UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Ueber die Einführung unserer gegenwärtigen Ziffern in Europa**

Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik.
Band 1 (1856),
Seite 65 – 74.
Signatur UB Heidelberg: L 6::1.1856

http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/12812

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

von

Dr. O. Schlömilch und Dr. B. Witzschel.

Erster Jahrgang.

Mit 9 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1856.

IV.

Ueber die Einführung unserer gegenwärtigen Ziffern in Europa.

Von Dr. Cantor, Privatdocent in Heidelberg.

„Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellungswerth giebt, ist so einfach, dass man eben deshalb nicht genugsam erkennt, welche Bewunderung er verdient."

Wenn noch der berühmte Verfasser der *exposition du système du monde* sich in dieser Weise aussprechen konnte, so wäre der jetzigen Generation gegenüber ein solcher Vorwurf der Undankbarkeit wohl ungegründet, indem in diesem Jahrhunderte die bedeutendsten Forscher sich gerade mit Untersuchungen über die Erfindung unseres Zahlensystemes beschäftigten und in der Heftigkeit ihrer Polemik ein glänzendes Zeugniss von der Wichtigkeit des behandelten Gegenstandes ablegten*). Wenn wir auch nach diesen Gelehrten versuchen wollen, über denselben Gegenstand Mittheilungen zu machen, so ist unser Zweck weniger der, Neues zu liefern, als vielmehr das vorhandene Material zu sichten und unbeschadet der scheinbaren Widersprüche es zu einem klaren Bilde zu vereinigen. Eben deshalb wollen wir uns auch auf die Betrachtung eines einzigen Zahlensystemes beschränken und von anderweitigen Bezeichnungen nur so viel erwähnend vorausschicken, als zum Verständniss unumgänglich ist.

So ist aber vor Allem nothwendig ein Begriff von der Zahlenschrift der Römer und Griechen. Beide basiren sich, wie es die Sprache auch mit sich brachte, auf die Grundzahl 10. Bei den Römern bezeichnete ein Verticalstrich I die Einheit; zwei zu einem Kreuze verbundenen Striche X die Zehner; drei Striche, von denen einer vertical, zwei horizontal waren, C die Hundert; endlich vier Striche, wo drei verticale von einem horizontalen

*) Zu den Hauptarbeiten, die in dieser Richtung erschienen sind, gehören: *Mannert, De numerorum quos Arabicos vocant, vera origine Pythagorica,* (*Norimb.* 1801). Alex. von Humboldt, Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen etc. (in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. IV, Berlin 1829). Chasles, Geschichte der Geometrie (übersetzt von Sohncke 1839 S. 526 ff. der Uebersetzung). *Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie (Paris* 1838 *T. I. pag.* 193, 201, 377, *T. II. pag.* 21, 287). Nesselmann, Geschichte der Algebra bei den Griechen (Berlin 1842, drittes Kapitel: Ueber Zahlensysteme und Zahlzeichen).

bedeckt waren, $\overline{|||}$ die Tausend*). Daraus bildeten sich zum Theil durch Abrundung die späteren Zeichen I, X, C, (I) und aus den drei letzteren durch Halbirung die Zeichen V, L, D für 5, 50, 500, womit auch der Grundzahl fünf ein Recht eingeräumt war. Alle zwischenliegenden Zahlen bildeten sich durch blosse Juxtapposition theils additiv, theils subtractiv, je nachdem ein Zeichen von geringerem Werthe einem höheren folgte oder voranging. Wir finden in dieser Art der Bezeichnung die unvollkommenste Spur eines Systems, das unbehilflichste Mittel Rechnungen auszuführen.

Ganz unverhältnissmässig höher steht schon die Art, wie die Griechen ihre Zahlen schrieben. Bei ihnen waren schon besondere Zeichen für die einzelnen Zahlen zwischen jenen Hauptgrenzen so weit vorhanden, dass jeder der verschiedenen Einer, Zehner und Hunderter durch einen besonderen Buchstaben ihres Alphabetes angegeben wurde, was sowohl die Aussprache der einzelnen Zahlen bedeutend erleichterte, als auch der Rechnung eine übersichtlichere Basis darbot. Missverständnissen war dadurch vorgebeugt, dass in der Regel die Buchstaben als Zahlenausdrücke durch einen darüber gezogenen Horizontalstrich ausgezeichnet wurden, wie es auch bei den semitischen Völkern gebräuchlich war, z. B. $\overline{\mu\eta}=48$, $\overline{\psi o\eta}=778$, $\overline{\tau\iota\alpha}=311$. Um die Tausender zu schreiben, wurden die früheren Buchstaben, welche 1 bis 9 bezeichneten, wieder benutzt, indem denselben ein seitwärts unten angebrachter Strich den so erhöhten Werth beilegte. z. B. $\underset{,}{\alpha}=1000$, $\underset{,}{\beta}=2000$, $\underset{,}{\Theta}=9000$. Um 10000 hingegen zu schreiben, benutzte man nicht $\underset{,}{\iota}$ sondern *M* oder *Mv.* als Anfangssilbe des Wortes *μυριας*, welchen Zeichen die Einheitszahlen als Factoren entweder vorgestellt, oder übergeschrieben, oder auch wohl hinten angehängt wurden.**)

Jedenfalls ist aber nicht zu verkennen, dass der Gebrauch desselben Buchstabens mit oder ohne Strich in verschiedener Bedeutung, sich schon sehr der Bezeichnung nähert, welche einen Positionswerth anerkennt; und hätte man, wie Humboldt scharfsinnig bemerkt***), die Strichnotation für alle Gruppen angewandt und alle Zeichen nach dem $\Theta=9$ unterdrückt, so hätte man in β mit einem oder zwei oder drei Strichen Ausdrücke für 20, 200, 2000 gehabt, und wäre fast mit Nothwendigkeit auf die Bezeichnung durch Stellenwerth gekommen. Wenigstens lässt es sich nachweisen, dass auf ganz ähnliche Art die chinesische Ziffernschrift entstanden ist†), die von unserer jetzigen europäischen nur darin abweicht, dass die Zehner nicht links von den Einern, sondern über denselben stehen etc.

Unserer jetzigen Bezeichnung noch näher kamen die Griechen bei der Art, wie sie sechzigtheilige Brüche schrieben, wo der Nenner des Bruches nur durch accentartige Striche angegeben wurde. So bekamen die Sechzigstel eines Grades oder die Minuten einen Strich, die Sechzigstel der Minuten oder die Secunden zwei Striche u. s. f., eine Schreibart, deren wir uns noch heute bedienen, um das Maas eines Winkels anzugeben. In dieser Gedankenverbindung soll sogar das Zeichen der Null als Merkmal eines

---

*) Vergl. *P. Rami Scholarum Mathematicarum libri unus et triginta, Basileae,* 1569, 4. *p.* 117 und *G. J. Vossii de universae matheseos natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum, Amstelod.* 1650, 4. *Cap. VIII.* §. 4.

**) Vergl. Nesselmann, Geschichte der Algebra bei den Griechen, S. 80.

***) Vergl. Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. IV, S. 222.

†) Vergl. *Libri, Histoire de sciences mathematiques en Italie T. I, p.* 202.

fehlenden Gliedranges in Manuscripten des Ptolemaeus vorkommen*), sowie Boeckh Aehnliches auf einem von Müller bei Athen aufgefundenen Steine entdeckt haben will**).

In demselben Grade, wie die Zahlenschrift der Griechen über der der Römer stand, in demselben Grade war auch die Rechenkunst derselben weiter vorgerückt, und nur so liest man ohne allzugrosse Verwunderung z. B. die vollständige Theorie der Quadratwurzelausziehung bei Theon von Alexandrien ***) dem Commentator des Ptolemäus aus dem vierten Jahrhundert.

Eine Frage von grösster Wichtigkeit nun für unsere ganze Untersuchung liegt darin, ob es nicht ausser der volksthümlichen Zahlenbezeichnung durch Buchstaben noch eine andere dem europäischen Systeme ganz nahe stehende gab, aus welcher eben jene Bruchbezeichnung herstammte, und welche als der Wissenschaft allein angehörig vielleicht in dem verloren gegangenen Werke des Archimed über Zahlensysteme, in den ἀρχαῖς auseinandergesetzt war?

Zuerst Mannert, dann Chasles sprachen sich für die Wahrscheinlichkeit aus, Libri dagegen. Und doch verschwindet bei näherer Betrachtung ihrer Ansichten dieser scheinbare Widerspruch, und beide treffen in der Mitte überein, wo auch nach unserer Ansicht das Richtige zu finden ist. Auch wir glauben zwar nicht an eine ausgebildete Ziffernschrift von der angegebenen Art, schon deshalb nicht, weil eine solche kaum ausschliessliches Eigenthum der Gelehrten hätte bleiben können, weil sie dann wohl auch in deutlichen Ueberresten vorhanden sein müsste. Aber wir glauben an eine nach decadischem Systeme eingerichtete Rechenmethode, an die Existenz einer Rechentafel bei den Griechen in sehr früher Zeit, einer Tafel, welche die entschiedenste Aehnlichkeit mit dem Abacus der späteren Römer, mit dem Suanpan der Chinesen besass. Zeugnisse dafür liefern viele alte Schriftsteller†) und ein römischer Abacus war noch im 17. Jahrhunderte in den Händen eines augsburgischen Patriciers††) aus der bekannten Familie der Welser, der eine Beschreibung davon hinterliess. Ausführlicheres hat darüber Klügel in seinem mathematischen Wörterbuche (Bd. II, S. 736) unter dem Artikel „Instrumentale Arithmetik", wo jene Beschreibung so wiedergegeben ist:

„Der Abacus war von Metall und hatte 8 längere und 8 kürzere Einschnitte, je einen von jenen mit einem von diesen in gerader Linie. In den Einschnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der

*) Vergl. Delambre, Ueber die Arithmetik der Griechen, übersetzt von Hoffmann, Mainz 1817, S. 11.

**) Vergl. *Index lectionum quae in universitate Frid. Guilelma per semestre aestivum anni* 1841 *instituentur*.

***) Die ersten Ausgaben des betreffenden Werkes sind: *Κλ. Πτολεμάιου μεγάλης συντάξεως βιβλ. ιγ. Θεῶνος Ἀλεξανδρέως ἐις τά ἀυτά ὑπομνημάτων βιβλ. ια Basileae* 1533 und 1538.

†) Die Hauptstelle ist bei *Polybius* V, 26, 13: *Ὄντως γάρ ἐισιν οὗτοι παραπλήσιοι τᾶις ἐπὶ τῶν ἀβακίων ψήφοις. Ἐκεῖνάι τε γάρ κατὰ τὴν τοῦ ψηφίζοντος βούλησιν ἄρτι χαλκοῦν καὶ παραυτίκα τάλαντα ἴσχουσιν· οἵ τε περὶ τὰς ἀυλὰς κατὰ τὸ τοῦ βασιλέως νεῦμα μακάριοι, καὶ παρὰ πόδας ἐλεεινοὶ γίγνονται.* Ferner *Persius Sat. I, v.* 132: *Nec qui abaco numeros et secto in pulvere metas scit.* Dann noch *Plutarch. vita Catonis Uticensis* am Ende und *Martianus Capella, de nuptiis Philologiae et Mercurii, lib. VI de Geometria.*

††) Vergl. *Marci Velseri opera, Norib.* 1682 *pag.* 819.

längeren 5 Stück, in den übrigen 4, in den kürzeren je 1. Die längeren Einschnitte waren bezeichnet mit:

⊖ . I . X . C . (I) . ((I)) . (((I))) . [I].

Der Gebrauch dieser Rechentafel ist leicht einzusehen. Die Stifte oder Knöpfchen in den längeren Einschnitten bedeuteten einzelne Einheiten ihrer Klasse, die einzelnen Knöpfe in den kürzeren Einschnitten galten 5 solcher Einheiten. Der mit ⊖ bezeichnete Einschnitt enthielt die *asses*, die übrigen die *uncias* oder *sestertios*, Einer, Zehner, Hunderte etc. In dem ersteren Einschnitte konnte man bis 11 bemerken und wenn noch mehrere dazu kamen, statt 12 daselbst 1 in dem Einschnitt I angeben. In den folgenden 7 Einschnitten konnte man bis 9 Einheiten in jeder Klasse von den Einern bis zu Millionen bezeichnen, wenn man die Knöpfe von dem unteren Ende eines Einschnittes bis zu dem oberen verschob, um sie dadurch zu bedeutenden Zahlzeichen zu machen. So zeigten 2 verschobene Knöpfe in einem längeren Einschnitte und der einzelne in dem zugehörigen kürzeren fortgerückt die Zahl 7 in der entsprechenden Klasse an. Neben dem längeren Einschnitte für die Asses finden sich noch 3 kleine mit 2 oder 1 Knöpfchen und gewissen Beizeichen. Vermuthlich dienten sie zu einer Bruchrechnung."

Nicht viel anders war der Suanpan der Ost-Asiaten, nicht viel anders auch die Rechentafel, die an Ende des 15. Jahrhunderts in Deutschland von allgemeinem Gebrauche war, und welche von Büchern aus jener Zeit dem Pythagoras zugeschrieben wird. Ein bedeutsames Denkmal in dieser Beziehung ist die *margaritha philosophica* des Gregorius Reisch (*Heidelbergae* 1496, *Argentorati* 1512 und häufiger). In diesem mannigfach merkwürdigen Buche*) findet sich nämlich ein Holzschnitt, auf welchem Pythagoras, wie es die Ueberschrift ausser Zweifel lässt, mit einer Rechentafel abgebildet ist, während neben ihm Boethius eine Rechnung mit Ziffern ausführt, die mit den jetzigen völlig übereinstimmen. Auf letzteren Punkt werden wir sogleich noch zurückkommen. Vorläufig galt es uns nur wahrscheinlich zu machen, dass schon den alten Griechen der ἄβαξ Nichts fremdes war, dass wenigstens die Pythogoräer und sonstige Mathematiker mit ihm vertraut waren.

Wenn aber diese Thatsache anerkannt ist, dann war bei der Unbehilflichkeit der metallnen Rechentafeln nichts natürlicher, als dass man bald darauf kemmen musste, in Ermanglung einer solchen einen Abacus in den Sand zu zeichnen und die Knöpfchen durch Punkte zu ersetzen. Dann war es auch ein leichter Schritt, die in jeder Columne enthaltenen Punkte durch ein Zahlzeichen anzugeben. Anfangs mochten dazu die Buchstaben des Alphabetes dienen, wenigstens haben wir keinen Grund das Gegentheil anzunehmen. Später aber wurden von Einigen, wie die Quellen sagen**) statt der Buchstaben besondere Zeichen mit besonderen Namen gewählt; und diese Einige waren wohl nur solche, die mit indischen und semitischen Völkern auf Reisen zusammengekommen waren, denn sowohl jene Zeichen als ihre Namen weisen deutlich auf diesen Ursprung hin. Gemeingut, selbst

*) Die strassburger Ausgabe, die einzige, deren wir uns bedienen konnten, enthält eine Karte, auf welcher Amerika verzeichnet ist; sowie eine hebräische Grammatik, welches nicht ohne Interesse sein dürfte, wenn man die Schwierigkeiten vergleicht, mit denen noch Luther bei seiner Bibelübersetzung zu kämpfen hatte.

**) Die hierher gehörige Stelle aus der Geometrie des Boethius ist bei Mannert und Chasles abgedruckt. Dann auch bei Nesselmann S. 93.

der Gelehrten, war aber diese letztere Neuerung gewiss nicht, geschweige denn dass sie ins Volksleben übergegangen wäre.

Deshalb finden wir auch so lange keinen sicheren Beleg vom Gebrauche eines solchen Columnenwerthen bis zu *Sextus Julius Africanus*, der um das Jahr 222 unserer Zeitrechnung in seinem *κεστοί* eine römische Signaleinrichtung beschreibt, die eines solchen sich bedient. Es waren nämlich drei Signalstangen aufgerichtet und an jeder konnten Fackeln befestigt werden. Dann bedeutete jede Flamme links eine Einheit, in der Mitte Zehen und rechts Hundert*).

Solche Andeutungen mögen noch hin und wieder vorhanden sein. Zur Gewissheit aber wird das bisher Ausgesprochene durch eine berühmt gewordene Stelle aus der Geometrie des Boethius, welche, wenn auch nicht in allen Manuscripten, doch in zwei an verschiedenen Orten aufbewahrten sich findet. Der Codex dieser Geometrie in Chartres, sowie der in Altdorf beide aus dem elften Jahrhunderte, beschreibt ganz deutlich eine Rechentafel und setzt hinzu, die früheren Mathematiker hätten sie dem Erfinder zu Ehren Tafel des Pythagoras genannt, in späterer Zeit habe man dafür das Wort *abacus* eingeführt. Andere Exemplare haben allerdings auch diese Namen, aber statt der Rechentafel eine Multiplicationstabelle und daher rührt die so lange verbreitete apocryphe Meinung, als habe das sogenannte Einmaleins Pythagoras zum Verfasser. Die erwähnten Manuscripte haben ferner beide jene schon oben angeführten Zeichen, die unter sich nur wenig verschieden**) ihre Verwandtschaft mit den jetzt gebräuchlichen Ziffern auch dem ungeübtesten Auge verrathen, während die Namen wenigstens zum grössten Theil von Nesselmann als semetisch erklärt sind.

Wenn daraus geschlossen werden kann, dass Boethius einen Positionswerth von Ziffern kannte, so war diese Ansicht zu Anfang des 16. Jahrhunderts zur Genüge verbreitet. Das ist der Sinn jenes Holzschnittes aus der *margaritha philosophica*. Dasselbe bezeugt ein anderes gleichzeitiges Werk, welches Kästner in seiner Geschichte der Mathematik (Bd. I, S. 82) beschreibt, nämlich die *Arithmetice opuscula duo Theodorici Tzwivel, Monasterii* 1507. In diesem heisst es ausdrücklich von den neun Ziffern: *characteres sive numerorum apices a divo Severino Boethio nuncupantur.*

Durch diese nicht wegzuleugnende Uebereinstimmung so vieler Quellen aus den verschiedensten Zeiten scheint es uns zur Evidenz erwiesen, dass schon die alten Griechen und Römer eine Rechenmethode besassen, welche von dem Positionswerthe der Zahlzeichen Gebrauch machte und dass nur drei allerdings wesentliche Momente der Verschiedenheit von der heutigen Zifferschrift es waren, die es erlauben, noch von einer Einführung derselben zu sprechen. Diese Momente bestehen darin, dass

1) der Abacus der Alten nur eine Rechenmethode, nicht aber eine Schrift war;
2) dass die Alten Columnen nöthig hatten, um den Stellungswerth der einzelnen Zahlzeichen anzugeben;
3) dass eben deshalb um das Nichtvorhandensein von Einheiten eines bestimmten Ranges anzugeben, das Leerlassen der betreffenden Columne genügte, während wir uns dazu eines besonderen Zeichens, der Null bedienen.

*) Vergl. *Vincent* in den *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences* für den 3. Januar 1842 (T. XIV, p. 43).

**) Die Zeichen vergl. Nesselmann S. 100, die Namen und deren Ableitung S. 102.

Die Hauptfrage ist also die: Wo wurde das Zeichen der Null erfunden, wann und durch wen wurde es in Europa bekannt?

Den früher erwähnten Hypothesen, als fände sich die Null schon bei den Griechen, dürfen wir nur wenig Gewicht beilegen, weil auch, wenn sie überhaupt begründet sind, keine der aus diesem Gebrauche so leicht folgenden Consequenzen irgend Beglaubigung finden. Wir stimmen daher mit der verbreitetsten Ansicht überein, dass den Indern die Ehre dieser Erfindung zukommt, und dass von ihnen erst die Araber sie erhielten in einer Zeit, deren Ermittelung wir Anderen überlassen müssen, denen die Werke in jener Sprache zugänglich sind.

Nur so viel müssen wir bemerken, dass die Behauptung von Libri*), als hätten die Araber im Jahre 700 die indischen Ziffern noch nicht gekannt, völlig unhaltbar erscheint. *Abul — Pharajii hist. compend. dynast.* sagt auf S. 129 (nicht S. 127 wie bei Libri citirt ist) Chalif Welid I. habe 699 das Gebot erlassen, die öffentlichen Bücher künftig arabisch zu führen, ohne etwas über die Zahlenbezeichnung hinzuzusetzen. Die Stelle in des *Theophanes Chronicon* aber ist so unverständlich**), dass wir es für sehr gewagt halten, ihr mit dem Commentator *Jacobus Goar* (um 1500) den Sinn beizulegen, als hätten die Araber damals noch keine Ziffernschrift gehabt. Denn jedenfalls war denselben doch, wie aus anderen Quellen bekannt genug ist, die Bezeichnung der Zahlen durch Buchstaben gebräuchlich, und die war nicht schwerer und nicht leichter als die der Griechen. Es war also kein Grund vorhanden, die Zahlen auf griechische Art schreiben zu lassen, während alles Uebrige arabisch eingetragen werden musste. Bei dem gänzlichen Mangel authentischer Nachrichten***) ist daher dem auch sonst unzuverlässigen Theophanes hier kein Glaube zu schenken. Am wenigsten aber möchten wir, wie Libri es thut, die Erklärung eines späten Commentators als quellenmässige Ansicht substituiren.

So wissen wir denn positiv nur, dass Alkindi im 9. Jahrhunderte die indische Arithmetik kannte; wahrscheinlich aber war sie schon viel früher bekannt. Jedenfalls kam die neue Arithmetik durch die Araber nach Spanien und bildete einen der Gegenstände, die an den dortigen gelehrten Schulen ausgebildet wurden; dieselben gelehrten Schulen, deren productiv mathematische Bedeutsamkeit man zu lange unterschätzt hat. Freilich war die Abgeschlossenheit von dem übrigen Europa einerseits und das mangelnde Interesse für die Wissenschaft andrerseits der Art, dass nur wenig von den neuen Entdeckungen durchdrang. So existiren schon vor dem Jahre 1200 deutliche Spuren einer Buchstabenrechnung†) bei *Ibn Almonam*, bei *Alahdam* und bei *Ibn Albanhà*, während erst *Franciscus Vieta* (1540—1603) als europäischer Erfinder derselben gilt. Ganz ähnlich ging es mit der decadischen Ziffernrechnung. Während sie bei den östlichen dann bei den westlichen Arabern mehr und mehr blühte, ging parallel damit ein allmäliges Vergessen

*) Vergl. *Libri, Histoire des sci. math. en Italie T. I. p.* 378.

**) *Καὶ ἐκώλυσε γράφεσθαι Ἑλληνιστὶ τοὺς δημοσίους τῶν λογοθεσίων κώδικας, ἀλλ' Ἀραβίοις αὐτά παρασημαίνεσθαι χωρὶς τῶν ψήφων, ἐπειδὴ ἀδύνατον τῇ ἐκείνων γλώσσῃ μονάδα ἥδυάδα ἢ τριάδα ἢ ὀκτὼ ἥμερν ἢ τρία γράφεσθαι· διὸ καὶ ἕως σήμερον εἰσιν σὺν αὐτοῖς νοτάριοι Χριστιανοί.*

***) Herr Professor G. Weil, der gelehrte Verfasser der Geschichte der Chalifen, versichert uns, dass selbst das von Abulpharajius angeführte Gesetz in älteren Quellen nirgends erwähnt werde.

†) Vergl. Woepke in dem *Comptes Rendus* vom 17. Juli 1854.

des früheren Abacussystemes in dem christlichen Europa, so dass nur einige erwähnenswerthe Werke über diese Rechnungsmethode sporadisch auftauchen; und auch diese nur innerhalb eines bestimmten engen Zeitraumes von 150 Jahren, vom Ende des 10. bis zur Mitte des 12. Jahrhunderts. Es sind dieses Werke, die alle einerlei Ursprung haben, die alle der von Gerbert in Reims gestifteten Schule angehören.

An der Spitze steht die berühmte Abhandlung „*de numerorum divisione*", welche von einer Widmung an Constantinus als Vorrede begleitet ist. Auffallender Weise findet sich dieselbe nicht nur in den Werken Gerberts (der bekanntlich als Pabst Sylvester II. 1003 starb), sondern auch in fast wörtlicher Uebereinstimmung unter den Werken des englischen Mönchs Beda Venerabilis, der drei Jahrhunderte früher (675—735) lebte. Es scheint indessen keinem Zweifel unterworfen, dass Gerbert der wahre Verfasser dieser Unterweisung in der Methode des Abacus ist, und zwar dass er die Kenntniss derselben aus der Geometrie des Boethius geschöpft hat.

Für das Erstere spricht ausser dem Zeugniss des *William von Malmesbury* (um 1250), der das Datum der Schrift näher auf das Jahr 999 präcisirt*) noch die Bemerkung des Richerus, eines Freundes Gerberts, dass „wer in der Kunst des Abacus sich unterrichten wolle, das Buch lesen müsse, welches Gerbert an C. den Gramatiker geschrieben habe"**). Und dass dieser C. der Gramatiker Niemand anders als jener Constantinus ist, geht wohl mit Bestimmtheit daraus hervor, dass auch sonst noch Briefe mathematischen Inhaltes von Gerbert an seinen Freund Constantinus, einen Mönch der Abtei Fleury existiren***), während bei Beda dieser Name nirgends weiter vorkommt. Zudem ist es durch den neuesten Herausgeber von Beda's Werken klar genug gezeigt, mit welcher Schamlosigkeit man diesem Autor fremde Arbeiten zuschrieb†); und ziehen wir endlich noch in Betracht, dass nach der so gründlichen Darstellung der *biographie universelle* (neueste Ausgabe) Beda niemals England verlassen hat, dass also seine Kenntnisse in der Arithmetik nur um so räthselhafter erscheinen würden, so ist die Autorschaft Gerberts wohl bestimmt genug nachgewiesen.

Eben so evident erscheint es uns, dass Gerbert seine Kenntnisse in dieser Beziehung aus der Geometrie des Boethius und nicht, wie man sonst wohl behauptete, von den Arabern her hatte. Der schlagendste Grund dafür, den zuerst Chasles anführte, liegt darin, „dass zur Zeit Gerberts die Mauren in Spanien, sowie die Indier und Araber sich der Null (oder des Punktes als Null) bedienten; so dass Gerbert, indem er ihr Zahlensystem lieferte, von der Null Gebrauch gemacht und ausdrücklich gesprochen hätte, wovon wir aber in dem genannten Werke keine Spur finden, in welchem wir vielmehr annehmen müssen, dass dieses Hilfszeichen durch die Anwendung der

*) Vergl. *Montucla, Histoire des mathématiques, nouvelle édition T. I. p.* 501. Es wäre also kurz vor seiner Erhebung zum Pabste geschrieben, da diese am 2. April 999 stattfand.

**) *Richeri historiarum libri IIII* in den von Pertz herausgegebenen *monumenta Germaniae historica, T.* 3, *p.* 618. Die hierher gehörigen Stellen finden sich auch in einer Abhandlung von *Chasles: Comptes rendus* vom 23. Januar 1843.

***) Vergl. *Histoire literaire de la France, T. VI, p.* 576 und 583.

†) *Giles* sagt in der Vorrede zu Beda's Werken, London 1843: *The shamelessness, with which works were falsely ascribed to Bede is sufficiently evident from one instance. The musical tracts contain French names of airs, but that language could not have been spoken till many ages after the time of Bede.*

Columnen ersetzt wurde, wie bei Boethius."*) Zur Unterstützung dient dann der schon erwähnte Richerus, welcher ausdrücklich sagt: *In geometria vero non minor in docendo labor expensus est, cujus introductioni abacum, id est tabulam dimensionibus aptam opere scutarii effecit. Cujus longitudini in viginti septem partes diductae novem numero notas omnem numerum significantes disposuit. Ad quarum etiam similitudinem mille corneos effecit caracteres, qui per viginti septem abaci partes mutuati cujusque numeri multiplicationem sive divisionem designarent.* Eine deutliche Beschreibung der römischen Rechentafel mit neun Zahlzeichen und folglich ohne Null. Endlich spricht noch eine Stelle aus dem Briefe *ad Constantinum* dagegen, dass arabische Lehren zu Grunde liegen. In jener Vorrede heisst es nämlich: *Itaque quum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum, nec exercitium harum rerum habuerimus, quaedam repetita memoria eisdem verbis proferimus, quaedam eisdem sententiis.* Daraus geht hervor, dass Gerbert, was er hier lehrt, selbst aus einem bestimmten Buche schöpfte, welches er vor einer geraumen Zeit, mindestens 15—20 Jahre früher in Händen gehabt hatte. Ausserdem ist aus *Ademar von Chabanois*, seines Zeitgenossen, Chronik bekannt, dass Gerbert seine ersten Studien auf einer Rundreise durch Frankreich machte, während er erst später in Spanien den mündlichen Unterricht des Bischoffs Haïton genoss.**) Wenn nun noch heute ein Manuscript des Boethius aus dem elften Jahrhunderte in Chartres existirt, welches seinem Inhalte nach wohl der Abhandlung Gerberts zu Grunde liegen konnte, dann ist doch wohl anzunehmen, dass auch zu Gerberts Zeiten ein solches Manuscript in Frankreich existirte, dessen Abschrift vielleicht der Codex von Chartres ist.

Von sonstigen Werken, die denselben Gegenstand in der genannten Zeit behandeln, sind hauptsächlich die Schriften von Gerland und von Radulph v. Laon erhalten, sowie eine Abhandlung von unbekanntem Verfasser *regule abaci* betitelt, welche Chasles in einem alten Manuscripte wahrscheinlich aus dem Anfange des 12. Jahrhunderts aufgefunden hat.***) Diese alle enthalten nicht blos Zeichnungen von Rechentafeln, sondern auch Ziffern, die mit denen im Boethius die grösste Aehnlichkeit haben, und welche dieselben semitischen Namen führen. Zum Theil liefern sie sogar die Rechnungsmethoden als Einleitung in die Geometrie, ganz wie sie bei Boethius eingeführt werden, so dass alle Einzelnheiten die Ueberzeugung noch bestärken müssen, dass Gerbert und seine Schule ihre Lehren vom Abacus nicht aus arabischen, sondern aus lateinischen Quellen schöpften.

Bis die indische Arithmetik in Europa bekannt wurde, sollte es noch einige Zeit anstehen. Zwar existiren Uebersetzungen aus dem Arabischen in's Lateinische, worin sie auseinandergesetzt wird, so die *Ysagoge alchorismi in artem astronomicam a magistro Abraham Judeo ispano, qui dicitur Savacorda*, 1134; aber doch blieben Uebersetzung wie Original ohne grössere Verbreitung. Da zu Beginn des 13. Jahrhunderts erschienen plötzlich von allen Seiten Bücher über die neue Rechnungsart, die mit fast unbegreiflicher Geschwindigkeit die früheren Methoden verdrängten, bis kaum eine Spur davon übrig blieb. Auch hier finden wir einen Mann an der Spitze, der wenn auch nicht vom Schicksal in so günstige Verhältnisse gestellt wie Gerbert, doch schon in der bescheidenen Lage als Kaufmann, Schule bil-

*) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie, S. 529 der Uebersetzung.
**) Die *Histoire literaire de la France VI*, 560 citirt hierfür: *Adem. chr.* 160.
***) Der wörtliche Abdruck dieser Schrift in den *comptes rendus T. XVI, p.* 237.

dend auftrat und Denkmale seines Geistes hinterlies, die ihm nicht blos der Zeit nach einen Platz zwischen Archimed und Newton anweisen.

Leonardus mit dem Beinamen Bigollone war der Sohn eines Schreibers, der für einen Kaufmann aus Pisa die Douanengeschäfte an der nordafrikanischen Küste führte und der auch nur unter dem Spottnamen Bonaccio bekannt ist. Nach ihm nannte sich der Sohn Filius Bonaccio und daraus entstand durch Zusammenziehung der Name Leonardo Fibonacci Pisano. Schon frühe an dem Aufenthalsorte seines Vaters in die Geheimnisse der arabischen Rechenkunst eingeweiht, genügte es ihm nicht nur diese Methoden zu kennen, und auf den Geschäftsreisen, die er nach Aegypten, nach Syrien, nach Griechenland, Sicilien unn der Provence machen musste, suchte er sich überall neue Kenntnisse zu verschaffen. So war sein wissenschaftlicher Gang der, dass er zuerst die indische Arithmetik kennen lernte, welche er Abacus nennt, und dann erst die europäischen Methoden, die er als den Algorithmus des Pythagoras bezeichnet. Sein scharfer Geist erkannte alsbald die Vorzüge der ersteren vor den letzteren, die ihm so bedeutend erschienen, dass er sich ausdrückt: *Algorismum Pictagorae quasi errorem computavi respectu modi Yndorum.*

So entstand sein *liber Abacci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano in anno* 1202*), welches nur der Anfang einer ganzen Reihe von Büchern war, die den Algorithmus lehrten. Eigenthümlicher Weise scheint nämlich nur bei Fibonacci die Verwechslung eingetreten zu sein, dass er die Methode des Pythagoras Algorithmus nennt, während von allen anderen Autoren gerade umgekehrt die indische Arithmetik mit 9 bedeutsamen Ziffern und der 0 als zehntem Zeichen unter dem Algorithmus verstanden wird. So in den Schriften des *John of Halifax* (gewöhnlicher *Johannes de sacro Bosco* 1232); in einer Schrift aus dem 13. Jahrhunderte: *Opusculum de praxi numerorum, quod Algorismum vocant*, welche von *Jodocus Chlichtovaeus* 1503 herausgegeben wurde; in dem *Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus* des Georg Purbach (1423—1461); in der *margaritha philosophica*; und selbst noch später wie bei Schoner, *Algorithmus demonstratus, Francofurti* 1599 etc.

Allerdings scheint der Name Algorithmus arabischen Ursprunges zu sein und so vorzugsweise für die Rechnungsmethoden zu passen, welche zuerst bei den Arabern einheimisch geworden waren. Möge man nun dieses Wort als Zusammensetzung des arabischen Artikels *al* mit dem griechischen ἄριθμος gelten lassen, oder es nach der Hypothese des gelehrten Orientalisten Reinaud von dem Namen des arabischen Mathematikers *Mohamed-ben-Moussa Alkharesmi* (starb 812 am Hofe *Harun-al-Raschid's*) ableiten. Für die erstere Etymologie spricht indessen wohl die ganz ähnliche Entstehung des Wortes „Almagest" aus *al* und μέγιστος.

Fassen wir unsere bisherigen Untersuchungen zusammen, so erhalten wir in Kürze ausgedrückt folgende Resultate:

1) Allen Sprachen des indogermanischen Stammes ist ein decadisches Zahlensystem gemeinsam.
2) Bei allen Völkern dieses Stammes hat sich eine Rechnungsmethode gebildet, welche gleichfalls von dem Systeme Gebrauch macht, indem die verschiedene Rangordnung durch die Stellung der Zeichen ausgedrückt wird.

*) Der Anfang ist abgedruckt bei Libri T. II. p. 287.

3) Die Europäer gingen nie über diese Rechnungsmethode hinaus und bedienten sich dazu einer mit Columnen versehenen Rechentafel.
4) Bei den Indiern machte die Erfindung der Null die Columnen unnöthig und von da an nimmt der frühere Kunstgriff ganz den Charakter einer Schrift an.
5) Die Ziffernschrift verbreitete sich als solche unter dem Volke der Araber, während die Rechnungsmethode nur bei einzelnen Gelehrten, wie Boethius, Gerbert sich erhielt.
6) Die Einführung der zehn Zeichen der Indier gehört dem Leonardo Fibonacci an und seit dieser Zeit wird die Rechenkunst mehr und mehr Volkseigenthum.

Auf diese Weise aufgefasst, erscheint die Leistung des Pisaners in einem ganz neuen Lichte. Es war nicht ein dem europäischen Bildungsgange ganz Fremdes, was er einführte. Dazu hätte jeder andere auch minder begabte Geist hingereicht, wenn der Zufall ihn die Entdeckung hätte machen lassen. Es war etwas scheinbar viel Geringeres, aber in Wirklichkeit viel Bedeutsameres, was er that. Er lernte den Unterschied der europäischen und der indischen Arithmetik kennen. Er begriff, dass die kleine Verschiedenheit derselben, wonach die eine an eine Rechentafel gebunden, die andere eine in jeder Beziehung freie Kunst war, von so grosser Wichtigkeit werden musste, dass er ausrief: Gegen die Indier war selbst Pythagoras nur ein Stümper! Um dieses im Voraus einzusehen, dazu gehörte allerdings das gewaltige Genie eines Leonardo Fibonacci. Es scheint fast unmöglich, dass Gerbert bei seinem Aufenthalte in Spanien die Ziffernschrift nicht sollte kennen gelernt haben; und doch kam er nicht über die Methode des Abacus hinaus. Er blieb in der alten Gewohnheit befangen. Der Pisaner erst zeigte der Welt, welche grosse Erfolge durch die kleinste Umänderung gewonnen werden konnten. Und so musste sein Name unter die der hervorragendsten Mathematiker eingetragen werden, wenn auch keins seiner sonstigen Werke sich erhalten hätte. Um wie viel schöner ist aber die nachträgliche Beglaubigung seiner Verdienste durch die im vorigen Jahre von *Baldassare Buoncompagni* in der ambrosianischen Bibliothek zu Mailand entdeckten Schriften, welche Leonardo Fibonacci auch als Meister in der Zahlentheorie documentiren, welche ihn als Vorgänger der grossen Algebristen zeigen, die erst Jahrhunderte nach ihm blühten.