv verbundenen Konstanten noch $n - 1$ weitere selbständige Konstanten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ enthält, so sind:

$$(2) \qquad \frac{\partial W^0}{\partial \alpha_1} = \tau - t\,; \; \frac{\partial W^0}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots\cdots \frac{\partial W^0}{\partial \alpha_n} = \beta_n$$

die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung; in ihnen bedeuten τ; $\beta_2, \ldots \beta_n$ n neue Konstanten (Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von E. Lottner. S. 167).

Als ich die Fälle betrachtete, in denen es gelungen ist, eine vollständige Lösung W^0 der Gleichung $H = 0$ zu finden, fiel es mir auf, dafs in ihnen W^0 immer auf die Form:

$$(3) \qquad W^0 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int W_\varkappa(p_\varkappa\,; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)\, dp_\varkappa$$

gebracht werden kann; die Ermittelung der vollständigen Lösung beruht dann darauf, dafs die Gleichung $H = 0$ in n Gleichungen zerspalten wird, deren jede nur eine der Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und die Ableitung von W gerade nach dieser Veränderlichen enthält.

Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung wird zunächst darin bestehen, Bedingungen dafür aufzustellen, dafs eine Hamilton-Jacobische Differentialgleichung eine solche Separation der Variabeln gestattet. Solche Bedingungen ergeben sich erstens durch wiederholte partielle Differentiation der Gleichung $H = 0$ nach p_1, $p_2, \dots p_n$, und mit ihrer Hilfe gelingt es, den Fall $n = 2$ vollständig zu erledigen (Abschnitt 1), zweitens durch wiederholte partielle Differentiation nach $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, und zwar stellt sich heraus, dafs die Kräftefunktion Π (Abschnitt 2) und die Koëfficienten $A_{11}, \dots A_{nn}$ (Abschnitt 3) gewisse rationale Funktionen von $\frac{1}{2} n (n + 1)(n + 2)$ Funktionen je einer der Veränderlichen $p_1, p_2, \dots p_n$ sein müssen. Diese Bedingungen sind notwendig. Sie werden hinreichend, wenn man von vornherein annimmt, dafs die Gleichung $H = 0$ die Form hat:

$$(4) \qquad H^* = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa = 1}^{n} A_\varkappa \left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - (\Pi + \alpha_1) = 0.$$

Auf diese Weise ergiebt sich eine Klasse Hamilton-Jacobischer Differentialgleichungen in n Variabeln, welche Separation der Variabeln gestatten. Mit ihrer Hilfe erhält man ein Theorem über geodätische Linien n-facher Mannigfaltigkeiten, das genau einem bekannten Satze Liouvilles über die geodätischen Linien krummer Flächen entspricht (Abschnitt 4). Es folgt nunmehr die ausführliche Diskussion der Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung, die sich für jene Klasse Hamilton-Jacobischer Differentialgleichungen ergeben. Zu diesem Zweck wird zuerst ein allgemeineres Umkehrproblem betrachtet, welches auf n-fach periodische Funktionen von n reellen Veränderlichen führt (Abschnitt 5), und dann gezeigt, dafs sich unter bestimmten Voraussetzungen $p_1, p_2, \dots p_n$ als eindeutige, endliche, stetige, bedingt periodische Funktionen der Zeit t ergeben. Zum Schlufs wird dieses Resultat an einem Beispiel verificiert, welches auf ein Jacobisches Umkehrproblem führt (Abschnitt 6).

1.

Zur Untersuchung der Frage, welche Hamilton-Jacobischen Differentialgleichungen Separation der Variabeln gestatten, bietet sich zunächst folgender Weg dar. Setzt man nach (3)

$$W = W^0 = \sum_{\varkappa = 1}^{n} \int W_\varkappa (p_\varkappa ; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) dp_\varkappa ,$$

so geht die Gleichung $H = 0$ über in:

(5) $$H^0 = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda} W_\varkappa W_\lambda - (\Pi + \alpha_1) = 0$$

Bildet man nun das System der n Gleichungen:

$$H^0 = 0, \quad \frac{\partial H^0}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 H^0}{\partial p_1{}^2} = 0, \quad \ldots \frac{\partial^{n-1} H_0}{\partial p_1{}^{n-1}} = 0,$$

so kann man diese Gleichungen ansehen als n quadratische Gleichungen zwischen $n - 1$ Gröfsen $W_2, W_3, \ldots W_{n-1}$. Durch Elimination dieser Gröfsen entsteht eine Resultante:

$$R_1\left(W_1, \frac{\partial W_1}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial^{n-1} W_1}{\partial p_1{}^{n-1}}\right) = 0,$$

die, wie man leicht einsieht, aufser den hingeschriebenen Gröfsen nur noch die Ableitungen der Koëfficienten der Gleichung $H = 0$ nach p_1 enthält. Daher kann man aus den Gleichungen:

$$R_1 = 0, \quad \frac{\partial R_1}{\partial p_2} = 0, \quad \ldots\ldots \frac{\partial R_1}{\partial p_n} = 0$$

durch Elimination von

$$\frac{\partial W_1}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial p_1{}^2}, \quad \ldots\ldots \frac{\partial^{n-1} W_1}{\partial p_1{}^{n-1}}$$

eine Gleichung $S_1 = 0$ herleiten, welche besagt, dafs eine ganze Funktion von W_1 verschwinden soll, deren Koëfficienten ganze Funktionen der Koëfficienten der Gleichung $H = 0$ und deren Ableitungen nach $p_1, p_2, \ldots p_n$ sind. Es läfst sich aber zeigen, dafs ein solcher Ausdruck nur dann verschwinden kann, wenn sämtliche Koëfficienten für sich identisch verschwinden.

Aus der Definition einer vollständigen Lösung W^0 folgt, dafs die Funktionaldeterminante:

(6) $$D = \left|\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\lambda}\right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

nicht identisch gleich Null ist. Denn liefsen sich sämtliche n Funktionen $W_1, W_2, \ldots W_n$ durch weniger als n willkürliche Konstanten ausdrücken, so würde dasselbe von W^0 (abgesehen von der additiven Konstanten) gelten, W^0 würde also keine vollständige Lösung sein. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial W^0}{\partial p_\varkappa} = W_\varkappa(p_\varkappa; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

lassen sich daher umgekehrt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ als Funktionen von $\frac{\partial W^0}{\partial p_1}$, $\frac{\partial W^0}{\partial p_2}$, $\ldots \frac{\partial W^0}{\partial p_n}$ darstellen, und im besonderen ist:

$$\alpha_1 = -\Pi + \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda}\frac{\partial W^0}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial W^0}{\partial p_\lambda}.$$

Würde nun W_1 von den willkürlichen Konstanten nur α_1 enthalten, so könnte man umgekehrt α_1 durch $\frac{\partial W^0}{\partial p_1}$ allein darstellen, es müfsten also alle Koëfficienten $A_{\varkappa\lambda}$ ausser $A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1n}$ identisch verschwinden. Dann aber wäre die Determinante des Systems $A_{\varkappa\lambda}$ gleich Null, und das ist nicht der Fall, wie ich a. a. O. S. 322 nachgewiesen habe. Nun enthalten die Koëfficienten von S_1 nur $p_1, p_2, \ldots p_n$ und α_1, woraus die Behauptung für das Verschwinden von S_1 unmittelbar folgt.

Dieses wesentlich algebraische Verfahren liefert mithin ein System partieller Differentialgleichungen, dem die Koëfficienten der Gleichung $H = 0$ notwendig genügen müssen, wenn Separation der Variabeln stattfindet. Es ist klar, dafs durch geeignete Vertauschungen der Indices und der Differentiationszeichen aus diesem System $n - 1$ weitere hervorgehen, die der Bevorzugung von $p_2, p_3, \ldots p_n$ entsprechen.

Für den Fall $n = 2$ habe ich in meiner Abhandlung: „Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen, deren Linienelement ds durch

$$ds^2 = [\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)]\,(dq_1^2 + dq_2^2)$$

gegeben wird" (Mathematische Annalen, Bd. 35, S. 91) die betreffenden partiellen Differentialgleichungen für A_{11}, A_{12}, A_{22} und Π wirklich aufgestellt. Die Diskussion dieser Gleichungen ergab, dafs es für $n = 2$ drei wesentlich verschiedene Formen der Gleichung $H = 0$ giebt, bei denen diese notwendigen Bedingungen erfüllt sind, und da diese Gleichungen auch wirklich Separation der Variabeln gestatten, ist die Frage für den Fall $n = 2$ vollständig erledigt. Aber schon für $n = 3$ werden die algebraischen Rechnungen so umständlich, dafs mir eine weitere Verfolgung dieses Weges aussichtslos erschien. Ich gehe daher sofort zu der Auseinandersetzung einer anderen Untersuchungsmethode über, die sich auch für beliebige Werte von n mit Erfolg anwenden läfst.

2.

Den Ausgangspunkt für die folgende Untersuchung bildet die Aufgabe: Gegeben ist ein Ausdruck:

$$W^0(p_1, p_2, \ldots p_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt werden, dafs er vollständige Lösung einer Hamilton-Jacobischen

Differentialgleichung $H=0$ ist. Um nicht mifsverstanden zu werden, füge ich hinzu, man will nicht wissen, ob W^0 vollständige Lösung einer gegebenen Gleichung $H=0$ ist, sondern ob es eine solche Gleichung überhaupt giebt, für welche W^0 die angegebene Eigenschaft hat.

Zur Abkürzung werde

$$(7)\qquad \frac{\partial W^0}{\partial p_\varkappa} = W_\varkappa(p_1, p_2, \ldots p_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt, so dafs die Hamilton-Jacobische Gleichung übergeht in

$$(8)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda}\, W_\varkappa W_\lambda = 2(\Pi + \alpha_1).$$

Differentiiert man diese Gleichung partiell nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, so ergiebt sich:

$$(9)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n}\Big(\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda}\, W_\lambda\Big)\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu} = \delta_{1\mu} \qquad \left(\delta_{1\mu} = \begin{cases} 1 & \mu = 1 \\ 0 & \mu > 1 \end{cases} \quad \mu = 1, 2, \ldots n\right).$$

Da die Determinante:

$$(6)\qquad D = \left|\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu}\right| \qquad (\varkappa, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

nicht identisch gleich Null ist, so existiert zu dem System der Gröfsen $\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu}$ ein reciprokes

$$D_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n),$$

welches durch die Gleichungen:

$$(10)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu}\cdot D_{\mu\nu} = \delta_{\varkappa\nu} \qquad \left(\delta_{\varkappa\nu} = \begin{cases} 1 & \varkappa = \nu \\ 0 & \varkappa \gtrless \nu \end{cases} \quad \varkappa, \nu = 1, 2, \ldots n\right)$$

definiert ist. Daher lassen sich die Gleichungen (9) vollständig ersetzen durch:

$$(11)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda}\, W_\lambda = D_{1\varkappa}.$$

Setzt man diese Werte in (8) ein, so kommt:

$$(12)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} D_{1\varkappa}\cdot W_\varkappa = 2(\Pi + \alpha_1),$$

und hieraus erhält man:

$$(13)\qquad \Pi(\underset{p_1}{\cancel{q_1}}, \underset{p_2}{\cancel{q_2}}, \ldots \underset{p_n}{\cancel{q_n}}) = \sum_{\varkappa=1}^{n}\Big(\frac{1}{2}\, W_\varkappa - \alpha_1 \frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_1}\Big) D_{1\varkappa}.$$

Soll also W^0 eine vollständige Lösung der Gleichung $H = 0$ sein, so mufs notwendig der Ausdruck auf der rechten Seite von den willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ unabhängig sein, W^0 mufs daher den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} \sum_{\varkappa=1}^{n} D_{1\varkappa} W_\varkappa = 2\,\delta_{1\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdot \cdot n)$$

genügen, die sich aus (12) durch partielle Differentiation nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ergeben. Die Ausführung der Differentiation ergiebt vermöge (10):

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu} \cdot W_\varkappa = \delta_{1\mu}\,. \tag{14}$$

Hiervon läfst sich sofort eine Anwendung auf die Frage nach der Separation der Variabeln machen. In diesem Falle ist:

$$W_\varkappa = W_\varkappa(p_\varkappa;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)\,.$$

Da die Determinante D nicht identisch verschwindet, giebt es stets bestimmte Werte $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots \alpha_n^0$ der willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, für welche D von Null verschieden ist. Für diese festen Werte geht $\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\lambda}$ in eine Funktion von $p_\varkappa$ allein über, die mit $\omega_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)$ bezeichnet werden möge. Ebenso wird $\frac{1}{2} W_\varkappa - \alpha_1 \frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_1}$ eine Funktion $\omega_{\varkappa 0}$ von $p_\varkappa$ allein. Setzt man nun in dem Ausdruck (13) von Π für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die festen Werte $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots \alpha_n^0$ ein, so bleibt der Wert dieses Ausdruckes ungeändert, da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ in ihm nur scheinbar vorkommen. Hieraus folgt aber der Satz:

Gestattet eine Hamilton-Jacobische Differentialgleichung Separation der Variabeln, so läfst sich die Kräftefunktion stets auf die Form bringen:

$$\Pi = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{\varkappa 0}(p_\varkappa) \,.\, \Delta_\varkappa}{\sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{\varkappa 1}(p_\varkappa) \,.\, \Delta_\varkappa}\,, \tag{15}$$

wo $\Delta_\varkappa$ die Unterdeterminante von

$$|\,\omega_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\,| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdot \cdot n)$$

bedeutet, welche mit $\omega_{\varkappa 1}$ multipliciert ist.

Dies Theorem gestattet eine gewisse Umkehrung. Nimmt man $n(n+1)$ Funktionen der angegebenen Argumente

$$\omega_{\varkappa\nu}(p_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, 2, \ldots n \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots n\end{pmatrix}$$

ganz willkürlich an bis auf die eine Beschränkung, dafs die Determinante

$$\underset{(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)}{|\omega_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)|} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{\varkappa 1} \varDelta_\varkappa$$

nebst ihren Unterdeterminanten $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots \varDelta_n$ nicht identisch verschwindet, so giebt es stets Hamiltonsche Gleichungen, deren Kräftefunktion der Gleichung (15) genügt und welche Separation der Variabeln gestatten. Der Beweis hierfür kann indes erst später erbracht werden (Abschnitt 4).

Ist im besonderen $n = 2$, so erhält man:

$$D = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1},$$

$$D_{11} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2}, \qquad D_{12} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2}.$$

Da $D, \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2}$ nicht identisch verschwinden können, giebt es stets bestimmte Werte α_1^0, α_2^0 von α_1, α_2, für welche diese Gröfsen von Null verschieden sind. Setzt man diese Werte ein, so möge übergehen:

$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} \text{ in } \varkappa(p_1), \qquad -\frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2} \text{ in } \lambda(p_2),$$

$$\left(\frac{1}{2} W_1 - \alpha_1 \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1}\right) : \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} \text{ in } \mu(p_1), \; -\frac{1}{2}\left(W_2 - \alpha_1 \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1}\right) : \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2} \text{ in } \nu(p_2).$$

Dann wird:

$$\Pi = \frac{\mu(p_1) + \nu(p_2)}{\varkappa(p_1) + \lambda(p_2)},$$

und das ist genau die Form der Kräftefunktion, welche in meiner schon angeführten Abhandlung in den Mathematischen Annalen auftritt.

3.

Weitere Bedingungen für die Funktion W^0 ergeben sich, wenn man die Gleichungen (11) partiell nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ differentiiert. Dies liefert:

$$(16) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda} \frac{\partial W_\lambda}{\partial \alpha_\mu} = \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu} \qquad (\varkappa, \mu = 1, 2, \ldots n).$$

Multipliciert man auf beiden Seiten mit $W_\varkappa$ und summiert über $\varkappa = 1, 2, \ldots n$, so kommt vermöge (14):

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\Big(\sum_{\varkappa=1}^{n} A_{\varkappa\lambda} W_\varkappa\Big)\frac{\partial W_\lambda}{\partial \alpha_\mu} = \delta_{1\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdot\cdot n),$$

das sind eben genau die Gleichungen (9), aus denen die Gleichungen (11) hergeleitet wurden, so dafs aus den Gleichungen (16) die Gleichungen (11) rückwärts folgen. Genügt daher W^0 den Gleichungen (14), so tritt als weitere Bedingung nur hinzu, dafs sich die Koëfficienten $A_{\varkappa\lambda}$ aus den Gleichungen (16) bestimmen lassen. Diese n^2 Gleichungen lassen sich nun in n Gruppen zu je n teilen, so dafs $\varkappa$ in jeder Gruppe denselben Wert hat. Aus den n Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda}\frac{\partial W_\lambda}{\partial \alpha_\mu} = \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdot\cdot n)$$

erhält man

$$A_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu}\cdot D_{\mu\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdot\cdot n),$$

und diese n Gleichungen ersetzen vollständig die ursprünglichen. Die n^2 Gleichungen (16) sind daher vollständig gleichbedeutend mit den n^2 Gleichungen:

(17)
$$A_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu}\cdot D_{\mu\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdot\cdot n).$$

Soll also W^0 eine vollständige Lösung sein, so müssen die Ausdrücke auf der rechten Seite erstens unverändert bleiben, wenn $\varkappa$ mit λ vertauscht wird, und zweitens nur von $p_1, p_2, \ldots p_n$, nicht von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, abhängen.

Die erste Eigenschaft ist von selbst erfüllt, sobald W^0 den Gleichungen (14) genügt. Aus (14) folgt durch Differentiation nach α_ν:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial^2 D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha_\nu} W_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu}\cdot\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n).$$

Subtrahiert man hiervon die durch Vertauschung von μ und ν entstehende Gleichung, so ergeben sich die Identitäten:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu}\cdot\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\nu}\cdot\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n).$$

Multipliciert man auf beiden Seiten mit $D_{\nu\lambda}$ und summiert über $\nu = 1, 2, \ldots n$, so kommt:

$$\frac{\partial D_{1\lambda}}{\partial \alpha_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\nu}\cdot\frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu} D_{\nu\lambda}.$$

Werden endlich beide Seiten mit $D_{\mu\varrho}$ multipliciert und wird über $\mu = 1, 2, \ldots n$ summiert, so folgt:

$$(18) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial D_{1\lambda}}{\partial \alpha_\mu} D_{\mu\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} \left\{ \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\nu} D_{\nu\lambda} \cdot \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu} D_{\mu\varrho} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial D_{1\varrho}}{\partial \alpha_\nu} D_{\nu\lambda},$$

womit die Behauptung dargethan ist.

Die zweite Eigenschaft erfordert, dafs W^0 den partiellen Differentialgleichungen:

$$(19) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu} D_{\mu\lambda} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

genügt.

Hiermit ist folgendes Ergebnis gewonnen:

Soll ein Ausdruck:

$$W^0(p_1, p_2, \ldots p_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

vollständige Lösung einer Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung sein, so ist dafür notwendig, aber auch hinreichend, dafs er den partiellen Differentialgleichungen:

$$(14) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu} W_\varkappa = \delta_{1\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

$$(19) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu} D_{\mu\lambda} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

genügt. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist W^0 vollständige Lösung der Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial D_{1\varkappa}}{\partial \alpha_\mu} D_{\mu\lambda} \right) \cdot \frac{\partial W}{\partial p_\varkappa} \frac{\partial W}{\partial p_\lambda}$$

$$- \left(\sum_{\mu=1}^{n} \left[\frac{1}{2} W_\mu - \alpha_1 \frac{\partial W_\mu}{\partial \alpha_1} \right] D_{1\mu} + \alpha_1 \right).$$

Hat der Ausdruck W^0 die Form:

$$W^0 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int W_\varkappa(p_\varkappa; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) dp_\varkappa,$$

findet also Separation der Variabeln statt, so kann man wieder die

Schlussweise anwenden, die schon im vorigen Abschnitte auseinander gesetzt ist. Aufser den $n(n+1)$ Funktionen

$$\omega_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \dots n \\ \lambda = 0, 1, \dots n \end{pmatrix}$$

hat man dann noch $\frac{1}{2} n^2 (n+1)$ weitere Funktionen einer Veränderlichen einzuführen, die aus den Gröfsen

$$\frac{\partial^2 W_\varkappa}{\partial \alpha_\lambda \partial \alpha_\mu} \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

entspringen, so dafs im ganzen $\frac{1}{2} n(n+1)(n+2)$ solcher Funktionen auftreten. Man kommt so zu dem Satze:

Soll eine Hamilton-Jacobische Differentialgleichung Separation der Variabeln gestatten, so mufs es möglich sein, die Kräftefunktion Π in der Form (15) und die Koëfficienten $A_{11}, A_{12} = A_{21}, \dots A_{nn}$ als bestimmte rationale Funktionen von je $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Funktionen einer der Variabeln $p_1, p_2, \dots p_n$ auszudrücken.

Diese Bedingung ist notwendig, jedoch nicht hinreichend, was sich sofort für den einfachsten Fall $n = 2$ zeigt, für den die hinreichenden Bedingungen ja bekannt sind. Wohl aber gelangt man durch die in den beiden letzten Abschnitten entwickelten Sätze zur vollständigen Erledigung der Frage nach der Separation der Variabeln, wenn man von vorn herein über die Koëfficienten $A_{11}, A_{12}, \dots A_{nn}$ gewisse Voraussetzungen macht, die übrigens in fast allen der bis jetzt betrachteten besonderen Fälle erfüllt sind.

4.

Jene besondere Voraussetzung über die Koëfficienten der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung besteht darin, dafs in ihr nur die Quadrate der partiellen Ableitungen von W auftreten, so dafs sie die Form hat:

$$(4) \qquad H^* = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa \left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - (\Pi + \alpha_1) = 0.$$

Zu dem Systeme

$$A_{\varkappa\lambda} = A_\varkappa \delta_{\varkappa\lambda} \qquad \left(\delta_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \varkappa = \lambda \\ 0 & \varkappa \gtrless \lambda \end{cases} \; \varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n\right)$$

mit der Determinante:

$$A_1 \,.\, A_2 \dots . \, A_n$$

gehört das reciproke:

$$\alpha_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{A_\varkappa}\,\delta_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n),$$

so dafs, nach einer bekannten Ausdrucksweise, H^* aus der Differentialform

$$(20)\qquad T' = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{1}{A_\varkappa}\, dp_\varkappa^2$$

entspringt; daher darf keine der Gröfsen $A_1, A_2, \ldots A_n$ identisch gleich Null sein.

Unter dieser Annahme werden die Gleichungen in Abschnitt 2:

$$(8')\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa W_\varkappa^2 = 2\,(\Pi + \alpha_1),$$

$$(9')\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa W_\varkappa \frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\mu} = \delta_{1\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

$$(11')\qquad A_\varkappa W_\varkappa = D_{1\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

$$(13')\qquad \Pi = \sum_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{1}{2} W_\varkappa - \alpha_1 \frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_1}\right) D_{1\varkappa},$$

so dafs sich nicht nur Π, sondern auch $A_1, A_2, \ldots A_n$ durch die $n\,(n+1)$ Funktionen

$$\omega_{\varkappa\nu}(p_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \ldots n \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

ausdrücken lassen, und darin besteht eben die grofse Vereinfachung, welche durch jene Voraussetzung herbeigeführt wird. Man gelangt jedoch zu eleganteren Formeln, wenn man die Funktionen einer Veränderlichen in etwas anderer Art definiert. Die Gleichungen (9′) lassen sich nämlich auch in der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa \frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_\mu} = 2\,\delta_{1\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

schreiben. Um aus diesen n Gleichungen $A_1, A_2, \ldots A_n$ zu bestimmen, setze man:

$$\left|\frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_\mu}\right|_{(\varkappa, \mu = 1, 2, \ldots n)} = Q = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_1}\, Q_\varkappa,$$

so dafs

$$Q = 2^n\, W_1 \,.\, W_2 \ldots W_n \,.\, D$$

ist. Da D nicht identisch verschwinden darf und, wenn eine der Gröfsen $W_1, W_2, \ldots W_n$ identisch verschwände, dasselbe von D gelten würde, ist auch Q nicht identisch gleich Null. Mithin ist:

(11″) $$A_\varkappa = 2\,\frac{Q_\varkappa}{Q}.$$

Setzt man diese Werte in (8′) ein, so folgt:

(13″) $$\Pi = \frac{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n}\left(W_\varkappa^2 - \alpha_1\,\frac{\partial(W_\varkappa^2)}{\partial\alpha_1}\right)\cdot Q_\varkappa}{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial(W_\varkappa^2)}{\partial\alpha_1}\cdot Q_\varkappa}.$$

Findet Separation der Variabeln statt, so lege man wieder den willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ bestimmte Werte $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots \alpha_n^0$ bei, für welche $Q, Q_1, Q_2, \dots Q_n$ nicht identisch verschwinden. Dann möge übergehen: $\frac{\partial(W_\varkappa^2)}{\partial\alpha_1}$ in $2\varphi_{\varkappa 1}(p_\varkappa)$, $\frac{\partial(W_\varkappa^2)}{\partial\alpha_2}$ in $2\varphi_{\varkappa 2}(p_\varkappa)$ u. s. w. bis $\frac{\partial(W_\varkappa^2)}{\partial\alpha_n}$ in $2\varphi_{\varkappa n}(p_\varkappa)$, endlich $W_\varkappa^2 - \alpha_1\,\frac{\partial(W_\varkappa^2)}{\partial\alpha_1}$ in $2\varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa)$. Es sei:

(21) $$\underset{(\varkappa,\lambda=1,2,\dots n)}{|\,\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\,|} = \Phi = \sum_{\varkappa=1}^{n}\varphi_{\varkappa 1}(p_\varkappa)\,\Phi_\varkappa$$

und

(22) $$\Phi' = \sum_{\varkappa=1}^{n}\varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa)\,\Phi_\varkappa.$$

Dann gehen die Gleichungen (11″) und (13″) über in:

(23) $$A_\varkappa = \frac{\Phi_\varkappa}{\Phi} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

(24) $$\Pi = \frac{\Phi'}{\Phi},$$

und damit ist der Satz bewiesen:

Wenn die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$H = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa\left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - 2(\Pi + \alpha_1) = 0$$

Separation der Variabeln gestattet, so giebt es notwendig ein System von $n(n+1)$ Funktionen je einer Veränderlichen:

$$\varphi_{\varkappa\nu}(p_\varkappa) \qquad \begin{matrix}(\varkappa = 1, 2, \dots n)\\ (\nu = 0, 1, 2, \dots n)\end{matrix}$$

von der Beschaffenheit, daſs sich die Koëfficienten $A_1, A_2, \dots A_n$ durch die Gleichungen (23), die Kräftefunktion Π durch Gleichung (24) darstellen lassen.

Wird jetzt umgekehrt das System der Funktionen $\varphi_{\varkappa\nu}(p_\varkappa)$ ganz willkürlich angenommen bis auf die Beschränkung, daſs keine der

Determinanten Φ, Φ_1, ... Φ_n identisch verschwindet, und werden A_1, A_2, ... A_n und Π durch die Gleichungen (24) definiert, so entsteht die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung:

$$(25) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\Phi_\varkappa}{\Phi}\left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - 2\left(\frac{\Phi'}{\Phi} + \alpha_1\right) = 0,$$

welche zu der quadratischen Differentialform

$$(26) \qquad T' = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\varkappa} dp_\varkappa^2$$

gehört. Dieser Differentialgleichung genügt man aber durch:

$$(27) \qquad W = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \sqrt{2\varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa) \cdot \alpha_\lambda} \cdot dp_\varkappa.$$

In der That folgt hieraus:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 = 2\varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa) \cdot \alpha_\lambda,$$

und setzt man diesen Wert von $\left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2$ ein in die Gleichung (25):

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \Phi_\varkappa \left(\left(\frac{\partial W^2}{\partial p_\varkappa}\right) - 2\varphi_{\varkappa 0} - 2\varphi_{\varkappa 1} \cdot \alpha_1\right) = 0,$$

so kommt links:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \left\{\Phi_\varkappa \cdot \sum_{\lambda=2}^{n} 2\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa) \cdot \alpha_\lambda\right\} = \sum_{\lambda=2}^{n} \left\{2\alpha_\lambda \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa) \cdot \Phi_\varkappa\right\},$$

und in diesem Ausdrucke verschwinden die Koëfficienten von α_2, α_3, ... α_n alle identisch. Die Lösung (27) enthält daher aufser α_1 und der additiven Konstanten weitere $n - 1$ willkürliche Konstanten α_2, α_3, ... α_n. Um zu zeigen, dafs diese Lösung eine vollständige ist, hat man nur noch den Wert der Determinante D oder, was auf dasselbe herauskommt, der Determinante Q zu berechnen. Es ist aber

$$\frac{\partial(W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_\mu} = 2\varphi_{\varkappa\mu}(p_\varkappa),$$

also

$$Q = 2^n \cdot \Phi,$$

und Φ ist der Voraussetzung nach nicht identisch gleich Null. Es gilt daher der Satz (vergl. den Schlufs von Abschnitt 2):

Alle Hamilton-Jacobischen Differentialgleichungen der Form

$$(4)\qquad H^* = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa \left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - 2(\Pi + \alpha_1) = 0,$$

welche Separation der Variabeln gestatten, sind dargestellt durch:

$$(25)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\Phi_\varkappa}{\Phi}\left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - 2\left(\frac{\Phi'}{\Phi} + \alpha_1\right) = 0,$$

wobei

$$(21)\qquad \Phi = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{\varkappa 1}(p_\varkappa)\,\Phi_\varkappa = |\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

$$(22)\qquad \Phi' = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa)\,\Phi_\varkappa$$

ist. Die Funktionen $\varphi_{\varkappa\nu}(p_\varkappa)$ sind ganz willkürlich bis auf die Beschränkung, dafs $\Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_n$ nicht identisch verschwinden. Die Gleichung (25) hat die vollständige Lösung:

$$(27)\qquad W = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \sqrt{2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\varphi_{\varkappa\lambda}\cdot\alpha_\lambda}\cdot dp_\varkappa.$$

Aus der Gleichung (27) erhält man als Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$(28)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\varkappa 1}}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\varphi_{\varkappa\lambda}\cdot\alpha_\lambda}}\,dp_\varkappa = \tau - t$$

$$(29)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\varkappa\mu}}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\varphi_{\varkappa\lambda}\cdot\alpha_\lambda}}\,dp_\varkappa = \beta_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots n),$$

so dafs man zu folgendem Theorem der Dynamik geführt wird:

Läfst sich für ein dynamisches Problem die lebendige Kraft durch den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\varkappa}\left(\frac{dp_\varkappa}{dt}\right)^2$$

darstellen, während gleichzeitig die Kräftefunktion die Form:

$$\Pi = \frac{\Phi'}{\Phi}$$

hat, so sind die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung die Gleichungen (28) und (29).

Die Differentialgleichungen der Bewegung für das eben betrachtete dynamische Problem lassen sich auch ansehen als die Differentialgleichungen der Bewegung eines Punktes der Masse 1 in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, deren Linienelement ds durch:

$$ds^2 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\varkappa} dp_\varkappa^2 \tag{30}$$

gegeben wird (vergl. die Abhandlung von Herrn Lipschitz: Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 82 (1877). S. 331, sowie meine oben angeführte Abhandlung in demselben Journal, S. 331). Ist im besonderen die Kräftefunktion Π gleich Null, so ist die Bahn des Punktes eine geodätische Linie der betreffenden n-fachen Mannigfaltigkeit (E. Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differenziali. Memorie della Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Serie seconda. Tomo XIII. Bologna 1868. Formel 21.), man hat also als Corollar des eben bewiesenen Theorems:

Läfst sich das Quadrat des Linienelementes ds einer n-fachen Mannigfaltigkeit in der Form:

$$ds^2 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\varkappa} dp_\varkappa^2$$

darstellen, so sind die Gleichungen der geodätischen Linien durch Quadraturen bestimmbar, sie lauten nämlich in diesen Veränderlichen $p_1, p_2 \ldots p_n$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\varkappa\mu}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} 2\varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = \beta_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots n). \tag{31}$$

Für $n = 2$ gehen diese Gleichungen genau in diejenigen über, welche Liouville in seiner Abhandlung: Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point peuvent s'intégrer (Liouvilles Journal, t. XI, S. 345. t. XII, S. 410 [1846]) aufgestellt hat, (vergl. auch J. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888. S. 149).

5.

Die n Gleichungen:

$$(28)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n}\int\frac{\varphi_{\varkappa 1}\,dp_\varkappa}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0}+\sum_{\lambda=1}^{n}2\varphi_{\varkappa\lambda}\cdot\alpha_\lambda}}=\tau-t$$

$$(29)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n}\int\frac{\varphi_{\varkappa\mu}\,dp_\varkappa}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0}+\sum_{\lambda=1}^{n}2\varphi_{\varkappa\lambda}\cdot\alpha_\lambda}}=\beta_\mu \qquad (\mu=2,3,\ldots n)$$

bestimmen $p_1, p_2, \ldots p_n$ als Funktionen der Zeit t.

Für $n=1$ erhält man:

$$(32)\qquad \int\frac{\varphi_{11}(p_1)\,dp_1}{\sqrt{2\varphi_{10}+2\varphi_{11}\cdot\alpha_1}}=\tau-t.$$

N. H. Abel hat in einer nachgelassenen Abhandlung: Propriétés remarquables de la fonction $y=\varphi(x)$ etc. (Oeuvres complètes, Nouvelle édition par MM. L. Sylow et S. Lie. T. II. S. 40) eine Gleichung der Form

$$\int\frac{\varphi(p_1)\,dp_1}{\sqrt{\psi(p_1)}}=t_1$$

betrachtet und gezeigt, dafs aus dieser Gleichung unter gewissen Voraussetzungen p_1 als periodische Funktion von t_1 bestimmt ist. Dieselbe Gleichung ist später von Herrn Weierstrafs eingehend behandelt worden (Über eine Gattung reell periodischer Funktionen. Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1866. S. 97). Endlich habe ich sie unter etwas allgemeineren Voraussetzungen in meiner Inauguraldissertation: Über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche (Berlin 1885) diskutiert.

Für $n=2$ ergiebt sich, wenn zur Abkürzung

$$2\varphi_{\varkappa 0}+2\varphi_{\varkappa 1}\cdot\alpha_1+2\varphi_{\varkappa 2}\cdot\alpha_2=\psi_\varkappa(p_\varkappa) \qquad (\varkappa=1,2)$$

gesetzt wird:

$$(33)\qquad \begin{aligned}&\int\frac{\varphi_{11}\,dp_1}{\sqrt{\psi_1(p_1)}}+\int\frac{\varphi_{21}\,dp_2}{\sqrt{\psi_2(p_2)}}=\tau-t,\\ &\int\frac{\varphi_{12}\,dp_1}{\sqrt{\psi_1(p_1)}}+\int\frac{\varphi_{22}\,dp_2}{\sqrt{\psi_2(p_2)}}=\beta_2.\end{aligned}$$

Dieses Umkehrproblem läfst sich auffassen als ein besonderer Fall eines allgemeineren, welches Herr Staude untersucht hat (Über eine Gattung doppelt reell periodischer Funktionen zweier Veränderlichen.

Mathematische Annalen, Bd. 29. S. 468 (1887) und: Über bedingt periodische Funktionen eines beschränkt veränderlichen komplexen Argumentes und Anwendungen derselben auf die Mechanik. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 105. S. 298. 1888). Es folgt daraus, dafs die Gleichungen (33) unter gewissen Voraussetzungen p_1 und p_2 als eindeutige, endliche, stetige, bedingt periodische Funktionen der Zeit t definieren; der von Herrn Staude eingeführte Begriff bedingt periodischer Funktionen wird unten näher erörtert werden.

Die Vermutung liegt nahe, dafs auch für den allgemeinen Fall von n Veränderlichen ein entsprechender Satz gilt. Dafs es sich in der That so verhält, soll im folgenden gezeigt werden.

Dabei gehe ich aus von den allgemeineren Integralgleichungen:

$$(34) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa(p_\varkappa)}} = t_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

zwischen den reellen Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und $t_1, t_2, \ldots t_n$. Durch Differentiation folgt:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)}{\sqrt{\psi_\varkappa(p_\varkappa)}}\, dp_\varkappa = dt_\lambda .$$

Damit die Gleichungen (34) ein Umkehrproblem definieren, ist daher notwendig, dafs die Determinante

$$(35) \qquad \left| \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)}{\sqrt{\psi_\varkappa(p_\varkappa)}} \right| = \frac{\Phi}{\sqrt{\psi_1 \cdot \psi_2 \cdots \psi_n}}$$

nicht identisch verschwindet. Solange diese Determinante einen endlichen von Null verschiedenen Wert hat, sind $dp_1, dp_2, \ldots dp_n$ eindeutig durch $dt_1, dt_2, \ldots dt_n$ bestimmt. Beschränkt man also die Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots p_n$ auf einen Bereich, innerhalb dessen $\Phi, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ endliche, von Null verschiedene Werte haben, so sind $p_1, p_2, \ldots p_n$ als eindeutige Funktionen von $t_1, t_2, \ldots t_n$ vermöge der Gleichungen (34) definiert; man erhält mit anderen Worten nur einen Zweig des Gebildes $(p_1, p_2, \ldots p_n)$. Hierin besteht die erste Voraussetzung der folgenden Untersuchung.

Die zweite Voraussetzung besagt, dafs die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ sich darstellen lassen sollen in der Form:

$$(36) \qquad \psi_\varkappa = (p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)\, \chi_\varkappa(p_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

und zwar sind hier $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ reelle Gröfsen und $a_\varkappa < b_\varkappa$. In dem Bereiche

$$a_\varkappa \leq p_\varkappa \leq b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

der im folgenden kurz mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden möge, soll die erste Voraussetzung erfüllt sein. Damit die Integrale reelle Werte haben, müssen die Funktionen $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ endliche positive Werte haben; dem Zeichen $\sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}$ werde der positive Wert beigelegt, während über das Vorzeichen von $\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}$ noch verfügt werden darf.

Über die Anfangswerte der Integration werde festgesetzt, dafs zu dem Wertsystem $p_1 = a_1$, $p_2 = a_2$, .. $p_n = a_n$ das Wertsystem $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, ... $t_n = 0$ gehöre.

Die Gleichungen:

$$(37) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\,dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)} \cdot \sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}} = t_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, .. n)$$

definieren dann $p_1, p_2, .. p_n$ für den Bereich $\mathfrak{B}$ als eindeutige, endliche, stetige Funktionen von $t_1, t_2, \ldots t_n$. Werden jetzt an Stelle der Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots p_n$ neue Veränderliche $w_1, w_2, \ldots w_n$ eingeführt durch:

$$(38) \qquad p_\varkappa = \frac{a_\varkappa + b_\varkappa}{2} + \frac{a_\varkappa - b_\varkappa}{2} \cos w_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, .. n),$$

so ist zunächst:

$$(39) \qquad \frac{dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}} = dw_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, .. n);$$

ferner erkennt man, dafs der Ausdruck:

$$\frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)}{\sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}}$$

in eine eindeutige, endliche, gerade Funktion $h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)$ von $w_\varkappa$ mit der Periode 2π übergeht. Wird noch ausgemacht, dafs dem Wertsystem $p_1 = a_1$, $p_2 = a_2$, ... $p_n = a_n$ das Wertsystem $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, .. $w_n = 0$ entsprechen soll, so gehen die Gleichungen (37) in:

$$(40) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{0}^{w_\varkappa} h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)\,dw_\varkappa = t_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, .. n)$$

über, und man hat jetzt den Vorteil, dafs $w_1, w_2 \ldots w_n$ unbeschränkt veränderliche reelle Variabeln sind.

Nunmehr werde als dritte und letzte Voraussetzung die eingeführt, dafs die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ und damit auch die Funktionen $h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)$ für beliebige Werte von $w_\varkappa$ ihr Zeichen nicht wechseln. Hieraus folgt, dafs, wenn $w_\varkappa$ von 0 bis π wächst, der Ausdruck:

$$\tau_\varkappa = \frac{\int_0^{w_\varkappa} h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)\, dw_\varkappa}{\int_0^{\pi} h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)\, dw_\varkappa}$$

stetig von 0 bis 1 zunimmt. Der Wert des bestimmten Integrales im Nenner werde mit $\omega_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet, so dafs

$$(41) \qquad \omega_{\varkappa\lambda} = \int_{a_\varkappa}^{b_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\, dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}\,\sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}}$$

ist; der Wurzel $\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}$ ist gemäfs Gleichung (39), da $dp_\varkappa$ und $dw_\varkappa$ positiv sind, das positive Vorzeichen zu geben.

Vermöge der Gleichungen (37) ist daher folgender Zusammenhang zwischen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und $t_1, t_2, \ldots t_n$ gestiftet. Durchläuft der Punkt $p_1, p_2, \ldots p_n$ das Gebiet $\mathfrak{B}$, so bewegt sich der Punkt $t_1, t_2, \ldots t_n$ in dem Gebiete:

$$t_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{\varkappa\lambda} \cdot \tau_\varkappa \qquad (0 \leqq \tau_\varkappa \leqq 1, \ \lambda = 1, 2, \ldots n),$$

und dies geschieht so, dafs die Punkte dieser beiden Gebiete umkehrbar eindeutig einander zugeordnet sind.

Ersetzt man jetzt in der vorhergehenden Diskussion überall $w_\varkappa$ durch $-w_\varkappa$, so bleibt $p_\varkappa$ ungeändert, und dasselbe gilt von den Funktionen $h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)$, daher ist

$$\int_0^{-w_\varkappa} h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)\, dw_\varkappa = -\int_0^{w_\varkappa} h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)\, dw_\varkappa\,,$$

folglich gehen dabei die Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_n$ gerade in die entgegengesetzten Werte: $-t_1, -t_2, \ldots -t_n$ über. Die Gebiete $\mathfrak{B}$ und

$$t_\lambda = -\sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{\varkappa\lambda} \cdot \tau_\varkappa \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

stehen also in derselben Beziehung, wie die Gebiete $\mathfrak{B}$ und

$$t_\lambda = +\sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{\varkappa\lambda} \cdot \tau_\varkappa .$$

Mithin sind $p_1, p_2, \ldots p_n$ gerade Funktionen von $t_1, t_2, \ldots t_n$.

Zu einem gegebenen Wertsysteme $p_1^0, p_2^0, \ldots p_n^0$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ gehört je ein Wertsystem $\pm t_1^0, \pm t_2^0, \ldots \pm t_n^0$ in diesen beiden Bereichen der Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_n$. Alle anderen zugehörigen Wertsysteme erhält man, indem diesen beiden beliebige Vielfache der n Systeme:

$$\pm 2\omega_{\mu 1}, \ \pm 2\omega_{\mu 2}, \ \ldots\ldots \pm 2\omega_{\mu n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

hinzugefügt werden. Um dies einzusehen, braucht man nur etwa die Variable w_μ um 2π wachsen zu lassen, während $w_1, w_2, \ldots w_{\mu-1}, w_{\mu+1} \ldots w_n$ unverändert bleiben. Dabei bleiben $p_1, p_2, \ldots p_n$ und daher auch die Funktionen $h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)$ unverändert, während nach den Gleichungen (40) jede der Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_n$ wächst beziehungsweise um:

$$\int_{w_\mu}^{w_\mu + 2\pi} h_{\mu\lambda}(w_\mu)\,dw_\mu = \int_0^{2\pi} h_{\mu\lambda}(w_\mu)\,dw_\mu = 2\omega_{\mu\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n).$$

Hiermit ist als endliches Resultat der Satz gewonnen:

Die Gleichungen:

$$(40) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\,dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}\sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}} = t_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

definieren $p_1, p_2, \ldots p_n$ für den Bereich $\mathfrak{B}$ als eindeutige, endliche, stetige, gerade Funktionen von $t_1, t_2, \ldots t_n$, welche n-fach periodisch sind mit den Periodensystemen

$$2\omega_{\mu 1}, \ 2\omega_{\mu 2}, \ \ldots \ 2\omega_{\mu n} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n);$$

dabei werden die Perioden durch

$$\omega_{\varkappa\lambda} = \int_{a_\varkappa}^{b_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\,dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}\sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}}$$

gegeben. Alle zu einem Wertsystem $p_1^0, p_2^0, \ldots p_n^0$ gehörigen Wertsysteme $t_1, t_2, \ldots t_n$ sind dargestellt durch:

$$\pm t_\lambda^0 + \sum_{\varkappa=1}^{n} 2\, m_\varkappa \omega_{\varkappa\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

wobei die $m_1, m_2, \ldots m_n$ ganze Zahlen bedeuten. Das Wertsystem $t_1^0, t_2^0, \ldots t_n^0$ gehört dem Bereiche

$$t_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} \tau_\varkappa \omega_{\varkappa\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

an und ist das einzige in diesem Bereiche.

Man überzeugt sich leicht, daſs dieser Satz für $n = 2$ genau in den von Herrn Staude gefundenen übergeht.

6.

Die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes lassen sich sofort auf die Gleichungen (28) und (29) anwenden. Zu diesem Zwecke werde

$$2\,\varphi_{\varkappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\,\varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda = \psi_\varkappa(p_\varkappa)$$

gesetzt. Zur Zeit $t = 0$ mögen $p_1, p_2, \ldots p_n$ gerade die Werte $a_1, a_2, \ldots a_n$ haben. Wird noch $\varphi_{\varkappa 1}$ durch $-\varphi_{\varkappa 1}$ ersetzt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(28') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa 1}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa(p_\varkappa)}} = t,$$

$$(29') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\mu}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa(p_\varkappa)}} = 0 \qquad (\mu = 2, 3, \cdots n).$$

Sind jene drei Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}$ und $\psi_\varkappa$ erfüllt, so ergeben sich, wenn die rechten Seiten beziehungsweise gleich $t_1, t_2, \ldots t_n$ gesetzt werden, $p_1, p_2, \ldots p_n$ als eindeutige, endliche, stetige, gerade Funktionen von $t_1, t_2, \ldots t_n$, welche n-fach periodisch sind mit den Periodensystemen:

$$2\,\omega_{\mu 1}, \quad 2\,\omega_{\mu 2}, \quad \ldots\ldots \quad 2\,\omega_{\mu n} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n).$$

Wird darin

$$t_1 = t, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0, \quad \ldots\ldots \quad t_n = 0$$

gesetzt, so erhält man $p_1, p_2, \ldots p_n$ als Funktionen der Zeit t, die den Gleichungen (28′) und (29′) und daher auch den Differentialgleichungen der Bewegung genügen.

Die Bewegung des Systems materieller Punkte, die durch diese Funktionen der Zeit $p_1, p_2, \ldots p_n$ beschrieben wird, ist als eine wesentlich stabile zu bezeichnen, da diese Gröſsen nie den Bereich $\mathfrak{B}$ überschreiten. Gelangt das System in eine Lage, die durch einen Punkt der Grenze dieses Bereiches charakterisiert ist, so findet sofort wieder Umkehr nach dem Innern statt. Eine genauere Untersuchung zeigt, dafs fast alle Sätze, die ich in meiner oben erwähnten Inauguraldissertation in betreff der Bewegung eines Punktes aufgestellt habe, ein Analogon für diese allgemeinere Art der Bewegung eines Systemes materieller Punkte haben; hierauf soll jedoch an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

Die Funktionen $p_1, p_2, \dots p_n$ von $t_1, t_2, \dots t_n$ blieben unverändert, wenn ihre Argumente beziehungsweise um ein Periodensystem

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} 2\, m_\varkappa \omega_{\varkappa\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

vermehrt wurden. Sollen nun $t_2, t_3, \dots t_n$ die festen Werte Null haben, so ist eine solche Hinzufügung nur statthaft, wenn für bestimmte Werte der Zahlen $m_1, m_2, \dots m_n$ gerade

$$(42) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} 2\, m_\varkappa\, \omega_{\varkappa\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots n)$$

ist. Nur, wenn es solche Zahlen $m_1, m_2, \dots m_n$ giebt, sind $p_1, p_2, \cdots p_n$ periodische Funktionen der Zeit t, und zwar mit der Periode:

$$(43) \qquad 2\Omega = \sum_{\varkappa=1}^{n} 2 m_\varkappa \omega_{\varkappa 1}.$$

Solche Funktionen $p_1, p_2, \dots p_n$ von $t_1, t_2, \dots t_n$ sind von Herrn Staude als bedingt periodische Funktionen für $t_1 = t, t_2 = 0, \dots t_n = 0$ bezeichnet worden.

Zum Schlufs möge noch gezeigt werden, wie man von den allgemeinen Gleichungen (28) und (29) dieser Abhandlung zu den Gleichungen in elliptischen Koordinaten gelangt, die sich in Jacobis Dynamik finden. Es ergiebt sich dabei zugleich eine Verifikation der Resultate der beiden letzten Abschnitte.

Es sei

$$c_1, c_2, \dots c_n$$

eine Reihe reeller Gröfsen, und die Funktion $\varpi(u)$ sei definiert durch:

$$(44) \qquad \varpi(u) = 4 \prod_{\varkappa=1}^{n} (u + c_\varkappa).$$

Setzt man dann:

$$(45) \qquad \varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa) = \frac{p_\varkappa^{n-\lambda}}{\varpi(p_\varkappa)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n),$$

und bezeichnet zur Abkürzung

$$(u - p_1)\,(u - p_2)\,\ldots\,(u - p_n)$$

mit $\psi(u)$, die Ableitung davon nach u mit $\psi'(u)$, so ist:

$$(21') \qquad \Phi = \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{\psi'(p_\varkappa)}{\varpi(p_\varkappa)} = \sum_{n=1}^{n} \frac{p_\varkappa^{n-1}}{\varpi(p_\varkappa)}\,\Phi_\varkappa.$$

Nach der Eulerschen Formel ist nun:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{p_\varkappa^{n-1}}{\psi'(p_\varkappa)} = 1,$$

folglich erhält man aus (21′)

$$(21'') \qquad \Phi_\varkappa = \frac{\varpi(p_\varkappa)}{\psi'(p_\varkappa)} \cdot \Phi.$$

Sind also die Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}$ durch (45) gegeben, so ist:

$$(30') \qquad ds^2 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_\varkappa}\,dp_\varkappa^{\;2} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\psi'(p_\varkappa)}{\varpi(p_\varkappa)}\,dp_\varkappa^{\;2},$$

und die zugehörige Hamilton-Jacobische Differentialgleichung lautet:

$$(25') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\varpi(p_\varkappa)}{\psi'(p_\varkappa)} \left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - 2\,(\Pi + \alpha_1) = 0.$$

Soll diese Gleichung Separation der Variabeln gestatten, so ist notwendig und hinreichend, dafs die Kräftefunktion Π sich auf die Form:

$$(15,\,24) \qquad \Pi = \frac{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{\varkappa 0}\,\Phi_\varkappa}{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{\varkappa 1}\,\Phi_\varkappa}$$

bringen läfst, wobei die Funktionen $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \ldots \varphi_{n0}$ noch ganz willkürlich sind. Ich setze:

$$\varphi_{\varkappa 0} = \frac{f_\varkappa(p_\varkappa)}{\varpi(p_\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

so dafs $f_1, f_2, \ldots f_n$ willkürliche Funktionen sind. Dann wird:

$$\Pi = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{f_\varkappa(p_\varkappa)}{\varpi(p_\varkappa)} \cdot \frac{\Phi_\varkappa}{\Phi} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{f_\varkappa(p_\varkappa)}{\psi'(p_\varkappa)}.$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung:

$$(25'') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\varpi(p_\varkappa)}{\psi'(p_\varkappa)} \left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - 2\left(\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{f_\varkappa(p_\varkappa)}{\psi'(p_\varkappa)} + \alpha_1\right) = 0$$

gestattet also Separation der Variabeln, welches auch die Funktionen $f_1(p_1), \ldots, f_n(p_n)$ sein mögen. Sie besitzt die vollständige Lösung:

$$(27') \qquad W = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \sqrt{2 f_\varkappa(p_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2 p_\varkappa^{n-\lambda} \cdot \alpha_\lambda} \cdot \frac{d p_\varkappa}{\sqrt{\varpi(p_\varkappa)}}.$$

Die Integralgleichungen des zugehörigen dynamischen Problems sind daher:

$$(28') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{p_\varkappa^{n-1}}{\sqrt{2 f_\varkappa(p_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2 p_\varkappa^{n-\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} \frac{d p_\varkappa}{\sqrt{\varpi(p_\varkappa)}} = \tau - t$$

$$(29') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{p_\varkappa^{n-\lambda}}{\sqrt{2 f_\varkappa(p_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2 p_\varkappa^{n-\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} \cdot \frac{d p_\varkappa}{\sqrt{\varpi(p_\varkappa)}} = \beta_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots n).$$

Ist im besonderen:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots\ f_n = 0,$$

so ergeben sich genau die Gleichungen eines Jacobischen Umkehrproblems. Es ist bekannt, dafs bei einem solchen Umkehrproblem $p_1, p_2, \ldots p_n$ als Funktionen von $t_1, t_2, \ldots t_n$ gerade die in dem fünften Abschnitt angegebenen Eigenschaften haben.

Diese Sätze über die Separation der Variabeln in der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung für elliptische Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_n$ finden sich für $n = 3$ bereits in der schon angeführten Arbeit von Liouville, für den allgemeinen Fall aber in der Inauguraldissertation von Herrn Rosochatius (Über die Bewegung eines Punktes. Göttingen 1877).

Berlin, den 29. Januar 1891.