



Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)
Titel: **Der Briefwechsel zwischen Lagrange
und Euler**
Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik /
Historisch-literarische Abteilung.
Band 23 (1878),
Seite 1 – 21.
Signatur UB Heidelberg: L 6::23.1878

Ende 1872 wurden im Archiv der Petersburger Akademie ein Dutzend Briefe Lagranges an Euler entdeckt. Cantor beschreibt diese Briefe, die Lagrange zwischen 1754 und 1762 an Euler gerichtet hatte.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXIII. Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1878.

Historisch-literarische Abtheilung.

Der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler.

Von
MORITZ CANTOR.

Als Paul Heinrich von Fuss im Jahre 1843 im Auftrage der Petersburger Akademie die beiden stattlichen Bände herausgab, welche unter dem Titel *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle* historisch unschätzbare Briefe von Euler, von Goldbach, von verschiedenen Mitgliedern der Gelehrtenfamilie Bernoulli u. s. w. enthalten, da stellte er auf Seite XXXV der Vorrede die mögliche Erscheinung auch noch eines dritten Bandes in Aussicht. Zu diesem Zwecke hoffe er durch Vermittelung von C. G. J. Jacobi, der für diese Veröffentlichung — er hätte sagen können: für Alles, was auf die Geschichte der Mathematik sich bezog — das lebhafteste Interesse an den Tag legte, in Besitz einer ganzen Sammlung von Briefen Euler's an Lagrange zu gelangen, damals das Eigenthum des unermüdlichen, in seinen Mitteln nicht sehr wählerischen Sammlers Libri. Jener 3. Band ist bekanntlich nicht erschienen. Dafür kamen 1862 die *Opera postuma* Euler's heraus nach 1844 in unerwarteter Weise entdeckten Manuscripten. Wieder war es Paul Heinrich von Fuss, dem die Petersburger Akademie den Auftrag erteilt hatte, den Druck zu überwachen, und nach dessen 1855 erfolgtem Tode trat Nicolaus von Fuss in die Stelle des Bruders. Im 1. Bande der *Opera postuma* S. 555—588 befinden sich 18 Briefe Euler's an Lagrange aus den Jahren 1755—1775, welche der Herausgeber, wie es in der Vorrede S. V heisst, zu anderem Zwecke gesammelt hatte. Jenes vorerwähnte Libri'sche Exemplar war dazu allerdings nicht benutzt worden. Dasselbe ging nämlich am 17. Januar 1876 in den Besitz des Fürsten Boncompagni in Rom über, dessen freundlichen Mittheilungen wir die Thatsache entnehmen, dass die Libri'schen Briefe keineswegs die Originalien, sondern nur Abschriften seien, während dem Abdruck in den *Opera postuma* die Originalien selbst zu Grunde gelegen haben müssen. Das beweisen zwei durch die Heraus-

geber der *Opera postuma* beigelegte Anmerkungen, von denen gleich noch die Rede sein wird. Wie und wann zwischen 1843 und 1862 die Originalbriefe nach Petersburg kamen, wohin sie dann gelangten, ist zweifelhaft. Am Wahrscheinlichsten dürften sie sich unter dem Nachlasse Lagrange's befinden, welcher Eigenthum der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften zu Paris ist und nunmehr zur Besorgung der Gesamtausgabe von Lagrange's Werken unter der Leitung von Herrn J. A. Serret dient.

Waren indessen die Briefe Euler's an Lagrange für das mathematische Publikum seit 1862 im Abdrucke vorhanden, so verhielt es sich ganz anders mit den Briefen Lagrange's an Euler. Sie schienen verloren, bis Professor Somof (der Wissenschaft am 8. Mai 1876 entrissen) Ende 1872 wenigstens einen Theil derselben in dem Archive des Konferenzsaales der Petersburger Akademie entdeckte. Vier Briefe gehörten einem Convolute an, welches die Aufschrift trägt: L. Euler's Briefwechsel 1749 bis 1755, sieben Briefe einem zweiten Convolute mit der Aufschrift: L. Euler's Briefwechsel 1756 bis 1766. Sie gehören also sämmtlich der Zeit an, zu welcher Euler sich in Berlin, Lagrange in Turin aufhielt, und entsprechen den zehn aus Berlin datirten Briefen Euler's in den *Opera postuma* I S. 555—568, welche in einer Note zu S. 556 als von Euler eigenhändig geschrieben bezeichnet werden. Die acht aus Petersburg datirten Briefe (*Opera postumum* I S. 568—588) sind dagegen, einer zweiten auf S. 568 befindlichen Anmerkung zufolge, von der Hand derjenigen Schüler Euler's, die seit seiner Augenkrankheit ihm Secretärsdienste zu leisten pflegten, Joh. Albert Euler, J. A. Lexell, W. L. Krafft und Nicolaus Fuss.* Die Briefe Lagrange's an Euler aus diesem zweiten Zeitraume sind noch nicht wieder aufgefunden worden. Ob Spuren von ihnen in Paris nachweisbar sind, ist bei der fast übergrossen Geheimthuerei des dortigen Herausgebers für's Erste nicht zu ermitteln. Nachdem Fürst Boncompagni von dem Dasein der genannten elf Briefe durch eine Mittheilung von Prof. Somof von Ende November 1872 Kunde erhalten hatte, beschloss er, die Veröffentlichung derselben sich angelegen sein zu lassen, und so haben wir jetzt deren photolithographische Wiedergabe vor uns unter dem Titel: *Lettres inédites de Joseph Louis Lagrange à Leonard Euler tirées des archives de la salle des conférences de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg et publiées par B. Boncompagni. Saint-Petersbourg MDCCCLXXVII*. Ein ziemlich ausführlicher Bericht über diese nach Form und Inhalt gleich hervorragende

* Diese beiden Anmerkungen, auf die vorher zum Beweise, dass der Abdruck in den *Opera postuma* auf den Originalbriefen beruhe, abgehoben wurde, finden sich nämlich nicht auch in der Libri'schen Abschrift, aus der die Briefe folglich nicht entnommen sein können, wie Fürst Boncompagni uns auf Anfrage freundlichst bestätigte.

und den Förderer der Wissenschaft, der sie veranstaltete, auf's Neue ehrende Veröffentlichung ist bereits am 15. März 1877 durch Herrn Angelo Genocchi der Turiner Akademie vorgelegt worden und in deren *Atti Vol. XII* zum Druck gekommen, in ähnlicher Weise, wie derselbe Verfasser 1869 im 4. Bande der *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino* über eine dem *Bulletino Boncompagni* von 1868 entnommene Abhandlung von Prof. Placido Tardy berichtete, deren Gegenstand die Erstlingsabhandlung von Lagrange (sein Brief an den Grafen Fagnano) bildete, und 1874 im 9. Bande der *Atti* über einige andere Briefe des Lagrange. So sehr wir die Gelehrsamkeit und den Scharfsinn anerkennen, welche Herr Genocchi so 1869, wie 1874, wie neuerdings an den Tag legte, so gern wir von dem, was er gefunden, in dem Folgenden Gebrauch machen werden, so glauben wir doch unseren Lesern nichts Unwillkommenes zu bieten, wenn wir die ganze Correspondenz zwischen Lagrange und Euler, soweit sie in sich ergänzenden Briefen vorhanden ist, also die elf neu herausgegebenen Briefe von Lagrange und die zehn ersten Briefe Euler's aus den *Opéra postuma* (welche letztere Herr Genocchi gar nicht berücksichtigt hat) in einen Bericht zusammenfassen.

Schicken wir wenige biographische Notizen voraus, die uns klar machen, welches die gesellschaftliche Stellung von Lagrange und von Euler war zur Zeit, als ihr Briefwechsel begann.

Louis de la Grange Tournier wurde am 25. Januar 1736 zu Turin geboren. Er gehörte einer französischen, aus der Touraine übersiedelten Familie an. Nach des Vaters Wunsche begann er mit juristischen Studien, neben welchen er sich dem von der Natur ihm vorgezeichneten Berufe als Mathematiker widmete. Die Werke Euklid's, mit denen er sich zuerst bekannt machte, gaben ihm zunächst eine Vorliebe für die synthetischen Methoden, welche er den algebraisch-analytischen vorzog, bis ihm eine Abhandlung von Halley die Kraft dieser letzteren Methoden enthüllte. Nun eignete er sich, ein 17jähriger Jüngling, ohne fremde Beihilfe den Inhalt der Schriften der Newton, Bernoulli, Euler, D'Alembert an und bildete sich so zu dem grossen Analytiker aus, als welchen die Mathematik und die mathematische Physik ihn verehren. Ende Juni 1754 war er noch nicht ganz 18½ Jahr alt, hatte er noch Nichts veröffentlicht.

Leonhard Euler, geboren am 15. April 1707 in Basel, war im Juni 1754 etwas über 47 Jahre alt. Sein Sohn Albert Euler, ein Jahr älter als Lagrange, trat eben in dem Jahre 1754 durch eine von der Göttinger Societät mit dem Preise gekrönte Abhandlung über die Art und Weise, bei Wassermühlen den grössten Nutzeffect zu erzielen, in die wissenschaftliche Laufbahn ein, den sieggewohnten Fusstapfen des Vaters folgend. Leonhard Euler selbst hatte den ersten Petersburger Aufent-

halt hinter sich, war seit 1744 Director der mathematischen Classe der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, in welcher Stellung er bis 1766 verblieb, worauf Lagrange sein Nachfolger wurde. Ausser zahlreichen Abhandlungen hatte er schon seine Mechanik (1736—1742), seine Einleitung in die Analysis des Unendlichen (1748), seine *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1741), sämmtlich in lateinischer Sprache, durch den Druck bekannt gemacht.

Auf der einen Seite sehen wir also einen hochberühmten Gelehrten in der vollen Kraft seiner von Europa bewunderten Leistungen, auf der andern Seite einen unbekannten Anfänger, dessen Lebensjahre ihn fast noch zum Knaben stempeln würden, wenn die Reife seiner Gedanken ihn nicht als Mann bezeichnete.

1. Am 28. Juni 1754 richtete Lagrange seinen ersten Brief an Euler. Die Jahreszahl ist zwar nicht beigelegt, aber unzweifelhaft hat Herr Genocchi mit Recht angenommen, sie könne nur 1754 gewesen sein. An 1753 etwa zu denken, verbietet neben einem noch zu erwähnenden Umstande das damals allzujugendliche Alter des Briefstellers, und 1755 ist aus anderen Gründen unmöglich. Der bekannte Brief an Fagnano nämlich, welcher, durch den Druck vervielfältigt, die erste Veröffentlichung von Lagrange und zugleich seine einzige Veröffentlichung in italienischer Sprache bildet, rührt vom 23. Juli 1754 her, und der Brief an Euler, der Hauptsache nach mit jenem übereinstimmend, wäre gewiss nicht geschrieben worden, wenn Lagrange statt seiner ein gedrucktes Exemplar hätte überreichen können, ganz abgesehen davon, dass Lagrange noch 1754 erfuhr, seine vermeintliche Entdeckung sei nicht neu, dass er darüber die weitere Beschäftigung mit mathematischen Gegenständen fast verschworen und somit sicherlich nicht ein halbes Jahr später noch darüber schreiben mochte, wie er es in dem Briefe an Euler gethan hat. Es handelt sich um die Vergleichung der beiden Formeln, welche den n^{ten} Differentialquotienten des Productes $u.v$ und die n^{te} Potenz der Summe $u+v$ darstellen, um den Nachweis der Identität der dabei auftretenden Coefficienten, um die Bemerkung, dass die Vertauschung von n mit $-n$ die Differentiation in eine Integration übergehen lasse. Gelegentlich des speciellen Falles, der in der Reihe

$$\int y \, dx = x \cdot y - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + \dots$$

sich kundgiebt, fragt Lagrange, ob das nicht die Reihe sei, welche schon längst Leibnitz angegeben habe? Auch in dem gedruckten Briefe an Fagnano stellt Lagrange eine auf diese Reihe bezügliche Frage, nur heisst sie dort, und mit Recht, ob die Reihe nicht die des Johann Bernoulli sei, welcher sie im Novemberhefte 1694 der *Acta Eruditorum* veröffentlicht habe? Die besondere Reihe ist in der That Eigenthum von Johann Bernoulli und an dem genannten Orte zuerst mitgetheilt.

Leibnitz war etwas später, im Mai 1695, auf die Uebereinstimmung zwischen Differentiation und Potenzirung aufmerksam geworden und hatte die obwaltende Analogie unter der Voraussetzung ganzer positiver Werthe von n im I. Bande der *Miscellanea Berolinensia* 1710 zur allgemeinen Kenntniss gebracht, während die von jener Voraussetzung uncingeschränkte Formel seit 1745 in dem *Commercium epistolicum*, d. h. dem Briefwechsel zwischen Leibnitz und Johann Bernoulli, gedruckt die vermeintliche Entdeckung Lagrange's vorwegnahm. Lagrange erfuhr diese für den strebsamen Anfänger so peinliche Thatsache, wie bereits bemerkt, noch in dem Jahre 1754, aber nicht durch Euler. Dieser hat nämlich, wie aus der Beantwortung des zweiten Briefes hervorgeht, auf den ersten gar Nichts erwidert, weil Lagrange versäumt hatte, eine Adresse anzugeben, an die man ihm schreiben könne. So bemerkt ihm Euler erst unter dem 6. September 1755, dass in dem Leibnitz-Bernoulli'schen Briefwechsel, wie er meine, der Gegenstand schon erörtert sei, und auf eine zweite Frage, ob es denn wahr sei, dass Wolf gestorben, giebt er natürlich in so spätem Briefe gar keine Antwort. Wir berühren diese Frage auch nur deshalb, weil deren frühester möglicher Zeitpunkt im Einklange steht mit der durch Herrn Genocchi vorgeschlagenen Datirung des Briefes und letztere dadurch bestätigt. Christian von Wolf, damals ein berühmter Mann, starb nämlich im April 1754 in Halle. Die Erkundigung nach seinem Tode hat also nur im Juni 1754 einen bestimmten Anhalt.

2. Nach mehr als Jahresfrist, am 12. August 1755, wandte Lagrange sich in einem neuen Briefe an Euler und gab diesmal den Namen eines Turiner Bankiers, A. Durand, an, unter dessen Adresse er dringend eine Antwort erbittet. Mit diesem Schreiben beginnt die Geschichte von Lagrange's bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiete der Variationsrechnung. Lagrange's erste gedruckte Abhandlung über dieses Capitel der Mathematik findet sich in dem 1762 erschienenen II. Bande der *Miscellanea Taurinensia* und führt den Titel: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des formules intégrales indéfinies*. In dem IV. Bande derselben Sammlung von 1769 vertheidigt Lagrange seine Methode gegen Angriffe von Fontaine und Anderen in dem Aufsätze: *Sur la méthode des variations*, in welchem er nach einigen Einleitungsworten erklärt: diese Methode, deren Name „Variationsrechnung“ von Euler passend gewählt sei, habe er eben jenem grossen Geometer bereits 1755 mitgetheilt und dessen Zustimmung sich erfreut. Ja, der Aufsatz von 1762 sei gewissermassen auf Euler's Rath geschrieben, da dieser in einem Briefe vom 2. October 1759 ihm mittheilte, er habe nun auch weitere Untersuchungen auf dem gemeinsamen Gebiete angestellt, welche er aber, um Lagrange's Ruhm nicht im Wege zu stehen, zurückhalte, bis dieser erst seine Methode bekannt

gemacht haben werde. Diese Stelle war schon F. Giesel in seinem Torgauer Programm von 1857: „Geschichte der Variationsrechnung, I. Thl.“ nicht entgangen. Unter Anmerkung 98 ist sie abgedruckt. Heute besitzen wir nun die Briefe selbst, in welchen Lagrange dem Verfasser der *Methodus inveniendi etc.* die später so wichtig gewordene Erfindung des Zeichens δ zur Unterscheidung der Variationen von gewöhnlichen Differentiationen und die Anwendung desselben mittheilt. Der Brief vom 12. August 1755 insbesondere liest sich wie ein Excerpt aus der Abhandlung von 1762, wenn wir nicht wüssten, dass er derselben um 7 Jahre vorhergeht. Die drei allgemeinen Fälle $\int Z$ (so schreibt Lagrange auch noch in den *Leçons sur le calcul des fonctions* von 1806 S. 437 und häufiger, ohne dass ein Differential angegeben wäre, nach welchem integriert werden soll) zu einem Maximum oder Minimum zu machen, je nachdem Z nur die Veränderlichen x, y und die Ableitungen von y , oder ausserdem noch eine Integralfunktion Π von einem andern, in Bezug auf seine letzten Bestandtheile dem Z ähnlich zusammengesetzten (Z) enthalten soll, worauf $\delta(Z)$ entweder von $\delta\Pi$ frei sein oder dasselbe enthalten kann, werden wie in dem *Essai d'une nouvelle méthode* unterschieden und unter Anwendung fast der gleichen Buchstaben in allgemeiner Weise behandelt. Im Aufsätze steht nur Z' , wo im Briefe (Z) geschrieben ist. Besondere Beispiele, sagt Lagrange, könne er lösen, aber er geht für's Erste nicht darauf ein. Euler antwortete unter dem 6. September 1755 und äusserte die entschiedenste Anerkennung der neuen Methode, in welcher er einen bedeutenden Fortschritt gegenüber von seinen eigenen Forschungen erkenne. Bemerkenswerth ist etwa, dass Euler das $\int Z$ statt $\int Z dx$ ausdrücklich hervorhebt, um es dadurch zu erläutern, dass er beifügt, Lagrange betrachte eben dx als Einheit.

3. Euler's Antwort traf zu einer für Lagrange ereignissvollen Zeit ein. Der erst $19\frac{1}{2}$ Jahre alte Gelehrte war zum Professor an der Artillerieschule zu Turin ernannt worden. Die unentbehrlichsten Vorbereitungen für den ihm übertragenen Unterricht verzögerten seine Erwiderung etwa 5 Wochen lang, bis er dann am 20. November 1755 die Musse fand, Euler neue Fortschritte der Variationsrechnung mitzutheilen, insbesondere ihm auseinanderzusetzen, wie weit die Aufgabe der Brachistochrone in seinen Händen sich entwickelt hatte. Euler hatte bei seinen Arbeiten über dieses Problem, welches bereits geschichtliche Wichtigkeit besass, gleich seinen Vorgängern nur den Fall betrachtet, dass ein materieller Punkt unter dem Einflusse der Schwere in kürzestmöglicher Zeit von einem Punkte A nach einem andern Punkte B gelangen sollte. Lagrange liess dagegen den materiellen Punkt von A aus nach irgend einem Punkte einer gegebenen Curve Φ fallen und fand

auch unter dieser Voraussetzung als Brachistochrone eine Cykloide, welche die Curve Φ senkrecht durchschneide. Ferner berücksichtigte Lagrange die Voraussetzung, dass der fallende Punkt in kürzester Zeit von A über C nach B gelangen sollte. Hierbei gerieth er in einen Irrthum. Er kam nämlich zu dem Ergebnisse, die gesuchte Curve besitze die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{dx^2} = 0$$

oder nach einmaliger Integration die Differentialgleichung

$$\frac{d \left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{dx} = \frac{1}{a^{3/2}},$$

welche nur bei $a = \infty$ die Cykloide bedeutet. Der Irrthum Lagrange's wird offenbar, wenn man in der Integration weiter fortfährt, wodurch die Gleichung

$$y = c + \int \sqrt{\frac{x(x+b)^2}{a^3 - x(x+b)^2}} dx$$

entsteht, die Curve der Brachistochrone mithin durch ein elliptisches Integral ausgedrückt wäre, während man weiss, dass der fallende Punkt von A nach C durch eine Cykloide gelangt, welche diese beiden Punkte folglich enthält und als dritte Bedingung in A die Richtung der Schwere als Berührende besitzt. Macht man alsdann die Voraussetzung, dass in C eine Veränderung der einmal erlangten Geschwindigkeit nicht statfinde, so wird der weitere Fall von C nach B durch eine zweite Cykloide erfolgen, welche diese beiden Punkte enthält und welche, rückwärts bis zur gleichen horizontalen Höhe mit A fortgesetzt, dort ebenfalls die Richtung der Schwere zur Berührungslinie hat. Diese Auflösung, deren Grundzüge etwa bei *Lindeloef*, *Leçons de calcul des variations*, Paris 1861, pag. 226 (über die Brachistochrone mit Anfangsgeschwindigkeit) und bei *Todhunter*, *Researches in the calculus of variations, principally on the theory of discontinuous solutions*, London and Cambridge 1871, pag. 127, § 143 (über die Brachistochronen durch drei Punkte) verglichen werden mögen, entging übrigens dem Scharfblicke Euler's nicht. In seinem sogleich zu erwähnenden Antwortsschreiben vom 24. April 1756 sagt er ausdrücklich: „Was die Brachistochronen durch drei oder mehrere Punkte betrifft, so möchte ich glauben, sie seien keine stetig fortgesetzten Curven, sondern von jedem Punkte zum nächsten müsse ein Cykloidenbogen durchlaufen werden, damit die Zeit des Falles von dem einen Punkte zum andern ein Minimum werde; durchläuft nämlich der Körper diese einzelnen Abschnitte so schnell als möglich, so wird er unzweifelhaft auch die ganze Curve in der kürzesten Zeit vollenden.“ Lagrange selbst muss der Unrichtigkeit seiner Vermuthung sich auch bewusst geworden sein, denn

in einem Briefe vom 19. Mai 1756 bemerkte er mit Euler's Erläuterung der verschiedenen Umformungen der betreffenden Differentialgleichungen sich durchaus einverstanden und in zur Veröffentlichung bestimmten Arbeiten über Variationsrechnung kam er auf den Gegenstand niemals zurück. Sein Irrthum beruhte nämlich darauf, dass er aus der Gleichung $L=0$, welche die Differentialgleichung der die Eigenschaften eines Grössten oder Kleinsten besitzenden Curve darstellt, durch weitere Differentiationen, welche bei Gelegenheit factorenweiser Integrationen eintreten, die an sich berechtigten und zur Einführung von Bedingungen auch heute dienenden Folgerungen $\partial L=0$, $\partial^2 L=0$ u. s. w. zog, dann aber ohne Weiteres die Integration von $\partial L=0$, beziehungsweise von $\partial^2 L=0$ vornahm, wodurch Glieder neu hinzukommen, welche der eigentlichen Aufgabe nicht angehören, und das hatte ihm Euler in seiner Antwort bemerklich gemacht.

4. Ein weiterer Brief Lagrange's muss etwa im Monat März 1756 geschrieben worden sein, der jedoch in der Sammlung fehlt. Euler beginnt wenigstens das Antwortschreiben vom 24. April mit der Empfangsanzeige zweier Briefe, deren erster, „am Ende des verflossenen Jahres“ eingetroffen, mit dem Briefe vom 20. November 1755 sicherlich identisch ist, während der zweite, „neuerdings“ geschriebene offenbar als uns heute fehlend bezeichnet werden muss. Ueber den Inhalt desselben ist aus Euler's Antwort ebenso wenig, wie aus Lagrange's späteren Briefen irgend eine Andeutung zu entnehmen. Euler zeigte die erhaltenen Briefe dem Präsidenten der Berliner Akademie, Maupertuis, der bekanntlich von Friedrich dem Grossen eigens zu diesem Amte nach Berlin berufen, demselben bis zu seinem 1759 erfolgenden Tode vorstand, auch nachdem er Berlin wieder verlassen hatte. Nach dem Tode von Maupertuis blieb die Stelle nach erfolglosen Unterhandlungen mit D'Alembert unbesetzt, d. h. der König behielt sich das Ernennungsrecht der Mitglieder und die Oberleitung der Akademie von nun an selbstständig vor. Im Frühjahr 1756 dagegen war die Machtvollkommenheit des Präsidenten der Akademie eine ziemlich unumschränkte, auch über den unmittelbaren Kreis seiner Befugnisse hinaus. Das Urtheil über Maupertuis hat im Laufe der Jahre sehr gewechselt. Während er selbst seinen Ruhm über die Maassen ausposaunte und gläubige Zuhörer fand, ging Lalande in dem von ihm bearbeiteten IV. Bande des Montucla'schen Geschichtswerkes so weit, die Erzählung von der lappländischen, unter der Leitung von Maupertuis ausgeführten Gradmessung mit den Worten einzuleiten: „Maupertuis wusste den Angenehmen zu machen, Liedchen zu verfertigen, Guitarre zu spielen, und das verhalf ihm zu dem von ihm gewünschten Auftrage.“ Die Wahrheit dürfte in der Mitte liegen. Ein Mann, für welchen Euler und Lagrange bei jeder Gelegenheit die höchste Achtung an den Tag legten, während der Erstere wenigstens

ihn in vieljährigem engem Verkehr in Berlin genau kennen lernen musste, kann unmöglich eine zur Tagesberühmtheit aufgeblähte Unbedeutendheit und nichts Weiteres gewesen sein. Jedenfalls wusste er aus den wenigen Briefen, welche Euler ihm von Lagrange vorlegte, ein richtiges Urtheil über den jungen Gelehrten sich zu bilden. Euler mag ja an empfehlenden Worten es nicht haben fehlen lassen, aber auch die ganze Richtung von Maupertuis führte den begeisterten Vertreter des Principis der kleinsten Action in der Mechanik dazu, an Arbeiten besonderen Geschmack zu finden, welche bestimmt waren, die Lehre vom Grössten und Kleinsten weiter zu führen und deren Anwendung auf mechanische Fragen zu vermitteln. In Maupertuis erwachte sofort die Begierde, Lagrange nach dem zu wissenschaftlichem Leben sich mächtig aufraffenden Berlin zu ziehen, und in seinem Auftrage stellte Euler die unmittelbare Anfrage, ob Lagrange nicht geneigt sein würde, seine Turiner Stellung mit einer andern in Deutschland, zu welcher Maupertuis ihn dem König vorschlagen wolle, zu vertauschen, während er ihm zugleich die baldigstmögliche Aufnahme in die Berliner Akademie in Aussicht stellen durfte.

5. Eine solche Berufung konnte auf schleunige Antwort, wenn nicht auf alsbaldige Annahme rechnen. An ersterer liess Lagrange es nicht fehlen. Das Datum seines nächsten Briefes vom 19. Mai 1756, nur 25 Tage später als das Datum des Euler'schen Briefes, stellt nämlich ungefähr die Dauer des damaligen Postverkehrs zwischen Berlin und Turin dar, in Uebereinstimmung mit den 25 Tagen vom 12. August bis zum 6. September 1755, in weiterer Uebereinstimmung mit den 28 Tagen, welche zwischen einem Euler'schen Briefe vom 27. October und einer Lagrange'schen Antwort vom 24. November 1759 liegen. Lagrange erklärte sich bedingungsweise bereit, dem Rufe Folge zu leisten, vorausgesetzt nämlich, dass die ihm anzubietende Stellung sich als hinreichend ehrenvoll und angenehm erweisen würde, um ihretwegen eine mit Aussicht auf Aufbesserung verbundene Professur an der Artillerieschule aufzugeben und das Vaterland zu verlassen; er wisse in solchen Dingen nicht Bescheid, aber Euler sei ja selbst in ähnlicher Lage, und so bitte er diesen um wohlmeinenden Rath, wenn ein bestimmtes Anerbieten ihm gestellt werde. Jedenfalls danke er Maupertuis heute schon für die bevorstehende Ernennung zum Akademiker, durch welche er ihn unverdientermassen ehren wolle, und für die gütige Absicht, ihn dem König für Weiteres zu empfehlen. Es ist nicht ohne Interesse, dass das Wort „unverdientermassen“ erst nachträglich durch Lagrange in den Brief hineincorrigirt über der Zeile steht. In diesem Briefe findet sich auch die erste Erwähnung einer Mechanik, welche Lagrange zum Zwecke seiner Vorlesungen schreibe; von demselben Buche ist als von einem bereits vollendeten in einem Briefe vom 24. November 1759 die Rede. Wir sind wohl berechtigt, in dieser Mechanik einen ersten Entwurf zur

Mécanique analytique zu erkennen, welche in erster Ausgabe 1788 erschien. Ob Spuren jenes ersten Entwurfes selbst sich irgendwo nachweisen lassen, ist bis jetzt nicht bekannt. Eines wissenschaftlichen Inhaltes entbehrt der Brief vom 19. Mai auch nicht gänzlich. Euler hatte nämlich am 24. April ein interessantes Problem angeregt. Wenn ein schwerer Punkt, der auf derselben Horizontallinie mit dem Anfangspunkte einer Vertikalen liegt, sich durch eine Viertelellipse nach jener Vertikalen hinbewegen genöthigt ist, deren halbe grosse Axe die Entfernung der genannten beiden Punkte darstellt, während die halbe kleine Axe auf der Vertikalen selbst abgeschnitten ist, wie gross ist ebendiese halbe kleine Axe zu wählen, damit die Bewegungszeit des fallenden Punktes ein Minimum werde. Euler selbst gab als durch Annäherung gefundenen Werth $b = a\sqrt[3]{8}$, fragte aber zugleich nach der Möglichkeit einer directen Auflösung. Lagrange stellt nun die Möglichkeit einer anderen als näherungsweise verfahrenen Auflösung in Abrede, weil die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Grössen a und b durch ein Integral vermittelt sei, dessen Auswerthung nur in Reihenform möglich sei. Er bezieht sich dabei auf Euler's Abhandlung im 7. Bande der Petersburger Akademie, womit offenbar die Abhandlung gemeint ist: *De infinitis curvis ejusdem generis sive methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis* (Comment. Acad. Petrop. VII, 1740). Lagrange behielt sich vor, auf den Gegenstand zurückzukommen, was aber nicht geschehen zu sein scheint. Inzwischen war Maupertuis von Berlin abgereist und hielt sich in St. Malo in der Bretagne auf. Mit ihm musste Euler sich wegen des geschäftlichen Theiles des Briefes in schriftliche Verbindung setzen und so dauerte es bis zum 2. September 1756, bevor er Lagrange in einem Billet anzeigen konnte, dass er an demselben Tage zum auswärtigen Mitgliede der Berliner Akademie unter allgemeiner Zustimmung ernannt worden sei und gleichzeitig mit dieser Mittheilung auch das betreffende Diplom erhalten werde; die Adresse von Maupertuis wird zugleich beigefügt mit der Aufforderung, diesem ihm so wohlwollenden Manne einen Dankbrief zu schreiben.

6. Die Ernennung Lagrange's zum auswärtigen Akademiker war bereits in die beginnenden Wirren des siebenjährigen Krieges gefallen, da schon im August der Einmarsch der Truppen König Friedrich's in Sachsen, am 10. September die Einnahme von Dresden erfolgte. Es ist kaum zweifelhaft, dass in diesem Kriegsausbruche der Grund zu suchen ist, weshalb die zweite Hälfte des Planes, den Maupertuis zu Gunsten Lagrange's gefasst hatte, die persönliche Anstellung in Preussen, damals unerfüllt blieb und erst 1766 sich verwirklichte, als Euler zum zweiten Male nach Petersburg übersiedelte und Lagrange statt seiner zum Director der mathematischen Classe der Berliner Akademie mit dem für jene Zeit sehr hohen Jahresgehalte von Thlr. 1500 ernannt wurde.

Sogleich mit Beginn des Krieges fand sich der Postverkehr unterbrochen, welcher (wir haben oben gesehen, mit welchem Zeitaufwand in regelmässigen Verhältnissen) zwischen Italien und dem deutschen Norden stattfand. Der Kaufmann, welcher den Briefwechsel zwischen Euler und Lagrange zu vermitteln pflegte, machte Letzteren, wie wir in einem Briefe vom 28. Juli 1759 lesen, auf die an Unmöglichkeit grenzende Schwierigkeit, einen Brief zu besorgen, aufmerksam, und so unterblieb sogar eine Danksagung Lagrange's an Euler für dessen freundliche Bemühungen, wenn sie nicht verloren gegangen ist; unter den vorhandenen Briefen finden wir sie nicht. Auch Ende Juli 1759 war die Verbindung mit Berlin noch keineswegs eine leichte, aber Lagrange war es doch gelungen, einen Weg auszuspiiren — welchen? sagt er uns hier nicht —, um einen Brief und ein Buch an Euler zu schicken. Das Buch war kein anderes, als der erste Band der vermischten Schriften der Turiner Gesellschaft, jenes gelehrten Freundeskreises, der später (1762) sich den Namen der königl. Gesellschaft von Turin beilegen durfte, und unter welchem Lagrange von Beginn an eine durch Quantität, wie durch Qualität seiner Beiträge gleich hervorragende Rolle spielte. Wer für die geschichtliche Entwicklung der Mathematik und der mathematischen Physik nur irgend Interesse besitzt, muss die *Miscellanea Taurinensia* im Original studiren. Wir können und müssen uns darauf beschränken, die Titel der einzelnen Abhandlungen zu nennen, denen wir wenige Worte beifügen. Zunächst erscheinen zwei Aufsätze von Lagrange, von denen er mit, wie Herr Genocchi schon bemerkt hat, sehr übel angebrachter Bescheidenheit sagt, sie seien der Aufmerksamkeit Euler's nicht würdig. Euler hatte noch in seiner Differentialrechnung von 1755 die Lehre aufgestellt, das Maximum oder Minimum einer Function von zwei Veränderlichen x und y beruhe auf der Auflösung der beiden Gleichungen $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0$ nebst dem Negativ- oder Positivsein der zweiten Differentialquotienten. Dass zwischen den zweiten Differentialquotienten, welche partiell nach jeder der beiden Veränderlichen oder nach beiden nacheinander genommen werden, eine Ungleichung stattfinden muss, hat erst Lagrange in dem ersten Aufsätze von 1759: *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* gezeigt und damit die Lehre um einen so bedeutsamen Schritt vorwärts gebracht, dass auch die neuesten Lehrbücher der Differentialrechnung kaum Weiteres enthalten. Eine nur um Weniges geringere Bedeutsamkeit ist dem zweiten Aufsätze: *Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies qui contient la théorie des suites récurrentes* beizulegen. Lagrange behandelt hier Differenzengleichungen nach Analogie linearer Differentialgleichungen durch Einsetzung einer Exponentialform für die abhängig Veränderliche und hat damit zuerst einen geistigen Zusammenhang zwischen Differen-

zengleichungen und Differentialgleichungen nachgewiesen. Der dritte Aufsatz, auf welchen allein Lagrange Euler mit einer gewissen Selbstbefriedigung hinweist, enthält die berühmten *Recherches sur la nature et la propagation du son*, die in dem zweiten und dritten Bande der Turiner Abhandlungen fortgesetzt wichtige Beiträge zur damals noch ganz neuen Lehre von den periodischen Reihen bildeten.* Ausser auf diese Untersuchungen, deren Bedeutung für Euler schon darin liegen musste, dass hier von einem ganz andern Gesichtspunkte aus, als er selbst zum Ausgange gewählt hatte, fast die gleichen Ergebnisse gewonnen und dem gemeinsamen wissenschaftlichen Gegner D'Alembert frische Einwürfe entgegengehalten wurden, machte Lagrange seinen Correspondenten auch auf die Arbeit eines zu den schönsten Hoffnungen berechtigenden Schülers der Artillerieschule aufmerksam, auf die *Reflexions sur les quantités imaginaires* von Daviet de Foncenex. Wohl durfte er das, denn auch hier war mit unbestreitbarem Talent Neues entwickelt, auch hier begegnete Euler auf jeder Seite sein eigener Name, begegneten ihm Angriffe gegen D'Alembert, freilich in höflichster Form, aber immerhin Angriffe, offenbar der Mehrzahl nach von Lagrange beeinflusst, in einem Falle, wo es sich um ein bei der Anziehung einer sphärischen Oberfläche auf einen Punkt auftretendes Paradoxon handelte, sogar von Lagrange unterschrieben, welcher diese Polemik als Anmerkung zu dem Aufsatze seines Schülers führte. So lässt sich dem ersten Bande der Turiner Abhandlungen als Gesamturtheil das Lob ertheilen, Neues und Wichtiges in überraschender Menge veröffentlicht zu haben, wenn man zugleich den leisen Tadel hinzufügt, es sei mit einer gewissen Vorliebe auf Streitpunkte eingegangen, auch wo eine Nothwendigkeit dazu nicht vorlag, und eine Verehrung Euler's trete neben einer Abneigung gegen D'Alembert nur um so schärfer hervor. Endlich fragt Lagrange in dem Briefe vom 28. Juli 1759 nach dem gegenwärtigen Aufenthalt von Maupertuis. Er konnte noch nicht ahnen, dass dieser gerade einen Tag vorher, am 27. Juli, in Basel gestorben war, und beabsichtigte, ihm und Euler, beziehungsweise der Berliner Akademie, eine grössere Arbeit handschriftlich vorzulegen, welche die Variationsrechnung und deren Anwendung auf Mechanik, letztere Wissenschaft vollständig aus dem Princip der kleinsten Action entwickelt, zum Gegenstande haben sollte. Vielleicht könne, so meint er, die Schrift in Berlin erscheinen, was vielen Druckschwierigkeiten vorbeugen würde; doch behält er sich vor, über diesen Gegenstand nochmals zu schreiben, möglicherweise bevor noch dieser Brief angekommen sein werde.

* Vergl. über die Stellung dieser Aufsätze von Lagrange zu denen von Taylor, D'Alembert, Euler, Dan. Bernoulli die Habilitationsschrift Riemann's: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Riemann's gesammelte Werke S. 213—218.

7. Lagrange führte dieses Vorhaben am 4. August bereits aus. Durch einen Schreibfehler ist zwar das Datum in den 4. August 1758 verwandelt und der Brief deshalb in der photolithographirten Sammlung dem vom 28. Juli 1759 vordruckt, allein Herr Genocchi hat mit grossem Scharfsinn diesen Irrthum erkannt und in ihm die höchst einfache Lösung mancher sonst unerklärlichen Dinge geliefert. Nicht blos dass der zugesagte demnächstige Brief fehlen würde; nicht blos dass die einleitenden Worte des Briefes vom 28. Juli nicht verstanden werden könnten, es seien wohl 3 Jahre vergangen, ohne dass ein Briefwechsel möglich gewesen sei; es wäre auch noch die Frage zu beantworten, wieso in einem Briefe vom 4. August 1758 von dem ersten Bande der *Miscellanea Taurinensia* als einem vor wenigen Tagen an Euler abgeschickten die Rede sein konnte, während dieser Band auf dem Titelblatte das Datum MDCCLIX trägt. Wir selbst hatten ursprünglich der vorerwähnten dreijährigen Pause zu Liebe zwar auch einen Schreibfehler oder vielmehr eine Undeutlichkeit in Lagrange's Handschrift angenommen. Da seine Schriftzüge von einer beneidenswerthen Lesbarkeit ziemlich entfernt sind, so vermutheten wir, was ohne zu grossen Zwang möglich ist, in der Jahreszahl 1758 ein schlecht geschriebenes 1756. Dann fielen zwischen dem 4. August 1756 und dem 28. Juli 1759 volle drei Jahre heraus. Aber dann musste die sonst anhaltslose Vermuthung hinzutreten, der Aufsatz über die Schallverbreitung, allerdings mit besonderer Pagination nach S. 146 des Bandes neu beginnend, sei schon 1756 im Drucke vollendet gewesen und erst nach weiteren 3 Jahren mit anderen Aufsätzen, die ihm aus unbekannten Gründen vorgeschickt wurden, zu einem Bande vereinigt worden. Wir geben diese Vermuthung, wie sie bei uns entstanden ist, weil wir Grund haben anzunehmen, dass wir uns in derselben mit einem von uns hochgeschätzten italienischen Gelehrten begegneten, aber wir nehmen keinen Anstand, uns heute zu der viel einfacheren Annahme von Herrn Genocchi zu bekennen, welche mit einer einzigen Hypothese auskommt, wo wir deren zwei bedurften. Einem Briefe, der eine Woche nach einem andern geschrieben ist, eröffnen so mit Recht die Worte: „Vor wenigen Tagen übersandte ich ein Exemplar eines Werkes, welches eine Privatgesellschaft in Turin unter dem Titel: Philosophisch-mathematische Mannigfaltigkeiten an das Licht schickte.“ Lagrange knüpft daran einige Andeutungen über seine Schall-Abhandlung und kommt dann mittelst der Bitte, einen beigeschlossenen Brief an Maupertuis gelangen zu lassen, auf die grosse analytisch-mechanische Arbeit zu reden, welche er, wie er wiederholt betont, am Liebsten in Berlin dem Drucke übergäbe. Er habe die analytische Methode jetzt auch auf Functionen von mehr als zwei Veränderlichen ausgedehnt und sie auch auf die Aufgabe angewandt, das grösstflächige Vieleck unter solchen mit gleichem Umfange aufzufinden. Endlich erbittet er sich

Euler's Antwort auf dem Umwege über Genf, wo der Postdirector Durade die weitere Vermittelung an den Turiner Postdirector, dieser an Lagrange übernehmen werde. Offenbar war dieses der von Schwierigkeiten nicht freie Weg, von welchem im Briefe vom 28. Juli die Rede war. Die Briefe kamen an, und die Antwort Euler's trägt das Datum des 2. October, den Empfang des Buches dagegen war er erst am 27. October in der Lage, anzeigen zu können. Wir übersetzen einige Stellen aus dem Briefe vom 2. October, welche geeignet sind, auf das früher angedeutete persönliche Verhältniss Euler's zu Maupertuis und D'Alembert einiges Licht zu werfen. „Ihr Brief kam nach dem Tode unsers würdigen Präsidenten in meine Hände. Ich bin durch diesen Unfall um so schwerer betroffen, als ich den besten Gönner, den süssesten Freund verliere ... Das Gerücht geht, die Stelle des Präsidenten mit sehr hohem Gehalte sei für D'Alembert bestimmt; ob es in diesem Falle für Sie gerathen ist, Ihr Werk hierher zu schicken, mögen Sie selbst beurtheilen ... Ich freue mich, dass Sie meiner Lösung der schwingenden Saite beipflichten, welche D'Alembert durch verschiedene Nörgeleien zu entkräften versucht hat, und zwar aus dem einzigen Grunde, weil sie nicht von ihm herrührt.“ Alsdann wendet Euler sich zu Lagrange's Andeutungen bezüglich des isoperimetrischen Problems. Er freue sich, durch Lagrange's Bemühungen den Gegenstand jetzt zum Gipfel der Vollkommenheit gebracht zu sehen. Er habe selbst, von Lagrange's Bemerkungen Hilfe empfangend, jetzt eine analytische Lösung niedergeschrieben, welche er aber zurückzuhalten beschlossen habe, bis Lagrange's Untersuchungen der Oeffentlichkeit übergeben seien, um ihm Nichts von dem ihm gebührenden Ruhme zu entziehen. Das sind die ermunternden Worte Euler's vom 2. October 1759, auf welche Lagrange (wie wir unter 2 gesehen haben) im Jahre 1769 zurückkam und von welchen auch unter October 1762 die Rede sein wird. Der Brief schliesst mit der Mittheilung, Euler habe inmitten schwerer Kriegszeiten mit dem Beginn der Ausarbeitung seiner der Petersburger Akademie längst zugesagten Integralrechnung sich beschäftigt. Es handle sich in ihr um die Auffindung von Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen aus ihren Differentialquotienten. Für Functionen von mehr als einer Veränderlichen sei fast Alles neu zu schaffen, und er glaube das Fundament dazu schon gelegt zu haben, ein Ausspruch, welcher geschichtlich bedeusam sein dürfte als erste Aeusserung des Bewusstseins von der grossen Schwierigkeit, aber auch von der grossen methodischen Tragweite der allgemeinen Aufgabe, partielle Differentialgleichungen zu integriren, während bisher zwischen Euler und D'Alembert vornehmlich nur ganz besondere derartige Gleichungen in Frage gekommen waren. In den nächsten Wochen nach dem 2. October erhielt, wie schon bemerkt, Euler den Band der Turiner Abhandlungen, den er rasch genug

las, um am 23. oder 27. desselben Monats bereits an Lagrange darüber schreiben zu können. Jenes Datum nennt Lagrange im zweiten Bande der Turiner Abhandlungen, und wir werden ihm Glauben schenken gegenüber der zweiten Datumsangabe in dem Petersburger Drucke von 1862, der auch sonst keineswegs fehlerfrei scheint. Dieser Brief und alle folgenden, welche wir von beiden Correspondenten besitzen, ist französisch geschrieben. Vorher war der Briefwechsel lateinisch geführt worden, Euler scheint jedoch die lebende Sprache gewählt zu haben, weil und nachdem er aus den gedruckten Abhandlungen Lagrange's ersah, dass dieser Französisch wie eine Muttersprache zu schreiben wusste, eine Eigenschaft, die Euler mit ihm theilte. Es ist begreiflich, dass die nächsten Briefe sich vielfach mit der Theorie des Schalles beschäftigen, dass Euler und Lagrange sich gegenseitig über die Uebereinstimmung ihrer Ansichten freuen und weitere Ausführungen andeuten, die der Hauptsache nach neben Widerlegungen von Einwürfen, welche D'Alembert 1761 in dem ersten Bande seiner *Opuscules mathématiques* veröffentlichte, in Abhandlungen beider Gelehrten im eben genannten zweiten Bande der *Miscellanea Taurinensia* wiederkehren, auf die wir deshalb genauer einzugehen unterlassen. Nur im Vorübergehen bemerken wir, dass im Briefe vom 23. October 1759 Euler sich mit Lagrange darin einverstanden erklärt, dass die durch Rameau beobachteten Obertöne nicht von der schwingenden Saite selbst, sondern von mitschwingenden sonstigen Theilen des Apparates herrühren; dass er des scheinbaren Widerspruches gedenkt, wonach in einer engen Röhre die einmal begonnene Fortpflanzung der Erschütterungen sich nur einseitig fortsetzt, während von Anfang an jede Erschütterung allseitig wirkt, also zwischen primitiven und abgeleiteten Erschütterungen ein Unterschied sich wahrnehmbar macht, zu dessen Erklärung gewisse Anfangsbedingungen ausreichen; dass er endlich bedauert, die Schwingungstheorien nicht auch auf eine nach drei Dimensionen ausgedehnte Luftmasse anwenden zu können, welche doch einzig der Erfahrung entsprechen würde. Man weiss, dass Euler diese Aufgabe kurz darauf gelöst hat und dass wesentlich sie in seiner Abhandlung im II. Bande der Turiner Gesellschaft behandelt worden ist. Am Schlusse des Briefes erzählt Euler, dass er den III. Band seiner Mechanik vollendet habe, aus welchem er als neue folgerichtige Entdeckung die der drei Trägheitsaxen eines sich drehenden Körpers hervorhebt. Auch dieser Brief nahm den Weg über Genf, von wo aus Bertrand ihn weiter beförderte, „ein Freund Euler's, der sich mit sehr grossem Erfolge der Mathematik zugewandt hat“. Offenbar ist der damals 28jährige Louis Bertrand gemeint, der unter Anderen in der Geschichte der Parallelentheorie einen wohlverworbenen Platz einnimmt.

8. Lagrange antwortete am 24. November 1759. Er dankt für die Beurtheilung, welche der I. Band der Turiner Abhandlungen durch Euler

erfahren habe, und stellt für die Mitte des folgenden Jahres einen weiteren Band in Aussicht, der allerdings erst erheblich später, nämlich 1762, die Presse verliess. Euler hatte am 2. October den Wunsch ausgesprochen, dass die freie Vereinigung Turiner Gelehrter sich bald staatlicher Unterstützung erfreuen möge; dieser Wunsch werde, meint Lagrange, am Ersten in Erfüllung gehen, wenn auswärtige Gelehrte ersten Ranges sich der noch jungen Gesellschaft gewogen zeigen. So habe Haller ihnen Beiträge zugesagt, und mit dem gleichen Anliegen wendet sich Lagrange nunmehr an Euler. Bezüglich der Nothwendigkeit, die Schalltheorie im Raume zu erörtern, ist Lagrange mit Euler einverstanden. Von diesem allgemeineren Standpunkte aus werde sich auch wohl die Abnahme des Schalles erklären lassen, die bei bloss linearer Ausdehnung nicht an und für sich eintrete; ob übrigens die Abnahme des Schalles in der That, wie man allgemein annehme, im quadratischen Verhältnisse der Entfernung stattfinde, erscheint Lagrange zweifelhaft. Auf den Druck seiner Arbeiten über Variationsrechnung und Mechanik kommt Lagrange jetzt nach Maupertuis' Tode mit keinem Worte zurück, nur über deren Inhalt sagt er für einen nächsten Brief weitere Aufschlüsse zu und bemerkt am Ende, er habe für seine Schüler Elemente einer Mechanik und einer Differential- und Integralrechnung verfasst. Von der ersteren Schrift war unter 5 die Rede, die letztere ist wenigstens einem Theile nach erhalten, wie Fürst Boncompagni im VI. Bande seines *Bulletino* S. 150 (Jahrg. 1873) nachgewiesen hat. Die Bibliothek des Herzogs von Genua in Turin enthält nämlich eine Handschrift mit dem Titel: *Principj di Analisi Sublime dettati da La Grange alle Reggie Scuole di Artiglieria. Parte prima. Della teoria Algebraica delle Curve.*

9. Schon am 26. December 1759 liess Lagrange einen weiteren Brief nachfolgen, der durchaus der Schalltheorie gewidmet war. Die Untersuchung einer Fortpflanzung der Schallwelle in einem Elementarkegel, dessen Spitze in dem Erschütterungspunkte liegt, war einer der neuen von Lagrange eingeschlagenen Wege, und diesen Fall hatte er soweit erörtert, dass bei ihm die im Briefe vom 24. November noch angezwiefelte Abschwächung im quadratischen Verhältnisse der Entfernungen sich nachweisen liess, ein Gegenstand, der Lagrange übrigens durchaus nicht ganz klar war, wie wir gleich noch zu bemerken Gelegenheit haben werden. Mit Hilfe dieser Elementarkegel setzte er sich Kugeln zusammen, um die Fortpflanzung des Schalles unter der Annahme zu studiren, dass die Wellen als Kugelschalen weiter gehen, wobei die Differential-

gleichung $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial \left(\frac{r}{z} \right)}{\partial z}$ auftrat. Dann verallgemeinerte er noch

diese Differentialgleichung zu der folgenden: $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + mc \frac{\partial \left(\frac{r}{z} \right)}{\partial z},$

deren Integral gleichfalls, und zwar mit Hilfe unendlicher Reihen mit willkürlichen Functionen hergestellt wurde. Je nach verschiedenen Annahmen für m brechen die Reihen ab, doch sind die Andeutungen, welche Lagrange hierüber machte, einigermassen verstümmelt, da, wie wir uns durch Erkundigung beim Herausgeber vergewissert haben, ein Stückchen des Briefes gerade hier fehlt, auf welchem einige zum Verständniss nothwendige Zahlen geschrieben waren. Der Hauptsache nach stellt der ganze Brief sich als auszugsweise Ankündigung von Lagrange's *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son* (Miscell. Taurin. II, 11—172) dar. Neujahrsglückwünsche beschliessen ihn. Am Neujahrstage selbst gab Euler seine Antwort auf den Brief vom 24. November, der kaum zehn Tage in seinen Händen gewesen sein mochte, zur Post. Dieselbe bestand in der Abhandlung, welche als *Recherches sur la propagation des ébranlemens dans une (sic!) milieu élastique* im II. Bande der Turiner Sammlung zu lesen ist, mit wenigen ebendort gleichfalls abgedruckten Begleitzeilen. Wir haben oben schon erwähnt, dass Euler hier die Aufgabe erledigte, vor der er noch am 23. October rathlos stillgestanden war, nämlich die Schwingungstheorie im Raume von drei Dimensionen zu bewältigen.

10. Euler's Beitrag wurde von den Turiner Gelehrten mit Jubel begrüsst, und Lagrange erhielt den Auftrag, dem berühmten Manne den schuldigen Dank zu erstatten. Mancherlei Beschäftigungen, unter welchen sicherlich auch das eingehende Studium der Euler'schen Abhandlung inbegriffen war, verzögerten die Erfüllung des Auftrages bis zum 1. März 1760. Lagrange beginnt damit, auf eine Verwandtschaft der Gleichungen, zu welchen Euler gelangt war, mit solchen, welche der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen angehören, hinzuweisen. So sei die Gleichung der Oberfläche, welche den grössten Raum umfasse,

$$\frac{\partial \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial y} + \frac{1}{a} = 0$$

unter der Voraussetzung, dass z eine Function von x und y sei, und $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ (in der modernen Bedeutung aller dieser Zeichen) gesetzt werden. Dass die Kugel $z^2 = 4a^2 - x^2 - y^2$ dieser Differentialgleichung als particuläres Integral genüge, sieht Lagrange ein; an der Auffindung des allgemeinen Integrals jedoch verzweifle er. Dann kommt er wieder auf die Abschwächung der Schallerschütterungen zurück. Euler war am Schlusse der nach Turin geschickten Abhandlung zu dem Ergebnisse gekommen, dass bei grossen Entfernungen sowohl die Elongation, als die Geschwindigkeit eines erschütterten Lufttheilchens im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen stehen. Lagrange giebt sich den

Folgerungen gefangen, mit welchen auch ein jüngst empfangener Brief von Daniel Bernoulli in Einklang stehe, und erklärt seine frühere anderweitige Behauptung durch einen bei der Integration eingeschlichenen Rechenfehler. Bemerken wir gleich hier, dass Euler unter dem 24. Juni 1760 diesen Zweifeln durch die Erläuterung ein Ziel setzte, die Stärke, mit welcher ein Schall das Gehörorgan treffe, hinge von zwei Factoren ab, von der Grösse der Schwingungen und von der Geschwindigkeit der schwingenden Theilchen; haben also beide ein der Entfernung umgekehrt proportionales Maass, so muss das Product, d. i. die thatsächliche Stärke der Schallempfindung, im Quadrat der Entfernung abnehmen. Eben dasselbe muss auch für das Licht gelten, wenn es aus Schwingungen eines elastischen Mittels besteht, und so erledige sich ein von Daniel Bernoulli Lagrange gegenüber ausgesprochenes Bedenken. Denn Lambert habe in seiner Photometrie die Abschwächung des Lichtes im quadratischen Entfernungsverhältnisse festgestellt, ohne von der Geschwindigkeit, noch von der Grösse der Schwingungen ein Wort zu sagen. Lagrange verallgemeinert hierauf die am 26. December 1759 schon besprochene Dif-

ferentialgleichung noch weiter zu $z^n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + m c \cdot \frac{\partial \left(\frac{r}{z} \right)}{\partial z}$. Auch sie gehört dem Problem der Luftschwingungen in einem Kegel an, aber unter der Voraussetzung verschiedener Dichtigkeiten der in dem kegelförmigen Raume enthaltenen Luftmasse, und für $m=0$ giebt sie die Schwingungen von Saiten von ungleicher Dicke. Die Discussion dieses letzteren Falles lässt erkennen, dass im Allgemeinen derartige Saiten, in Schwingung versetzt, ihre erste Gestalt nie zum zweiten Male wieder erlangen, somit einen gleichmässigen Ton hervorzubringen nicht im Stande sind, was mit der Erfahrung, dass solche Saiten den Musikern falsch tönen, in Uebereinstimmung steht. Den letzten Gegenstand dieses interessanten Briefes bildet die Frage, ob die Grösse der Schwingungen eine Beschleunigung ihrer Fortpflanzung zur Folge haben könne, eine Frage von Wichtigkeit, indem die experimentellen Geschwindigkeitsmessungen, wie sie z. B. Lacaille 1738 anstellte, stets eine raschere Verbreitung ergaben, als seit Newton theoretisch herausgerechnet worden war. Lagrange ist geneigt, aus seinen Formeln die Unmöglichkeit der Beschleunigung der Fortpflanzung durch die Grösse der Schwingungen anzunehmen, „aber ich sträube mich dagegen, über diesen Punkt mich zu entscheiden, bevor ich Ihr Urtheil darüber habe, welches ich mich recht sehr beeile, mir zu erbitten“. In der Antwort vom 24. Juni 1760 pflichtet Euler den Schlüssen Lagrange's bei. Allein er geht einen Schritt weiter, er sucht eine anderweitige Erklärung für jenen Gegensatz zwischen vorausberechneter kleinerer und wirklich gemessener grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Flüssige Massentheilchen,

sagt er etwa, theilen sich ihre Bewegungen nur allmähig mit, bei festen Massen wird ein Stoss am einen Ende wie in einem Augenblick am andern Ende wahrnehmbar. Denken wir uns nun die Luft theilweise mit festen Massentheilchen erfüllt, so wird die Schallverbreitung nur in den elastisch-flüssigen Lufttheilchen allmähig, in den festen augenblicklich erfolgen und somit rascher sein, als die nur Lufttheilchen voraussetzende Rechnung ergiebt. Euler knüpft daran den Wunsch, zahlreichere Experimente über die Geschwindigkeit der Schallverbreitung durch feste Wände hindurch angestellt zu sehen. Heute wissen wir freilich, dass der Grund jener Verschiedenheit ein anderer ist, als Euler vermuthete. Laplace hat gezeigt, dass die Theorie die infolge der Verdichtung und Verdünnung eintretende Erwärmung und Abkühlung der Luft vernachlässigt hatte, welche, so gering sie ist, ausreicht, den Geschwindigkeitsmessungen andere Bedeutung zu geben, aber soviel hatte doch Euler mit richtiger Ahnung erkannt, dass der Schall durch feste Körper rascher als durch flüssige sich fortpflanzt. Wie Euler in demselben Briefe die Abschwächung fortgeplanter Schwingungen bespricht, haben wir schon gesehen. Einen weiteren Gegenstand wünschenswerther Untersuchung findet er in der Verbreitung von Schwingungen aus einem Mittel in ein zweites von anderer Dichtigkeit als das erstere, mit anderen Worten: er verlangt eine Schwingungstheorie der Brechungserscheinungen.

11. Fast zwei Jahre lang dauerte eine nunmehr eintretende Unterbrechung des Briefwechsels, für welche eine Erklärung nicht gegeben ist, wenn man sie nicht wiederholt in den durch die Fortdauer des Krieges verursachten Verkehrsstörungen suchen will. Erst am 14. Juni 1762 brach Lagrange das Stillschweigen bei Uebersendung des II. Bandes der Abhandlungen der nunmehr königlichen Gesellschaft von Turin durch Beifügung weniger begleitenden Zeilen.

12. Ein Brief, wenn auch kürzer als die früher von Lagrange an Euler gerichteten Mittheilungen, folgte in der zweiten Hälfte des October 1762. Lagrange bestätigt darin die Absendung des II. Memoirenbandes und des Begleitschreibens, fügt aber hinzu, wegen der Unsicherheit der Postverbindung habe er inzwischen ein zweites Exemplar auf anderem Wege nachgeschickt. Sollten beide in Euler's Hände gelangen, so bittet er, das eine dem Secretär der Berliner Akademie, Formey (der diese Stellung seit dem 2. Mai 1748 inne hatte) einhändigen zu wollen. Wir haben im Vorhergehenden schon mehrfach von den auf die Theorie des Schalles bezüglichen Arbeiten Euler's und Lagrange's reden müssen, die in dem II. Bande der Turiner Gesellschaft abgedruckt sind. Wir haben unter 2 auch des Aufsatzes *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* von Lagrange über Variationsrechnung gedacht. An ihn schliesst sich unmittelbar eine weitere Abhandlung an: *Application de la méthode précé-*

dente à la solution de différens problèmes de dynamique. Wir erinnern uns, dass Lagrange 1758 eine grössere Arbeit analytisch-mechanischen Inhaltes vollendet hatte, welche er unter der Voraussetzung, dass Maupertuis noch lebe, in Berlin zu veröffentlichen gedachte. Offenbar ist die Anwendung der Variationsrechnung auf mechanische Probleme ein Theil jenes Buches, und zwar der zweite, während der erste Theil, die Variationsrechnung selbst enthaltend, in der vorhergenannten Abhandlung nur auszugsweise mitgetheilt ist. Wir entnehmen dieses den ausdrücklichen Worten von Lagrange: „Aus einem Ihrer Briefe von 1759 ersah ich, dass Sie meiner Methode der Maxima und Minima hinreichende Bedeutung beigelegt haben, um sie in einer besondern Abhandlung zu erweitern und zu vervollkommen; ich glaubte demnach, meine fast schon vollendete Abhandlung über diesen Gegenstand unterdrücken zu sollen, und ich habe mich darauf beschränkt, einfach die Principien der Methode in einem Aufsätze auseinanderzulegen, den ich so kurz, als es mir möglich war, zu fassen versucht habe. Ich habe mich sogar nur deshalb zur Zusammenstellung dieses Aufsatzes entschlossen, weil Sie mir in demselben Briefe die Ehre erwiesen haben, mir mitzutheilen, Sie wollten Ihre Arbeit nicht vor der meinigen veröffentlichen. Ich bin ungeduldig, von dem neuen Lichte Nutzen ziehen zu können, welches Sie unzweifelhaft über einen so schwierigen Stoff ausgegossen haben; einstweilen ersuche ich Sie, hiermit die unterthänigsten Danksagungen für die mir erwiesene Ehre in Empfang zu nehmen, welche ich als schmeichelhaftesten Lohn meiner mathematischen Studien betrachte.“ Endlich dankt Lagrange auch noch für die Mittheilung der von der Berliner Akademie ausgeschriebenen Preisfrage für 1762, welche Euler ihm am 24. Juni 1760 gemacht hatte. Es handelt sich darum, eine Theorie des Hörens aufzustellen. Lagrange hatte sich der Schwierigkeit dieser Aufgabe nicht gewachsen gefühlt. Ein anderes Mal hoffe er eine Aufgabe seinen Kräften angemessener zu finden und bitte daher Euler, mit der Anzeige der von den Akademien zu Berlin und Petersburg gestellten Aufgaben fortzufahren. Einen akademischen Erfolg erzielte Lagrange 1764 in Paris mit einer Preisschrift über die Libration des Mondes von grosser geschichtlicher Bedeutung, weil in ihr zuerst von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit Gebrauch gemacht ist, welches zwar schon früher erkannt, wie Lagrange selbst in § IV mit seiner bekannten historischen Gewissenhaftigkeit erörtert, doch hier zuerst als Grundlage mechanischer Entwicklungen verwerthet wurde. Was jene Preisfrage für 1762 betrifft, so hatte Lagrange, durch Euler's Darstellung irregeführt, sich vorgestellt, es werde eine genaue mathematische Theorie der Vorgänge in den Gehörorganen verlangt. So weit scheint indessen das Ziel nicht gesteckt worden zu sein. Jedenfalls muss die Akademie, wenn sie ursprünglich auch an jene Art der Behandlung dachte, später sich mit Geringerem begnügt haben, da ein gewisser Doctor der Medicin Georg

Urban Belz aus Neustadt-Eberswalde den Preis davontrug, dessen uns unbekannte Abhandlung *Dissertation sur le son et l'ouïe* in der Sitzung vom 2. Juni 1763 gekrönt wurde, wie man aus den *Nouveaux Mémoires de l'académie de Berlin* 1770 pag. 26 entnehmen kann. Wir haben den letzten Brief Lagrange's an Euler als aus der zweiten Hälfte des Monats October 1762 bezeichnet. Er ist nämlich vom 38. October datirt, und ob dieser Schreibfehler 18 oder 28 (wie Herr Genocchi annimmt), oder 30 oder 31 bedeuten soll, schwebt ganz in der Luft. Als sicher können wir nur annehmen, dass der Brief nach dem 10. October geschrieben sein muss. Es erübrigt uns nämlich noch, einen Brief Euler's vom 9. November 1762 zu besprechen, aus welchem hervorgeht, dass der Abhandlungsband, aber noch nicht der zweite Brief Lagrange's in Berlin angekommen war. Da nun, wie wir gesehen haben, etwa 28 Tage zu vergehen pflegten, bis ein Packet Berlin erreichte, so fällt bei Erhöhung jener Frist des unregelmässigen Verkehrs wegen auf 30 Tage der früheste Termin, an welchem ein Brief, von Turin abgehend, am 9. November noch nicht in Berlin eingetroffen sein konnte, auf den 10. October. Euler dankt für die Uebersendung des werthvollen Bandes und knüpft daran die schmeichelhaftesten Ausdrücke für Lagrange, der mit seinen tiefen Entdeckungen wahrhaft verschwenderisch umgehe. Jeder Andere würde aus den behandelten Stoffen ganze Bände von Beiträgen für verschiedene Akademien geschöpft haben, während Lagrange sich begnüge, eine Wissenschaft in einen Aufsatz zu drängen. Beiläufig bemerken wir, dass Lagrange die leise Anspielung, welche in diesem Lobe lag, schon im folgenden Jahre auf sich wirken liess, denn 1765 erschien in den Memoiren der Berliner Akademie sein Aufsatz über die Tautochrone. Euler geht alsdann wiederholt auf die willkürlichen Functionen ein, welche bei der Integration partieller Differentialgleichungen erscheinen, und zeigt, wie namentlich Umformungen der gegebenen Gleichung dazu führen, solche in eine Gestalt zu bringen, welche die Willkürlichkeit der Functionen von selbst hervortreten lässt. Leider besitzen wir weder die Antwort Lagrange's auf diesen Brief, noch auf die anderen, welche die *Opera postuma* im Abdrucke enthalten. Wir können nur die Hoffnung aussprechen, es mögen dem Herausgeber der Lagrange'schen Werke auch diese noch zu Gebote stehen — eine Hoffnung, die freilich auf sehr schwachen Füßen steht.

Jedenfalls aber wollen wir unsern Bericht nicht abschliessen, ohne Herrn Serret die Bitte auszusprechen, er möge, wenn sich dem nicht unbezwingbare Hindernisse in den Weg stellen, bei der Druckgebung der Briefe von Lagrange seiner Zeit auch die Antworten der Adressaten an den richtigen Stellen beifügen. Wir haben gerade bei Ausarbeitung dieses Aufsatzes an uns selbst erfahren können, wie unbequem es ist, Brief und Antwort aus zwei verschiedenen Bänden vergleichen zu müssen.
