Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Euclid und sein Jahrhundert**

Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik.
Supplement zu Bd. 12 (1867),
Seite 1 – 72.
Signatur UB Heidelberg: L 6::12.1867

Leben und Werk von Mathematikern des 3. vorchristlichen Jahrhunderts:

- Euklid (325 v. Chr. – 265 v. Chr.) und seine „Elemente“,
- Archimedes (287 v. Chr. – 212 v. Chr.), der vielseitige Mathematiker und Ingenieur,
- Eratosthenes (276 v. Chr. – 194 v. Chr.), von dem das Primzahlsieb stammt, und
- Apollonius von Perge mit seinen Untersuchungen der Kegelschnitte.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Zwölfter Jahrgang.

Supplement.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1867.

I.

Euclid und sein Jahrhundert.

Mathematisch-historische Skizze

von

MORITZ CANTOR.

Der erste mathematische Schriftsteller Griechenlands, dessen Werke mehr als in kärglich überlieferten, vielleicht sogar kritisch bestreitbaren Bruchstücken uns vorliegen, war Euclid. Seine Blüthe fällt in das Jahr 300 v. Chr. Geb., einen für die Entwickelungsgeschichte der Wissenschaften so merkwürdigen Zeitpunkt, dass es kaum ein historisches Werk geben dürfte, welches nicht dort einen Abschnitt machte, welches nicht die Gründung der ersten alexandrinischen Schule als Markstein einer neuen Zeit betrachtete.

Oder sollen wir lieber sagen, es war der Abschluss einer alten Zeit, der hier erfolgte? Es war dieselbe Erscheinung, welche vielfach in der Weltgeschichte auftritt, dass nach Perioden grosser Entdeckungen und Erweiterungen der Wissenschaften ein Bedürfniss sich kundgiebt, das neu Erworbene zu sammeln und zu vereinigen, zu sichten und zum Gemeingut zu machen, Bibliotheken und Schulen zu gründen. Alexandrien, die Schöpfung des Welteroberers aus dem vierten Jahrhundert, war ganz geeignet, einen solchen Markt- und Stapelplatz der Bildung abzugeben. Seine Lage in Egypten, dem Lande, an dessen uralter Kultur auch der skeptischste Gelehrte nicht mehr zweifelt, aber auch dem Lande, welches durch besondere Gunst des Schicksals nach Alexander's Tode dem geistig hervorragendsten unter seinen Feldherren, Ptolemäus Sohn des Lagus, zufiel, trug nicht wenig dazu bei, dorthin Alle zu locken, welche höhere Bildungszwecke verfolgten, sei es nun als Lehrer oder als Lernende. Man hat oft gesagt, die Ptolemäer, die Freunde und Förderer des Gelehrtenstandes, gründeten die alexandrinische Schule; man hätte mit eben so vielem Rechte sagen können, die Schule zu Alexandrien entstand und gab der Regierungsweise der Ptolemäer ihren besonderen weltgeschichtlichen Charakter.

In Alexandrien also im sogenannten Museum, in jenem palastähnlichen Gebäude, welches seit dem Jahre 320 dem höheren Unterrichtswesen gewidmet war, in der unmittelbaren Nähe jener grossartigsten Büchersammlung des Alterthums, welche bis zu 400,000 Bänden angewachsen war, als sie im Jahre 47 v. Chr. Geb. in Cäsar's alexandrinischem Kriege ein Raub der Flammen wurde, dort finden wir Euclides etwa im Jahre 308 als den ersten Mathematiker seiner Zeit. Ueber die Lebensgeschichte dieses bedeutenden Mannes ist kaum mehr bekannt, als in den wenigen obigen Zeilen angegeben ist[1]. Nicht einmal das Vaterland des Euclides steht mit Sicherheit fest, wenn wir nicht der Angabe eines arabischen Berichterstatters, des Abulpharagius, unbedingten Glauben schenken wollen, welcher ihn einen Tyrer nennt. Andere wollen Euclides in Egypten geboren sein lassen; noch Andere, aber sicherlich mit Unrecht, verwechseln ihn mit Euclides von Megara, dem Schüler Plato's, welcher fast 100 Jahre früher lebte. Auffallend genug findet sich dieser Irrthum schon bei einem Schriftsteller aus dem Zeitalter des Tiberius, bei Valerius Maximus.[2] Auch das Todesjahr des Euclides ist durchaus unbekannt, und selbst anekdotisch gewordene Erzählungen aus seinem Leben, wie sie sonst über griechische Gelehrte vielfach mitgetheilt werden, finden sich nicht mit Ausnahme einer einzigen. Von ihm nämlich rührt die bekannte Antwort her, dass es in der Mathematik keinen besonderen Weg für Könige gebe, mit welcher er König Ptolemäus Lagi zurechtwies, der über die Schwierigkeiten des von ihm eingeschlagenen Ganges klagte und einfachere Methoden beanspruchte. Zeigte sich Euclides bei dieser Gelegenheit nicht gerade als gewandten Höfling, so wird uns doch sein Charakter[3] als sanft und bescheiden beschrieben, voller Wohlwollen gegen Jeden, welcher die Mathematik zu fördern im Stande war, und absichtlich jede Begegnung mit fremden Entdeckungen in dem Gebiete seiner Wissenschaft vermeidend.

Die Schriften des Euclides waren trotz dieser selbst auferlegten Beschränkung sehr reichhaltig, da er natürlich nicht so weit ging, irgend welche Sätze zu unterdrücken, weil sie schon von Anderen bewiesen worden waren. Im Gegentheile hat gerade dasjenige euclidische Werk den weitaus grössten Einfluss auf die Mathematik aller Jahrhunderte ausgeübt, in welchem er am meisten von andern Schriftstellern als abhängig sich erweist, die sogenannten Elemente, *στοιχεῖα*. Hier mag desshalb zunächst eine Inhaltsanzeige gerade dieses Werkes folgen; sodann soll der Zweck untersucht werden, zu welchem es geschrieben wurde; in dritter Linie mag die Form des Werkes uns beschäftigen.

Der Inhalt der in dreizehn Bücher zerfallenden Elemente[4] des

Euclides ist im Allgemeinen angegeben, wenn wir sagen, man müsse in ihnen vier Haupttheile unterscheiden. Erstens behandeln sie Raumgebilde, welche in einer Ebene gezeichnet sind und das Verhältniss ihrer gegenseitigen Grösse, die theils gleich, theils ungleich ist. Im ersteren Falle genügt der Nachweis der Identität, im letzteren verlangt man noch etwas mehr: man will die Ungleichheit messen. Dazu aber dient die Zahl, das Maass einer jeden Grösse, und folglich wird es Bedürfniss, Untersuchungen über die Zahl anzustellen. Damit ist der zweite Haupttheil des hier besprochenen Werkes geschildert. Die vollständig bestimmte Zahl reicht indessen nicht aus, um alle Grössen zu messen, welche der geometrischen Betrachtung unterworfen werden. Es giebt vielmehr Raumgebilde, seien es nun Längen oder Flächen, welche mit der Grösseneinheit derselben Art kein genau angebbares gemeinsames Maass besitzen, ohne dass sie desshalb aufhören, selbst Grössen zu sein. Man nennt sie nur im Gegensatze zu dem genau Messbaren mit der Einheit incommensurabel. Die Betrachtung solcher Incommensurabilitäten ist somit unerlässlich, sie bildet den dritten Haupttheil des Ganzen. Endlich im vierten Theile verlässt die Betrachtung das bisher eingehaltene Feld der Zeichnungsebene, die Verhältnisse des allgemeinen Raumes werden untersucht, die gegenseitige Lage und Grösse von Flächen und Körpern werden besprochen.

Das ist freilich nur der ganz allgemeine Inhalt des Werkes, und es dürfte sich empfehlen, noch etwas näher auf die Einzelnheiten einzugehen. Im 1. Buche handelt Euclides von den Grundbestandtheilen gradliniger Figuren in der Ebene, von geraden Linien, welche sich entweder schneiden und mit einer dritten Linie ein Dreieck bilden, über dessen Bestimmtheit durch gewisse Stücke zugleich gesprochen wird — Congruenz der Dreiecke — oder welche sich nicht treffen, so weit man sie verlängert — Parallellinien. Um mit Hülfe von Parallellinien eine Figur zu erzielen, bedarf es zweier schneidenden Graden, und so entsteht das Viereck, insbesondere das Parallelogramm, sofern die Schneidenden selbst unter sich parallel sind. Die Eigenschaften der Parallelogramme vereinigt mit denen der Dreiecke führen zum Begriffe von Figuren, welche an und für sich identisch sind, aber nicht in identischer Weise zur gegenseitigen Deckung gebracht werden können — Gleichheit von nichtcongruenten Flächenräumen. Bei solchen Flächen kommt es darauf an, die identischen Theile abzusondern, in anderer Weise zusammenzufügen, und so lehrt der 45. Satz die Verwandlung jeder geradlinigen Figur in ein Parallelogramm von gegebenen Winkeln, bis im 47. und 48. Satze das Buch mit dem interessantesten Falle einer derartigen Umwandlung, mit dem pythagoräischen Lehrsatze und dessen Umkehrung, abschliesst. Das 2. Buch ist gewissermassen ein Zusatz zu dem pythagoräischem Lehrsatze. In ihm wird die Herstellung eines Quadrates aus Quadraten und Rechtecken in den verschiedensten Combinationen theils als Summe theils als Differenz gelehrt, bis auch wieder eine Zusammenfassung in der Aufgabe erfolgt, ein jeder gegebenen gradlininigen Figur gleiches Quadrat zu beschreiben. Zugleich lässt aber dieses Buch eine andere Auffassung zu, welche mit der doppelten Bedeutung des pythagoräischen Satzes in Verbindung steht. Er ist bekanntlich nicht bloss ein geometrischer Satz; er sagt nicht bloss aus, dass es zwei Flächenräume von besonderer Beschaffenheit gebe, welche einem dritten gleich sind. Er ist ebensosehr und wohl chronologisch früher[5]) zahlentheoretischer Natur; er lässt in dieser Auffassung erkennen, wie es zwei Zahlen bestimmter Art gebe, welche als Summe eine dritte Zahl liefern von gleicher Art wie die beiden Posten. Auch als Zusatz zum pythagoräischen Lehrsatze in diesem Sinne kann man das 2. Buch betrachten: es lehrt alsdann die Rechnung, insbesondere die Multiplication, mit additiv und subtractiv zusammengesetzten Zahlen. Das 3. Buch wendet sich zu der einzigen krummen Linie, welche der Behandlung unterzogen wird, zum Kreise und zu den Sätzen, welche auf Berührung zweier Kreise oder eines Kreises und einer geraden Linie sich beziehen. Alsdann folgen Betrachtungen über die Grösse von Winkeln und mit denselben irgendwie in Verbindung stehenden Kreisabschnitten. Endlich schliesst das Buch mit den einzeln betrachteten Fällen zweier Linien, die sich gegenseitig und ebenso einen Kreis schneiden und aus deren Abschnitten gewisse Rechtecke zusammengesetzt werden, welche Flächengleichheit besitzen. Der Schüler wird nun im 4. Buche weiter mit den Figuren bekannt gemacht, welche entstehen, wenn mehr als zwei gerade Linien mit dem Kreise in Verbindung treten. Er lernt die in und um den Kreis beschriebenen Vielecke, insbesondere die regelmässigen Vielecke kennen.

Damit ist vom euclidischen Standpunkte mit dem Begriffe der Gleichheit von Linien und Flächenräumen, der einzigen bisher angewandten Grundlage, das letzte Ziel erreicht. Wie ich schon oben allgemein andeutete, kommt nun die Ungleichheit in Betracht, insofern sie gemessen werden kann, und zwar ist diese Messung eine zwiefache: eine geometrische und eine arithmetische, wie wir etwa sagen könnten. Beide beruhen auf der Lehre von den Proportionen, welche desshalb auch im 5. Buche an dem Sinnbilde gerader Linien in vollständigster Ausführlichkeit dargelegt wird. Vielleicht ist diese Versinnlichung absichtlich gewählt worden, um eben schon hier die Doppelrolle anzudeuten, welche die Proportionenlehre in der Folge spielen soll. Die im Verhältnisse aufgefassten Grössen sind als Linien gezeichnet, damit man eine Grundlage für die Betrachtungen besitze, und damit es ein

Bekanntes sei, wenn künftig von einem Verhältnisse gegebener Linien die Rede ist. Die Linien sind aber nur nebeneinander gezeichnet, ohne in Verbindung zu stehen, ohne Figuren zu bilden, damit man einsehe, wie es sich hier um Allgemeineres handle, als um die Vergleichung geometrischer Gebilde. Erst das 6. Buch enthält die speciell geometrischen Anwendungen, insbesondere die Lehre von der Aehnlichkeit und von deren Benutzung, um jetzt rückwärts Verhältnisse in geometrischen Figuren zur Anschauung zu bringen, nachdem vorher die Theorie der Aehnlichkeit aus der Verhältnisslehre hervorgegangen. Das 7., 8. und 9. Buch beschäftigen sich mit der Lehre von den Zahlen. Der nächste Zweck dabei ist, wie ich vorhin mich ausdrückte, das arithmetische Messen der Ungleichheit, also die Folgerungen aus der Proportionenlehre, welche an Zahlengrössen hervortreten. Allein damit verbindet Euclid, vielleicht weil nirgend eine passendere Gelegenheit sich bieten wird, eine Zusammenstellung aller ihm bekannten Eigenschaften der Zahlen; Rechnungsoperationen mit denselben hat er, wie wir uns erinnern, schon im 2. Buche ausführen lassen. Das 7. Buch beginnt mit der Unterscheidung von theilerfremden Zahlen und solchen, welche ein gemeinsames Maass besitzen, und mit der Auffindung dieses letzteren. Dann ist von Zahlen die Rede, welche dieselben Theile anderer Zahlen sind, wie wieder andere von vierten, und damit ist also die Zahlenproportion eingeführt. Abgesehen von den vielen neuen Proportionen, welche in der mannigfaltigsten Weise aus der erstgegebenen abgeleitet werden, führt der Satz von der Gleichheit der Produkte der inneren und der äusseren Glieder einer Proportion auf die Theilbarkeit eines solchen Produktes durch einen der Factoren des anderen Produktes und zur Theilbarkeit überhaupt. Der Rückweg zur Untersuchung theilerfremder Zahlen ist damit gewonnen, und den Schluss des Buches bildet die Auffindung des kleinsten gemeinsamen Dividuums gegebener Zahlen. Das 8. Buch setzt die Lehre von den Proportionen fort, indem es zu Gliedern der Proportion solche Zahlen wählt, welche selbst Produkte sind und zwar zum Theil Produkte aus gleichen Factoren. An die früheren geometrischen Lehren erinnern eben noch die Benennungen, welche in diesem Buche zur Anwendung gelangen: die Wörter Flächenzahlen (Produkt zweier Zahlen, weil die Fläche einer Figur durch ein solches Produkt gefunden wird), Körperzahlen (aus ähnlichem, den geometrischen Entwickelungen freilich vorgreifendem Grunde das Produkt dreier Zahlen), Quadratzahlen und Cubikzahlen. Das 9. Buch setzt gleichfalls denselben Gegenstand fort, geht indessen dadurch wieder zu anderweitigen Betrachtungen über, dass es besondere Rücksicht auf etwa in einer Proportion vorkommende Primzahlen nimmt. Bei dieser Gelegenheit wird nämlich ziemlich ausser allem Zusammenhange als 20. Satz bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gebe, oder vielmehr, da der Begriff des Unendlichen erst viel später in der Mathematik auftritt, dass die Menge der Primzahlen grösser ist, als jede gegebene Menge derselben. Noch weniger Zusammenhang ist von dem 20. Satze zu dem ihm Folgenden wahrnehmbar. Mancherlei Eigenschaften grader und ungrader Zahlen, von deren Summen und deren Produkten werden erörtert, bis der 35. Satz die Summirung der geometrischen Reihe lehrt und auf diejenige geometrische Reihe angewendet, welche von der Einheit beginnend jedes Glied verdoppelt, endlich im 36. Satze wieder zu den Primzahlen zurückführt und so das Bewusstsein erregt, wie Euclides bei scheinbarem Abspringen von seinem Thema es immer unverrückt im Auge behält. Jener 36. Satz giebt nämlich an, die Summe der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ sei mitunter eine Primzahl. Dieses tritt z. B. ein, wenn die Reihe aus 2, aus 3, aus 5 Gliedern besteht. Werde diese die Summe darstellende Primzahl mit dem letzten in Betracht gezogenen Gliede der Reihe vervielfacht, so entstehe eine vollkommene Zahl, d. h. eine Zahl, welche der Summe aller ihrer Theiler gleich ist.

Im 10. Buche ist der dritte Haupttheil des euclidischen Werkes behandelt, die Lehre von den Incommensurabeln. Es beginnt mit einem Satze, dessen Wichtigkeit weit grösser ist, als man beim erstmaligen Hören glauben sollte; denn er bildet die Grundlage einer ganzen Theorie, welche unter dem Namen der Exhaustionsmethode bekannt geworden ist und welche den Alten das ersetzte, was für die moderne Mathematik in ausgedehnterem und vollendeterem Maasse der sogenannte Infinitesimalcalcul zu leisten hat. Der Satz lautet so: „Sind zwei ungleiche Grössen gegeben und nimmt man von der grösseren mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte und so immer fort, so kommt man irgend einmal zu einem Reste, welcher kleiner ist als die gegebene kleinere Grösse.“ In Worten der neueren Mathematik würde man vielleicht lieber sagen, es gebe keine noch so unendlich kleine Grösse, unter deren Werth man nicht durch fortgesetzte Halbirung einer gegebenen Grösse gelangen könne, welche also nicht als Grenze eines immerwährenden Abnehmens des Gegebenen sich darstellen liesse. In dieser Ausspruchsweise tritt alsdann zur Genüge die grosse Bedeutung des Satzes hervor. Euclid freilich giebt zunächst keine Veranlassung, solche Betrachtungen anzustellen. Bei ihm befindet sich der Satz zwar an der Spitze des 10. Buches, aber ohne dass das zunächst Folgende mit ihm in Verbindung stände; sogar ohne die Folgerung, welche man vor allen Dingen erwarten sollte, dass, wenn zwei Grössen incommensurabel sind, man immer ein der ersten Grösse Commensurables bilden könne, welches von der zweiten Grösse sich um beliebig Weniges unterscheide. Statt dessen sind zwar geistvolle, aber doch nach unseren Begriffen maasslos weitläufige Untersuchungen darüber angestellt, unter welchen Voraussetzungen Grössen sich wie gegebene Zahlen verhalten, also commensurabel sind, und unter welchen Voraussetzungen keine solche Zahlen sich finden lassen, die Grössen also incommensurabel sind. Als specielle Fälle des Commensurabeln und des Incommensurabeln erkennt die neuere Mathematik bekanntlich das Rationale und Irrationale an, letzteres eine Grösse, welche zwar nicht unmittelbar durch die Einheit genau gemessen werden kann, aber doch durch eine endliche Zahl von einfachen Operationen zu einem Rationalen führt. Auch die Griechen haben ähnliche Begriffe, wiewohl in der euclidischen Darstellung noch einigermaassen von den soeben erklärten abweichend. Sein Rationales, ῥητόν, umfasst nämlich ausser den der Einheit unmittelbar commensurabeln Grössen auch noch die einfachen Quadratwurzeln $\sqrt{a}$, welche demnach aus dem Begriffe des Irrationalen, ἀλογόν, auszuschliessen sind. Für die verschiedenen Gattungen des Irrationalen, je nachdem Wurzelgrössen durch Addition, Subtraction u. s. w. mit einander verbunden sind, kennt Euclides mannigfache Namen, bei deren im Ganzen unwichtiger Aufzählung wir uns jetzt nicht aufhalten wollen. Auch für den Inhalt der Sätze des 10. Buches genüge die obige kurze Andeutung, und nur zwei Sätze sollen besonders hervorgehoben werden: der erste Lehrsatz, welcher auf den 29. Satz folgt und welcher mit der arithmetischen Auffassung des pythogoräischen Lehrsatzes eng verknüpft die Aufgabe enthält, zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl sei; ferner der letzte Satz des Buches, welcher beweist, dass Seite und Diagonale des Quadrates nothwendiger Weise incommensurabel zu einander sein müssen, widrigenfalls Grades und Ungrades einander gleich wären. Nesselmann, einer der genauesten Kenner griechischer Mathematik, hat daraus, dass dieser Satz anhangweise beigefügt ist, die Vermuthung geschöpft, er sei vielleicht gar nicht euclidisch, sondern Zugabe eines späteren Bearbeiters.[6]) Ich kann dieser Meinung nicht beistimmen. Ich bin vielmehr der Ansicht, auch hier benutzte Euclid eine mehr oder weniger passende Gelegenheit, um einen Lehrsatz von sonstiger Bedeutung, der aber an keiner andern Stelle eingeschaltet werden kann, beiläufig zu behandeln. Die Bedeutung des Satzes von der Diagonale des Quadrats findet sich aber darin, dass er mit Andeutung des hier von Euclid ausführlich gelieferten Beweisverfahrens bei Aristoteles vorkommt.[7])

Ich habe noch von dem letzten Haupttheile der euclidischen Elemente zu reden, von der in dem 11., 12. und 13. Buche enthaltenen Stereometrie. Im 11. Buche beginnt diese Lehre genau in der Weise, wie sie auch heute noch behandelt zu werden pflegt, mit den Sätzen, welche auf parallele und senkrechte gerade Linien und Ebenen sich beziehen, woran Untersuchungen über Ecken sich schliessen.

Alsdann wendet sich der Verfasser zu einem besonderen Körper, dem Parallelopipedon, und geht nur in dem letzten Satze des Buches zu dem allgemeineren Begriffe des Prismas über. Das 12. Buch enthält die Lehre von dem Maasse des körperlichen Inhaltes der Pyramide, des Prismas, des Kegels, des Cylinders und endlich der Kugel. Eine eigentliche Berechnung dieses Körperinhaltes findet allerdings nicht statt, sicherlich nicht bei den Körpern, zu deren Bildung der Kreis mit beiträgt, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil Euclid die Ausmessung des Kreises selbst noch nicht versteht. Er zeigt in diesem 12. Buche, dass Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser sich verhalten; er zeigt auch, dass wie die Pyramide der dritte Theil des Prismas von gleicher Höhe und Grundfläche ist, ein ganz gleichlautender Satz für Kegel und Cylinder stattfindet, beides Sätze, welche von Eudoxus, dem Schüler Plato's, herrühren;[8]) er schliesst mit dem Satze, dass Kugeln im dreifachen Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen. Allein weiter kann er in die Kenntniss des körperlichen Inhaltes nicht eindringen. Das hauptsächliche Interesse, welches sich an dieses 12. Buch knüpft, besteht darin, dass hier zuerst Anwendungen der Exhaustionsmethode gemacht werden, welche, wie wir sahen, schon im ersten Satze des 10. Buches angebahnt wurden. Der Wichtigkeit des Gegenstandes und der Methode wegen möge hier der erste Satz, welcher durch Exhaustion bewiesen wird, noch näher erörtert werden, der Satz nämlich, dass Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser sich verhalten. Zur Abkürzung erlauben wir uns bei diesem Referate moderne Bezeichnungen zu benutzen. Als bereits bekannt vorauszusetzen ist der Satz, dass ähnliche, in zwei Kreise eingeschriebene Vielecke sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten. Heissen nun die beiden Kreisflächen K_1, K_2 und deren Durchmesser d_1, d_2, so ist entweder in der That $K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2$, oder diese Proportion findet nicht statt, d. h. einer der beiden Kreise besitzt eine zu grosse Oberfläche, als dass sie in diese Proportion sich einfügte. Diese zu grosse Kreisfläche sei K_2, so wird sicherlich eine kleinere Oberfläche O existiren, für welche $K_1 : O = d_1^2 : d_2^2$, und es ist somit unmöglich, dass ein Flächenraum, welcher kleiner ist als K_1, sich in eben diesem Verhältnisse ($d_1^2 : d_2^2$) zu einem Flächenraume befinde, der grösser ist als O. Gleichwohl lässt sich die Existenz eines solchen unmöglichen Verhältnisses unter den gemachten Voraussetzungen nachweisen und damit die Unzulässlichkeit der Voraussetzung selbst, als sei nicht $K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2$. Denn man kann, so klein auch der Unterschied von K_2 und O sein mag, immer irgend ein Vieleck in K_2 beschreiben, welches der Kreisfläche noch näher kommt, also grösser ist als O. Das diesem Vielecke ähnliche Vieleck in K_1 beschrieben ist dagegen kleiner als K_1, und doch verhalten sich diese beiden Vielecke wie $d_1^2 : d_2^2$. Alles kommt daher darauf an, dass man zeige, wie es ein in K_2 beschriebenes Vieleck gebe, dessen Flächeninhalt O übertreffe, und hierzu dient die Exhaustionsmethode. Ein dem Kreise umschriebenes Quadrat ist nämlich offenbar grösser, als der Kreis und zugleich genau doppelt so gross, als das dem Kreise einbeschriebene Quadrat. Mithin ist Letzteres grösser als die halbe Kreisfläche, oder unterscheidet sich von der Kreisfläche um weniger als deren Hälfte. Wird in jedem der vier diesen Unterschied bildenden Kreisabschnitte der Bogen halbirt und mit dem Halbirungspunkte und den Endpunkten als Spitzen ein Dreieck gebildet, so ist dieses die Hälfte eines Rechteckes, innerhalb welches der Kreisabschnitt eingeschlossen liegt, also grösser als die Hälfte des Abschnittes. Das entstandene Achteck unterscheidet sich somit von dem Kreise um weniger als den vierten Theil desselben. Ebenso wird zu zeigen sein, dass das Sechszehneck einen geringeren Unterschied als $^1/_8$ der Kreisfläche liefere u. s. w. Bei jedesmaliger Verdoppelung der Seitenzahl des Vielecks wird der Flächenunterschied desselben gegen den Kreis mehr als nur halbirt, und schon immerwährende Halbirung erreicht nach dem Satze der Exhaustion jede beliebige Grenze der Kleinheit. Es ist also damit sicher gestellt, das endlich ein Vieleck erscheinen muss, dessen Fläche von der des Kreises sich weniger unterscheidet, als O von demselben Kreise verschieden ist. Das 13. Buch endlich kehrt zu einem Gegenstande zurück, dem das 4. Buch theilweise gewidmet war. Es handelt von den regelmässigen einem Kreise eingeschriebenen Vielecken, insbesondere von den Fünfecken und Dreiecken. Dann aber benutzt es diese Figuren als Seitenflächen von Körpern, welche in eine Kugel eingeschrieben werden, und schliesst mit der wichtigen Bemerkung, dass es keine weiteren regelmässigen Körper geben könne, als die fünf zuletzt erwähnten, nämlich das Tetraeder, das Octaeder und das Icosaeder, die von Dreiecken begrenzt sind, der Würfel, dessen Seitenflächen Quadrate sind, und das Dodecaeder, welches von Fünfecken eingeschlossen ist.

So der Inhalt eines der merkwürdigsten mathematischen Werke, welche überhaupt jemals geschrieben wurden. Ich habe als nächste Aufgabe mir gestellt, über den Zweck des Werkes Einiges zu sagen. Man findet nicht selten die Meinung ausgesprochen, Zweck des ganzen Werkes sei jener letzte Lehrsatz von der Unmöglichkeit anderer regelmässiger Körper als der bekannten fünf; Euclides habe, um diesen Satz festzustellen, die 13 Bücher Elemente geschrieben. Wer den Inhalt, auch nur in unserem Auszuge, sich näher ansieht, wird keinen Augenblick länger bei dieser Meinung verharren. So vielen Scharfsinn, so reiche Kenntnisse, so grosse Mühe wendet man nicht auf, um schliesslich ein doch nur geringfügiges Ergebniss zu erzielen. Nein, der Beweis des letzten

Satzes ist nicht der Zweck des Werkes; nur die künstlerisch vollendete Gliederung machte es möglich, dass das Werk in dem einen Gipfelpunkte abschloss, aber Zweck sind die 13 Bücher der Elemente sich selbst. Das soll keine blosse Redensart sein. Mitunter sagt man freilich von einer Einrichtung, von einem Ereignisse, welche man nach Zwecken erklären will und wofür man keinen einleuchtenden Zielpunkt findet, die Sache sei sich selbst Zweck. Hier ist das nicht so gemeint. Euclides beabsichtigte mit seinen Elementen eine encyclopädische Uebersicht derjenigen Theile der Mathematik, welche in den folgenden Theilen der Wissenschaft zur Geltung kommen,[9]) also wirklich Elemente von Wissenszweigen sind. Und Euclides war nicht der Erste, welcher ein solches Elementarwerk in dem oben erörterten Sinne verfasste. Schon vor ihm traten Elementenschreiber auf, deren Namen uns der Commentator des euclidischen Werkes aufbewahrt hat.[10]) Hippokrates von Chios, Leon, Theudios von Magnesia, Hermotimos von Kolophon werden uns genannt, deren Erster um das Jahr 450, also anderthalb Jahrhunderte vor Euclides lebte. Diese positive Thatsache, welche mich nöthigt, wenigstens beiläufig auch älterer Zeiten zu gedenken als dieser Untersuchung als Ueberschrift dient, steht in vollendetem Einklange mit der Ueberlegung, dass ein Werk wie die euclidischen Elemente unmöglich an dem Anfange einer Entwickelungsphase entstanden sein kann. Die Fabel von der gewaffnet aus der Stirne des Zeus entspringenden Pallas wäre überboten, wenn man, abgesehen von dem vorzüglichen Werthe des euclidischen Elementarwerkes, auch nur den Gedanken hegen könnte, es sei möglich, dass überhaupt ein Sammelwerk, ein „Handbuch“ oder „Lehrbuch der Mathematik,“ wie wir heute sagen, geschrieben würde, wenn nicht die Mathematik selbst als Lehrgegenstand schon lange bestand und im Wesentlichen ähnlicher Weise schon früher behandelt wurde, wie das neue Lehrbuch angiebt, mag dasselbe auch einzelne noch so wichtige Neuerungen sich erlauben.

Damit bin ich aber bei dem dritten Theile meiner Besprechung des euclidischen Werkes angelangt, bei der Form. Die Form dieses Lehrbuches ist dieselbe, welche seitdem zwei Jahrtausende hindurch in den Lehrbüchern der Mathematik festgehalten wurde, welche in den Schulwerken noch heute maassgebend ist und nur allmälig verlassen wird, insbesondere von solchen Schriftstellern, welche schon für weiter vorgeschrittene Leserkreise schreiben und desshalb das Regelmässige der euclidischen Form zu vermeiden suchen, welches ebenso dazu sich eignet dem Gedächtnisse eingeprägt zu werden, als es für den, der rasch lesen will, den Gegenstand fast ungeniessbar macht. Euclides spricht ein Mal wie das andere Mal zuerst einen Satz aus; daran knüpft sich die Vorschrift, was der Leser an der Figur vornehmen solle, welcherlei grade oder krumme Linien, in welcher Richtung und Ausdehnungsgrösse er ziehen solle, und dann kommt der Nachweis des Satzes. Wenigstens verhält es sich so bei denjenigen Sätzen, welche Lehrsätze, Theoreme, heissen, und bei denen es sich um den Nachweis — ἀπόδειξιν — des Ausgesprochenen handelt. Bei den Aufgaben, Problemen, handelte es sich um die Construction — κατασκευήν — des Ausgesprochenen. Da wurde der zuerst gestellten Aufgabe unmittelbar die Auflösung nachgeschickt; dann erst folgte die zum Beweis der Richtigkeit der Auflösung nöthige Vorbereitung, als Ziehen von Hülfslinien u. s. w. und endlich der Beweis selbst. Von einer dritten Art von Sätzen, von den Porismen, soll nachher noch die Rede sein. Diese strenge Form, diese regelmässige Wiederkehr derselben Reihenfolge der Gedanken, dieses ermüdende Einerlei der Wortverbindungen, welches auch das widerspänstigste Gedächtniss zwingt, das Gehörte nicht ganz zu entlassen, besitzt wahrlich kaum eine Aehnlichkeit mit der anmuthigen Sprache griechischer Wissenschaft im Allgemeinen. Nur mathematischen Schriften ist diese Form eigen, aber auch nicht einmal allen Schriften, welche man jetzt zu den mathematischen zählt. Die dem Aristoteles zugeschriebene Mechanik z. B. besitzt nicht die Gliederung in Satz, Vorbereitung, Beweis oder Aufgabe, Auflösung, Vorbereitung, Beweis, wie wir sie bei Euclides beschrieben haben. Auch spätere Schriften über Arithmetik, über Astronomie, über Mechanik, über Musik entbehren zum grossen Theile dieser Gliederung. Nur die Geometrie wird constant in derselben Weise behandelt. Wenn aber noch der negativ nicht unbedeutsame Umstand hinzutritt, dass Proklus Diadochus, der gelehrte Erklärer des ersten Buches der euclidischen Elemente, welcher 412—485 lebte, diese Form nicht als euclidisch bezeichnet,[11]) was er gewiss nicht unterlassen hätte, wenn jener Schriftsteller sie eingeführt hätte, sollten wir da nicht berechtigt sein, anzunehmen, auch die sogenannten Elementenschreiber vor Euclid möchten derselben Form sich bedient haben, und ferner sei es gar keine ursprünglich griechische Form des Vortrages? Was erscheint glaublicher, dass speciell für Geometrie eine Darstellungsweise erfunden worden, welche in anderen, zumal in nichtmathematischen Wissenschaften keinerlei Anwendung fand, oder dass eine fremde Form hier Eingang fand, und zwar desshalb, weil der Inhalt in dieser Form bekannt wurde? Mit anderen Worten ist jetzt die Muthmassung so durchaus ohne Stütze, die Geometrie sei zu den Griechen gelangt, nachdem sie bei anderen Völkern wenn auch noch keinen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht hatte, doch in Bezug auf die Lehrform schon sehr ausgebildet war? Ich will hier nicht weiter auf diese Hypothese eingehen, aber eine Andeutung glaubte ich mir gestatten zu dürfen.

Hier, wo von der euclidischen Form die Rede ist, darf auch wohl hervorgehoben werden, dass die Art der Beweisführung uns als eine doppelte beschrieben wird; man könne den Weg der Analyse und den der Synthese einschlagen. Diese beiden Wörter haben in der Mathematik sich völlig eingebürgert, aber freilich im Laufe der Jahrhunderte sehr wechselnde Bedeutungen angenommen, so dass es auch für den eigentlichen Mathematiker nicht überflüssig sein dürfte, die euclidische Bedeutung festzustellen.[12]) „Analytisch wird ein Satz bewiesen, wenn man das Gesuchte als bekannt annimmt, und durch daraus gezogene Schlüsse auf erwiesene Wahrheiten zurückkommt; synthetisch hingegen, wenn man von erwiesenen Wahrheiten zu dem Gesuchten gelangt.“ So heisst es in der Anmerkung zum 1. Satze des 13. Buches, welche Euclid selbst dem Ausspruche des Satzes unmittelbar nachschickt. Der Sinn dieser Erläuterung ist etwa folgender. Soll die Wahrheit eines Satzes D bewiesen oder widerlegt werden — denn beides kann verlangt werden — so sagt der Analytiker: D findet statt, wenn ich zeigen kann, dass C stattfindet; C findet statt, wenn ich zeigen kann, dass B stattfindet; B findet statt, wenn ich zeigen kann, dass A stattfindet; A findet aber statt, also findet auch D statt; oder A findet nicht statt und die vorhin ausgesprochenen Coexistenzen sind reciprok wahr, also findet D nicht statt. Der Synthetiker dagegen beginnt mit der Behauptung des Stattfindens von A, welches ihm auf irgend eine Weise bekannt ist. Daran knüpft er die Folgerung, es werde B stattfinden, folglich sei C wahr, und folglich sei D wahr — oder möglicher Weise ein Satz, der das Gegentheil von D einschliesst, und den man desshalb Nicht$D$ zu nennen übereingekommen ist.

Darnach stellt sich die Sache so, dass innerhalb der beiden Beweisverfahren, der analytischen und der synthetischen, je zwei verschiedene Beweisformen möglich sind: die directe und die indirecte. Die erstere zeigt, dass A, auf welches die Existenz von D zurückgeführt ist, wirklich existirt, oder dass aus A schliesslich D folgt; die zweite Beweisform dagegen zeigt, dass A nicht existirt und zur Existenz von D doch nothwendig wäre, oder dass aus A die Wahrheit von Nicht$D$ sich ableiten lässt, d. h. die Falschheit von D. Die indirecte oder, wie man auch sagt, apagogische Beweisform ist sicherlich nicht minder streng als die directe, und doch ist sie bei den Mathematikern ziemlich verpönt, man vermeidet sie, wo man es irgend kann, wenn eine nicht gar zu schleppende directe Beweisführung möglich ist. Der Grund liegt darin, dass bei aller zwingenden Strenge für den Verstand der indirecte Beweis der Phantasie keine vollständige Befriedigung zu gewähren pflegt. Ungezügelt umherschweifend sucht sie noch immer dritte Fälle ausfindig zu machen, welche neben der Existenz von Nicht$D$ eine Coexistenz von D zulassen, und nur schwer giebt sie sich gefangen, dass wirklich die Eintheilungstheile des Eintheilungsganzen vollständig erschöpft wurden, dass wirklich zwei sich ausschliessende Thatsachen vorliegen, die nicht gleichzeitig gesetzt werden können.[13])

Wir haben gesehen, dass bei allen Beweisen es am Ende darauf hinauskommt, einen Satz A als Grundlage zu benutzen, dessen Wahrheit schon bekannt ist. Die Wahrheit dieses Satzes selbst ist in vielen Fällen das Ergebniss früherer Lehrsätze und gehörigen Ortes streng erwiesen. Allein immer ist dieses nicht der Fall und kann nicht der Fall sein, da eine unendliche Kette von Rückschlüssen nicht denkbar ist. Irgend einmal muss man stehen bleiben und eine Grundwahrheit als von selbst einleuchtend zum Ausgangspunkte der Beweisführung annehmen. Diese letzten Wahrheiten bilden die Axiome, die Grundsätze und Annahmen der euclidischen Mathematik, zwischen welchen man unterscheiden kann. Ein Grundsatz ist ein solcher Satz, welcher von unmittelbarer Gewissheit nicht bewiesen zu werden braucht, augenscheinlich (evident) ist; eine Annahme ist ein Satz, welcher nicht bewiesen werden kann, und somit ist ein Satz der letzteren Art allerdings mancher Anfechtung unterworfen. Ich nenne nur das berüchtigte 11. Axioma des Euclid: „Zwei gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so dass die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.“ Dieser Satz bedarf eigentlich des Beweises, und doch ist es nie gelungen, ihn so festzustellen, dass man nicht auf eine andere Annahme von kaum grösserer Sicherheit sich berufen müsste. Das ist der Ursprung der unzähligen Schriften über die Parallelentheorie, welche insbesondere in den beiden letzten Jahrhunderten die überflüssige Mühe vieler Mathematiker in Anspruch nahm. Euclid hat die Axiome, welche er gebraucht, am Anfange des ersten Buches der Elemente zusammengestellt. Aehnlich wie mit den Rückschlüssen verhält es sich mit den Zerlegungen der Begriffe. Auch diese können nicht in Ewigkeit fortgesetzt werden. Gewisse einfache Begriffe muss die Geometrie wie jede andere Verstandeswissenschaft anerkennen, wolche nicht weiter zerlegt werden können, auf welche dagegen andere Begriffe durch Definitionen zurückgeführt werden. Euclid bringt seine Definitionen jeweil zu Anfang der Bücher, in welchen die definirten Dinge zuerst auftreten. Darin liegt ein gewisser Mangel an Folgerichtigkeit. Denn entweder musste eine systematische Anordnung absolut aller Definitionen gleich von Anfang an gewählt werden, sie mussten als eine Art von Wort- und Sachregister wohl noch vor den Axiomen ihren Platz finden, oder aber die logische Anordnung musste getroffen werden, dass jedes Wort da erläutert werde, wo es zuerst vorkommt. Die moderne Mathematik hat sich an diese letztere Anordnung gewöhnt, und schon der feinste Kritiker des 16. Jahrhunderts wusste sie zu empfehlen, indem er das treffende Bild gebrauchte: die Natur lasse nicht die Wurzeln aller Bäume des Waldes vor dem Walde entstehen, der Baumeister beginne nicht die Gründung einer Stadt mit der Fundamentlegung aller künftigen Gebäude.[14])

Diese Bemerkungen wollte ich zunächst an den Bericht über die euclidischen Elemente anknüpfen, mit dem Vorbehalte Anderes noch in einem späteren Augenblicke zu besprechen. Als ich oben anfing, von der Form der Sätze zu reden, wurde eine Unterscheidung angebahnt, welche gegenwärtig als erwünschter Uebergang zum Folgenden dienen soll. Ich sagte nämlich, ausser den Lehrsätzen und den Aufgaben, welche ich beide im Sinne der Griechen charakterisirte, gebe es noch Porismen, eine eigene Gattung von Sätzen. Daran knüpfe ich jetzt wieder an, um von einer Schrift zu reden, welche Euclides unter dem Namen „drei Bücher Porismen“ verfasste, und deren Inhalt lange Zeit das Räthsel der Mathematiker war, bis Herr Chasles eine Wiederherstellung des Werkes auf Grundlage der kurzen vorhandenen Notizen lieferte,[15]) welche alle Sachverständigen auf's Höchste befriedigte, und welche man desshalb auch als getreu anzusehen berechtigt ist, so lange nicht neue Entdeckungen etwa in Gestalt arabischer Uebersetzungen die heutige Annahme widerlegen. Schon aus dem Gesagten geht hervor, dass die eigentlichen Porismen des Euclid nicht mehr selbst existiren. Wir finden als Ueberrest derselben nur einen ziemlich kurzen, zudem noch lückenhaften Auszug bei Pappus, einem alexandrinischen Mathematiker, welcher gegen Ende des 4. Jahrhunderts nach Chr. Geb. blühte, und dessen noch häufig Erwähnung geschehen wird. In seinen Mathematischen Sammlungen[3]) gab nämlich Pappus eigene Untersuchungen über die mannigfachsten Theile der Mathematik, reichlich durchflochten mit Auszügen aus fremden Schriften, welche gleichzeitig erläutert werden. Unter diesen commentirten Schriften befinden sich denn auch die euclidischen Porismen, von welchen im 7. Buche der Sammlungen die Rede ist, und zu deren Verständniss Pappus eine Anzahl von Hülfssätzen oder Lemmen mittheilt. Freilich wäre der Gebrauch, welchen man von diesen Hülfssätzen allein machen könnte, um aus ihnen den Inhalt des Werkes, zu welchem sie erfunden sind, zu erschliessen, ein nur sehr geringfügiger. Wir besitzen nämlich auch noch Lemmen des Pappus zu Werken, deren Urschrift nicht verloren gegangen ist, und an diesen zeigt sich, dass der geometrische Scharfsinn des Verfassers ihn nicht selten weit abseits führte, und dass er sich wohl grade dadurch verleiten liess, etwas verschwenderisch mit der Benennung Lemma umzugehen. Es kommen Sätze bei Pappus vor, welche so gut wie in gar keiner Beziehung zu den Schriften stehen, als deren Hülfssätze sie bezeichnet werden, und a priori haben wir keine Gewähr dafür, ob es sich mit den Hülfssätzen zu den euclidischen Porismen nicht ebenso verhalten möchte. Seit der Chasles'schen Restitution ist man, wie es scheint, befugt, hier einen engeren Zusammenhang zu vermuthen.

Die 38 Lemmen des Pappus, die Inhaltsangabe der 3 Bücher Porismen, welche eben bei demselben sich findet, die Erklärungen des Wortes Porisma sowohl bei Pappus als bei Proklus Diadochus, das Alles stimmt so vollständig mit den Ergebnissen des berühmten Mitgliedes der Pariser Akademie überein, dass es schwer fällt, an einen Zufall dabei denken zu sollen. Mit Rücksicht auf diese Ergebnisse soll desshalb zunächst das Wort Porisma erläutert, dann der Inhalt der euclidischen Schrift angedeutet werden,[16]) welcher uns freilich zu ziemlich weitschweifigen Nebenuntersuchungen Anlass geben wird.

Der etymologische Rückgang von πορίζω auf πείρω, auf Pore, auf parare, auf forschen und auf das Sanskritwort pri ist nur von geringem Vortheile, da das Vorwärtsbringen, welches in allen diesen Wörtern sich kundgiebt, kaum einen Anhalt für den wissenschaftlichen Sinn eines solchen Kunstwortes zu liefern im Stande ist, höchstens die Bedeutung Zusatz, Corollarium, in welcher das Wort Porisma auch vorkommt (und zwar besonders in geometrischen Schriften) näher erläutert. Dagegen existiren für den uns jetzt beschäftigenden Sinn von Porisma mehrere Definitionen bei griechischen Mathematikern, welche uns eher Aufschluss versprechen. Zwei Definitionen finden sich bei Pappus in der Einleitung zum 7. Buche seiner mathematischen Sammlungen. Dort heisst es zuerst, „ein Porisma sei ein Ausspruch, bei welchem es sich um die Auffindung (πορισμόν) des Ausgesprochenen handle.“ Dann wird zu dieser im Ganzen nichtssagenden Erklärung hinzugefügt: „Diese Definition des Porismas wurde von den Neueren verändert, welche nicht Alles finden können, sondern auf die Elemente gestützt nur zeigen, dass das, was gesucht wird, existirt, nicht aber dieses selbst finden. So schrieben sie, obschon durch die Definition selbst und das Erlernte widerlegt, mit Bezug auf einen Nebenumstand: ein Porisma sei das, was zur Hypothese eines Ortstheoremes fehle.“ Eine weitere Definition findet sich bei Proklus, dem schon mehrfach erwähnten Commentator des Euclides, etwa 100 Jahre nach Pappus. Auch diese besagt zweierlei, wenn auch nicht in demselben Sinne wie die Definitionen des Pappus. „Einmal nennt man es ein Porisma, wenn ein Satz aus dem Beweise eines andern Satzes mit erhalten wird als Fund oder grade vorhandener Gewinn bei dem Gesuchten, zweitens aber auch, wenn Etwas zwar gesucht wird, aber um von der Erfindung Gebrauch zu machen und nicht von der Entstehung oder der einfachen Anschauung. . . . Man hat es nicht mit der Entstehung des Gesuchten zu thun, sondern mit dessen Erfindung, und auch eine blosse Anschauung genügt nicht. Man muss das Gesuchte in das Gesichtsfeld bringen und vor den Augen ausführen. Von dieser Art sind auch die Porismen, welche Euclid schrieb, als er seine Bücher der Porismen verfasste.“

Diese Definitionen lassen nun deutlich erkennen, dass in der That das Wort Porisma allmälig einen andern Sinn annahm, als es ursprünglich besass, dass die modernen Schriftsteller (wenn wir die Sprache des 4. Jahrhunderts reden wollen) dabei an einen Nebenumstand sich hielten, welcher von den Alten nicht berücksichtigt wurde, dass aber jedenfalls und zu allen Zeiten das Merkmal als untrüglich hervortrat, dass ein Porisma gewissermassen eine Verbindung von Theorem und Problem war, ein Theorem, welches ein Problem anregte und einschloss. Ein sehr allgemeines Beispiel davon bildet in einem der Mathematik durchweg fremden Gebiete die ärztliche Diagnose. Sie ist ein wahres Porisma. Sie erhärtet als Theorem den gegenwärtigen Zustand des Kranken, wobei sie ebensowohl die bei allen Individuen gemeinsamen Erscheinungen als die von einem Menschen zum anderen veränderlichen Naturkundgebungen berücksichtigt. Sie schliesst aber auch ein Problem in sich: die weitere Entwickelung des Krankheitsprocesses vorauszusehen und wo möglich zu leiten. Sie zeigt sich als unvollständig, so lange nicht eben dieses Problem seiner Lösung entgegengeführt wird. Uebersetzen wir nun eben diese Gedankenfolge in die Sprache der Mathematik, so können wir sagen: Ein Porisma ist jeder unvollständige Satz, welcher Zusammenhänge zwischen nach bestimmten Gesetzen veränderlichen Dingen so ausspricht, dass eine nähere Erörterung und Auffindung sich noch daran knüpfen lässt. Ein schon von Proklus angegebenes Beispiel liefert etwa der Satz, dass wenn ein Kreis gegeben ist, der Mittelpunkt desselben immer gefunden werden kann; denn an ihn knüpft sich eben die Aufgabe, die Construction zu ermitteln, durch welche man in der That den Mittelpunkt des Kreises erhält. Oder um ein zweites Beispiel aus den den Griechen unbekannten algebraischen Capiteln der Mathematik anzugeben, so ist es ein Porisma, wenn man sagt, ein Gleichungspolynom von beliebig hohem Grade könne immer in einfachste reelle Factoren zerlegt werden; denn an diesen Satz knüpft sich unmittelbar die weitere Frage, von welchem Grade jene einfachsten Factoren sein werden, sowie auch die mit den heutigen Mitteln der Wissenschaft allerdings noch nicht lösbare Aufgabe, jene einfachsten Factoren in jedem einzelnen Falle selbst aufzufinden.

Wenn durch diese Auseinandersetzungen der Begriff des Porisma im älteren Sinne des Wortes zu einiger Klarheit gelangt sein dürfte, so können wir jetzt auch die spätere Bedeutung des Wortes ins Auge fassen. Nachdem man nämlich bemerkt hatte, dass die Veränderlichkeit mitunter in der Ortsveränderung von Punkten bestehe, so klammerte man sich an diesen Nebenumstand fest und setzte als Regel, dass das Veränderliche ausschliesslich von der Art sein solle, dass man es mit einem mangelhaften Ortstheoreme zu thun habe. Durch diesen Ausspruch sind wir allerdings nicht viel weiter, da es nun erforderlich sein wird, das griechische Ortstheorem zu erläutern und dazu wieder einigermassen jenseits Euclid zurückzugreifen.

Man nennt in der Geometrie einen Ort die Aufeinanderfolge von Punkten, deren jeder eine vorgelegte Aufgabe löst oder deren jeder sich einer gewissen Eigenschaft erfreut, welche keinem anderen Punkte ausserhalb dieses Ortes zukommt. Die Alten theilen die geometrischen Oerter in verschiedene Klassen. Sie nennen ebene Oerter die grade Linie und die Kreislinie, weil sie in der Ebene erzeugt werden, körperliche Oerter die Kegelschnitte, weil man sich deren Entstehung auf einem Körper dachte, endlich lineäre Oerter alle Curven höherer Ordnung wie die Conchoide, Cissoide, Spirale und Quadratrix. Ebenso nannte man Ortstheorem ein solches, in welchem es sich um den Beweis handelt, dass eine Aufeinanderfolge von Punkten einer geraden oder krummen Linie den Bedingungen eines aufgestellten Satzes genüge; und ein Ortsproblem eine Aufgabe, in welcher gefordert wird, dass aus einer Aufeinanderfolge von Punkten jeder eine vorgegebene Bedingung erfüllt.[17])

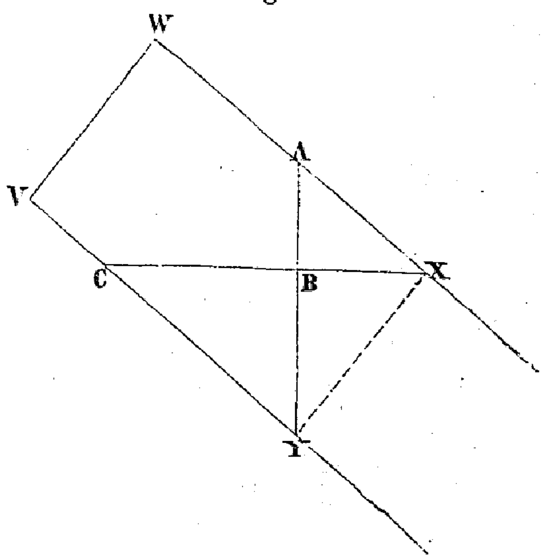
Man sieht leicht, dass hiermit ein Gebiet betreten war, welches von der Geometrie der euclidischen und voreuclidischen Elemente weit verschieden war. Bei den Oertern, ihren Theoremen und Problemen war regelmässig ein Veränderliches vorhanden, nach dessen Aenderung bald der eine, bald der andere Punkt des Ortes der Betrachtung unterfiel. Bei den Sätzen der Elemente war von einer solchen Veränderlichkeit keine Rede. Damit ist auch einleuchtend, um es beiläufig anzudeuten, dass die Darstellung der Elemente bis auf den heutigen Tag nur geringe methodische Umformung erlitten hat, während die Oerter eine wesentlich verschiedene Behandlung erlitten, seit im 17. Jahrhunderte die Veränderlichkeit mathematischer Grössen den besonderen Gegenstand umfassender Untersuchungen zu bilden anfing. Darin ist es wohl auch begründet, dass man erst in allerneuester Zeit sich erfolgreich mit den Porismen des Euclid beschäftigen konnte, nachdem eine Schule moderner Mathematiker die Methoden des 17. Jahrhunderts wieder bei Seite setzend gerade die ältesten Methoden zu weiterer Ausbildung förderte, und H. Chasles, der Wiederhersteller der Porismen, ist gleichzeitig einer der Mitbegründer dieser neueren alten Geometrie, der höheren Geometrie, wie man sie meistens zu nennen pflegt.

Die Erfindung der soeben näher definirten Oerter knüpft sich im Alterthume an zwei Aufgaben, von denen hier geredet werden muss, an die Aufgaben von der Verdoppelung des Würfels und von der Dreitheilung des Winkels.

Die erste, auch als delische Aufgabe bezeichnet, scheint die berühmtere gewesen zu sein.[18]) Wenigstens hielt man es für der Mühe werth, ihr einen sagenhaften Ursprung beizulegen. Eratosthenes, ein

Schriftsteller, welcher nicht lange nach Euclid lebte, so dass er in dieser Abhandlung uns noch beschäftigen wird, erzählt, König Minos von Kreta habe seinem Sohne Glaukos einen Grabstein in Gestalt eines Würfels errichten lassen, und als er die Baumeister nach der Grösse des Denkmals befragend erfuhr, es sei nach allen Ausdehnungen des Raumes 100 Fuss hoch, lang und breit, so habe er dieses Maass für ein Königsdenkmal zu klein gefunden und eine Verdoppelung des Denksteins verlangt, welcher dabei seine Würfelgestalt behalten solle. Das war nun allerdings schwierig. Denn wenn man die Aufgabe in die Sprache moderner Buchstabenrechnung umsetzt und die Seite des ursprünglichen Würfels a nennt, so bestand sie darin, einen Würfel von dem Rauminhalte $2\,a^3$ zu bilden, dessen Seite also $a\sqrt[3]{2}$ sein musste. Die Ausziehung der Cubikwurzel war aber damals auf dem Wege der Rechnung nicht zu erzielen [19]) und auch geometrisch konnte sie mit Hülfe des Kreises und der geraden Linie, also derjenigen ebenen Raumgebilde, mit deren Betrachtung die Elemente sich beschäftigten, nicht vollbracht werden. Der Erste, welcher wenigstens einen Schritt auf dem Wege der Auflösung zu machen wusste, war **Hippokrates von Chios**, den wir auch als den ersten Elementenschreiber um das Jahr 450 kennen gelernt haben. Er zeigte nämlich, dass die Aufgabe mit gleichem Rechte auch so ausgesprochen werden könne, dass man **zwischen zwei gegebenen Grössen zwei mittlere geometrische Proportionalen** suche. In der That setzt man $a : x = x : y = y : 2a$ und bildet daraus zwei Gleichungen, so folgt durch Elimination von y zwischen denselben $x^3 = 2\,a^3$, d. h. x ist die Seite des gesuchten Würfels. Man muss aber nicht vergessen, dass diese hier in wenige Zeichen gekleidete Betrachtung vor Erfindung allgemeiner Symbole eine sehr verwickelte war, und dass also Hippokrates, wenn gleich er, wie es scheint, nur die Umwandlung der Aufgabe als Ergebniss seiner Bemühungen erlangte, doch eben dadurch sich ein unstreitiges und nicht gering zu achtendes Verdienst um die Einzelaufgabe sowohl als um die Entwickelung der Geometrie erwarb. Auch nachdem Hippokrates diesen zum Ziele führenden Weg gezeigt hatte, blieb das Ziel selbst noch verhältnissmässig längere Zeit unerreicht, und die erneuten Versuche **Plato's und seiner Schule**, welche etwa ein halbes Jahrhundert später mit Erfolg gekrönt wurden, ist durch die Sage mit einer zweiten äusseren Aufmunterung, jene Aufgabe zu lösen, in Verbindung gesetzt. Auf Delos nämlich, so heisst es, sei damals eine schwere Seuche ausgebrochen, und das Orakel Apollos befragt, wie dem Elende abgeholfen werden könne, habe geantwortet: dadurch werde der Seuche ein Ziel gesetzt, wenn man den würfelförmigen Altar des Gottes verdoppele. Nun, wird weiter erzählt, habe man zu Plato gesandt, damit er den Orakelspruch erläutere und die Mittel lehre, ihm Genüge zu leisten, und er habe ihn in Hinblick auf einen Ausspruch des Aegypters Chonuphis, dessen er sich erinnerte,[20]) dahin ausgelegt: der Gott wolle, die Griechen möchten, statt in blutigen Streitigkeiten sich aufzureiben, sich lieber den Wissenschaften, insbesondere der Mathematik zuwenden, dann würde auch die Seuche verschwinden. Es ist gleichgültig, wie viel oder wie wenig an dieser Erzählung wahr ist. Jedenfalls erhielt die Aufgabe nach ihr den Namen der delischen und nicht weniger sicher ist es, dass die sogenannte Akademie, das ist eben die Schule Plato's, es war, welche die Lösung der Aufgabe fand. Wem das Verdienst der ersten Auflösung gebührt, ob Plato selbst, ob Archytas von Tarent, ob Eudoxus von Knydos, ob Menächmus, darüber wissen wir Nichts bestimmteres, da diejenigen Quellenschriften, welche das meiste Vertrauen verdienen würden, nicht anders als in Fragmenten erhalten sind, und grade hier die Lückenhaftigkeit zu bedauern ist. Ich meine die historischen Werke des Theophrastus von Lesbos und des Eudemus von Rhodus, der berühmten Schüler des Aristoteles, von denen jeder eine Geschichte der Geometrie, eine Geschichte der Arithmetik und eine Geschichte der Astronomie verfasste, Schriften von ausserordentlicher Klarheit und Treue und das vollste Vertrauen in ihre Zuverlässigkeit erweckend, so weit wir wenigstens nach den heute bekannten Bruchstücken des Eudemus zu urtheilen im Stande sind. Genug, für die eben besprochene Partie der Geschichte finden wir bei Eudemus nur geringen Anhalt, und es erscheint sogar Manchen zweifelhaft — wir können, wie noch erörtert werden wird, die Zweifel nicht theilen — ob diejenigen Auflösungen, welche von späteren Schriftstellern den schon genannten alten Mathematikern zugeschrieben werden, als authentisch zu betrachten sind.

Fig. 1.



Eutokius von Askalon, ein Commentator verschiedener Werke am Anfange des 6. Jahrhunderts, giebt als Methode des Plato an, er habe sich eines Instrumentes bedient, welches wir am deutlichsten als Rechteck $VWXY$ mit drei festen und einer in paralleler Lage verschiebbaren Seite bezeichnen können. Alsdann solle man mit dessen Hülfe es dahin bringen, dass, während eine der drei festen Rechtecksseiten, z. B. WX, durch den gegebenen Punkt A gehe, die verschiebbare XY eine derartige Lage annehme, dass sie mit dem einen Endpunkte Y auf der Verlängerung der nach

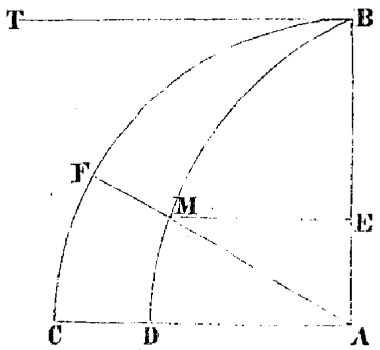
Lage und Länge gegebenen AB aufstehe, mit dem anderen Endpunkte X auf der zu AB in B errichteten Senkrechten. Nennt man nun $AB = a$, $BX = k$, so muss, weil BX aus der Spitze eines rechten Winkels $\perp AY$ gezogen ist, $BY = \frac{k^2}{a}$ sein. Ferner ist BY aus der Spitze eines rechten Winkels $\perp CX$ gezogen, folglich ist $BC = \frac{k^3}{a^2}$ und BC und AB stehen in dem cubischen Verhältnisse $k^3 : a^3$. Weiss man es endlich gleichfalls mechanisch so einzurichten, dass $BC = 2AB$ wird, so ist $k^3 = 2a^3$ und $BX = k$ ist die gesuchte Seite des doppelten Würfels. Die Methode des Archytas überliefert uns derselbe Eutokius, aber nach Eudemus, eine sichere Bürgschaft für die richtige Angabe. Archytas verfuhr weit wissenschaftlicher als Plato, indem er nicht mit Handgriffen herumexperimentirte, sondern von dem sich mathematisch ergebenden Durchschnittspunkte eines Kegels mit einer Curve von doppelter Krümmung Gebrauch machte. In dieser Betrachtung lag ein ganz ausserordentlicher Fortschritt, der uns um so klarer wird, wenn wir bedenken, dass vorher auch von den krummen Linien, welche in einer Ebene gezeichnet werden können, nur der Kreis bei den Elementenschreibern angewandt wurde, jetzt aber eine Linie weit verwickelterer Art zur Untersuchung kam, welche nicht der Ebene angehörte, zu deren graphischer Versinnlichung auf dem Zeichentäfelchen eine Art von perspectivischer Darstellung erforderlich war, wiewohl hiermit nicht gesagt werden soll, dass Archytas deren fähig war und nicht vielmehr räumlicher Modelle sich bediente, deren Anfertigung aber gleichfalls Schwierigkeit machen musste. Weiter berichtet Eutokius von Menächmus, er habe zwei Methoden der Würfelverdoppelung erfunden. Auch dieser bediente sich dabei krummer Linien und zwar solcher, welche durch den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen, also der noch heute sogenannten Kegelschnitte. Unklar ist nur, ob desshalb Menächmus für den Erfinder der Kegelschnitte zu halten ist, oder ob diese Ehre dem ungefähr gleichzeitigen Aristäus zukommt, welcher ein eigenes Werk in fünf Büchern über die Kegelschnitte schrieb. Eudoxus endlich, der früher erwähnte Erfinder des Satzes über das gegenseitige Verhältniss von Pyramide und Prisma, der als ein Bearbeiter der Aufgabe der Würfel-Verdoppelung genannt wird, soll zu diesem Zwecke gewisse krumme Linien eigens erfunden haben. Wir wissen indessen Nichts über deren Entstehungsweise, mithin selbstverständlich Nichts über seine Methoden.

Was vorhin über die angezweifelte Authenticität dieser Lösungen bemerkt wurde, bezieht sich insbesondere auf Plato, dessen uns aufbewahrte mechanische Lösung von einzelnen Schriftstellern [21]) als apokryph betrachtet wird, theils weil sie von früheren Berichterstattern als Eutokius, z. B. von Eratosthenes, nicht erwähnt wird, theils weil nach

Plutarch's Aussage Plato gegen Eudoxus, gegen Archytas und Menächmus sich tadelnd aussprach und seinen Tadel darauf gründete, dass sie die Würfelverdoppelung in instrumentaler und mechanischer Weise erzielten.[22]) Ein solcher Vorwurf, meint man, sei zu widersinnig, wenn derjenige, welcher ihn sich erlaubt, selbst in den gerügten Fehler verfiel. Man hat bei dieser kritischen Bemerkung übersehen, dass die als wahrheitsgetreu angenommene Erzählung Plutarch's die drei streng geometrischen Methoden des Archytas, des Menächmus und des Eudoxus, welche uns überliefert sind, ganz ebenso in ihrer Echtheit verdächtigen würde, wie die experimentelle Methode des Plato. Jenen Methoden, wie wir sie durch Eutokius kennen, konnte der Vorwurf Plato's unter keiner Bedingung gemacht werden, und doch ist zum Mindesten die Methode des Archytas auf's Beste verbürgt. Wir sehen uns hiermit in die Nothwendigkeit versetzt, eine der Quellen zu verwerfen und glauben einen Anhaltspunkt dafür gewonnen zu haben, dass mit grösserer Wahrscheinlichkeit die Genauigkeit des Plutarch als die des Eutokius in Abrede zu stellen sein wird, ganz abgesehen von dem allgemeinen Gesichtspunkte, dass in mathematischen Dingen ein Mathematiker am Ende glaubwürdiger erscheint, als ein Schriftsteller, der über alle anderen Materien schrieb, nur nicht über Mathematik.

Die andere Aufgabe, welche von weit geringerer Tragweite und, wie es scheint, weniger häufig behandelt immerhin die Entwickelung der Geometrie förderte und in diesem Sinne oben erwähnt werden musste, ist die der Dreitheilung oder, wie der Kunstausdruck auch wohl heisst, der Trisection des Winkels. Diese Aufgabe führt gleichfalls zu einer Gleichung dritten Grades. Denn wenn man von der Spitze des zu theilenden Winkels aus mit der Längeneinheit als Halbmesser einen Kreis beschreibt und von dem durch den Durchschnitt mit dem Kreise bezeichneten Endpunkte des einen Winkelschenkels eine Senkrechte auf den anderen Schenkel fällt, welche auf diesem von der Spitze an gerechnet ein Stück a abschneidet; wenn man ferner ein Drittel des Winkels bildet durch jenen Schenkel, von welchem a abgeschnitten wurde, und einen neuen Halbmesser; wenn man von dem Endpunkte dieses Halbmessers wieder eine Senkrechte herabfällt, welche auf dem anderen Schenkel das Stück x abschneidet, so besteht bekanntlich zwischen a und x der Zusammenhang $a = 4x^3 - 3x$. Selbstverständlich war auch diese Formel den Griechen unbekannt, allein sie hatten wenigstens negativ das Bewusstsein, dass wieder eine Aufgabe vorliege, welche die Kräfte der Elementargeometrie übersteige, und besonders Dinostratus, der Bruder des bei der delischen Aufgabe genannten Menächmus, benutzte zur Auflösung jener Aufgabe eine Curve, welche desshalb in der Geschichte der Mathematik den Namen der Quadratrix des Dinostratus führt, wenn auch die eigentliche Erfindung derselben vielleicht dem Hippias, einem Zeitgenossen des Sokrates zu verdanken ist.[23]) Die Quadratrix ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes M eines Halbmessers, der nach einander alle Lagen AF einnimmt, die er in einem Kreisquadranten ABC besitzen kann, und einer der Anfangslage AC des Halbmessers parallelen graden Linie EF, welche in derselben Bewegungszeit fortrückt, bis sie zur Berührungslinie BT an den Kreis geworden ist. Ist daher beispielsweise $AE = \frac{1}{3} AB$, so muss der durch M gezogene Halbmesser AF (unter Voraussetzung des Gegebenseins der Curve BMD) den rechten Winkel drittheilen, und in ähnlicher Weise kann auch der dritte Theil jedes spitzen Winkels durch Construction gefunden werden.

Fig. 2.



So sieht man, dass die Lehre von den geometrischen Oertern, angeregt jedenfalls seit 450 v. Chr. Geb., mindestens zur Zeit des Euclides, wahrscheinlich aber schon 50 Jahre früher, einen Grad von Vollkommenheit erreicht hatte, welcher über die Elemente weit hinausging, und welcher es begreiflich werden lässt, wenn man in besonderen Schriften mit dieser Lehre sich beschäftigte, wenn man an Ortstheoreme anknüpfend eine eigene Gattung von Sätzen aufstellte, welche mangelhafte Ortstheoreme oder Porismen in dem euclidischen Sinne des Worts waren. Ein solches Porisma, und wohl eines der berühmtesten, die überhaupt existirten, ist uns durch Pappus erhalten geblieben, welches in moderner Fassung etwa folgendermassen lauten würde:[24]) Schneiden die Linien eines vollständigen Vierseits sich in 6 Punkten, von denen 3 in einer Geraden liegende gegeben sind, und sind von den 3 übrigen Punkten 2 der Bedingung unterworfen, je auf einer gegebenen Geraden zu bleiben, so wird auch der letzte Punkt eine Gerade zum geometrischen Orte haben, welche aus den gegebenen Dingen näher bestimmt werden kann. Man sieht nun augenblicklich: 1) dass es sich hier um einen geometrischen Ort handelt; 2) dass in der Hypothese die Lage der von zwei Punkten beschriebenen Geraden nicht näher ausgedrückt ist, dass also an der Hypothese etwas fehlt; 3) dass demgemäss auch in der Folgerung keine vollständige Bestimmtheit existirt; 4) dass aber die Folgerung zu einer bestimmten ergänzt werden kann, indem man die Lage der dritten Geraden von den gegebenen Dingen abhängig macht, sie als eine darzustellende Function derselben betrachtet. Oder mit anderen Worten: Die Ortsveränderung eines Punktes ist in Abhängigkeit gebracht zu den Ortsveränderungen zweier Punkte, so dass sie der Art nach bestimmt ist, der Lage nach aber erst bestimmt wird, wenn jene Ortsveränderungen der beiden anderen Punkte, sowie die drei festen Punkte wirklich gegeben sind.

Dieses vollständiger als die übrigen erhaltene Porisma wurde, wie wir gleichfalls aus Pappus wissen, in 10 einzelnen Fällen behandelt, wie es überhaupt zu den charakteristischen Merkmalen der alten Geometrie gehört, Einzelfälle zu unterscheiden; eine Nothwendigkeit, welche erst bei der Einführung allgemeiner Symbole, welche durch Verschiedenheit von Zeichen eine Verschiedenheit der Lage erkennen lassen, in Wegfall kam. Man erkennt daraus um so leichter, welche gewaltige Ausdehnung ein Porismenwerk gewinnen konnte, wenn die theils als Bedingungen, theils als Ergebniss im Porisma vorkommenden geometrischen Oerter von irgend einer Gestalt sein durften. Euclid scheint sich daher die freiwillige Beschränkung auferlegt zu haben, nur solche Oerter zu benutzen, deren Theorie aus seinen Elementen zur Genüge bekannt war, nämlich in den beiden ersten Büchern der Porismen die gerade Linie, im dritten Buche auch den Kreis. Auch so waren 171 Sätze in dem Werke enthalten, welche Pappus je nach den Ergebnissen (also von den Bedingungen abstrahirend) in 29 Gattungen abtheilt. Eine Gattung war es z. B., wenn sich ergab, dass ein Punkt auf einer der Lage nach bekannten Geraden liegen müsse; eine zweite, wenn man erfuhr, dass eine gewisse Gerade in allen ihren Lagen durch einen bestimmten Punkt gehen müsse; eine dritte, wenn wieder eine bewegliche Gerade auf zwei gegebenen Geraden Abschnitte von bestimmten Produkten bildete, während man davon zunächst absieht, welcherlei Bedingungen in jener ersten Gattung die Bewegung des Punktes, in den beiden anderen die Bewegung der Geraden regeln. So wenigstens ist die Auffassung von Chasles bei seiner Wiederherstellung des verlorenen Werkes, deren Verdienste schon früher hervorgehoben wurden, und auf welche für die genauere Kenntniss des Gegenstandes hiermit verwiesen werden mag.

Wenn nun die Porismen im Hinblick auf ihren Inhalt, auf die Lehre von der Veränderlichkeit, welche denselben mit zu Grunde lag, eine nahe Verwandtschaft zu den geometrischen Oertern an den Tag legen, so ist die Form derselben, und auch das hat Chasles gezeigt, näher mit einem dritten Werke Euclids verwandt, zu dessen Besprechung ich jetzt übergehe, mit den sogenannten Daten.[25]) Diese Schrift, welche vollständig bis auf uns gekommen ist, besteht aus 95 Sätzen, in welchen gezeigt wird, dass, wenn gewisse Dinge gegeben sind, auch andere Dinge gleichzeitig mitgegeben sind. Etwas deutlicher wird wohl dieser Ausspruch, wenn man sich mit den Definitionen bekannt macht, welche Euclid selbst an die Spitze gestellt hat und in denen es heisst: Der Grösse nach gegeben heissen Räume, Linien und Winkel, wenn man solche, die ihnen gleich sind, finden kann. Ein Verhältniss heisst gegeben, wenn man ein Verhältniss, welches mit jenem einerlei ist, finden kann. Der Lage nach gegeben heissen Punkte, Linien und Winkel, wenn sie immer an demselben Orte sind u. s. w. Von den Sätzen mögen gleichfalls zum besseren Verständniss einige auf's Gerathewohl herausgehoben werden. Satz 1. Gegebene Grössen haben zu einander ein gegebenes Verhältniss. Satz 3. Wenn gegebene Grössen, wie viel ihrer sein mögen, zusammengesetzt werden, so ist ihre Summe gegeben. Satz 25. Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien einander schneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt gegeben. Satz 40. Wenn in einem Dreiecke jeder Winkel der Grösse nach gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben. Satz 41. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist und die um diesen Winkel liegenden Seiten ein gegebenes Verhältniss zu einander haben, so ist das Dreieck der Art nach gegeben. Satz 54. Wenn zwei der Art nach gegebene Figuren ein gegebenes Verhältniss zu einander haben, so haben auch ihre Seiten zu einander ein gegebenes Verhältniss. Satz 89. Wenn in einem der Grösse nach gegebenen Kreise eine der Grösse nach gegebene gerade Linie gezogen ist, so begrenzt sie einen Abschnitt, welcher einen gegebenen Winkel fasst.

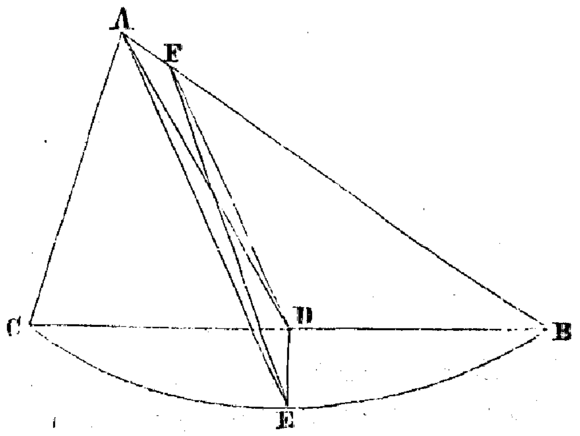
Die Vergleichung dieser Proben mit dem, was über Porismen gesagt wurde, lässt augenblicklich die grosse Formverwandtschaft erkennen. Auch hier schliesst das Theorem, in dessen Gewande die Sätze aufzutreten pflegen, ein künftiges Problem ein, und die Beweisführung erfolgt fast regelmässig so, dass jenes Problem gelöst wird. So ist in dem oben angeführten Satz 3 die Aufgabe mit eingeschlossen, die Summe der gegebenen Grössen auch wirklich zu finden, und in der That wird der Satz dadurch als richtig erwiesen, dass man zwar nicht die Summe selbst — denn dieses würde nicht in dem Charakter des Buches der Gegebenen liegen — aber eine der Summe gleiche Grösse darstellt. Aber auch dafür ist umgekehrt gesorgt, dass man nicht Daten und Porismen ganz verwechseln könne. Dagegen schützt der gewaltige Unterschied des Inhaltes, der sich kurz dahin bezeichnen lässt, dass bei den Daten die Bedingung der veränderlichen Grösse wegfällt, welche zum eigentlichen Wesen des Porismas gehört, und dessen wissenschaftliche Stellung nach modernen Begriffen zu einer weit höheren macht, als die der Daten, deren eigentliche Berechtigung uns fast zweifelhaft erscheint, weil in ihnen im Grunde Nichts steht, was nicht schon in anderer Form und anderer Reihenfolge in den Elementen stünde. Die Data, könnte man sagen, sind Uebungssätze zur Wiederauffrischung der Elemente, die Porismen sind Anwendungen derselben von selbstständigem Werthe. Dass demnach auch vor Euclid, und seit es überhaupt Elementenschriftsteller gegeben hatte, Material zu Daten und Porismen in der erläuterten Wortbedeutung vorhanden war, ist keinem Zweifel unterworfen, so wenig wir eine

Ahnung davon haben, ob wirklich derartige Werke verfasst wurden. Für den eigentlichen Zweck dieser Abhandlung bleibt sich dieses auch ganz gleich. Ich beabsichtige den mathematischen Charakter einer Zeit zu schildern, und diese gipfelte sich in Euclid. Er ist uns Repräsentant der bis zu seiner Blüthe vorhandenen Summe von Kenntnissen. Dass sein Name, seine Werke vor Allen erhalten sind, beweist die relative Meisterschaft, welche er unter seinen Zeitgenossen sich erwarb, stellt ihn uns aber keineswegs, ausser wo bestimmte Zeugnisse dafür auftreten, als den Deus ex Machina dar, dessen Schöpferwort das ganze Lehrgebäude der Mathematik aus dem Nichts hervorrief. Diese Auffassung ist zu wichtig und zu oft vernachlässigt worden, als dass man nicht immer und immer wieder darauf zurückkommen müsste.

Noch von einer dritten Aufgabensammlung des Euclid erzählt uns Proclus,[26]) von dem Buche über Theilung der Figuren.[27]) Bis in die zweite Hälfte des 16. Jahrhunderts war diese Schrift für den Occident verschollen, da fand John Dee um 1563 eine arabische Schrift gleichen Titels, welche er, wiewohl Mahomed Bagdadinus allein als Verfasser genannt war, für euclidisch hielt, und deren lateinische Uebersetzung dann auch später der sogenannten Oxforder Ausgabe des Euclid [28]) beigedruckt wurde. In neuerer Zeit hat Dee's Hypothese an Wahrscheinlichkeit gewonnen, seit Wöpcke in Paris ein zweites arabisches Fragment auffand, welches mit dem Dee'schen Manuscripte dem Wesen nach, aber nicht wörtlich übereinstimmend besonders auch noch Sätze über Theilung des Kreises enthält, die in jenem ersten Texte fehlen, während Proclus sie ausdrücklich erwähnt. Nimmt man hinzu, dass in Wöpckes Handschrift geradezu Euclid als Verfasser genannt ist, so wird dadurch gewiss der Vermuthung Raum gegeben, als sei hier mindestens die Spur der euclidischen Schrift vorhanden, wenn auch darin vorkommende und mehrfach seit Savilius [29]) hervorgehobene mathematische Unrichtigkeiten nicht gestatten in jenen Fragmenten das rein und vollständig erhaltene Buch von der Theilung wiederzuerkennen. Welcherlei Aufgaben übrigens in diesen anziehenden Bruchstücken enthalten sind, mag aus einigen Beispielen hervorgehen. So ist für das Dreieck und für das Viereck die Aufgabe gestellt, dieselben durch eine einer gegebenen Geraden parallele Linie nach gegebenem Verhältnisse zu theilen. Für das Fünfeck ist die Frage zwar nicht ganz so allgemein gestellt, aber immerhin wird die Theilung desselben nach gegebenem Verhältnisse verlangt, sei es von einem Punkte einer Fünfecksseite aus, sei es durch eine zu einer Fünfecksseite unter gewissen Voraussetzungen parallelen Gerade. Endlich schliesst die Wöpckesche Handschrift, wie schon bemerkt, die Aufgaben ein, eine von einem Kreisbogen und zwei einen Winkel bildenden Geraden eingeschlossene Figur in zwei gleiche Theile zu theilen und von einem gegebenen Kreise einen bestimmten

Theil abzuschneiden, Aufgaben, zu deren Lösung schon ein ziemlicher Grad geometrischer Gewandtheit erforderlich ist, wenn auch die Grundlage derselben durchaus elementarer Natur bleibt. Nebenstehende Figur zeigt z. B. die Halbirung des durch die Geraden AB, AC und den Kreisbogen BC eingeschlossenen Flächenraums. Man zieht die Sehne BC und von deren Mitte D aus die Senkrechte DE sowie die Verbindungslinie AD, so wird die gebrochene Linie ADE die Halbirung vollziehen, und dasselbe leistet die Gerade EF unter der Voraussetzung $DF \parallel AE$, weil alsdann $\triangle AFE = ADE$.

Fig. 3.



Konnten wir uns von den bisher genannten euclidischen Werken eine mehr oder weniger genaue Kenntniss verschaffen, so versagen dagegen unsere Hülfsmittel den Dienst bezüglich der 4 Bücher über die Kegelschnitte und der 2 Bücher über die Oerter auf der Oberfläche, von welchen uns kurz berichtet wird. Auf den Inhalt des ersteren euclidischen Werkes werden wir im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung einige Rückschlüsse machen können, wenn wir von Apollonius reden, da nach Pappus einige Bücher dieses Mathematikers wesentlich auf den euclidischen Kegelschnitten beruhen [28]. Das zweite Werk dagegen hat ausser seinem Titel [30]) nur vier darauf bezügliche Lemmen bei Pappus als Spur hinterlassen. Die Meinung von Chasles ist daher nur mit grosser Vorsicht aufzufassen, wonach die Oerter auf der Oberfläche sogenannte Umdrehungsoberflächen des zweiten Grades behandelt haben sollen. Noch andere Schriften mechanischen, astronomischen und optischen Inhaltes, welche den Namen des Euclid zur Aufschrift tragen, wollen wir, da es uns nur um den Zustand der Mathematik zu thun ist, ganz übergehen, ohne auch nur auf die Controverse ihrer Aechtheit oder Unächtheit uns einzulassen. Wir wenden uns vielmehr zu den drei unmittelbaren grossen Nachfolgern des Euclid, zu Archimed, Eratosthenes, Apollonius.

Archimed [31]) war unstreitig der weitaus grösste Mathematiker des Alterthums, und als solchen erkannte ihn auch die Mitwelt und in höherem Grade noch die Nachwelt an. Er ist einer der wenigen Gelehrten, die einen eigenen Biographen fanden, indem Heraclides, ein Schriftsteller von unbestimmter Lebenszeit, der aber jedenfalls vor das 6. Jahrhundert zu setzen ist, da Eutokius von Askalon seiner Erwähnung thut, ein Leben des Archimedes schrieb. [32]) Diese wahrscheinlich wichtige Quellenschrift ist indessen verloren gegangen, und so ist man genöthigt dasjenige, was über des Archimedes Lebensverhältnisse zu sagen ist, aus verschiedenen Schriftstellern des Alterthums zu sammeln.[33]) Archimed wurde in Syrakus geboren, wahrscheinlich im Jahre 287. Nach einer Angabe war er dem Könige Hiero verwandt, nach einer anderen dagegen, welche mehr Glauben verdienen dürfte, war er von niederer Geburt.[34]) Sein nahes, fast freundschaftliches Verhältniss zu dem Könige steht jedenfalls ausser Zweifel. Wer die Lehrer des Archimed gewesen, ist nicht bekannt. So viel giebt Diodor an,[35]) und arabische Schriftsteller bestätigen es, dass er in Egypten war, dem Lande, in welchem seit den Ptolemäern die Mathematik in Blüthe stand, wenn wir auch die ganze Vorzeit als sagenhaft betrachten sollten. Auch von einem Aufenthalt des Archimed in Spanien wird erzählt. Als wissenschaftliche Freunde des Archimed, welchen er einzelne Abhandlungen zueignete, kennen wir Zeuxippus, König Gelon, Konon und besonders Dositheus, an den weitaus die meisten uns erhaltenen Schriften des Archimed gerichtet sind. Die Stellung des Archimedes in Syrakus, als er in diese seine Vaterstadt zurückgekehrt war, scheint eine mehr private als öffentliche gewesen zu sein. Wenigstens ist nirgends die Rede von Staatsgeschäften, denen er vorgestanden hätte. Nur in Verbindung mit einzelnen Dienstleistungen gegen König Hiero wird sein Name genannt. Darunter ist die Untersuchung des Gold- und Silbergehaltes von Hieros Krone vielleicht am bekanntesten. Die Methode der Untersuchung wird in doppelter Weise beschrieben, und wiewohl der Gegenstand eigentlich ausserhalb der mathematischen Betrachtungen liegt, so mag hier ausnahmsweise ein Bericht über diese Controverse gestattet sein.

Vitruvius, ein Schriftsteller des augusteischen Zeitalters, erzählt die Sache folgendermassen:[36]) Archimed sei mit dem Nachweise eines bei Anfertigung der Krone muthmasslich begangenen Betruges beauftragt gewesen; zufällig sei er in ein Badehaus getreten, und habe beim Einsteigen in eine mit Wasser ganz angefüllte Wanne bemerkt, dass ebensoviel Wasser auslief als sein Körper verdrängte. Diese Beobachtung, welche sicherlich schon mancher Andere vor ihm gemacht hatte, ohne jedoch die Nutzanwendung einzusehen, welcher die einfache Thatsache fähig war, genügte ihm um die entsprechenden Folgerungen zu ziehen. Die Menge des verdrängten Wassers, so schloss er, hängt nur von der Ausdehnung, nicht von dem Gewichte des eingetauchten Körpers ab, das Gewicht dagegen verändert sich bei gleicher Ausdehnung nach der Natur des Stoffes; andere Stoffe werden bei gleicher Ausdehnung verschiedenes Gewicht, bei gleichem Gewicht verschiedene Ausdehnung haben. Bildet man sonach eine reine Goldmasse und eine reine Silbermasse, beide von genau gleichem Gewichte mit der Krone, so wird das Silber am meisten

Flüssigkeit aus einem bis zum Rande gefüllten Gefässe verdrängen, nächstdem die aus beiden Metallen gemischte Krone, das Gold endlich am wenigsten. Diese Schlüsse, wenn auch wohl noch nicht in der hier ausgeführten Deutlichkeit, scheinen dem Geiste Archimeds sich plötzlich dargeboten zu haben; er sah ein, dass die verhältnissmässige Ausdehnung bei gleichem Gewichte, eine Grösse, deren Umgekehrtes die moderne Physik bekanntlich als specifisches Gewicht bezeichnet, zur hydrostatischen Bestimmung der Bestandtheile eines Metallgemenges hinreiche mittelst einer heute unter dem Namen der Gesellschaftsrechnung bekannten Betrachtung. In der Freude über diese Entdeckung sei Archimed unbekleidet in's Freie und nach seiner Wohnung zu gelaufen mit dem lauten Rufe εὕρηκα, εὕρηκα, ich habe es gefunden! Die zweite Auffassung findet sich in einem Lehrgedichte „über die Gewichte und Maasse“, welches wahrscheinlich um das Jahr 500 verfasst sein dürfte. Dort ist nämlich die Auffindung des specifischen Gewichtes einer Substanz, und auf diese allein kommt es ja an, an eine doppelte Abwägung geknüpft. Wird die zu prüfende Substanz einmal im Freien und das zweite Mal in Wasser eingetaucht gewogen, so wird sie das zweite Mal so viel an ihrer Gewichtswirkung auf den Wagebalken, an welchem sie hängt, einbüssen, als die verdrängte Flüssigkeitsmenge beträgt, man wird folglich in dem Verhältnisse des ursprünglichen Gewichtes zu dem Gewichtsverlust das specifische Gewicht des Stoffes besitzen. Diese zweite Vorschrift ist allerdings der erstgegebenen vorzuziehen, weil wohl zu jeder Zeit Wägungen in genauerer Weise ausgeführt werden konnten, als die Abmessung der auslaufenden Flüssigkeit. Ferner ist nachweisbar, dass Archimed das hydrostatische Gesetz kannte, auf welchem die Methode der doppelten Abwägung beruht.[37]) Gleichwohl möchte ich dem älteren Berichte nur um so bestimmter Glauben schenken. Ist doch der Gedankengang der wahrscheinlichere, dass dem Archimed zuerst jene unmittelbare Messung vorschwebte, und dass er erst später die mittelbare Methode entdeckte, nachdem die praktische Schwierigkeit der ersteren eine solche wünschenswerth erscheinen liess.[38]) Aber gleichviel, jedenfalls war die Entdeckung eine grossartige und wurde als solche von den Zeitgenossen gewürdigt. An sie knüpft sich wahrscheinlich der von Proklus überlieferte Ausspruch des Königs Gelon, er werde hinfort Nichts bezweifeln, was Archimed behaupte.[39])

Vielleicht ist übrigens dieses geflügelte Wort auf Hiero zurückzuführen und knüpft sich an eine andere mechanische Erfindung des Archimed. Wie er nämlich mit der erzählten Entdeckung die Grundlage zur Hydrostatik gelegt hatte, so ist er auch als der Begründer der Statik und Mechanik fester Körper anzusehen, indem er den Satz bewies, dass ungleiche Gewichte an ungleichen Hebelarmen wirkend Gleichgewicht darstellen können, sofern die Produkte aus der Länge der

Hebelarme in die Gewichte einander gleich sind.[40]) Von diesem Satze aus construirte er Hebemaschinen, Flaschenzüge und ähnliche Apparate, mit deren Hülfe es möglich war, dass König Hiero einst allein ein schweres Schiff vom Stapel liess. Aus dem Bewusstsein der Richtigkeit dieses Satzes ging auch das weitere anekdotisch gewordene Wort des Archimedes selbst hervor, *δός μοί που στῶ καὶ τὴν γῆν κινήσω.* Es waren weiter nur Anwendungen seiner mechanischen Lehren, wenn Archimed die Schraube als Wasserhebemaschine benutzte, wenn er eine weit berühmte Himmelskugel aus Glas verfertigte, die zur Darstellung der Bewegungen der Gestirne diente. Um wieder auf sein Verhältniss zu König Hiero zurückzukommen, so erbaute er für denselben ein grosses Schiff mit 20 Ruderbänken, welches für alle Zwecke der Ueppigkeit auf's Glänzendste hergerichtet war.[41]) Nennen wir noch eine Wasserorgel, welche Archimed erfunden haben soll, und das geometrische Spielwerk, bei welchem ein Quadrat in 14 Stücke von verschiedener vieleckiger Gestalt zerschnitten wird, aus denen dann alle möglichen Figuren zusammengesetzt werden, so ist damit die Summe der nicht streng geometrischen Dinge gegeben, mit welchen der Name Archimeds vor der letzten Periode seines Lebens in Verbindung gesetzt wird.

Diese letzte Periode war nämlich dem öffentlichen Dienste gewidmet. Seit 214 belagerten die Römer Syrakus, und des Archimed Erfindungen, seine Bemühungen allein waren es, welche fast zwei Jahre lang alle Angriffe des Feindes vereitelten. Neben mancherlei Hebemaschinen, mit deren Hülfe die feindlichen Schiffe in die Höhe gezogen, dann bei plötzlichem Falle zerschmettert wurden, neben Wurfgeschossen aller Art werden aus dieser Zeit besonders die Brennspiegel des Archimed genannt, mit deren Hülfe er nach den freilich vielfach bestrittenen Erzählungen von Zonaras und Tzetzes die Schiffe der Römer aus weiter Entfernung in Brand gesteckt haben soll. Erst 212 gelang es den Römern Syrakus von der Landseite aus durch Ueberrumpelung zu nehmen, und dabei verlor Archimed das Leben, indem er der Rohheit eines römischen Soldaten, welcher ihn nicht kannte, zum Opfer fiel. Auch seinen Tod erzählen die Schriftsteller in Verbindung mit einer bekannten Redensart. Archimed sei gerade mit geometrischen Untersuchungen beschäftigt gewesen und habe zu diesem Endzwecke Figuren in den Sand des Hofes gezeichnet; als nun der Feind heranstürmte, habe Archimed, nur für seine Figuren in Angst, ihn durch die Worte gereizt, er solle seine Kreise schonen.[42]) Marcellus, der römische Feldherr, empfand grosse Trauer über den Tod des berühmten Gegners und liess ihm ein Grabmal setzen mit einer mathematischen Figur als Inschrift, wie jener es einst selbst angeordnet hatte. Das Grabmal scheint indessen von Archimeds Landsleuten sehr vernachlässigt worden zu sein, da Cicero, der es bei seinem dortigen Aufenthalte als

Quästor von Sicilien aufsuchte, es nur mit Mühe unter dem überwuchernden Gestrüppe entdeckte und an der Inschrift erkannte. Er liess es darauf auf's Neue in Stand setzen.

Nach diesen biographischen Notizen müssen wir zur Besprechung der uns erhaltenen Schriften des Archimed übergehen, welche uns indessen auch Gelegenheit geben wird, den Verlust mindestens einer Abhandlung zu beklagen, welche, wenn nicht einzig in ihrer Art, doch sicherlich die älteste Abhandlung über den betreffenden Gegenstand ist, von der wir überhaupt Nachricht haben. Die Schriften des Archimed, auch dem Philologen dadurch wichtig, dass sie sämmtlich im dorischen Dialekte abgefasst sind, beschäftigen sich mit arithmetischen, mit geometrischen und mit mechanischen Untersuchungen, welche sämmtlich in einem gewissen Zusammenhange stehen.

Bekanntermassen können bei der Betrachtung der Zahlengrössen zwei Gattungen von Eigenschaften in's Auge gefasst werden: solche, die sich auf die Veränderung der Zahl beziehen, sofern sie mit einer anderen in Verbindung tritt um eine dritte zu bilden, und solche, die der Zahl selbst inne wohnen. Die erste Gruppe von Betrachtungen umfasst das Rechnen, die heute sogenannte Arithmetik; der Inhalt der zweiten Gruppe wird heute als Zahlentheorie benannt. Die Griechen unterschieden ebenso, nur dass sie den Namen Arithmetik für den zahlentheoretischen Theil benutzten, während der calculatorische Theil als Logistik bezeichnet wurde. Die Arithmetik gehörte zu der Lieblingsbeschäftigung der älteren wie der jüngeren pythagorischen Schule, auf deren Gründer sich wichtige Capitel derselben zurückführen lassen.[5]) Bei der Besprechung des Euclid war von dieser alten Arithmetik die Rede, und eine historisch-mathematische Untersuchung über die ersten Jahrhunderte nach Christi Geburt würde noch reichhaltigen Stoff hinzufügen. Die Logistik dagegen, die Lehre vom Rechnen, scheint nur wenig Autoren den Stoff zur schriftlichen Behandlung geliefert zu haben, und von den Abhandlungen, welche darüber existirten, ist auch nicht eine einzige vollständig erhalten. Negative Erscheinungen begründen zu wollen, ist immer misslich; wollte man aber hier den Versuch wagen, so könnte man darauf aufmerksam machen, dass das Rechnen überhaupt einen der schwierigsten Lehrgegenstände bildet. Will man einen geometrischen Satz etwa vom Dreiecke beweisen, und zeichnet zu diesem Zwecke eine Figur, so wird zwar das Aussehen der Figur je nach der Wahl der Längen und Richtungen ein sehr verschiedenes sein können, aber doch wird man rasch zur Ueberzeugung gelangen, dass die unendliche Willkür nicht mehr als eine geringe Zahl wesentlich verschieden aussehender Figuren hervorbringen kann, und mit dieser Ueberzeugung bildet sich gleichzeitig das Bewusstsein von der allgemeinen Gültigkeit der an einer Figur gelungenen Beweisführung für alle Figuren derselben

Gattung. Eine wichtige Beihülfe ist hierbei die Benennung einzelner Punkte der Figur durch Buchstaben, und wir dürfen wohl gelegentlich darauf hinweisen, dass auch hierin schon eine gewisse allgemeine Symbolik von uraltem Ursprunge zu erkennen ist. Für Zahlengrössen dauerte es lange, bis allgemeine Symbole eingeführt wurden, an denen die Operationen formell wenigstens ausgeführt werden können, und was das Alterthum in dieser Richtung bietet, ist nur sehr ungenügenden Inhaltes. Benutzte man aber bestimmte Einzelzahlen zu den Operationen, so war jetzt die Verschiedenheit von einem Beispiele zum anderen eine so gewaltige, dass nur häufige und vielseitig fortgesetzte Uebung die Abstraction befestigen konnte, wie man es jedesmal nur mit einem Beispiele zu thun habe, und wie man das eigentliche Rechnungsverfahren von den Zahlen, an welchen es gelehrt wurde, loszulösen habe. Diese Schwierigkeit wuchs in dem Grade, als Verbindungen von mehr und mehr ganz frei zu wählenden Zahlen herzustellen waren, war demnach bei der Logistik bedeutender als bei der Arithmetik im alten Sinne dieser Namen. Eine Erläuterung der Rechnungsverfahren während der Ausübung war schon nicht ganz leicht, eine schriftliche Auseinandersetzung war nur um so schwieriger.[43]) Dazu kommt noch, dass das Rechnen der Alten vielfach ein instrumentales war, und dass auch die Erklärung des dazu erforderlichen Rechenbrettes[44]) leichter mündlich bei Benutzung des Apparates selbst als schriftlich zu geben war. Hier genüge die Bemerkung, dass ein solches Rechenbrett, Abax, bei den Griechen in Uebung war, und dass die Einrichtung desselben dem dekadischen Zahlensystem angepasst war, auf welches ebendadurch die wissenschaftliche Betrachtung hingelenkt werden musste. Erläuterungen dieses Systemes nun und Vervollkommnung desselben, dadurch, dass man wieder unter den dekadischen Einheiten Einheiten höherer Ordnung unterschied, fanden sich in einem dem Zeuxippus gewidmeten Werke des Archimed, welches der uns erhaltenen Ueberschrift, die Grundzüge,[45]) nach die Anfänge der Rechenkunst überhaupt enthalten haben dürfte. Jedenfalls sind wir berechtigt, Archimed als einen für seine Zeit gewandten Rechner anzuerkennen. Schon die sogenannte Kronenrechnung, von welcher wir freilich keine unmittelbaren Spuren besitzen, aber deren nothwendiger Grundgedanke oben besprochen wurde, erfordert einige Uebung in dem Rechnungsverfahren, und noch mehr wird sich dieses bei der Kreismessung nachweisen lassen.

Die Erweiterung des dekadischen Zahlensystems, welche Archimed einführte, bestand in der Zusammenfassung von je 8 auf einander folgenden Rangordnungen in eine Octade und dann wieder der Octaden selbst zu Perioden.[46]) Die erste Octade geht also von der Einheit zur Zahl 10000 mal 10000 oder Myriade Myriaden, welche die Einheit der zweiten Octade bildet und welche nach moderner Schreibart eine 1 mit 8 Nullen ist. Einheit der dritten Octade ist die Zahl, welche wir als 1 mit 2 mal 8 oder 16 Nullen schreiben; Einheit der 26. Octade etwa ist die 1 mit 25 mal 8 oder 200 Nullen. Diese Eintheilung bis zur 10000sten Myriade der 10000 mal 10000sten Octade durchgeführt bildet insgesammt die erste Periode und die zuletzt genannte Zahl selbst, welche also nach unserer modernen Schreibweise eine 1 mit 800 Millionen Nullen wäre, bildet die Einheit der ersten Octade der zweiten Periode.

Soll es gestattet sein hier bei der Erwähnung der verlorenen Grundzüge des Archimed die wenigen Namen anzuführen, welche ausserdem noch mit griechischer Logistik in Zusammenhang gebracht werden können, so ist vor Allen Apollonius zu nennen, dessen Multiplicationsmethode uns noch beschäftigen wird; dann ein gewisser Magnus, von dem wir allerdings Nichts weiter wissen, als dass er irgendeinmal vor Eutokius, der ihn rühmt,[47]) eine Logistik schrieb; weiter Theon von Alexandrien, gegen Ende des 4. Jahrhunderts, durch welchen wir griechische Divisionen und Ausziehung von Quadratwurzeln kennen;[48]) Pappus, der höchst wahrscheinlich an den Anfang seiner Sammlungen Logistisches zusammenstellte,[49]) wovon indessen nur ein Bruchstück auf uns gekommen ist, und Eutokius von Askalon, dessen Multiplicationsbeispiele erhalten sind.[50])

Wenn die Grundzüge des Archimed uns abhanden gekommen sind, und in ihnen sicherlich ein höchst werthvolles Werk, so ist doch die Sandrechnung[51]) desselben Verfassers vorhanden, welche mit der Aufgabe sich beschäftigt: eine Zahl anzugeben, welche grösser sei, als die Zahl der Sandkörner, die eine Kugel fassen würde, deren Halbmesser die Entfernung des Erdmittelpunktes von dem Fixsternhimmel wäre und dabei jene Zahlengruppirung aus den Grundzügen anwendet, über welche wir erst berichtet haben. Was ist nun die Bedeutung dieser eigenthümlichen Aufgabe? Man hat lange Zeit darüber in Zweifel gestanden. Man hat sogar versucht, die ganze Tendenz der Schrift in jenem Bruchstücke der Grundzüge zu finden; mit anderen Worten, man hat es als einzigen Zweck der Sandrechnung bezeichnet, ein Beispiel davon zu liefern, wie man die Aussprache der Zahlen von einer gewissen Höhe an vereinfachen und eine Einsicht in die Art ihres Wachsthums gewähren könne. Ich will nicht in Abrede stellen, dass ein derartiges Thema der Behandlung würdig gewesen wäre, allein ich möchte eher glauben, dass es einen Theil des Inhaltes jener Grundzüge bildete. Die Sandrechnung hatte sicherlich einen ganz anderen Zweck: sie sollte die arithmetische Ergänzung der geometrischen Exhaustionsmethode bilden. Wir haben bei Gelegenheit des 10. Buches der euclidischen Elemente gesehen, dass in der Exhaustionsmethode der

Gedanke zum Durchbruche kam, dass es keine so kleine Grösse gebe, welche nicht die Auffindung einer noch kleineren Grösse gestatte, und dieses Unendlichkleine wurde als Unterschied zweier Raumgebilde der Phantasie nahe gelegt. Den Gegensatz zum Unendlichkleinen bildet nun das Unendlichgrosse. Das heisst, wir können auch keine noch so bedeutende Grösse angeben, welche nicht die Auffindung einer noch grösseren gestattete. Will man aber der Phantasie zu Hülfe kommen, so ist das Unendlichkleine eher geometrisch zu versinnlichen, als der Unterschied zweier nahezu zusammenfallender Raumgebilde, so ist dagegen das Unendlichgrosse unmöglich an geometrischen Figuren zu begreifen, welche immer innerhalb des Raumes begrenzt erscheinen, während das Unendlichgrosse allen Raum überschreitet. Hier erleichtert man daher das Begreifen nicht durch die concrete, sondern durch die abstracte Grösse, das heisst durch die Zahl. Man wird zeigen, dass jede noch so grosse, aber gegebene Anzahl durch eine im Uebrigen nicht näher bestimmte Zahl überstiegen werde, und grade diese Aufgabe löst die archimedische Sandrechnung.

Man könnte vielleicht einwenden, mit dieser Erklärung, welche der Inhalt der Abhandlung zweifellos zulässt, schiebe man denn doch nachträglich dem Archimed eine Einsicht in das Wesen der Infinitesimalmathematik zu, welche er noch keineswegs besass. Allein dieser Einwand zerfällt, wenn wir zeigen, wie gerade Archimed die geometrische Exhaustionsmethode mehr anwandte und mit grösserem Erfolge als irgend ein anderer griechischer Mathematiker, eine Thatsache, welche überdies so allgemein anerkannt ist, dass Archimed sogar nicht selten als der Erfinder der Exhaustionsmethode bezeichnet wird, was er, wie wir wissen, nicht war. Ferner wird es zur Zerstörung der Skrupel wohl beitragen, wenn wir finden, dass Archimed neben der geometrischen Exhaustionsmethode auch eine rechnende Exhaustion besass, wenn wir diesen Namen auf jede Methode anwenden wollen, bei welcher ein nicht genau zu Findendes wenigstens zwischen zwei sehr benachbarte Grenzen eingeschlossen wird.

Von dieser rechnenden Methode macht Archimed in seiner Schrift über die Kreismessung Gebrauch. Er geht von der Seite des umschriebenen Sechseckes aus, deren Verhältniss zum Kreisdurchmesser in noch zu erörternder Weise als kleiner als 153 : 265 bewiesen wird. Dann folgt, dass die Seite des umschriebenen Zwölfecks kleiner als $\frac{153}{571}$ des Kreisdurchmessers sein muss, und, indem man weiter zum umschriebenen Vielecke von immer doppelter Seitenzahl übergeht, zeigt sich, dass die Seite des umschriebenen 96Ecks weniger als $\frac{153}{4673^1/_2}$ des Kreisdurchmessers misst. Der ganze Umfang des 96Eckes, und um so sicherer die kleinere Kreisperipherie ist somit kleiner als $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}$, d. h. gewiss kleiner als $3\frac{1}{7}$ des Kreisdurchmessers. Jetzt wendet sich Archimed zu den eingeschriebenen Vielecken. Er zeigt, dass die Seite eines solchen Sechsecks die Hälfte des Durchmessers, die Seite eines solchen Zwölfecks mehr als $\frac{780}{3013\frac{3}{4}}$ des Durchmessers ist. So gelangt er wieder zur Seite des jetzt eingeschriebenen 96Ecks, welche grösser als $\frac{66}{2017\frac{1}{4}}$ des Durchmessers gefunden wird. Folglich ist der ganze Umfang dieses 96Eckes, und um so sicherer die grössere Kreisperipherie, grösser als $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$, d. h. gewiss grösser als $3\frac{10}{71}$ des Kreisdurchmessers. Somit ist diejenige Zahl, welche das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser eines Kreises darstellen soll, allerdings nicht gefunden, aber sie ist doch zwischen zwei ziemlich nahe bei einander liegenden Grenzzahlen eingeschlossen, zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$.

Ich habe noch von der Methode dieser Entwickelung zu reden. Wenn man das eingeschriebene und umschriebene Sechseck zu einem Kreise zeichnet und den Mittelpunkt des Kreises mit den Endpunkten dieser Sechsecke verbindet, so ergiebt sich leicht, dass die Hälfte der umschriebenen Sechseckseite die kleinere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen grössere Kathete der Halbmesser des Kreises und dessen Hypotenuse doppelt so gross als die kleinere Kathete. Das Quadrat des doppelten Halbmessers oder des Durchmessers muss daher 3mal so gross sein als das Quadrat jener verdoppelten kleineren Kathete oder der umschriebenen Sechsecksseite. Ob nun Archimed in einer Tafel der Quadrate ganzer Zahlen dasjenige Quadrat aussuchte, dessen Dreifaches nur unbedeutend grösser als ein anderes Quadrat war, und dadurch zu 265 und 153 kam, wissen wir freilich nicht.[52]) Genug, er geht von diesen beiden Zahlen aus und benutzt zur Auffindung von Verhältnisszahlen für die Seiten der Vielecke von jeweilig verdoppelter Seitenzahl theils den pythagoräischen Lehrsatz, theils jenen anderen gleichfalls bekannten Lehrsatz, dass die Halbirungslinie eines Winkels eines Dreiecks die gegenüberliegende Seite im Verhältnisse der anliegenden Seiten schneidet.[53]) Dieselben Hülfssätze wendet er auch in Bezug auf die eingeschriebenen Vielecke an und zeigt sich dabei als gewandten Rechner. Nicht nur mit Proportionen weiss er auf's Beste umzugehen, er muss auch irgend eine Methode besessen haben, die Quadratwurzeln näherungsweise auszuziehen. Ich sage eine Methode der Ausziehung von Quadratwurzeln, denn wenn auch in dem oben erwähnten Anfangsbeispiele ein blosses Experimentiren denkbar ist, so verlässt uns diese Möglichkeit, sobald gebrochene Werthe als Quadratwurzeln erscheinen; das Vorhandensein einer Liste der Quadrate aller zwischen zwei ganzen

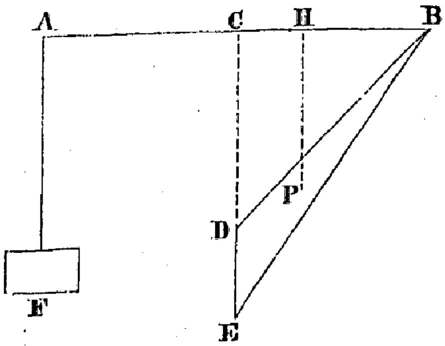
Zahlen enthaltenen Bruchzahlen ist mehr als unwahrscheinlich. Leider giebt Archimed selbst in keiner Weise zu erkennen, worin sein Verfahren bestanden haben mag, und auch sein Commentator Eutokius belehrt uns nicht darüber. Er zeigt nur umgekehrt, dass die Multiplication der angegebenen Werthe mit sich selbst nahezu die archimedischen Ausgangszahlen wieder herstelle und macht uns so wenigstens mit dem Multiplicationsverfahren der Griechen, wie es zu seiner Zeit in Uebung war, bekannt. Dasselbe ging, wie wir heute sagen würden, von links nach rechts, also der modernen Art und Weise entgegengesetzt. So multiplicirte er, um 265^2 zu finden[54]) zuerst 200 mit 200, mit 60, mit 5; dann 60 mit denselben Factoren; endlich auch 5; und diese 9 Theilprodukte addirte er schliesslich zu 70225 zusammen.

Ich gehe nun schliesslich zur Besprechung der geometrischen Schriften des Archimed über. An die Spitze derselben möchte ich wieder eine verloren gegangene Abhandlung stellen, welche die Ueberschrift: Ueber die Kegelschnitte führte. Dass er eine solche schrieb, glaubt man daraus folgern zu dürfen, dass an zwei verschiedenen Stellen von unzweifelhaft echten Schriften auf eine Abhandlung dieses Titels verwiesen ist, ohne dass der Name eines Verfassers angegeben wäre,[55]) und das unterlässt Archimed sonst nur, wenn er sich auf Eigenes beruft. Jedenfalls stehen auch die Einzeluntersuchungen des Archimed über bestimmte Kegelschnitte mit dieser Annahme nicht im Widerspruch, und wenn wir an dieser Stelle noch nicht darauf eingehen wollen, in welcher Art Archimed, seine Vorgänger und seine Nachfolger die Entstehung der Kegelschnitte auffassten und wie sie dieselben benannten, so dürfen wir wohl mit vorweggenommenem Namen bemerken, dass die Parabel diejenige unter diesen Curven war, mit welcher Archimed sich mit einer gewissen Vorliebe beschäftigte. Die Untersuchungen über die Quadratur der Parabel insbesondere, welche zwischen das erste und zweite Buch einer mechanischen Schrift über den Schwerpunkt und das Gleichgewicht von Ebenen eingeschoben sind, zeigen die vielgerühmte Gewandtheit des Archimed in Anwendung der Exhaustionsmethode im glänzendsten Lichte, so dass es lohnend sein dürfte, wenigstens im Allgemeinen den Gang des Hauptbeweises anzudeuten.[56])

Wird ein Parabelabschnitt durch eine in der Mitte der denselben bildenden Sehne der Axe parallel gezogene Gerade geschnitten, so ist die Berührungslinie an die Parabel in dem Schnittpunkte der Sehne parallel. Somit ist die Senkrechte aus diesem Schnittpunkte auf die Sehne die grösste Senkrechte, welche überhaupt aus einem Punkte innerhalb des gegebenen Parabelbogens auf die Sehne gefällt werden kann, oder dieser Punkt ist als höchster Punkt des Parabelabschnittes über seiner Sehne zu bezeichnen. Daraus folgt weiter, dass das Dreieck, welches die Sehne zur Grundlinie, den genannten Höhepunkt als Spitze besitzt, und welches folglich von dem ersten Parabelabschnitte um zwei neue kleinere Abschnitte sich unterscheidet, grösser als die Hälfte des ersten Abschnittes ist. Dieser Abschnitt ist also umgekehrt grösser als einmal, kleiner als zweimal das betreffende Dreieck. In jedem der beiden neuen kleineren Abschnitte wird nach ähnlicher Regel wieder ein Dreieck beschrieben, deren jedes mehr als die Hälfte des ihn enthaltenden Abschnittes einnimmt, und genau den achten Theil des ersten Dreiecks als Flächeninhalt besitzt. Der Parabelabschnitt wird dadurch in zweiter Annäherung grösser als $1^1/_4$, kleiner als $1^1/_2$ des ursprünglichen Dreiecks. Nun werden in die neuen immer wieder kleineren Parabelabschnitte wieder neue Dreiecke beschrieben und den eben ausgesprochenen Sätzen Analoges von denselben behauptet. In modernen Zeichen würde die Reihenfolge der so zu gewinnenden Sätze als Summirung der unendlichen Reihe $1 + {}^1/_4 + ({}^1/_4)^2 + ({}^1/_4)^3 \ldots$ aufzufassen sein, wobei 1 dem Flächeninhalte des ersten Dreiecks, die gesuchte Summe dem Flächeninhalte des Parabelabschnittes als Maass zu dienen hat. Archimed summirt freilich zunächst nur die endliche Reihe, deren letztes Glied wir etwa als $({}^1/_4)^n$ bezeichnen wollen, und giebt an, dass die Summe derselben um den dritten Theil der kleinsten Zahl geringer als $^4/_3$, in Zeichen also $= {}^4/_3 - {}^1/_3\,({}^1/_4)^n$ sei. Dann kehrt er mit Hülfe indirecter Betrachtungen zu seinem eigentlichen Endziele zurück und weist nach, dass ein Parabelabschnitt weder grösser noch kleiner sein könne, als $^4/_3$ des Dreiecks, das mit dem Abschnitte einerlei Grundlinie und gleiche Höhe hat.

In noch höherem Grade originell erscheint der andere Beweis desselben Satzes, welchem das Buch der Quadratur der Parabel seine den Leser sicherlich überraschende Stellung inmitten von Untersuchungen über Gleichgewicht und Schwerpunktsconstructionen verdankt.[57]) Mit Rücksicht grade auf die Auffindung des Schwerpunktes einer Figur wird nämlich gezeigt, dass, während C der Stützpunkt eines gleicharmigen Hebels ACB ist, ein Dreieck BDE, welches in B und C an dem einen Wagebalken CB befestigt ist, der in A an dem anderen gleich langen Wagebalken CA aufgehängten Figur F das Gleichgewicht hält, sofern F der dritte Theil des Dreiecks BDE ist. Des Weiteren wird ein Paralleltrapez aufgehängt gedacht (Fig. 5), dessen nicht parallele Seiten sich verlängert in B schneiden, während die parallelen Seiten senkrecht gegen den Wagebalken sind. Für die diesem Trapeze $DEGH$ das Gleichgewicht bei A haltende Figur F wird bewiesen, dass sie zwischen

Fig. 4.



zwei Grenzen dem $\frac{CK}{CB}$- und dem $\frac{CL}{CB}$-fachen des Trapezes enthalten ist. Jetzt geht Archimed zur Aufhängung eines Parabelabschnittes über. Einige Eigenschaften dieser Curve hat er schon in dem Eingange des Buches erwähnt. Nun zeigt er (Fig. 6), dass, wenn die den Abschnitt bildende Sehne BD in beliebig viele gleiche Theile getheilt wird, wenn aus jedem Theilpunkt eine Parallele zu CE und aus den Schnittpunkten dieser Parallelen mit der Parabel Verbindungslinien nach B gezogen werden, welche man noch jenseits des Parabelpunktes bis zur nächsten Parallelen verlängert, der Parabelabschnitt alsdann als zwischen zwei Summen von trapezartigen Stücken enthalten sich kundgiebt. Durch Aufsuchung der in A gleich schweren Figuren zu den einzelnen Trapezen, sowie durch Verbindung der beiden genannten Gleichgewichtssätze für das Dreieck und das Trapez ergiebt sich endlich der Parabelabschnitt als Drittel des grossen Dreiecks BDE. Andererseits ist, unter der Voraussetzung, es sei SGT die der BD parallele Berührungslinie an die Parabel, G die Mitte von HR, H die Mitte von BD und R die Mitte von BE, folglich $HG = \frac{1}{4}\, DE$; daraus ergiebt sich, dass der Parabelabschnitt $\frac{4}{3}$ des kleinen Dreiecks BDG ist, wie erwiesen werden sollte.

Fig. 5.

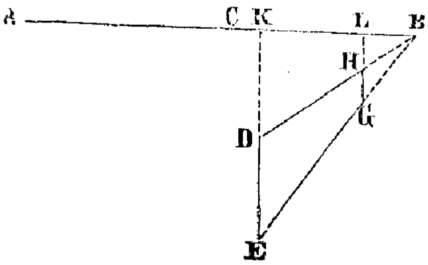
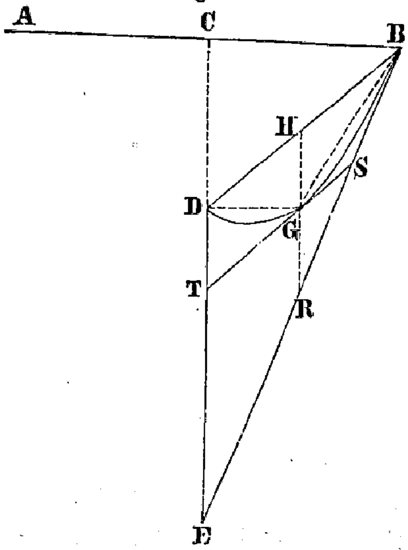


Fig. 6.



Ausführlicher möchte ich nicht bei diesem Gegenstande verweilen, um nicht der selbstgesteckten Beschränkung auf rein Mathematisches allzu untreu zu werden. Aus demselben Grunde sollen auch des Archimed zwei Bücher von den schwimmenden Körpern hier nur eben genannt werden, weil sich deren Interesse darauf beschränkt, die Eintauchungstiefe gewisser Körper zu finden, deren geometrische Eigenschaften in einer besonderen Schrift abgehandelt werden, in dem Buche von den Konoiden und Sphäroiden. Unter diesem Namen kennt Archimed diejenigen Körper, welche durch die Umdrehung einer Parabel, einer Ellipse, einer Hyperbel um ihre Axe gebildet werden und welche man heute als Rotationsparaboloide, Rotationsellipsoide, Rotationshyperboloide benennt. Archimed theilt solche Körper durch einander parallele gleich weit von einander entfernte ebene Schnittflächen und erhält so zwischen je zwei Schnittebenen ein Körperelement, das von einem Cylinder eingeschlossen, einen anderen Cylinder in sich enthält. Die Summirung sämmtlicher grösseren Cylinder nebst den der sämmtlichen kleineren Cylinder wird sonach zwei Grenzen bilden, zwischen welchen der Körperinhalt des gegebenen Umdrehungskörpers enthalten ist, und welche bei Annäherung der Schnittflächen selbst beliebig wenig von einander unterschieden sind. Mit anderen Worten, Archimed findet die Cubatur der genannten Körper nach einer Methode, in welcher wir denselben Gedanken wiedererkennen, der ausgebildet die Lehre von den bestimmten Integralen begründet. Gelegentlich wird dabei auch die Quadratur der Ellipse abgeleitet,[58]) gelegentlich auch gezeigt, wie zu jeder Ellipse unendlich viele Kegel und Cylinder gefunden werden können, auf deren Mantel sie sich befindet, offenbar ein Analogon zu dem, was wir heute perspectivische und projectivische Eigenschaften der Curven zu nennen pflegen.[59])

Noch ein anderes stereometrisches Werk hat Archimed hinterlassen: Die zwei Bücher von der Kugel und dem Cylinder, deren ausgesprochener Zweck es ist,[60]) drei neue Sätze zu beweisen: 1) dass die Oberfläche einer Kugel dem Vierfachen ihres grössten Kreises gleich sei; 2) dass die Oberfläche eines Kugelabschnittes so gross sei, als ein Kreis, dessen Halbmesser einer geraden Linie vom Scheitel des Abschnittes bis an den Umfang des Grundkreises gleich sei; 3) dass der Cylinder, welcher zur Grundfläche einen grössten Kreis der Kugel habe, zur Höhe aber den Durchmesser der Kugel, mit anderen Worten, der der Kugel umschriebene Cylinder anderthalb mal so gross sei, als die Kugel, und dass auch seine Oberfläche das Anderthalbfache der Kugeloberfläche sei. Auf diese Sätze scheint Archimed selbst unter allen seinen Entdeckungen das grösste Gewicht gelegt zu haben; wenigstens war es die Kugel mit dem sie umgebenden Cylinder, welche er auf seinen Grabstein eingemeiselt wünschte, und woran, wie früher erwähnt, Cicero die Begräbnissstätte des grossen Mannes erkannte.

Zuletzt bleibt noch eine merkwürdige Schrift des Archimed zu erwähnen übrig: Das Buch von den Schneckenlinien.[61]) Nicht als ob es das Letzte gewesen wäre, was Archimed schrieb. Die chronologische Reihenfolge seiner Werke, wie sie aus den gegenseitigen häufigen Citaten ziemlich genau herzustellen ist, und auch in den Gesammtausgaben archimedischer Schriften, z. B. in der vortrefflichen deutschen Ausgabe von Nizze eingehalten ist, weist der Schrift über die Schneckenlinien den Platz an zwischen der Kreismessung und den Konoiden und Sphäroiden. Der Grund, warum ich ihrer jetzt erst gedenke, liegt darin, dass nach modernen Begriffen die Schneckenlinie (die archimedische Spirale, $\varrho = a\vartheta$) sich weiter von der elementaren Geometrie entfernt, als was wir bisher kennen gelernt haben. Sogar vom antiken Gesichtspunkte aus, von welchem so Manches ganz anders aussieht, lässt sich etwas Aehnliches behaupten. In der That ist die Schneckenlinie die erste, welche durch eine doppelte Gattung von Bewegungen und von bewegten Elementen zugleich erzeugt wird. Die Quadratrix des Dinostrates z. B. benutzt zu ihrer Entstehung eine drehende und eine geradlinige Bewegung, aber die bewegten Elemente sind doch zwei gerade Linien, deren Durchschnittspunkt die genannte Curve zum Orte hat. Hier dagegen bewegt sich das eine Mal eine grade Linie, das andere Mal ein Punkt, denn die Definition, welche Archimed giebt,[62]) lautet so: Wenn eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte, welcher unbeweglich bleibt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, bis sie wieder dahin gelangt, von wo die Bewegung ausging, und wenn zugleich in der bewegten Linie ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit von dem unbewegten Endpunkte anfangend sich bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Schnekenlinie in der Ebene. Man hat die Berechtigung des Namens archimedische Spirale in Abrede stellen wollen. Man hat behauptet, nicht Archimed, sondern dessen Freund Konon sei der Erfinder der Linie und der sich auf dieselben beziehenden Sätze gewesen. Nizze hat indessen zur Genüge gezeigt,[63]) dass Letzteres wenigstens durchaus unrichtig und folglich Ersteres nicht hinlänglich begründet sei. Archimed war es, der jene Sätze an Konon zum Beweise schickte, wie es in der Sitte der damaligen Zeit gelegen zu haben scheint, und welcher nach dem Tode des Konon erst viele Jahre wartete, „ohne dass irgend Jemand mit einer dieser Aufgaben sich befasst hätte;“ alsdann erst setzte er die Beweise in der gegenwärtig besprochenen Schrift für den Dositheus auseinander. Gerade der moderne Leser, welcher gewöhnt ist, Curven von der Natur der Spirallinien nur mit Hülfe der Infinitesimalrechnung zu discutiren, während er noch in der Lehre von den Kegelschnitten z. B. häufiger von rein geometrischen Anschauungsbeweisen Gebrauch macht, grade dieser wird sich nicht genug über die Gewandtheit erstaunen können, welche Archimed in bewundrungswürdiger Anwendung ganz elementarer Mittel an den Tag legt. Einige wenige leicht abzuleitende Proportionen und Ungleichheiten — denn auf letztere kommt es begreiflich vielfach an bei Anwendung der Exhaustionsmethode — die Zerlegung des Raumes der Schneckenlinie in Ausschnitte, deren jeder kleiner als ein äusserer, grösser als ein innerer Kreisausschnitt ist, das ist der ganze wissenschaftliche Apparat, mittelst dessen die Quadratur der Schneckenlinie gefunden, die Berührungslinie an irgend einem Punkt derselben gezogen wird.

Ein Buch des Archimed kennen wir noch ausserdem. Es sind die Wahlsätze, wie die Ueberschrift der deutschen Uebersetzung lautet, welche nach der allein uns erhaltenen arabischen Bearbeitung angefertigt ist. Die Echtheit dieser Schrift kann nach den bestimmten

Aeusserungen des Arabers nicht wohl angezweifelt werden; keinenfalls begehen wir indessen ein Unrecht an Archimed, wenn wir über den höchst unbedeutenden Inhalt sofort hinweggehen. Wir möchten uns sonst den Eindruck der vorhergehenden Darstellung einigermassen verwischen, aus welcher sich uns Archimed, um mit einem in den letzten Jahren verstorbenen Fachgenossen zu reden,[64]) als das kundgiebt, was er in der Geschichte der Wissenschaften war: „das grösste mathematische Genie des Alterthums, der sich überall Bahn brach und als ein bauender König den Kärnern viel zu thun gab."

Soll damit die Würdigung des Archimed als Mathematiker abgeschlossen sein, so darf ich doch vielleicht noch einen Umstand erwähnen, der in doppelter Weise denkwürdig ist, theils zur Kennzeichnung der damaligen Gelehrtenwelt, theils zur Kenntniss einer gewissen Schalkhaftigkeit in dem Charakter des Archimed, welche aus dem, was wir früher über sein Leben berichteten, noch nicht hervorgeht. Ich bemerkte schon, dass es Sitte war, Sätze ohne ihren Beweis zu veröffentlichen, gewissermassen als Herausforderung für andere Mathematiker, den Beweis nachträglich zu finden. Nun scheint es auch damals nicht an Leuten gefehlt zu haben, welche Alles von Anderen Gefundene als willkommene Beute ansahen, ohne sich die Mühe zu geben, vielleicht ohne die Fähigkeit zu besitzen, die Richtigkeit zu bestätigen. Diesen Leuten gegenüber erlaubte sich Archimed nun einmal den Scherz, auch zwei falsche Sätze zu veröffentlichen, um, wie er geradezu sagt,[65]) wo er geraume Zeit später die Neckerei erzählt und die Falschheit jener Sätze selbst darthut, „um eben solche Leute, die da Alles zu finden behaupten und doch nie einen Beweis vorbringen, zu überführen, dass sie auch einmal etwas Unmögliches zu finden verheissen hätten."

Etwa 11 Jahre nach der Geburt des Archimed, im Jahre 276 oder 275 ward der zweite der drei grossen Zeitgenossen geboren: Eratosthenes,[66]) Sohn des Eglaos. Gebürtig von Kyrene, verbrachte er den grössten Theil seines Lebens in Alexandrien. Dort ward er erzogen von Kallimachos, dem gelehrten Vorsteher der grossen Bibliothek, sowie von einem anderen sonst unbekannten Philosophen Lysanias. Dann wandte er sich nach Athen, wo er der Schule der Platoniker sich näherte, so dass er selbst als Platoniker bezeichnet wird, und wo er wahrscheinlich auch zuerst tiefer in das Studium der Mathematik eindrang. Ptolemäus Euergetes (der dritte Ptolemäer, wie Suidas erzählt, welchem die Notizen für das Leben des Eratosthenes fast ausschliesslich zu verdanken sind), berief Eratosthenes wieder nach Alexandrien zurück als Nachfolger seines Lehrers Kallimachos in der Leitung der Bibliothek, und von da an scheint sein Verhältniss zu diesem Fürsten wie zur Fürstin Arsinoe ein besonders freundschaftliches geworden zu sein. Es ist folglich keinerlei Grund vorhanden anzunehmen, Eratosthenes sei in späteren Jahren von der Bibliothek entfernt in's Elend gerathen, wenn auch andererseits die Nachrichten zu übereinstimmend sind um sie zu verwerfen, dass Eratosthenes augenleidend, vielleicht sogar erblindet, seinem Leben ungefähr 194 v. Chr. Geb. durch freiwilligen Hungertod ein Ende machte.

Die wissenschaftliche Bedeutung des Eratosthenes war eine mannigfaltige. Das Hauptgewicht scheint er selbst auf seine literarische und grammatische Thätigkeit gelegt zu haben, wenigstens gab er sich selbst den Beinamen des Philologen. Allein auch in den meisten anderen Disciplinen trat Eratosthenes als Schriftsteller auf, wie die erhaltenen Ueberschriften seiner Werke bezeugen, und sicherlich nicht mit Unrecht nannten ihn desshalb die Schüler des Museums Pentathlon, den Kämpfer in allen Fechtweisen, welche bei den Kampfspielen in Gebrauch waren. Um diese Vielseitigkeit zu kennzeichnen mag nur der Schrift „über das Gute und das Böse" neben der „Chronologie" und neben der „Erdmessung", in welcher zum ersten Male von einem Griechen der Versuch gemacht war, die Grösse der Erde zu bestimmen, des Werkes „über die Komödie" neben der „Geographie" gedacht werden, von welcher letzteren werthvolle Bruchstücke erhalten sind, aus denen ein so guter Gewährsmann in diesem Fache wie Alexander von Humboldt nachgewiesen hat,[67]) dass Eratosthenes nicht nur eine klare Beschreibung des Vorhandenen lieferte, sondern auch allgemeine Betrachtungen über das Werden und die Ursachen der Veränderungen mit Glück gewagt hat.

Hier muss diese kurze Andeutung genügen. Wir haben es mit Eratosthenes dem Mathematiker zu thun, und wollen, bevor wir diese Seite seiner Thätigkeit verfolgen, nur eines weiteren Beinamens noch gedenken, unter welchem Eratosthenes mitunter vorkommt. Man nannte ihn nämlich Beta. Die Bedeutung dieses Beinamens ist sehr zweifelhaft. Die Einen wollen, er habe ihn desshalb erhalten, weil er der zweite Vorsteher der grossen Bibliothek gewesen sei; allein dieses ist einestheils unrichtig, wenn, wie sonst angenommen wird, Zenodotus der erste, Kallimachos der zweite, Eratosthenes also erst der dritte Vorsteher war, anderntheils ist nirgends eine Spur davon zu finden, dass Zenodotus oder auch Kallimachos etwa Alpha, oder einer der Nachfolger des Eratosthenes Gamma oder Delta genannt worden wäre. Wahrscheinlicher ist die andere Ableitung, wonach das Wort Beta ihn als zweiten Plato charakterisiren sollte, oder allgemeiner als denjenigen, der überall den zweiten Rang wenigstens sich zu erobern wusste, wenn der erste Rang auch ehrfurchtsvoll den Altvordern eingeräumt werden muss. Endlich kommt noch in Betracht, dass Buchstaben als Beinamen, und zwar unter der seltsamsten Begründung auch anderweitig bei den Griechen um das Jahr 200 v. Chr. Geb. vorkommen. So wird ein Astronom Appollo nius, der zur Zeit des Königs Ptolemäus Philopator sich mit Untersuchungen über den Mond beschäftigte und dadurch sich weithin bekannt machte, als Epsilon bezeichnet; denn der Buchstabe ϵ, heist es, sehe der Gestalt des Mondes gleich.[68])

Von den mathematischen Schriften des Eratosthenes ist uns nur Weniges bekannt, das Wenige aber lässt um so mehr den Verlust der übrigen Theile bedauern. Er beschäftigte sich mit den beiden Richtungen mathematischer Forschung, welche vorhanden waren, mit Geometrie und Arithmetik. In ersterer Beziehung ist ein Brief des Eratosthenes an Ptolemäus Euergetes vorhanden, welchen Eutokius von Askalon in seinem Commentar zu den Büchern des Archimed über Kugel und Cylinder uns vollständig überliefert hat.[69]) In diesem Briefe ist die Entstehungssage der Aufgabe der Würfelverdoppelung des Breiteren erzählt, wie wir früher bei Gelegenheit dieser Aufgabe berichteten. Eratosthenes giebt aber auch eine ihm selbst eigenthümliche Auflösung mit Hülfe eines eigens dazu erfundenen Apparates. Das sogenannte Mesolabium, wie es um seines Zweckes willen hiess[70]) und welches einen grossen Ruf im Alterthume erlangte, bestand im Wesentlichen aus 3 einander gleichen rechtwinkligen Täfelchen von Holz, Elfenbein oder Metall, welche zwischen zwei mit je 3 Rinnen versehenen Linealen eingeklemmt in diesen Rinnen über einander verschoben werden konnten. War nun die Anfangslage $ABCD$, $CDEF$, $EFGH$, war AB die grössere, GM die kleinere Linie, zwischen welche die beiden mittleren Proportionalen einzuschalten waren, so musste man nur die Rechtecke in die verschobenen Lagen $ABCD$, $C_1 D_1 EF$, $E_1 F_1 GH$ bringen, welche die Stücke D_1K, E_1L der in die Rechtecke eingezeichneten Diagonalen verdeckten und die so bestimmten Punkte K und L mit A und M in eine gerade Linie brachten; alsdann sind KC und LF die beiden gesuchten Proportionallinien.

Fig. 7.

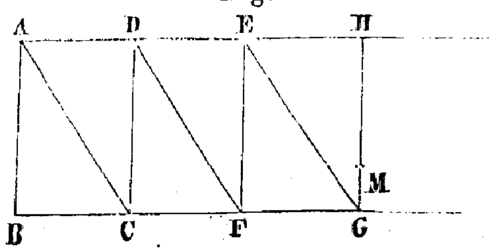
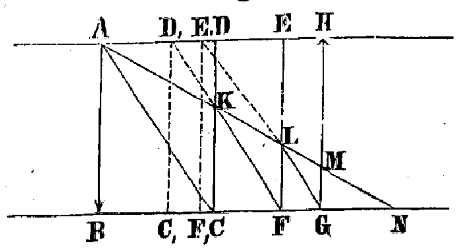


Fig. 8.



Eratosthenes schlug diese seine Erfindung so hoch an, dass er znm ewigen Gedächtnisse derselben ein Exemplar als Weihegeschenk in einem Tempel aufhängen liess und eine Inschrift in Versen darunter setzte, welche in gedrängtester Kürze die Gebrauchsanweisung enthielt.[71]) Die Inschrift selbst, ein aus 9 Distichen bestehendes Epigramm, ist auch durch manche Nebenbemerkung von Wichtigkeit, wie z. B. aus ihr entnommen wird, dass Menächmos den dreifachen Schnitt des Kegels vollbrachte. Ob ein von Pappus an zwei Stellen [72]) erwähntes Werk des Eratosthenes „über Medietäten“ sich gleichfalls auf die Würfelverdoppelung bezieht, ist ungewiss. Wäre dem so, so würde daselbst möglicherweise eine geometrische Lösung gelehrt worden sein, da Pappus das eine Mal bemerkt, diese Schrift stehe mit den lineären Oertern ihrer ganzen Voraussetzung nach im Zusammenhange.

Noch geringfügiger sind die Spuren eines weiteren Werkes des Eratosthenes, welche auf wenige unbedeutende Citate bei Theon von Smyrna sich beschränken. [73]) Wenn auch vielleicht der Schluss gerechtfertigt ist, in jenem Werke sei von den Proportionen und sonstigen arithmetischen Fragen die Rede gewesen, so schwebt doch die Behauptung ganz in der Luft, als habe sie den Titel Arithmetik geführt.

Vielleicht gehört eben dahin ein Bruchstück, welches bei Nikomachus von Gerasa und in dem Commentar des Jamblichus zu diesem Schriftsteller sich vorfindet; [74]) vielleicht aber auch ist dasselbe ein Theil einer besonderen Schrift, welche den Namen des Siebes führte. Das Sieb [75]) ist eine Methode um sämmtliche Primzahlen zu entdecken. Man schreibt, so lautet die Regel, alle ungraden Zahlen von der 3 an der Reihe nach auf. Man streicht nun jede dritte Zahl hinter der 3 durch, so sind die Vielfachen der 3 entfernt. Dann geht man zur nächsten Zahl 5 über und streicht jede fünfte Zahl hinter ihr durch, ohne Rücksicht darauf, ob sie schon durch einen früheren Strich vernichtet ist oder nicht; so sind die Vielfachen der 5 entfernt. Fährt man weiter so fort, indem man beim Abzählen und Durchstreichen die bereits durchstrichenen Zahlen den unberührten gleich achtet, und nur den Unterschied macht, dass man keine durchstrichene Zahl als Ausgangspunkt einer neuen Aussiebung benutzt, so bleiben schliesslich nur die Primzahlen übrig. Sämmtliche zusammengesetzte Zahlen dagegen sind vernichtet, und am Anfange fehlt auch noch die Primzahl 2, welche Jamblichus, weil sie grade sei, nicht unter die Primzahlen gerechnet wissen will, trotzdem Euclid sie fehlerhafter Weise dorthin verwiesen habe. [76])

Die Siebmethode des Eratosthenes ist grade keine Methode, zu deren Ersinnung ein übermässiger Scharfsinn gehörte. Trotz dessen glauben wir sie ihrer historischen Stellung wegen für einen ziemlich bedeutenden Fortschritt in der Zahlentheorie halten zu müssen. Man erwäge nur, wie die Sache der Zeitfolge nach liegt. Zuerst unterschied man Primzahlen von zusammengesetzten Zahlen und leitete wohl manche Eigenschaften der Letzteren aus den Ersteren ab. Der zweite Schritt war der, dass Euclid zeigte, wie die Anzahl der Primzahlen unendlich gross sei, wie es folglich nicht möglich sei, alle Primzahlen zu untersuchen. Jetzt erst gewinnt es als dritter Schritt Bedeutung, wenn Eratosthenes zeigt, wie man wenigstens im Stande sei, die Primzahlen, so weit man in der Zahlenreihe gehen will, zu entdecken, und somit der Unausführbarkeit der Darstellung sämmtlicher Primzahlen eine von der Willkür des Rechners abhängende untere Grenze zu setzen. Ich meine an und für sich hätte die Entdeckung des Eratosthenes ebenso gut vor als nach Euclid gemacht werden können, aber vor Euclid wäre ihr wissenschaftlicher Werth geringfügiger gewesen. Damals hätte es können ein verunglückter Versuch sein, die genaue Anzahl der Primzahlen zu ermitteln. Jetzt dagegen, nach Euclid, konnte es nur eine Methode sein, bei deren Aussinnung man von Anfang an grade das beabsichtigte, was sie zu leisten im Stande ist. Darin liegt aber schon ein Zeugniss höherer Vollkommenheit, wenn Methoden zu bestimmten Zwecken gesucht und auch wirklich gefunden werden.

Der dritte schon genannte Mathematiker dieses Zeitalters, dessen Besprechung uns jetzt zu beschäftigen hat, war Apollonius von Pergä, wie er zur Unterscheidung von ausserordentlich vielen Gelehrten, die den Namen Apollonius führten, nach seinem Heimathsorte, einer Stadt in Pamphilien, bezeichnet zu werden pflegt.[77]) Ob er mit dem früher erwähnten Astronomen Apollonius, dem der Beiname Epsilon beigelegt wurde, identisch ist oder nicht, steht im Zweifel. Die Lebenszeit der Beiden ist allerdings übereinstimmend. Apollonius von Pergä wurde während der Regierung des Ptolemäus Euergetes (247—222) geboren und hatte seine Blüthezeit, wie jener Astronom, während der Regierung des Ptolemäus Philopator (222—205). Eine fernere Uebereinstimmung könnte man darin finden, dass auch von Apollonius von Pergä bekannt ist, dass er sich mit Astronomie beschäftigte. Wenigstens geht die Lesart der besten Ausgaben von dem Almageste des Ptolemäus dahin,[78]) dass Apollonius von Pergä über den Stillstand und die rückläufige Bewegung der Planeten schrieb und sie mit Hülfe der Epicyclen zu erklären suchte. Ein freilich nur negativer Gegengrund gegen die Identität läge darin, dass Ptolemäus von den Untersuchungen über den Mond Nichts sagt, welche doch gerade die vorzüglichste Leistung des Apollonius Epsilon gebildet haben müssen.

Von den Lebensverhältnissen des Apollonius von Pergä ist Nichts weiter bekannt, als dass er schon als Jüngling nach Alexandrien kam, wo er seine mathematische Bildung von den Nachfolgern des Euclides erhielt. Ein bestimmter Lehrer wird, so viel ich finden kann, bei den Alten nirgends genannt, so dass ich die vereinzelte Angabe eines modernen Schriftstellers,[79]) Apollonius sei Schüler des Archimed gewesen, als völlig willkürlich betrachten möchte. Gesichert ist dagegen ein zeitweiliger Aufenthalt in Pergamum, wo er einem gewissen Eudemus befreundet war, welchen er dann auch später mit Wachrufung der Erinnerung an jenes Zusammenleben sein Hauptwerk, die 8 Bücher der Kegelschnitte widmete.[80])

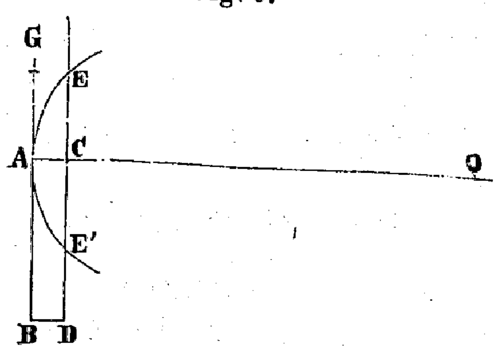
Es ist hier der Ort, die früher bei Seite geschobene Untersuchung über die Kenntnisse, welche die Alten von den Kegelschnitten besassen, einzuschalten. Erinnern wir uns, dass von zwei Mathematikern, Menächmus und Aristäus, den Zeitgenossen Plato's die Rede war, deren erster zur Würfelverdoppelung sich der Curven bediente, die beim Durchschnitte eines Kegels durch eine Ebene entstehen, während der zweite 5 Bücher über die Kegelschnitte schrieb; erinnern wir uns, dass wir Euclid und in höherem Grade Archimed als Schriftsteller über die Kegelschnitte kennen gelernt haben, so bildet das schon eine ganze Literatur des hochwichtigen Gegenstandes vor Apollonius von Pergä. Manche Geschichtsforscher sind sogar geneigt, ein noch höheres Alter dieser Untersuchungen anzunehmen. Um in dieser Beziehung einigermassen ins Klare zu kommen, ist es nothwendig, erstens die Entstehungsweise der drei verschiedenen Curven zu besprechen, welche man Kegelschnitte nennt, und zweitens die Haupteigenschaft sich zu vergegenwärtigen, welche in den Namen Parabel, Ellipse und Hyperbel angedeutet liegt.

Es sei ein grader Kegel gegeben, dessen Winkel, d. h. der Winkel an der Spitze des Axendreiecks $=\sigma$. Diesen Kegel schneide man durch eine zum Axendreiecke senkrechte Ebene, so wird die grade Linie, welche den Durchschnitt der beiden Ebenen bezeichnet, wenigstens mit der einen Seite des Axendreiecks einen Winkel δ bilden, welcher zu σ eine analoge Lage hat, wie die Wechselwinkel bei zwei durch eine Transversale geschnittenen Parallellinien. Nun kommt es auf die gegenseitige Grösse von σ und δ an. Ist $\delta > \sigma$, so entsteht auf der Kegeloberfläche eine Ellipse; ist $\delta = \sigma$, so entsteht eine Parabel; ist $\delta < \sigma$, so entsteht eine Hyperbel. So oft daher σ constant bleibt, kann durch Veränderung von δ auf jedem geraden Kegel jeder der drei Kegelschnitte gebildet werden. Man kann aber offenbar die Sache auch umdrehen. Man kann sagen δ solle constant bleiben, dann wird durch Veränderung von σ jeder beliebige Kegelschnitt erzeugt werden, jetzt natürlich auf der Oberfläche verschiedener Kegel. Zu einem derartig constanten Durchschnittswinkel δ war der rechte Winkel besonders geeignet, schon desshalb, weil alsdann auch die Grösse des Winkels σ leicht in Worten zu bestimmen war. War nämlich die Schnittebene senkrecht zur Seite des Axendreiecks, d. h. $\delta = 90^0$, so musste σ ein spitzer, ein rechter, endlich ein stumpfer Winkel sein, damit der Kegelschnitt eine Ellipse, eine Parabel, eine Hyperbel war, und daher rührten für diese drei Curven die älteren Namen derselben: Schnitt des spitzwinkligen, des rechtwinkligen, des stumpfwinkligen Kegels. Denn in der That lernte Aristäus die Kegelschnitte zuerst an verschiedenen Kegeln kennen, bis endlich Apollonius nachwies, dass sie sämmtlich auf jedem beliebigen geraden Kegel erzeugt werden können. Darüber kann nach der Angabe des Pappus[81]) nicht der mindeste Zweifel sein. Waren aber mit der neuen Bildungsweise die alten Namen umgestossen, so musste Appollonius andere Namen dafür gebrauchen, und auch darüber kann nach derselben Stelle des Pappus kein Zweifel obwalten. Apollonius nämlich, heisst es dort dem Sinne nach, benannte die drei Curven nach Eigenschaften, die ihnen eigenthümlich bleiben, auch wenn sie sämmtlich auf der Oberfläche eines und desselben Kegels erzeugt sind. Die Namen sind die uns noch geläufigen der Ellipse, der Parabel, der Hyperbel, die Eigenschaften sind diejenigen, welche die algebraische Schreibweise durch die Symbole $y^2 < p\,x$, $y^2 = px$, $y^2 > p\,x$ darstellt.

Wenn wir nun zu keinerlei Misstrauen gegen die Wahrheit des von Pappus uns Mitgetheilten berechtigt sind, wenn wir also das bisher Gesagte als historisch gewiss betrachten, so ist eine ganz andere Frage die, ob man nicht vor Apollonius, ja vielleicht vor Aristäus jene Eigenschaften gekannt habe, auf welche grade die Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel sich gründen? ob man nicht sogar die Curven schon kannte, ohne zu wissen, dass sie Kegelschnitte seien? Am leichtesten dürfte ein Chemiker in diese Möglichkeit sich hineindenken. In diesem Fache gehört es kaum mehr zu den Seltenheiten, dass Verbindungen durch ganz verschiedene chemische Processe aus verschiedenen Substanzen entstehen, dass sie desshalb mit verschiedenen Namen in die Wissenschaft eingeführt wurden, beispielsweise als Pimentöl und Zimmtblätteröl, und erst später als identisch anerkannt wurden. Aber auch der Mathematiker mag sich daran erinnern, dass man die sogenannte Cardiodide am Ende des 17. Jahrhunderts als Katakaustik kennen lernte, ihre epicycloidische Entstehung erst später entdeckte. Könnte es sich nicht ähnlich mit den Kegelschnitten als geometrische Oerter gewisser Punkte verhalten? Als wichtigstes Material zur Beantwortung dieser Frage hat man wohl eine grade dadurch berühmte Stelle des platonischen Dialogs Meno betrachtet. Allein die Auffassungen dieser Stelle gehen nach beiden Extremen auseinander. Die Einen entnehmen ihr unzweifelhaft,[82]) dass Plato die erwähnten Grundeigenschaften kannte, unterstützen aber leider diese Zweifellosigkeit keineswegs durch eine klare Uebersetzung, welche geeignet wäre, auch Andere zu überzeugen. Die Zweiten betrachten die Stelle als verderbt und unverständlich ohne Veränderung [83]) und schlagen desshalb gewisse Wortverbesserungen vor, welche vielleicht den Sprachforscher, aber sicherlich nicht den Mathematiker befriedigen können. Ein dritter Uebersetzer gewinnt endlich einen mathematisch ganz annehmbaren Sinn,[84]) jedoch wie es scheint mit einiger Kühnheit der sprachlichen Construction, und dürfte man sich auf seinen Wortlaut verlassen, so würde das Ergebniss grade die entgegengesetzte Meinung unterstützen, welcher das erste Extrem gegenüberstände, es würde alsdann durchaus und unzweifelhaft nicht folgen, dass Plato jene Kenntniss besass. Bei solchem Widerstreit der Meinungen dürfte es gerathen sein, auf die Rede des Sokrates an Meno kein besonderes Gewicht zu legen und sich lieber nach anderweitigen Entscheidungsgründen für das zu fällende Urtheil umzusehen.

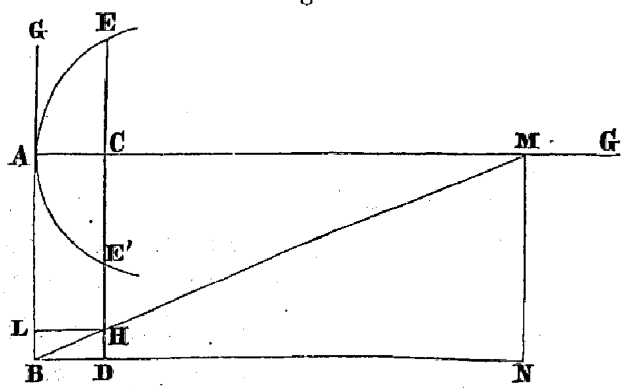
Dergleichen finden wir in einigen Sätzen des 6. und des 1. Buches der euclidischen Elemente. Der Inhalt von VI, 28 und 29 ist folgender. Es sei ein Flächenraum F gegeben, ferner eine grade Linie AB und ein Parallelogramm. Man verlangt nun ein dem gegebenen Parallelogramme gleichwinkliges Parallelogramm über der AB zu beschreiben, welches grösser oder kleiner als F wird sein können. Die weitere Bedingung, welche zur einschränkenden Bestimmung der jetzt noch auf unendlich viele Arten zu lösenden Aufgabe dient, besteht nun darin, dass im ersteren Falle der Ueberschuss über den Flächenraum F, im zweiten Falle die Ergänzung, deren das über AB construirte Parallelogramm bedarf, um so gross wie F zu werden, dem ursprünglich gegebenen Parallelogramme ähnlich sein soll, oder wie Euclid sich ausdrückt, dass im ersteren Falle der Flächeninhalt F an der Linie AB Etwas übrig lässt — ἐλλείπει — im zweiten Falle über AB hinausfällt — ὑπερβάλλει. Ferner ist I, 44 die Aufgabe gestellt: An eine gegebene Grade unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm von gleichfalls gegebenem Flächeninhalte genau anzulegen — παραβάλλειν. Das Wichtige bei diesen Sätzen für die gegenwärtige Untersuchung ist offenbar die Anwendung der drei Zeitwörter, aus welchen die Namen Ellipse, Hyperbel, Parabel hervorgegangen sind, und zwar dürfen wir hinzufügen mit ganz analoger Bedeutung hervorgegangen sind. Verweilen wir darum noch einen Augenblick bei diesen bedeutsamen euclidischen Sätzen, um deren Gemeinschaft mit Kegelschnitteigenschaften uns zu vergegenwärtigen.[85]) Ich nehme dabei zur grösseren Einfachheit an, dass die Parallelogramme, von welchen die Rede ist, sämmtlich Rechtecke sein mögen; bei schiefwinkligen Parallelogrammen ist die Behandlung langwieriger, aber keineswegs wesentlich schwieriger.

Fig. 9.



Es sei $AB = p$ eine gegebene Länge senkrecht zu AQ aufgetragen; ist nun ferner AG gegeben, so giebt es immer einen einzigen Punkt C, so dass das Rechteck $ABDC$ einem bekannten Flächenraum, nämlich dem Quadrate über AG oder über CE gleich sei. Oder umgekehrt, wenn man auf der unendlichen Geraden AQ einen Punkt C wählt, mittelst dessen und der gegebenen $AB = p$ das Rechteck $ABDC$ gebildet wird, so existiren senkrecht über und unter C die beiden Punkte E, E^1, so dass das Quadrat über CE, beziehungsweise CE^1, jenem Rechtecke gleich ist. Werden verschiedene Punkte C gewählt, so nimmt auch E verschiedene Lagen an, bei welchen immer das an AB angelegte (παραβαλλόμενον) Rechteck dem Quadrate über CE genau gleich ist. Nennen wir $AC = x$, $CE = y$, so spricht sich die letzte Bemerkung symbolisch $y^2 = px$ aus, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Wechseln der Lage von C erzeugt denken, ist eine Parabel.

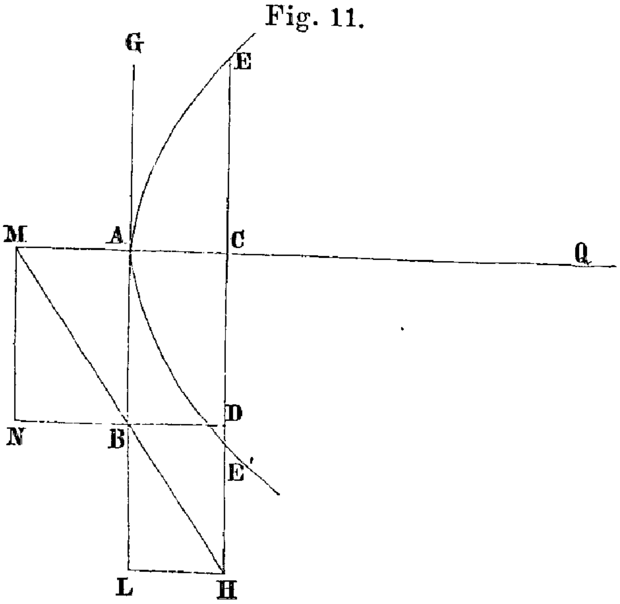
Fig. 10.



Ausser der $AB = p$ sei auf der dazu senkrechten AQ ein Stück $AM = a$ bekannt, so ist $AMNB$ ein durchaus gegebenes Rechteck, welchem jedes andere Rechteck ähnlich ist, dessen B gegenüberliegende Winkelspitze H auf der Diagonale BM des erstgenannten Rechteckes liegt. Ist nun wieder ein Flächenraum — das Quadrat über AG oder CE — gegeben, so wird es einen einzigen Punkt H der BM geben, mit dessen Hülfe das Rechteck $ACHL$ gleich jenem Flächenraume wird; oder mit andern Worten, welcher es möglich macht, dass das an AB angelegte Rechteck ausser dem Theile AL von AB, welchen es mit dem dem Quadrate von AG gleichen Flächenraume in Anspruch nimmt, noch ein Stückchen LB übriglässt (ἐλλείπει) über welchem das dem Rechtecke $AMNB$ ähnliche kleine Rechteck $LHDB$ steht. Denken wir uns auch hier die Aufgabe umgekehrt, so wird zu jedem Punkte C ein Punkt E senkrecht über ihm, ein Punkt E^1 senkrecht unter ihm gefunden werden können, so dass das Quadrat von CE dem jetzt bekannten Rechtecke $ACHL$, dessen Eckpunkt H auf der Diagonale BM des vollständig gegebenen Rechteckes $AMNB$ sich befindet, gleich ist. Auch hier ist der symbolische Ausdruck übersichtlicher. Ist nämlich $LB = \frac{p}{q}$, so muss $LH = \frac{a}{q}$ sein, und die Fläche $LHDB$ ist $= \frac{ap}{q^2}$; also mit Hülfe von $AC = x$, $CE = y$ werden wir schreiben: $y^2 = px - \frac{ap}{q^2}$, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Wechseln der Lage von C erzeugt denken, ist eine Ellipse.

Entsprechen die grossen sowohl als die kleinen Buchstaben denen der vorigen Figur mit dem Unterschiede, dass $AM = a$ jetzt auf der jenseitigen Verlängerung von AQ aufgetragen, im Uebrigen aber der Punkt H wieder so gewählt wird, dass er auf der verlängerten Diagonale des Rechteckes $ABNM$ aus den Seiten a und p liegt, dass also die Rechtecke $ABNM$ und $BDHL$ einander ähnlich sind und das Rechteck $ACHL$ denselben Flächenraum besitzt wie das Quadrat über AG oder CE, so ist dabei die Forderung erfüllt, dass das an AB angelegte Rechteck um den ihm zugewiesenen Flächenraum zu erlangen über AB hinausreicht (ὑπερβάλλει) und zwar mit einem dem gegebenen Rechtecke $ABNM$ ähnlichen Rechtecke.

Fig. 11.



Es ist fast überflüssig, auf's Neue hervorzuheben, dass man auch diese Aufgabe so umzukehren im Stande ist, dass nicht mehr H, sondern E, beziehungsweise E^1, gesucht werden, und die Gleichung $y^2 = px + \frac{ap}{q^2}$ erfüllt wird. Der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch Wechseln der Lage von C erzeugt denken, ist eine Hyperbel.

Die Frage, um deren Beantwortung es sich handelt, hat sich durch diese Auseinandersetzung einigermassen verschoben. Sie geht jetzt dahin, ob Euclid, welcher in seinen Elementen nur die directen Aufgaben stellt und löst, auch von den umgekehrten Aufgaben, wie sie hier jedesmal in zweiter Linie ausgesprochen wurden und zu den Kegelschnitten führten, Kenntniss hatte? ob ferner die directen Aufgaben selbst euclidisch sind? wie viel etwa von diesem nunmehr näher präcisirten Gegenstande den älteren voreuclidischen Mathematikern bekannt war? Darüber giebt uns aber Proklus einigen Aufschluss.[86] In dem Commentar zu I, 44 der euclidischen Elemente bemerkt er, ganz ausdrücklich nach Schülern des Eudemus, die Construction von Parallelogrammen gegebener Art mit gegebenem Flächeninhalte an gegebenen Linien, sei es, dass sie genau angelegt werden sollen oder Etwas übrig lassen oder hinausreichen sollen, seien Erfindungen pythagorischer Muse. Erst die jüngeren Mathematiker, setzt er sogleich hinzu, haben die hier gebrauchten Wörter mit den Kegelschnitten in Verbindung gebracht, welche sie darnach benannten.

Aus dieser, wie mir scheint, historisch sehr wichtigen Stelle möchte ich die Folgerung ziehen, dass Eudemus und seine nächsten Schüler von der Anwendung jener Wörter auf die Kegelschnitte Nichts wussten, dass diese erst bei den jüngeren Mathematikern vorkommt, welche daher ganz wohl in Uebereinstimmung mit Pappus [81]) die Mathematiker der alexandrinischen Schule, Apollonius und seine Zeitgenossen, sein können. Ich möchte ferner bezweifeln, ob die Alten, die pythagorische Muse, um mit Proklus zu reden, die Curven selbst kannten. Wären ihnen nämlich die drei Kegelschnitte als bei der Anlegung von Flächenräumen entstehende geometrische Oerter bekannt gewesen, so ist nicht zu vermuthen, dass Proklus die Erwähnung dieses interessanten Umstandes ganz und gar versäumt hätte. Er hätte alsdann wohl ungefähr gesagt: die jüngeren Mathematiker erkannten die Uebereinstimmung der hierbei auftretenden krummen Linien mit Kegelschnitten, und hätte sich nicht damit begnügt, nur zu erklären, dass die jüngeren Mathematiker die Wörter Parabel u. s. w. mit den Kegelschnitten in Verbindung brachten. Dazu kommt, dass die Alten und insbesondere Pythagoras, dem grade die Sätze über Anlegung von Flächenräumen zugeschrieben werden, diese Sätze so vortrefflich brauchen konnten, dass sie ihnen gar wohl als Endziel einer Untersuchung erscheinen konnten, nicht als Anfangspunkt einer solchen, wie man es doch auffassen müsste, wenn damals schon an jene elementaren Sätze die Betrachtung der aus deren Umkehrung folgenden geometrischen Oerter angeknüpft worden wäre. Es liegt nicht in meiner Absicht, die Streitfragen über die Persönlichkeit des Pythagoras hier so nebenbei zu erörtern; allein mag derselbe nun ein grosser Mann gewesen sein, dessen Lebensschicksale uns wahrheitsgetreu berichtet sind, mag er durchaus mythisch nur eine Zeitperiode darstellen, darüber ist doch Uebereinstimmung der gegnerischsten Schriftsteller, dass man um die Zeit des Alexanderzuges mit dem Namen des Pythagoras alle die Kenntnisse verknüpfte, welche von Aegypten und Kleinasien her eingeführt worden waren. Grade um jene Zeit schrieb aber Eudemus von Rhodus, und wenn uns also von diesem Gewährsmann ein Satz als pythagorisch genannt wird, so dürfen wir folgern, es sei eine von auswärts stammende Lehre, wir dürfen sie als aegyptisch bezeichnen, sofern ein geometrischer Satz in Frage steht, weil ja bei den Aegyptern nach griechischen Schriftstellern der Ursprung der Geometrie war. [87]) Sie wurde, so heisst es, dort erfunden, weil die jährliche Nilüberschwemmung immer neue Vermessungen, neue Vertheilung der Felder nöthig machte, deren Abgrenzungen verwischt und mit Schlamm bedeckt worden waren. Bei solchen Ländervermessungen und Abtheilungen von Grundstücken musste es offenbar damals wie jetzt nicht darauf allein ankommen, dass Jeder sein richtiges Maass zugetheilt erhielt, sondern auch darauf, dass eine gewisse Symmetrie herrschte, dass die Felder nicht in allen möglichen Polygonverschränkungen durcheinanderliefen, sondern regelmässig abgegrenzt waren, dass sie unter einander Aehnlichkeit besassen, wenn auch der mathematische Begriff der Aehnlichkeit nicht genau zu erfüllen gewesen wäre. Nun lehren aber die drei Sätze, von denen hier die Rede ist, sogar jene mathematische Aehnlichkeit der Gestalt mit der Identität des Rauminhaltes zu verbinden, sei es, dass ein Feldstück an die Grenzlinie des Nachbarn genau sich anfügt, oder nur einen Theil derselben in Anspruch nimmt, oder darüber hinausfällt, und somit rechtfertigt sich meine obige Behauptung, dass für Pythagoras die drei Sätze in ihrer Verbindung gar wohl das Endziel einer geometrischen Untersuchung bilden konnten. Ein einziger Zweifel bleibt allenfalls noch daher stammend, dass in den euclidischen Elementen die drei Sätze nicht bei einander stehen, sondern der eine schon im ersten Buche, die beiden andern weit davon getrennt erst im sechsten Buche auftreten. Wir haben aber darin nur eine Folge der Systematisirung der Elementenschreiber, vielleicht Euclids, vielleicht schon seiner Vorgänger, zu erkennen. Sie brachten die Sätze, wie dieselben in ihr System passten und brauchten sich kein Gewissen daraus zu machen, wenn sie dabei auch den Zusammenhang zerrissen, in welchem die Sätze ursprünglich gefunden worden waren. Unsere drei Sätze gehören zu solchen gewaltsam getrennten; denn dass sie ursprünglich in engster Verbindung mit einander standen, beweist die Berufung auf die Schüler des Eudemus, welche oben aus Proklus angeführt worden ist.

Die Schlussfolgerung, zu welcher ich somit gelangt bin, geht dahin: Zweifellos kannten die Griechen seit Menächmus und Aristäus die Curven, welche auf dem Mantel eines graden Kegels bei der Durchschneidung desselben durch eine zur Kegelseite senkrechte Ebene gebildet werden, und welche je nach dem Winkel an der Spitze des Kegels drei verschiedenen Gattungen angehören. Nicht minder zweifellos kannten die Griechen zu derselben Zeit, auch wohl schon ein Jahrhundert früher, Sätze über Anlegung von Flächen, in deren Ausspruche die Stammzeitwörter von Parabel, Ellipse, Hyperbel vorkommen, und welche als Ausgangspunkt geometrischer Ortsuntersuchungen dienend zu den Kegelschnitten führen konnten. Sehr wenig wahrscheinlich ist es dagegen, dass jene Ortsuntersuchungen damals wirklich angestellt wurden und der erste Mathematiker, von dem wir mit Bestimmtheit wissen, dass er nicht bloss jene Untersuchung führte, sondern auch die Identität der entstehenden geometrischen Oerter mit den Kegelschnitten erwies, wobei jetzt unter Kegelschnitten die Schnitte eines und desselben Kegelmantels durch verschieden geneigte Ebenen zu verstehen sind, war Apollonius von Pergä.

Ich habe mich hier absichtlich sehr vorsichtig dahin ausgesprochen, Apollonius sei der erste Mathematiker, dem wir die Kenntniss dieses Zusammenhanges mit Bestimmtheit zusprechen dürfen. Es könnte immerhin sein, dass Aehnliches auch schon im Besitze des Euclid gewesen wäre. Sagt uns doch Pappus,[88]) dass Apollonius in den 4 ersten Büchern der Kegelschnitte eigentlich nur eine verbesserte und vermehrte Ausgabe der euclidischen Kegelschnitte geliefert habe, und der Umstand, dass in den euclidischen Elementen keine Spuren solcher Untersuchungen auftreten, kann wohl nicht ernstlich entgegengehalten werden; in diesen steht auch Nichts von Allem, was den Gegenstand der Porismen und der Oerter auf der Oberfläche bildete. Aber einen Widerspruch glaube ich bei Pappus selbst zu finden, wenn er[3]) die anmassende Geringschätzung tadelt, mit welcher Apollonins sich in Bezug auf Euclid äussert, wenn er ihr die Liebenswürdigkeit des Euclid selbst gegenüberstellt, der seines Vorgängers Aristäus Anlage so genau als nur möglich einhielt, um die Verdienste dieses Mathematikers nicht zu verwischen. Denn wenn dieser Tadel gerecht war, dann konnte es mit der Anlehnung des Apollonius an Euclid nicht gar viel auf sich haben. Das hat auch das gesammte sonstige Alterthum mindestens dem Apollonius nicht zum Vorwurfe gemacht, den es durch den ehrenden Beinamen des grossen Mathematikers auszeichnete und zwar in Hinblick auf sein Werk über die Kegelschnitte, wie Eutokius uns nach einer Notiz des Geminus, eines Mathematikers, der um das Jahr 150 v. Chr. Geb. lebte, erzählt. Damit ist hinlänglich anerkannt, wie viel Apollonius zu den Entdeckungen des Euclid und zweier anderer Vorgänger, deren er selbst erwähnt, des Konon von Samos und des Nikoteles von Kirene hinzufügte. Machte Pappus dem Apollonius den Vorwurf zu getreuer Benutzung euclidischer Vorarbeiten, so sprach Heraclides, der früher erwähnte Biograph des Archimed, einen ähnlichen Tadel in Betreff seines Lieblingsschriftstellers aus; Apollonius, sagt er, habe nur den Archimed ausgeschrieben. Auch hierüber wissen wir natürlich Nichts Näheres, und nur die Thatsache ist zu erwähnen, dass Eutokius, welcher den Vorwurf des Heraclides uns aufbewahrt hat, denselben nicht als gerechtfertigt anerkennt. Andererseits ist aber auch nicht zu verschweigen, dass Archimed, der, wie wir schon früher sagten, ein Werk über Kegelschnitte schrieb und sich mehrfach auf dasselbe beruft, in diesen Berufungen Kenntniss von Sätzen an den Tag legt, welche auch in dem Werke des Apollonius vorkommen, in diesem also wahrscheinlich aus archimedischer Quelle stammen. Die Kenntniss der Namen Parabel und Ellipse dagegen, welche dem Archimed einigen Handschriften gemäss zukäme, ist wohl unbegründet.[89]) Der Name Parabel kommt ohnedies nur in der Ueberschrift der Abhandlung über die Quadratur der Parabel vor, und auch wo der Name Ellipse im fortlaufenden Texte der Abhandlung von den Konoiden und Sphäroiden 3 mal sich vorfindet, dürfte eine späte Einschiebung durch Abschreiber anzunehmen sein.

Wenn also jedenfalls die Selbstständigkeit des Apollonius in seinen

8 Büchern über Kegelschnitte bedeutend genug war, um ihm einen Ruhm zu sichern, wie er einem blossen Verbesserer niemals zugekommen wäre, so mag hier einiges über den Inhalt des Werkes folgen.[89]) Ich muss damit beginnen, eine frühere Bemerkung zu ergänzen. Ich habe angeführt, die Geometer vor Apollonius hätten die drei verschiedenen Kegelschnitte aus eben so vielen graden Kegeln sich verschafft, Apollonius dagegen sei es gelungen, die 3 Schnitte an demselben graden Kegel zu erhalten. Das ist nun allerdings wahr, allein was ich früher verschwieg, um nicht den schon hinlänglich complicirten Gedankengang noch weiter zu verwirren, Apollonius blieb nicht bei der Entstehungsweise aus einem graden Kegel. Er zeigte vielmehr, wie aus jedem Kegel überhaupt, d. h. aus einem Körper, dessen Oberfläche entsteht, indem eine grade Linie um eine Kreisperipherie gewälzt wird, während sie durch einen festen Drehungspunkt von beliebiger Lage geht, die 3 Kegelschnitte erhalten werden können unter der einzigen Voraussetzung, dass die Schnittebene des Kegels senkrecht zum Axendreieck sei. Er zeigt ferner, wie die Durchschnittslinie der Schnittebene mit dem Axendreieck ein Durchmesser des Kegelschnittes sei, d. h. alle Sehnen des Kegelschnittes halbire, welche unter sich parallel gezogen werden, und deren Lage durch diejenige Sehne bestimmt wird, die in dem Grundkreise des Kegels liegt. Der Punkt, in welchem der Durchmesser die Oberfläche des Kegels trifft, ist der Scheitel des Kegelschnittes. Durch diesen Scheitel wird nun senkrecht zum Axendreiecke, also in der Schnittebene und parallel zu dem durch den Durchmesser halbirten Sehnensysteme eine Gerade verzeichnet, deren Länge durch gewisse Methoden geometrisch bestimmt wird, und welche Linie $AB = p$ darstellt, an welche nach unserer früheren Auseinandersetzung ein gewisser Flächenraum in Gestalt eines Parallelogrammes angelegt werden soll. Diese Linie, welche man in moderner Sprache den Parameter des Kegelschnittes nennt, heisst bei Apollonius schlechtweg die Gerade — ὀρθή.[90]) Man sieht leicht ein, dass hiermit dieselben Linien gezogen waren, welche noch heute in den Methoden der analytischen Geometrie gezeichnet werden, wenn man den Kegelschnitt auf ein Coordinatensystem beziehen will, dessen Anfangspunkt auf dem Kegelschnitte selbst liegt, dessen Abscissenaxe ein Durchmesser des Kegelschnittes und dessen Ordinatenaxe die jenem Durchmesser conjugirte Berührungslinie im Coordinatenanfangspunkte ist. In der That operirt nun Apollonius mit diesen gegebenen Elementen in einer Weise, die sich nur dadurch von der Coordinatengeometrie unterscheidet, dass keine eigentliche Rechnung mit Formeln stattfindet, sondern eine Schlussweise, bei welcher Verknüpfungen von Proportionen und Vergleichungen von Flächenräumen eine Hauptrolle spielen, wie denn überhaupt darin das Ersatzmittel der Alten unserer modernen Algebra gegenüber bestand. Bei den Schnitten, welche nicht

der Seite des Kegels parallel laufen, wird ausser dem einen Schenkel des Axendreiecks auch der zweite entweder selbst oder in seiner Verlängerung durch den Schnitt getroffen, und so entsteht ein zweiter Scheitel der Curve bei der Ellipse, ein Scheitel der Gegencurve bei der Hyperbel. Die Entfernung der beiden Scheitel begrenzt die Länge des Durchmessers, in der Mitte zwischen beiden ist der Mittelpunkt der Curve, d. h. ein Punkt, in welchem alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt sind. Mit dem Mittelpunkte tritt auch der Begriff des dem ersten Durchmesser conjugirten Durchmessers auf, der eine gleichfalls begrenzte Länge besitzt, wenn auch bei der Hyperbel die Begrenzung nicht äusserlich sichtbar ist. Zwei zu einander senkrechte conjugirte Durchmesser werden Axen genannt. Apollonius knüpft daran ferner Betrachtungen über die Berührungslinie an irgend einem Punkt eines Kegelschnittes, und über die Vielheit von Paaren conjugirter Durchmesser, welche möglich sind.

In dem 2. Buche sind zunächst Eigenschaften der Asymptoten der Hyperbel auseinandergesetzt, d. h. der Linien, welche den Hyperbelarmen sich mehr und mehr nähern, ohne mit denselben zusammenzutreffen. Die geometrische Definition ist folgende: Man ziehe an einen Hyperbelpunkt eine Berührungslinie, trage auf derselben die Länge des ihr parallelen Durchmessers auf und verbinde den so gefundenen Punkt mit dem Mittelpunkte der Hyperbel gradlinig. Diese Gerade wird eine Asymptote sein. Aus den übrigen Sätzen des 2. Buches mag noch hervorgehoben werden, dass die Gerade, welche den Durchschnittspunkt zweier Berührungslinien mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, ein Durchmesser des Kegelschnittes ist, sowie der andere, dass in jedem Kegelschnitte nur ein einziges senkrechtes Axenpaar existirt.

In dem 3. Buche bilden zunächst die ersten 44 Sätze einen besonderen Abschnitt, dessen Charakter schon in dem ersten Satze sich dahin ausweist, dass hier Verhältnisse von Producten aus Tangenten und Secanten der Kegelschnitte auftreten. Jener erste Satz heisst etwa folgendermassen: Es seien M_1 und M_2 zwei Punkte eines Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt in O liegt (bei der Parabel wäre O unendlich entfernt und somit die OM_1 mit OM_2 und mit der Axe der Parabel parallel); die Berührungslinien in beiden Punkten seien $M_1 T_1$ und $M_2 T_2$, indem T_1 den Durchschnitt der Berührungslinie an M_1 mit der OM_2 bezeichnet und eine ähnliche Definition für T_2 gilt; die $M_1 T_1$ und die $M_2 T_2$ schneiden einander in R. Alsdann sind die Dreiecke $M_1 T_2 R$ und $M_2 T_1 R$ an Fläche gleich. Die folgenden Sätze stützen sich auf diesen ersten, und lassen sich, in so vielfältiger Theilung sie auch im Originale ausgesprochen sind, in 2 Hauptsätze zusammenfassen. Der eine Satz, dass, wenn von einem Punkte 2 Secanten gezogen werden, das Product der Entfernungen des Ausgangspunktes nach den beiden

Schnittpunkten der einen Secante dividirt durch dasselbe Produkt in Bezug auf die zweite Secante einen Quotienten giebt, der sich nicht verändert, wenn man von irgend einem anderen Ausgangspunkte aus ein den ersten Secanten paralleles Secantenpaar construirt. Der zweite Satz, dass eine Secante, aus deren einem Punkte man zwei Berührungslinien zieht, durch diesen Ausgangspunkt, den Durchschnitt mit der Berührungssehne und die beiden Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte eine harmonische Theilung darbietet.[91]) Noch einige auf Flächen bezügliche Wahrheiten schliessen sich ziemlich naturgemäss an, wie z. B. dass die Dreiecke, welche durch die Asymptoten und irgend eine Berührungslinie der Hyperbel gebildet werden, einen constanten Flächeninhalt haben, da derselbe Satz, anders ausgesprochen, dahin gehen würde, dass jede Berührungslinie der Hyperbel auf den Asymptoten Stücke von constantem Producte abschneide. Alsdann kommt der Verfasser in dem 45. Satze zu den Punkten, welche er σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς nennt, eine Bezeichnung, welche schwierig zu verdeutschen ist, da Punkte, die bei der Anlegung entstehen, kaum den Anspruch erheben können, einen deutlichen Begriff davon zu gewähren, welche Punkte gemeint sind; es sind aber die Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel, während der Brennpunkt der Parabel in dieser Zeitperiode noch nicht vorkommt. Die Definition der Brennpunkte bei Apollonius und die Eigenschaften, welche er besonders hervorhebt, sind folgende: ein Brennpunkt ist ein Punkt, der die grosse Axe in zwei Theile theilt, deren Rechtek $1/4$ der Figur gleich ist; unter Figur aber ist das Rechteck des Parameters mit der grossen Axe zu verstehen oder, was dem Werthe nach gleichbedeutend ist, das Quadrat der kleinen Axe. Wenn man das Stück einer Berührungslinie, welches zwischen den beiden Senkrechten zur grossen Axe in den Endpunkten derselben abgegrenzt ist, zum Durchmesser eines Kreises nimmt, so schneidet dieser Kreis die grosse Axe in den Brennpunkten. Die 4 Punkte, welche der Art bestimmt sind, nämlich 2 Brennpunkte und 2 Punkte einer Berührungslinie werden paarweise verbunden, je ein Punkt der Berührungslinie, mit dem einen, der andere mit dem anderen Brennpunkte. Diese Verbindungslinien nennt man conjugirte Linien. Sie schneiden einander auf der Normallinie, d. h. auf der Senkrechten, welche zur Berührungslinie im Berührungspunkte errichtet ist. Nun folgt der Satz über Winkelgleichheit, aus welchem die physikalische Eigenschaft hervorgeht, um derentwegen Keppler den Brennpunkten diesen ihren Namen gab; ferner der Satz, dass die Fusspunkte der Senkrechten von den Brennpunkten auf Berührungslinien sämmtlich in einer um die grosse Axe als Durchmesser beschriebenen Kreisperipherie liegen; endlich der Satz von der constanten Summe, beziehungsweise Differenz der Leitstrahlen. Alle diese Wahrheiten entwickelt Apollonius der Reihe nach in dem 3. Buche, welches dadurch fast für sich allein den Charakter einer elementaren Kegelschnittslehre heutiger Zeit gewinnt.

Waren die drei ersten Bücher dem Eudemus gewidmet, so beginnt das 4. Buch mit einem Sendschreiben an Attalus, in welchem der Tod jenes Freundes beklagt, nebenbei aber auch der Inhalt des beigefügten Buches kurz dahin bezeichnet wird, es beschäftige sich mit der Frage, wie viele Punkte Kegelschnitte mit Kreisperipherien und mit andern Kegelschnitten gemein haben können ohne ganz und gar zusammenzufallen. Apollonius weiss dabei sehr wohl eine Berührung von einer Durchschneidung zu unterscheiden. Er hebt z. B. hervor, dass 2 Kegelschnitte 4 Durchschnittspunkte haben können, oder 2 Durchschnittspunkte und 1 Berührungspunkt, oder 2 Berührungspunkte; ferner, dass 2 Parabeln nur 1 Berührungspunkt haben können, ebenso Parabel und Hyperbel, wenn die Parabel die äussere Curve ist, ebenso Parabel und Ellipse, wenn die Ellipse die äussere Curve ist u. s. w. Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, dass die Sätze dieses Buches für die Alten eine viel höhere Bedeutung hatten als für die neuere Mathematik. Waren es doch grade die Durchschnittspunkte der Curven, deren zum Zwecke der Würfelverdoppelung nothwendige Ermittelung die Curven selbst hatten untersuchen, theilweise sogar erfinden lassen. Die Methode, nach welcher Apollonius die Punkte bestimmt, welche zwei Raumgebilden gemeinsam sind, kommt auf eine apagogische Beweisführung hinaus, die sich grossentheils auf das Lemma des 3. Buches bezüglich der harmonischen Theilung stützt. So musste das 4. Buch der Form und dem ganzen Inhalt nach gleichmässige Verbreitung mit den 3 ersten Büchern gewinnen, deren Abschluss es gewissermassen für solche Mathematikstudirende bildete, welche von der damaligen höheren Mathematik grade das in sich aufnehmen wollten, was bis zur Lösung der delischen Aufgabe, diese mit inbegriffen, nothwendig war. Ja diese innere Zusammengehörigkeit engerer Art der 4 ersten Bücher bewährte sich geschichtlich auch dadurch, dass nur sie im griechischen Texte sich erhielten, während das 5., 6. und 7. Buch erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts aus einer arabischen Uebersetzung bekannt wurden, das 8. Buch sogar als ganz verloren wird betrachtet werden müssen.

Das 5. Buch lässt alle übrigen weit hinter sich. Es behandelt einen Gegenstand, mit welchem, wie es scheint, kein einziger griechischer Schriftsteller ausser Apollonius sich beschäftigte: die geometrische Lehre vom Grössten und Kleinsten.[92]) Es ist selbstverständlich, dass diese Lehre bei einem griechischen Mathematiker nicht das Methodische besitzen wird, welches sie bei ihrem erneuten Auftreten im 17. Jahrhundert erhielt, dass sie auch nicht erschöpfend auftreten wird, sondern dass nur eine bestimmte Gattung von Aufgaben zur Behandlung kommen wird; aber grade um so bewundernswürdiger ist es, wie Apollonius Einzelfälle unterscheidet, und durch Zusammenfassung dieser Einzelfälle das Gesammtgebiet seiner Untersuchung sich unterwirft; wie er die verschlungensten Beweise aufzufinden im Stande ist, Beweise so wenig natürlich, dass man kaum der Versuchung widerstehen kann, zu glauben, Apollonius müsse irgend eine andere Methode besessen haben, welche ihn die Sätze kennen lehrte, für die er nur nachträglich Beweise in der allgemein gebräuchlichen Form aufsuchte, wie es etwa zwei Jahrtausende später von Newton bekannt ist. Was Apollonius aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten kennt, das sind insbesondere die längsten und kürzesten Linien, welche aus irgend einem Punkte der Ebene nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, Linien, welche Apollonius zuerst für die Fälle bestimmt, in denen der gegebene Punkt auf der Axe liegt und die Construction durch Abschnitte erfolgen kann, die selbst auf der Axe des Kegelschnittes auftreten. Dann folgt eine Reihe von Sätzen, die etwa mit dem modernen Begriffe der Subnormalen sich beschäftigen. Später weist Apollonius nach, dass diese selben grössten und kleinsten Linien Normallinien zum Kegelschnitte sind, dass also auch die Aufgabe im Früheren zur Lösung vorbereitet ist: von irgend einem Punkte einer Ebene Normalen zu einem in der Ebene befindlichen Kegelschnitte zu zeichnen. Er geht an die Aufgabe selbst heran und findet eine Construction, bei welcher von Durchschnitten mit Hyperbeln Gebrauch gemacht ist. Indem er nun sich bewusst wird, dass in der Zahl der Senkrechten, welche von einem Punkte aus nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, keine Willkür herrscht, dass dieselbe vielmehr einestheils von der Art des Kegelschnittes, anderntheils von der Lage des gegebenen Ausgangspunktes abhängt, findet er, dass in dieser Beziehung gewisse Punkte eine Ausnahmestellung einnehmen. Diese Punkte, aus welchen man nach dem gegenüberliegenden Theile des Kegelschnittes nur eine Normale ziehen kann, sind die Krümmungsmittelpunkte, welche in ihrer stetigen Aufeinanderfolge die Evolute des Kegelschnittes bilden. Man darf daher sagen, Apollonius habe die Existenz dieser Curve geahnt, wenn es auch entschieden zu weit gegangen wäre, ihm die Bekanntschaft mit der Lehre von der Evolution zuzuschreiben.

Das 6. Buch handelt von gleichen und ähnlichen Kegelschnitten, sofern dieselben auf graden einander ähnlichen Kegeln auftreten; am Schlusse wird sogar die Aufgabe behandelt, durch einen gegebenen Kegel eine Schnittfläche zu legen, welche eine gleichfalls gegebene Ellipse erzeugen soll.

Zwischen dem 7. und dem 8. Buche scheint wieder ein engerer Zusammenhang stattgefunden zu haben, wie uns Apollonius selbst versichert. In seiner Zuschrift sagt er, das 7. Buch beschäftige sich mit Sätzen, welche zu Bestimmungen führen, das 8. Buch enthalte wirklich bestimmte Aufgaben über Kegelschnitte. Auch aus Pappus lässt eine solche Zusammengehörigkeit der beiden Bücher sich folgern. Derselbe theilt nämlich eine ziemlich beträchtliche Zahl von Lemmen zu den Kegelschnitten des Apollonius mit. Die Lemmen zu allen übrigen Büchern sind nach den Büchern gesondert; nur die Lemmen zum 7. und 8. Buche sind vereinigt.[93]) Auf diese Grundlage hin hat Halley eine Wiederherstellung des verlorenen 8. Buches versucht, welche indessen doch zu unsicher scheint, um näher besprochen zu werden. Wir begnügen uns mit der Bezeichnung einiger interessanten Theorien aus dem erhaltenen 7. Buche. In ihm finden sich die Sätze über complementäre Sehnen, welche conjugirten Durchmessern parallel laufen, in ihm die Sätze über die constante Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser, in ihm die Entwicklung des Flächenraums jener Parallelogramme, deren zwei an einanderstossende Seiten die Hälften zweier conjugirter Durchmesser sind. Auch diese Sätze, welche gegenwärtig rechnend hergeleitet werden, erfordern bei Apollonius die Unterscheidung einer grossen Anzahl von Einzelfällen, bei welcher er wiederholt die Gewandtheit entwickelt, welche man schon in den frühern Büchern bewunderte. Dieses in Kürze der Inhalt des merkwürdigen Werkes, welcher wohl geeignet erscheint unsere Neugier anzuregen, inwieweit derselbe Mathematiker seinen erfinderischen Geist auch noch anderen Gebieten unserer Wissenschaft zuwandte.

Von solchen anderen Arbeiten wissen wir leider nur eben genug, um die Vielseitigkeit des Apollonius zu ahnen, aber bei Weitem nicht so viel, um den Werth der Untersuchungen abschätzen zu können, deren Titel nur uns überblieben sind und die Vermuthung zu einer wahrscheinlichen machen, dass Anwendungen der Kegelschnitte auf bestimmte geometrische Aufgaben in denselben behandelt wurden.[94]) Diese Vermuthung wird noch unterstützt durch die 2 Bücher vom Verhältnissschnitt,[95]) welche arabisch erhalten blieben. Edm. Bernard fand die freilich ziemlich verderbte Handschrift am Ende des 17. Jahrhunderts und begann dieselbe in's Lateinische zu übersetzen. Allein kaum hatte er den zehnten Theil der Aufgabe bewältigt, so stand er von dem Unternehmen ab, um es nicht wieder aufzunehmen. Halley fühlte sich gereizt an den Bernardschen Anfang anzuknüpfen, und so entstand die weitere lateinische Uebersetzung, ein um so merkwürdigeres Zeugniss von der Leistungsfähigkeit Halleys, als derselbe des Arabischen durchaus unkundig war, und das von Bernard hinterlassene Bruchstück ihm als Grammatik und Wörterbuch dienen musste. Diese Bücher vom Verhältnissschnitt, deren Autorschaft dem Apollonius mit aller Bestimmtheit zukommt, wenn auch vielleicht durch die mehrfache Ueberarbeitung in verschiedenen Sprachen Veränderungen in Einzelheiten verschuldet worden sein mögen, zeigen nun ganz den erwähnten Charakter. Die in ihnen behandelte Aufgabe lautet folgendermassen: Es sind zwei unbegrenzte gerade Linien in derselben Ebene der Lage nach gegeben, welche entweder gegenseitig parallel sind oder einander schneiden, und in jeder derselben ist ein Punkt gegeben, auch ist ein Verhältniss und überdies ein Punkt ausserhalb der Linien gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche von den der Lage nach gegebenen Linien Stücke abschneidet, deren Verhältniss dem gegebenen gleich ist. Man erkennt leicht, dass diese Aufgabe durch einen grossen Reichthum an Fällen sich auszeichnet, je nach der Lage des Punktes ausserhalb der beiden Linien zu diesen Linien selbst und zu der durch die beiden auf den Linien gegebenen Punkten gezogenen Transversalen, und ferner je nach der Richtung, in welcher jene in Verhältniss tretende Stücke von den gegebenen Punkten aus liegen sollen. Das liegt wieder so recht in dem geometrischen Charakter des Apollonius! Er löst die Aufgabe mit Hülfe von Kegelschnitten.

Eine weitere Abhandlung des Apollonius wird von Eutokius erwähnt. In dem mehrfach benutzten Commentare zur Kreismessung des Archimed[96]) äussert sich derselbe: „So viel in meinen Kräften stand, habe ich nun die von Archimedes angegebenen Zahlen einigermassen erläutert. Wissenswerth ist aber noch, dass auch Apollonius von Pergä in seinem Okytoboon dasselbe durch andere Zahlen bewiesen hat, wodurch er sich der Sache noch mehr näherte.“ Schon das Wort ὠκυτόβοος ist philologisch durchaus räthselhaft, und der Inhalt der Schrift ist es kaum weniger. Dass mit Hülfe der in jener Abhandlung ausgesprochenen Lehren eine ziemlich genaue Kreismessung vollzogen werden konnte, jedenfalls eine genauere als sie in dem archimedischen Verhältnisse $\frac{22}{7}$ enthalten war, das freilich entnehmen wir dem Eutokius. Aber wie erfolgte diese Rechnung? Wir sind dafür ohne jeden Anhaltspunkt, es sei denn, dass man einen solchen in einer von Wöpcke herausgegebenen arabischen Handschrift zu finden berechtigt wäre.[97])

Diese Handschrift besteht in einer Uebersetzung eines griechischen Commentars zum 10. Buche der euclidischen Elemente, also zu jenem Buche, welches die Lehre von den Irrationalgrössen behandelt. Wer der Verfasser des Commentars ist, kann nicht mit voller Bestimmtheit angegeben werden, wenn gleich die Gründe bedeutend in's Gewicht fallen, die Wöpcke dafür beibringt, dass man es hier mit dem überlieferter-massen wie diese Uebersetzung aus 2 Büchern bestehenden Commentare zum 10. Buch der Elemente von Vettius Valens, einem byzantinischen Astronomen aus dem 2. Jahrhunderte nach Chr. Geb. zu thun habe. Dieser Commentator spricht nun ausdrücklich von Arbeiten des Apollonius über die Irrationalgrössen und legt ihnen einen hohen Werth bei. Die Irrationalgrössen, so sagt er etwa, fanden ihren Ursprung in der Schule des Pythagoras. Theätet vervollkommnete die Lehre, nach den Mittheilungen des Eudemus, indem er Irrationalgrössen unterschied, die durch Multiplication, durch Addition und durch Subtraction unter einander verbunden eine verwickeltere Form besassen. Euclid brachte vollends Ordnung in den Gegenstand durch genaue Bestimmung und Scheidung der verschiedenen Gattungen von Irrationalitäten. Apollonius aber war es, welcher neben den geordneten (τεταγμένος des Proklus) Irrationalgrössen die Existenz der ungeordneten (ἄτακτος) nachwies und durch genaue Methoden eine grosse Anzahl derselben herstellte. Nun folgt der eigentliche Commentar, aus welchem Wöpcke mit grossem Scharfsinn wiederherzustellen versucht hat, welches eigentlich jene bedeutende Erweiterung gewesen sein kann, die dem Apollonius zugeschrieben wird, mit anderen Worten, was man unter ungeordneten Irrationalgrössen zu verstehen habe.

Die Sache scheint sich etwa so zu gestalten. Die Irrationalzahlen sind unterschieden je nach dem Wurzelexponenten, der in ihnen vorkommt, und Euclid beschränkte sich wie die meisten Alten auf die Betrachtung der Quadratwurzeln, also auf Irrationalitäten mit dem Wurzelexponenten 2. Die einfache Quadratwurzel galt, wie früher bemerkt wurde, nicht als irrational; sie war eben die Seite eines rationalen Quadrates, und als solche wenigstens in der Potenz rational, wie man sich ausdrückte. Nahm man nun 2 Zahlen, von denen zum Mindesten eine nur in der Potenz rational war, so konnte man aus denselben Medialen, Binomialen und Apotomen bilden, welche alsdann als wirkliche Irrationalgrössen angesehen werden. Die Mediale wird nur als eine einzige betrachtet. Sie entsteht, indem man die beiden gegebenen Zahlen multiplicirt und aus ihrem Producte die Wurzel zieht, z. B. $\sqrt{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$. Die Binomialen entstehen durch Addition. Bei ihnen sind 6 Arten zu unterscheiden. Berücksichtigt man, dass von den beiden Theilen der Binomialen der eine grösser sein wird, als der andere, so sondern sich leicht 3 Arten ab, je nachdem die Irrationalität des ganzen Ausdruckes dadurch erzeugt wird, dass nur der grössere Theil in der Potenz rational ist, oder nur der kleinere, oder beide. Jeder dieser 3 Fälle kann nun wieder in 2 neue Fälle getrennt werden, je nach den Eigenschaften der Differenz der Quadrate der beiden die Binomiale bildenden Theile, ob dieselbe eine Quadratzahl ist oder nicht. So erhält man in modernen Zeichen folgende 6 Binomialen: $\sqrt{a^2+d^2}+a$ und $\sqrt{a^2+d}+a$, $a+\sqrt{a^2-d^2}$ und $a+\sqrt{a^2-d}$, endlich $\sqrt{a}+\sqrt{a-d^2}$ und $\sqrt{a}+\sqrt{a-d}$, wo voraussichtlich keine der angedeuteten Quadratwurzeln ausgezogen werden kann und auch d keine

Quadratzahl ist. Andere Fälle sind nicht aufzufinden, so lange kein neuer Eintheilungsgrund benutzt wird. Wie die Binomiale durch Addition, so entsteht die Apotome durch Subtraction. Wenn daher nur das Pluszeichen zwischen den beiden Theilen durch das Minuszeichen ersetzt wird, so erscheinen augenblicklich die 6 Arten von Apotomen, von denen Euclid handelt. Darnach dürfte der Sinn der oben angeführten historischen Bemerkung des alten Commentators folgender sein: Die unmittelbare Schule des Pythagoras lehrte den Begriff der Irrationalität überhaupt kennen;[5]) Theätet zeigte, dass es Medialen, Binomialen und Apotomen gebe; Euclid ging wieder einen Schritt weiter: er machte die eben auseinandergesetzte Unterscheidung, d. h. er ordnete die Irrationalgrössen und fand bei der Ordnung 13 Gattungen, nämlich eine Mediale, 6 Binomialen, 6 Apotomen. Ungeordnet dagegen verbleiben erstens sämmtliche Irrationalgrössen, welche aus mehr als 2 Theilen zusammengesetzt waren und zweitens alle diejenigen, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Theile, welche einen höheren Wurzelexponenten als die 2 besassen.

Nach beiden Richtungen war somit dem Apollonius eine Erweiteterung möglich. Schon die Erweiterung von $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ etwa in $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots$ muss man als keine so unbedeutende Sache ansehen. In moderner Schreibweise freilich bietet sich dieselbe von selbst dar. Nicht so für die griechischen Schriftsteller, welche, wie man nie ausser Augen lassen darf, nicht von Quadratwurzeln sprachen, sondern von der Seite eines Quadrates von gegebenem Flächeninhalte und rückwärts von der Fläche des Quadrates, welches eine gegebene Linie über sich erzeugt, oder um den griechischen Ausdruck wörtlicher wiederzugeben: von der Fläche, welche eine Linie kann. Nun kann $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots$ als Fläche das Quadrat eines Polynomiums, dessen Auffindung schon eine höhere Aufgabe ist, als die Quadrirung eines nur zweitheiligen Ausdruckes. Noch unverhältnissmässig verwickelter erscheint von solchem Gesichtspunkte die Betrachtung von Irrationalgrössen mit höherem Wurzelexponente. Sie musste bis auf die Cubikwurzel und noch eine bestimmte Gattung von Irrationalgrössen, deren alsbald gedacht werden soll, nahezu als der griechischen Auffassung unzugänglich bezeichnet werden. Die Cubikwurzel, d. h. die Seite eines Würfels von gegebenem Körperinhalte, welcher zu irgend einem anderen in gegebenem Verhältnisse steht, das war, wenn auch über die Elemente hinausgehend, noch immer ein geometrisch Fassliches; das bildete, wie wir sahen, den Kern der delischen Aufgabe. Und erinnern wir uns nun an die Art zurück, wie Hippokrates von Chios jenes Problem auffasste, nämlich als Aufgabe zwischen zwei gegebenen Grössen zwei mittlere geometrische Proportionalen zu suchen, so werden wir auch um die anderen Irrationalgrössen nicht lange verlegen sein, welche geometrisch entstehen konnten. Wir müssen nur die delische Aufgabe dahin erweitert denken, dass man zwischen zwei gegebenen Grössen 3, 4 oder noch mehr, überhaupt also mehr als 2 mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten habe. Benutzen wir wieder moderne Zeichen, um darüber ins Klare zu kommen. Nehmen wir an, zwischen die beiden Grössen k_1, k_2 seien m mittlere geometrische Proportionalen $l_1, l_2, l_3, \ldots l_m$ eingeschaltet, es sei also $k_1 : l_1 = l_1 : l_2 = l_2 : l_3 = \ldots = l_m : k_2$. Nun ist zunächst $l_1^2 = k_1\, l_2$; ferner $l_2^2 = l_1 \cdot l_3$ also $l_2^4 = l_1^2 \cdot l_3^2 = k_1 \cdot l_2 \cdot l_3^2$ und $l_2^3 = k_1 \cdot l_3^2$. So folgt weiter $l_3^4 = k_1 \cdot l_4^3$ und allgemein:

$$1)\ l_n^{n+1} = k_1 \cdot l_{n+1}^n$$

Andererseits ist $l_m^2 = k_2 \cdot l_{m-1}$; ferner $l_{m-1}^2 = l_m \cdot l_{m-2}$, also $l_{m-1}^4 = l_m^2 \cdot l^2_{m-2} = k_2 \cdot l_{m-1} \cdot l^2_{m-2}$ und $l^3_{m-1} = k_2 \cdot l^2_{m-2}$. Weiter $l^4_{m-2} = k_2 \cdot l^3_{m-3}$ und allgemein:

$$2)\ l_{n+1}^{m-n+1} = k_2\, l_n^{m-n}$$

Die Elimination von l_{n+1} zwischen den Gleichungen 1) und 2) liefert aber das Resultat $l_n = \sqrt[m+1]{k_1^{m+1-n} \cdot k_2^n}$, also in der That eine Grösse von höherer Irrationalität, wenn man so sagen darf, als die ihr zur Grundlage dienende einfache Mediale. Wöpcke vermuthet nun, Apollonius möge sich auch mit diesen Irrationalgrössen beschäftigt haben. Näheres wissen wir indessen nicht darüber und ebensowenig ob, was allerdings nicht zu den Unmöglichkeiten gehört, Apollonius zur Untersuchung der Irrationalgrössen dadurch gelangte, dass er das Verhältniss des Kreises zum Durchmesser zu ermitteln beabsichtigte. Unter dieser Voraussetzung stände freilich die Untersuchung der ungeordneten Irrationalgrössen mit dem früher genannten Okytoboon in Verbindung, möchte vielleicht sogar einen Theil desselben ausmachen.

Die negative Thatsache lässt sich dagegen mit aller Bestimmtheit aussprechen, dass wir keinen Theil des Okytoboon in einem anderen Fragmente zu erkennen haben, welches Pappus aufbewahrt hat, und welches der englische Mathematiker Wallis am Ende des 17. Jahrhunderts in griechischer Sprache veröffentlichte.[98]) Der im Früheren schon von uns angekündigte Inhalt dieses Bruchstückes ist eine eigenthümliche Multiplicationsmethode, mittelst derer sämmtliche Zahlen mit einander vervielfacht werden, welche durch die Buchstaben zweier Verse dargestellt werden, indem bekanntlich jeder Buchstabe des griechischen Alphabets neben seiner Buchstabenbedeutung auch zifferartig verwerthet wurde und je eine bestimmte Zahl bezeichnete. Dem Bruchstücke voraus muss die Beschreibung einer anderen wahrscheinlich umständlicheren aber landläufigeren Multiplicationsmethode gegangen sein. Nesselmann hat diese Folgerung mit Recht daraus gezogen, dass Pappus am Schlusse der Multiplication der Buchstaben des ersten Verses ausdrücklich sagt, das Gesammtresultat sei übereinstimmend mit der Angabe des Apollonius nach der am Anfange des Buches vorgeschriebenen Methode. Ein eigenthümlicher Zufall hat es somit veranlasst, dass, während die Grundzüge des Archimed ganz verloren gingen, auch von einem ähnlichen Werke des Apollonius nur der Theil erhalten ist, der sich auf damals weniger gewöhnliche Rechenmethoden bezieht.

Aus dem Vorhandenen können wir erstens entnehmen, dass Apollonius in ähnlicher Weise wie Archimed die Zahlen in Gruppen zu theilen wusste, welche eine leichtere Aussprache und zugleich eine grössere Uebersichtlichkeit gewährten, als sie ohne Gruppirung zu erreichen gewesen wäre. Es ist derselbe Gedanke, der beiden Schriftstellern gleichmässig vorschwebte, ja es ist eigentlich dieselbe Gruppirung, welche wir von beiden gelehrt finden. Denn wenn auch Archimed, wie früher gesagt wurde, Octaden bildete, während Apollonius sich mit Tetraden begnügte, so ist doch die Gleichheit des Princips dadurch hergestellt, dass zwei Tetraden des Apollonius neben einander geschrieben nach moderner Bezeichnung der Zahlen einer Octade des Archimed gleichkommen, dass Archimed also nur eine noch höhere Einheit annahm als Apollonius, aber eine Einheit, welche aus der des Apollonius sich unmittelbar entnehmen liess, ebenso wie der entgegengesetzte Weg denkbar ist, ebenso wie beide Gruppirungen selbstständig aus dem Sprachgebrauche hervorgehen konnten, welcher Myrias, d. h. 10000 als letztes unzusammengesetzes Zahlwort kennt. Dies mag ausdrücklich betont werden, damit nicht die Meinung entstehe, als ob fast nothwendigerweise einer der beiden grossen Mathematiker seine Gruppirung in Abhängigkeit von dem anderen erfunden haben müsse. Die Namen, welche Apollonius für seine Tetraden benutzt, sind für die erste Tetrade, welche also von 1 bis 9999 sich erstreckt, der Name der Einheiten; dann folgt die Tetrade der Myriaden; auf diese die der doppelten Myriaden, der dreifachen, vierfachen u. s. w. Myriaden.

Neben und nach diesem ersten Inhaltstheile umfasst das Bruchstück bei Pappus zweitens die Vorschrift, dass die Multiplication von irgend welchen Zahlen auf die Multiplication ihrer Pythmenes zurückzuführen sei, ein Wort, welches etwa als Wurzelzahl übersetzt werden kann. Eine genauere Darstellung eines der Beispiele mag zeigen, wie die Zurückführung gemeint ist. Seien etwa die Zahlen 50, 50, 50, 40, 40, 30 zu multipliciren, so sind deren Wurzelzahlen 5, 5, 5, 4, 4, 3, aus welchen als Product 6000 Einheiten entstehen. Da nun die Menge der Zehner 6 ist, und diese Zahl durch die 4 getheilt 2 zum Rest lässt, so ist das Product der Zehner für sich 100 einfache Myriaden. Nun erhält man das Product der von Anfang gegebenen Zahlen durch Multiplication des Products der Zehner in das Product der Wurzelzahlen. Jene 100 Myriaden mal 6000 Einheiten machen 60 zweifache

Myriaden, und so ist das Product von 50 . 50 . 50 . 40 . 40 . 30 gleich 60 zweifachen Myriaden. Hier sind freilich nur Multiplicationen von Zehnern in Zehner, wie wir nach heutigem Sprachgebrauche sagen, vorhanden. Allein es findet sich auch ein weiteres Beispiel von Vervielfachung von Zehnern in Hunderte, und so ist nicht abzusehen, warum dieselbe Methode nicht auch allgemein von Apollonius sollte angewandt worden sein. Ueber die Tragweite der Methode aber kann man nur dann eine richtige Anschauung gewinnen, wenn man vergisst, wie leicht es der modernen Ziffernschrift ist, 3 etwa als die Wurzelzahl von 300 zu erkennen, wenn man vielmehr erwägt, dass schon ein gewisses Nachdenken erforderlich ist um von τ, dem Buchstaben mit dem Werthe 300, zu γ, dem Buchstaben mit dem Werthe 3, zu gelangen, um zugleich in Erinnerung zu behalten, dass dabei die Zahl um 2 Ordnungen erniedrigt worden ist. Bei dieser Erwägung erst lernt man die Bedeutung der Abkürzungsmethode des Apollonius schätzen, begreift man, wie sie vielleicht Schuleigenthum einzelner Mathematiker geworden ist, aber nicht in das allgemeine Volksbewusstsein einzudringen sich im Stande erwies. Dass aber Letzteres sich in der That so verhält, geht theils daraus hervor, dass Pappus die Methode offenbar in der Weise darstellt, wie man Etwas wenig Bekanntes, aber den Männern der Wissenschaft Empfehlenswerthes auseinandersetzt, theils auch daraus, dass, wie schon früher erwähnt wurde, Eutokius von Askalon im 6. Jahrhunderte sich einer ganz andern Methode bedient zu haben scheint, bei welcher von einer Zurückführung grösserer Zahlen auf kleinere nicht die Rede war.

Und somit hätte ich die Darstellung der Fortschritte beendigt, welche, so weit die Spuren zu uns gelangt sind, die Zeit vom Jahre 300 etwa bis 200 vor Chr. Geb. den mathematischen Wissenschaften hinzufügte. Der Leser wird nicht viel durchaus Neues entdecken, was nicht auch anderwärts schon geboten wäre: das bringt der Gegenstand selbst mit sich. Allein Nichts desto weniger hielt ich die Veröffentlichung einer solchen Skizze eines ein Jahrhundert umfassenden Culturbildes für gerechtfertigt, nachdem seit den letzten zusammenhängenden Darstellungen mathematischer Geschichtsschreiber so manche neue Thatsache entdeckt worden, welche hier und dort zerstreut mitgetheilt ist, ohne zu allgemeiner Kenntniss zu gelangen. Je bedeutender aber die Männer, je interessanter eine Zeit, um so wichtiger ist es für gerechte Würdigung derselben, dass ihre Leistungen uns übersichtlich vor Augen liegen, und gerade dieses habe ich in vorliegender Abhandlung angestrebt.

Anmerkungen.

1. Vergl. Fabricius, Bibliotheca Graeca edit. Harles. Hamburg 1795. Vol. IV, pag. 44—82 De Euclide.

2. Valerius Maximus VIII, 12: Platonis quoque eruditissimum pectus haec cogitatio attigit: qui conductores sacrae arcis de modo et forma ejus secum sermonem conferre conatos ad Euclidem Geometram ire jussit scientiae ejus cedens, imo professioni.

3. Pappus, Mathematicae Collectiones ed. Commandinus. Bononiae 1660, lib. VII, prooemium pag. 251: Euclides secutus Aristaeum scriptorem luculentum in iis, quae Conicis tradiderat, neque antevertens neque volens eorum tractationem destruere, cum mitissimus esset et benignus erga omnes, praesertim eos, qui mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere et amplificare possent, ut par est, et nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans etc. [Andere Ausgaben des Pappus, welche ich aber nicht zur Hand habe, sind Pisauri 1588 und ebenda 1602 erschienen. In letzteren soll die citirte Stelle auf fol. 164 verso sich befinden.]

4. Die Elemente des Euclid sind in allen Sprachen so vielfach herausgegeben, dass es überflüssig erscheint, eine besondere Ausgabe hervorzuheben. Wohl jedem Leser dürfte irgend eine Uebersetzung zu Gebote stehen.

5. Den zahlentheoretischen Ursprung des pythagoräischen Lehrsatzes und die daraus folgende Lehre von den Irrationalgrössen habe ich in meinen Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker, Halle 1863, S. 105 flgg. nachzuweisen versucht, eine Darstellung, welche seitdem noch von keiner Seite Widerspruch erfahren hat.

6. Nesselmann, die Algebra der Griechen. S. 183.

7. Vergl. meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 108 und ebenda Anmerk. 204.

8. Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet von Ernst Nizze. Stralsund 1824. S. 42—43. (Einleitung zu den Büchern von der Kugel und dem Cylinder).

9. Proclus Diadochus in primum Euclidis elementorum librum Commentaria (ed. Barocius Patavii 1560) Lib. II, c. VII, p. 42. Elementa igitur nominantur illa quidem quorum consideratio ad aliorum pertransit scientiam et ex quibus dubiorum, quae in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio.

10. Proclus, Lib. II, c. IV, p. 38. Vergl. auch meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 85.

11. Wiewohl es unmöglich scheint die Stelle Proclus, Lib. II, c. IV, p. 39 in Widerspruch mit dem im Texte enthaltenen Ausspruche zu deuten, möge sie dem unparteiischen Urtheile des Lesers hier unterworfen werden: Non multo autem his iunior Euclides est, qui elementa collegit et multa quidem construxit eorum, quae ab Eudoxo, multa vero perfecit eorum, quae a Theaeteto reperta fuerant. Ea praeterea, quae a prioribus molliore brachio ostensa fuerant ad eas redegit demonstrationes, quae nec coargui, nec convinci possunt.

12. Von modernen Schriftstellern, welche sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben, nenne ich L. F. Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik. Ulm 1860 (18 S. in 4⁰) und Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement. Paris 1865—66 (Vergl. besonders T. I, Chap. 10: De l'analyse et de la synthèse chez les anciens.)

13. Ehrenfr. Walther v. Tschirnhaus, der bekannte Zeitgenosse Leibnitzens, war auffallender Weise entgegengesetzter Meinung. In seiner unter dem Titel

Medicina mentis et corporis veröffentlichten Logik sagt er (editio nova, Lipsiae 1695, pag. 40): Hoc enim multo evidentius mihi videtur, me quaedam nullo modo posse concipere, ac illud, me quaedam concipere posse, qua in re unicuique propria conscientia validissimus erit testis. Hinc quoque perspicere licet, omnes demonstrationes ad absurdum seu impossibile deducentes omnium maxime nos ad assensum adigere.

14. Petrus Ramus, Scholae mathematicae (edit. Francof. 1627, pag. 98): Neque enim natura initio sylvae omnium arborum radices praeposuit, nec architectus initio civitatis omnium aedificiorum fundamenta collocavit, sed suis arboribus suas radices natura, suis aedificiis sua fundamenta architectura subjecit. Itaque debuerat Euclides definitionem trianguli triangulorum, multanguli multangulorum doctrinae praeponore; eamque viam in caeteris principiis servare.

15. Les trois livres de Porismes d'Euclide retablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions par M. Chasles. Paris 1860 (324 pag.).

16. Bei dieser Auseinandersetzung benutze ich theilweise eigene frühere Veröffentlichungen über denselben Gegenstand: den Aufsatz „Ueber die Porismen des Euclid und deren Divinatoren" (Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. II, 17—27) und die Besprechung der Chasles'schen Restitution (Zeitschr. f. Math. u. Phys. VI, Literaturzeitung S. 3—7).

17. Der ganze Absatz „Man nennt in der Geometrie .... Bedingung erfüllt" ist wörtlich aus Chasles, Geschichte der Geometrie (deutsch von Sohncke) S. 2, Anmerkung 2 entnommen, da ich keine Möglichkeit sah, die Sache klarer auszudrücken. Der Darstellung von Chasles liegt übrigens selbst Montucla, Histoire des mathématiques (2. édition) I, 171 zu Grunde.

18. Ueber die delische Aufgabe vergl. Reimer, Historia problematis de cubi duplicatione. Göttingen 1798. Biering, Historia problematis cubi duplicandi. Hauniae 1844. Blass, De Platone mathematico. Bonn 1861 (pag. 23 seqq.).

19. Reimer in seiner Uebersetzung von Bossut, Histoire générale des mathématiques (Hamburg 1804) sagt zwar in den Zusätzen zum ersten Kapitel (Bd. I, S. 52), nachdem er die Ausziehung der Quadratwurzel nach Theon von Alexandrien gelehrt: „Ein analoges methodisches Verfahren bei Ausziehung der Cubikwurzel war ohne Zweifel ebenfalls den Alten bekannt." Indessen entbehrt dieser Ausspruch wie jeder Begründung, so auch wirklich jeglichen Anhaltes. Darnach ist die auf Reimer sich stützende Behauptung Biering's (l. c. pag. 4) zu beurtheilen: Ad radicem quadratam extrahendam veteres methodum quandam cum ea, qua utuntur recentiores, fere cosentaneam adhibebant; et videtur similis ratio radicis cubicae extrahendae iis non incognita fuisse; sed eam ob difficultatem calculi in usu non fuisse videmus.

20. Vergl. Biering l. c. pag. 10.

21. Vergl. Reimer l. c. pag. 45, ferner Blass l. c. pag. 29.

22. *Εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας* (Plutarch, Quaest. Conv. VIII, 2).

23. Vergl. Proclus, Lib. III ad Euclidis propos. 9, pag. 155, wo der Erfinder Hippias genannt ist und Pappus, Lib. IV, propos. 25 flgg., pag. 88, wo die Anwendung der Quadratrix des Dinostratus zur Quadrirung der Kreisfläche gelehrt wird. Dass im Texte nur die einschlagenden Arbeiten vor Euclid berücksichtigt wurden, die spätere Conchoide des Nikomedes dagegen etc. unerwähnt blieb, bedarf wohl keiner Entschuldigung.

24. Pappus, Lib. VII prooemium, pag. 245. Vergl. auch die Uebersetzung der

in der lateinischen Uebertragung des Commandinus überaus verderbten Stelle bei Chasles l. c. (Anmerkung 15) pag. 16: Étant données quatre droites se coupant deux à deux, si trois des points d'intersection situés sur l'une d'elles, ou deux seulement dans le cas du parallélisme sont donnés et que des trois autres deux soient assujettis à rester chacun sur une droite donnée, le dernier sera situé aussi sur une droite donnée de position. Der griechische Urtext ist unter Anderen abgedruckt in einer Abhandlung über die Porismen von Breton (de Champ(Journ. Mathém. XX, 209—299.

25. Ich benutzte für die Δεδόμενα die deutsche Uebersetzung derselben: Euclid's Data nach dem Griechischen mit Robert Simson's Zusätzen herausgegeben von Julius Friedrich Wurm, Diakonus zu Lauffen am Neckar. Berlin 1825.

26. Proclus, Lib. II, c. V, pag. 40: Itemque de divisionibus liber und Lib. II ad definitionem 14, pag. 82: Circulus namque et rectilineorum quodlibet in ratione dissimiles dividi potest figuras. Quod et ipse Euclides in Divisionibus pertractat aliam quidem figurarum in similes datas figuras, aliam vero in dissimiles dividens. Der griechische Name des Werkes heisst: περὶ διαιρέσεων βίβλιον.

27. Ueber diesen Gegenstand vergl. Woepcke im Journ. Asiatique 1851, Sept. & Octob. und ganz besonders Ofterdinger, Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides über die Theilung der Figuren. Ulm 1853 (18 S. in 4⁰). In dieser letzteren Monographie wird nach Gartz (De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis schedisma historicum. Halae 1823, pag. 5) darauf aufmerksam gemacht, dass im Escurial eine vollständige arabische Uebersetzung der Schrift des Euclides über die Theilung der Figuren vorhanden zu sein scheine. Der als Uebersetzer genannte Tapet dürfte wohl der neuerdings bekannter gewordene Thabit ben Korra sein sollen?

28. Besorgt durch D. Gregory 1703.

29. Savilius, Praelectiones tres decim in principium Elem. Euclidis. Oxonii 1621. pag. 17.

30. Der griechische Name lautet τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν. Die Lemmen des Pappus finden sich am Schlusse des 7. Buches pag. 438—446. Die Bemerkungen von Chasles in der deutschen Uebersetzung seiner Geschichte der Geometrie als „Note II, Ueber Euclid's Oerter auf der Oberfläche" S. 272. Vergleiche ausserdem dessen auch in Liouville's Journ. Mathém. Bd. XII abgedruckte Séance d'ouverture du cours de géométrie supérieure le 22 Decembre 1846 pag. 7: Cependant on n'est pas fixé sur le sujet du livre des Lieux à la surface d'Euclide. L'auteur y considérait des courbes tracées sur des surfaces courbes; mais quelle était la nature de ces surfaces? les courbes, qu'on y traçait étaient-elles necessairement planes? La brièveté de Pappus nous laisse dans l'incertitude. Je dirai toutefois, que quelques indices peuvent porter à croire, que dans le livre des Lieux à la surface Euclide traitait des Conoïdes, appelés aujourd'hui surfaces du second degré de révolution, et des sections faites par des plans dans ces surfaces, comme dans le cône.

31. Für die Schriften des Archimedes benutzte ich die in Anmerkung 8 bezeichnete Uebersetzung von Nizze; ferner: die Kreis-Messung des Archimedes von Syrakus nebst dem dazu gehörigen Commentare des Eutokius von Askalon aus dem Griechischen übersetzt, mit Anmerkungen begleitet und einer Einleitung, welche sich vorzüglich über die Zahlenbezeichnungsarten und das Zahlensystem der Griechen ausbreitet, versehen von Joseph Gutenäcker. Würzburg 1825. Beide Schriften citire ich kurzweg als Nizze und Gutenäcker.

32. Die Stelle des Eutokius: Ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον ist abgedruckt

bei Gutenäcker S. 77. Einen Heraclides nennt Archimed selbst in der Einleitung zu seiner Schrift über Schneckenlinien. Ob aber dieser Zeitgenosse der Verfasser seiner Biographie gewesen, darüber fehlt jeder Anhaltspunkt. Wenn Meursius im Thesaurus Graec. antiqu. ed. Gronovius Vol. X pag. 609 in Heraclides Ponticus Major, dem Schüler des Aristoteles, den Biographen des Archimed vermuthet, so ist das chronologisch unmöglich, und wenn Gutenäcker S. 123, Note 7 sich auf diese Stelle bezieht, um als Autor Heraclides Ponticus, auch Lembus genannt, anzugeben, so ist das ein grober Irrthum. Allerdings gab es einen Ἡρακλείδης Λέμβος, allein dieser führt den Heimathsnamen Καλλατιανὸς ἢ Ἀλεξανδρεὺς und nicht Ποντικός. Ueber diesen Heraklides Lembus vergl. Diogenes Laertius V, 6, 8, wo aber nur gesagt ist, er habe ein διαδοχή (über die Folge der Philosophen?) geschrieben; von einer Biographie des Archimedes oder eines anderen Mathematikers ist dort keine Rede. Dass der Biograph Heraclides, wer er auch sein möge, durch einen alten Druckfehler sich einmal in einen Heraclius verwandelte, und als solcher bis in neueste Werke überging, sei nur im Vorübergehen bemerkt.

33. Notizen zur Lebensgeschichte des Archimedes finden sich bei Plutarch (vit. Marcell. vergl. non posse suav. viv. 11), Livius (XXV), Cicero (Tuscul. und Verrin.), Diodor, Silius Italicus, Valerius Maximus u. A. Eine Anzahl von neueren Zusammenstellungen habe ich in dem Artikel „Archimedes" in Pauly's Real-Encyclopädie der classischen Alterthumswissenschaft (2. Ausgabe) Bd. I, S. 1449—1452 genannt.

34. Cicero nennt den Archimed humilem homunculum (Tuscul. lib. V, cap. 23, § 64), freilich im Gegensatze zu dem Tyrannen Dionys, von welchem unmittelbar vorher die Rede ist. Aehnlicher Weise drückt sich Silius Italicus (De bello Punico XIV, 342) über Archimed aus: Nudus opem, sed cui coelum terraeque paterent.

35. Diodorus Siculus lib. V, p. 217.

36. Vitruvius, De architectura libri decem IX, 3 in der ed. J. G. Schneider, Lipsiae 1807. Bd. I, S. 238. Die Anmerkungen zu dieser Stelle (Bd. III, S. 165) enthalten die Stelle aus dem Gedichte De ponderibus et mensuris, welches von dem Herausgeber dem Rhemnius Fannius zugeschrieben wird. Andere nennen bekanntlich als Verfasser den Priscianus.

37. In der Schrift von den schwimmenden Körpern, περὶ ὀχουμενῶν, heisst es Buch I, Satz 7 (Nizze S. 228): Feste Körper, welche schwerer als eine Flüssigkeit, in diese eingetaucht werden, sinken, so lange sie noch tiefer kommen können, und werden in der Flüssigkeit um so leichter, als das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröse der eingetauchten Körper beträgt.

38. Montucla I, 229 ist der entgegengesetzten Meinung.

39. Proclus Lib. II, cap. 3 (pag. 37): Quale sane Hieron quoque Syracusius de Archimede dixisse fertur, quum navem trinis instructam velis fabricasset, quam Ptolemaeo Aegyptiorum regi mittere praeparabat. Quum nam omnes una Syracusii navem illam protrahere minime possent, Archimedes Hieronem solum ipsam subduxisse fecit. Stupefactus autem ille, ab hac (inquit) die de quocunque dixerit Archimedes, illi credendum est. Idem autem Gelonem etiam aiunt dixisse, quum corona, quam fabricatus est, non soluta singulum commistarum materiarum pondus comperisset.

40. Vergleiche die Schrift vom Gleichgewichte der Ebenen, ἰσοῤῥόπικα, Buch I, Satz 6 und 7 (Nizze S. 3 und 4).

41. Athen. V, 40 pag. 207.

42. So lautet wenigstens die lateinische Lesart: noli turbare circulos meos;

griechische Autoren haben die Worte etwas anders aufbewahrt: τὰν κεφαλὰν καὶ μὴ τὰν γραμμάν.

43. Ein Schriftsteller des 10. Jahrhunderts, Odo von Clüny, hat diese Schwierigkeit mit naiver Ehrlichkeit hervorgehoben, indem er sagt: Quae omnia magis unicae vocis alloquio quam scripta advertuntur. Vergl. meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 299.

44. Ausführliche Beschreibungen solcher Rechenbretter verschiedener Völker und Zeiten vergl. in meinen Mathem. Beiträgen z. Kulturl. Kap. IX und X, S. 128—154.

45. Vergl. Nizze S. 206 und 212; der griechische Name ist ἀρχαί.

46. Die einzelnen eine Gruppe einleitenden Zahlen werden ὅροι, Grenzzahlen genannt, ein Name, welcher sich auch allgemein von den Gliedern einer geometrischen Reihe bei den Griechen gebraucht findet, und dessen lateinische Uebersetzung bald terminus heisst und alsdann für Reihenglieder überhaupt gebraucht wird, bald als limes eine Rolle bei dem decadischen Rechnen der Römer spielt.

47. Vergl. Gutenäcker S. 116: οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου Λογιστικῶν ἠγμένον, d. h. welchen nicht leicht einer folgen kann, ohne in der Logistik des Magnus geübt zu sein.

48. Einen ausführlichen Bericht über die hierher gehörigen Stellen vergl. bei Nesselmann, die Algebra der Griechen S. 141—147.

49. Mehr als Wahrscheinlichkeit haben wir nicht hierfür, wenn auch Ideler in seinem trefflichen Aufsatze „Ueber die Trigonometrie der Alten" (Juliusheft 1812 von Zach's Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde Bd. XXVI, S. 7, Anmerkung) ganz bestimmt von den „beiden Büchern der Collectio Mathematica, die das praktische Rechnen betrafen" redet.

50. Vergl. Gutenäcker S. 84, 88, 91, 94, 100, 103, 106, 111, 113 oder Nizze S. 278—280.

51. Vergl. Nizze S. 209—223, wo die Ueberschrift „Sandeszahl" heisst. Der griechische Name ist ψαμμίτης, der lateinische arenarius.

52. Klügel ist geneigt diese Schlussart anzunehmen; vergl. dessen Mathematisches Wörterbuch s. v. Arithmetik. Bd. I, S. 184, und ich möchte ihm um so eher beistimmen, als ich auch sonst das arithmetische und sogar das geometrische Experiment bei den Griechen nachgewiesen habe. Vergl. meine Beiträge z. Kulturl. S. 92 flg. und 105 flg. Was die Zahlen selbst betrifft, so ist $153^2 = 23409$, das 3fache davon 70227, während $265^2 = 70225$.

53. Dieser Satz findet sich in Euclids Elementen VI, 3.

54. Gutenäcker S. 84, Nizze S. 278. Die Bezeichnung der griechischen Zahlen durch die Buchstaben des Alphabets, sowie die vertausendfachenden kleinen Kommata, die verzehntausendfachenden *M* u. s. w. setze ich als bekannt voraus. Wer sich darüber näher unterrichten will, findet das Material verschiedentlich gesammelt, so z. B. bei Nesselmann, die Algebra der Griehen S. 78 flg.

55. Quadratur der Parabel, Satz 3 (Nizze S. 13) und von den Konoiden und Sphäroiden, Satz 4 (Nizze S. 158).

56. Quadratur der Parabel Satz 18 bis zum Schlusse der Abhandlung, Nizze S. 22—25.

57. Quadratur der Parabel bis Satz 17, Nizze S. 12—22.

58. Von den Konoiden und Sphäroiden Satz 6, Nizze S. 161.

59. Von den Konoiden und Sphäroiden Satz 8—10, Nizze S. 162—168.

60. Von der Kugel und dem Cylinder, Vorrede des ersten Buches, Nizze S. 42. Unter den Annahmen dieses Buches findet sich auch beiläufig bemerkt die so-

genannte archimedische Definition: Von den Linien, welche einerlei Endpunkte haben, ist am kürzesten die gerade Linie (Nizze S. 44).

61. Von den Schneckenlinien, περὶ ἑλίκων, Nizze S. 116—150. Vergl. auch die wissenschaftliche Beilage zu dem Freiburger Lyceumsprogramme von 1862: Die Archimedische Spirale mit Rücksicht auf ihre Geschichte von Fr. X. Lehmann.

62. Vergl. Nizze S. 118. Lehmann l. c. S. 12.

63. Vergl. Nizze in den kritischen Anmerkungen zu den Schneckenlinien. S. 281. Die im Texte citirten Worte des Archimed vergl. Nizze S. 116.

64. Die citirten Worte gehören zu den Schlusssätzen der inhaltsreichen kleinen Schrift: Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker von J. H. T. Müller. Leipzig 1860.

65. Von den Schneckenlinien, Widmungsschreiben an Dositheus, Nizze S. 116.

66. In Bezug auf Eratosthenes wurden benutzt: Fabricius, Bibliotheca Graeca (ed. Harless) IV, pag. 120—127. Eratosthenes geographicorum fragmenta edidit Seidel, Göttingen 1789. Godofr. Bernhardy, Eratosthenica, Berlin 1822 und desselben Verfassers Artikel Eratosthenes in Ersch und Gruber's Encyclopädie, Section I, Bd. 36, S. 221—233. Just. Heinr. Dresler: Eratosthenes von der Verdoppelung des Würfels, wissenschaftliche Beilage zum Programme der herzogl. nassauischen Pädagogien zu Dillenburg, Hadamar und Wiesbaden im Frühjahr 1828.

67. Alex. v. Humboldt, Kosmos Bd. II, S. 208 und die zugehörige Anmerkung S. 435.

68. Ptolemaeus Hephaestio bei Photius, cod. CXC.

69. Ein Abdruck des Briefes findet sich auch in der Schrift von Bernhardy, S. 176—180, die deutsche Uebersetzung eines Theiles desselben in der Dresler-schen Programmbeilage.

70. Den Namen des Mesolabiums kennen wir aus Vitruvius IX, 3 und Pappus Lib. III, propos. 4, pag. 7; die Beschreibung dagegen und die Gebrauchsanweisung findet sich sowohl in dem eratosthenischen Briefe als bei Pappus Lib. III, propos. 5, pag. 8.

71. Die betreffenden Verse lauten

τῇδ' ἀναμετρήσαιο, μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
συνδρομάδας δίσσων ἐντὸς ἕλῃς κανόνων,

welche Dresler nicht allzuglücklich folgendermassen überträgt:

.... Inhalt fändest Du so, wofern Du zur äussersten Schranke
Laufende Mittlere zögst zwischen dem regelnden Paar.

72. Pappus Lib. VII Proeomium, pag. 241 und 247: De medietatibus.

73. Die betreffenden Stellen sind bei Bernhardy S. 170 gesammelt. Vergl. Theo Smyrnaeus pag. 129, 168, 173. Fabricius IV, 121 giebt der eratosthenischen Schrift den durch Nichts gerechtfertigten Namen ἀριθμητική.

74. *Νικομάχου εἰσαγωγὴ ἀριθμητική* ed. Ast (Leipzig 1817) pag. 83 flg. Jamblichus Chalcidensis in Nicomachi Geraseni arithmeticam introductionem ed. Tennulius (Arnheim 1668) pag. 41, 42.

75. *τὸ κόσκινον*, cribrum Eratosthenis.

76. *Κἀνταῦθα δὲ ὁ Εὐκλείδης προδηλότατον ἁμάρτημα παρέχει, τὴν δυάδα τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων οἰόμενος εἶναι, ἐπεὶ μονάδι μόνῃ μέτρῳ χρῆται ἐκλελησμένος ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἀρτίου εἴδους ἐστίν.* Jamblichus l. c. pag. 42.

77. Fabricius, Bibliotheca Graeca (ed. Harless) IV, pag. 192—203. Terquem, Notice bibliographique sur Apollonius N. ann. math. 1844, III, pag. 350—352 und 474—488.

78. Almagestum Ptolemai XII, 1.

79. Nouvelle Biographie universelle T. II, pag. 903. Paris 1852.

80. Leider standen mir die κωνικά des Apollonius nicht zur Verfügung, so dass ich mich in Bezug auf dieses Werk mit den Angaben anderer Historiker: Montucla, Chasles, Arneth begnügen musste. Ganz vortreffliche Dienste leistete mir auch die Zusammenstellung von Housel, Les coniques d'Apollonius. Journ. Mathém. 1858, XXIII, 153—192.

81. Pappus, pag. 250. Wenn Müller in seiner in Anmerkung 64 citirten Schrift S. 27 flg. sagt: „Die von Archimedes für die 3 Kegelschnitte gebrauchten Namen ἡ τοῦ ὀξυγωνίου, τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομή könnte zu dem Glauben verleiten, es sei ihm unbekannt gewesen, dass sich aus irgend einer graden konischen Fläche alle drei Curvenarten ableiten lassen. Dies ist keineswegs der Fall," so möchte ich mich dieser so unbedingt ausgesprochenen Behauptung nicht anschliessen.

82. Arneth, Geschichte der Mathematik. Stuttgart 1852. S. 91.

83. Platonis opera ed. Stallbaum, Gotha & Erfurt 1836. Vol. VI, Sect. 2, pag. 81 seq. Ferner Blass pag. 19 der in Anmerkung 18 citirten Dissertation: Mihi quidem persuasum est verba accurata constructionis via declarari non posse et id tantum adparere: Platonem exemplum dare voluisse problematis definiendi, quando solvi possit et quomodo neque tamen quo id assequeretur feliciter duo junxisse problemata, alterum de inscriptione figurarum in circulum, alterum de adplicatione spatiorum ad datam lineam.

84. Plato übersetzt von Hieron. Müller. Leipzig 1851. Bd. II, S. 150 und 180.

85. Die hier folgende Darstellung der drei Sätze lehnt sich wesentlich an Arneth, Geschichte der Mathematik S. 92—93 an, dessen Folgerungen ich zwar nicht theile, aber dem es an dieser Stelle ausgezeichnet gelungen ist, die antike Behandlungsweise zu modernisiren.

86. Proclus lib. IV, cap. 18 ad propos. 44, pag. 264: Antiqua quidem sunt haec, ajunt Eudemi familiares, Pythagoricaeque Musae inventa, applicatio utique spatiorum et excessus atque defectus. Ab his autem et Juniores quum nomina suscepissent, transtulerunt ipsa in eas etiam lineas, quae Conicae apyellantur, quippe qui unam quidem harum Parabolen, alteram autem Hyperbolen, tertiam vero Ellipsim vocarunt.

87. Vergl. meine Beiträge z. Kulturl. Kap. VI, S. 83 flgg.

88. Pappus, lib. VII, Einleitung de Conicis Apollonii, pag. 249: Euclidis libros quatuor conicorum quum Apollonius explevisset et quatuor alios adjunxisset, octo conicorum libros confecit.

89. Nizze hat es wenigstens sehr plausibel gemacht, dass diese Wörter nacharchimedisch seien, vgl. Nizze S. 285. Chasles dagegen (Geschichte der Geometrie S. 15 in der Note) schreibt dem Archimed die Kenntniss der beiden Namen zu.

90. Daraus wurde in der Uebersetzung das latus rectum (vielleicht auch verketzert aus latus erectum, die Senkrechte), ein Name, der bis in das 18. Jahrhundert hinein in Gebrauch war.

91. Apollonius benutzt dabei allerdings noch nicht das Wort: harmonische Theilung, sondern schreibt den Satz als Proportion.

92. Ein arithmetischer Satz aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten, dass nämlich das Maximalproduct zweier Theile einer gegebenen Summe erzielt werde, wenn die Theile einander gleich sind, findet sich in dem Commentare des Eutokius zu Archimed's Kugel und Cylinder II, 9. Der Beweis ist mit Hülfe von Euclid's Elementen II, 5 geführt. Wenn ich Ramus, Scholae mathematicae pag. 135 richtig verstehe, so weist Eutokius die Erfindung dieses Satzes dem Nikomachus auf dessen eigene Angabe hin zu. Näheres kann ich leider nicht angeben, da mir der Commentar des Eutokius nicht zur Verfügung ist.

93. Pappus, pag. 427—438.

94. Die Titel der verlorenen geometrischen Schriften des Apollonius sind: περὶ ἐπαφῶν de tactionibus, ἐπίπεδοι τόποι loci plani, περὶ νεύσεων de inclinationibus, περὶ χωρίον ἀποτομῆς sectio spatii, περὶ διωρισμένης τομῆς sectio determinata. Hypsikles führt ausserdem noch eine Schrift über die in dieselbe Kugel eingeschriebenen Dodekaeder und Ikosaeder an, Proklus eine περὶ τοῦ κοχλίου von gänzlich unbekanntem Inhalte.

95. Die Schrift περὶ λόγου ἀποτομῆς de sectione rationis, lateinisch bearbeitet von Halley 1706, deutsch von Aug. Richter (Elbing 1836).

96. Vergl. Gutenäcker S. 155.

97. Woepcke, Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après les indications tirées d'un mannscrit arabe (Mémoires présentés à l'académie des sciences. T. XIV, pag. 658—720. Paris 1856.) Vergl. auch den Bericht von Chasles über diese Abhandlung in den Compt. Rend. XXXVII, 553—568 (17. October 1853).

98. Vergl. Nesselmann, die Algebra der Griechen S. 132 und meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 148 und 151.