Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Über einige Konstruktionen von Lionardo da Vinci**

Quelle: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg.
Band 2 (1890)
— zugleich
Festschrift herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anläßlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890.
2. Teil. Wissenschaftliche Abhandlungen
Seite 8 – 15.
Signatur UB Heidelberg: L 24::2.1890

Von Leonardo da Vinci sind 13 handschriftliche Hefte — sämtlich in Spiegelschrift — erhalten. Diese wurden 1881–89 fotografiert und publiziert. Darunter finden sich mehrere Konstruktionen regelmäßiger Fünf-, Acht-, Neun- und 18-Ecke, die in diesem Aufsatz vorgestellt werden.
Korrekt ist nur eine, völlig unbrauchbar eine andere; die restlichen Konstruktionen sind nur mit geringen Fehlern behaftet und liefern praktisch nutzbare Ergebnisse.

$$\delta r - \frac{dr}{df}\delta f = P\left(\cos f + \frac{\sin f}{r}\frac{dr}{df}\right) + Q\left(\sin f - \frac{\cos f}{r}\frac{dr}{df}\right) + rS,$$

$$\delta \log r - \frac{d \log r}{df}\delta f = \frac{P(r \sin f)' - Q(r \cos f)'}{k\sqrt{p}} + S.$$

Betrachtet man den Ausdruck

$$\delta M = \frac{dM}{df}\delta f = nT + \frac{dM}{r\,df}(Q \cos f - P \sin f)$$

als eine Störung der mittleren Anomalie und berechnet mit der elliptischen Excentricität die zu $M + \delta M$ gehörige wahre Anomalie, so wird diese $f + \delta f$. Berechnet man ferner mit der elliptischen Excentricität und Halbaxe den zu $M + \delta M$ gehörigen natürlichen Logarithmus des Radiusvektors, so ist zu diesem, um den gestörten Wert zu erhalten, noch der Ausdruck

$$S + \frac{P(r \sin f)' - Q(r \cos f)'}{k\sqrt{p}}$$

hinzuzufügen. Wie man hieraus erkennt, besteht die Abweichung von Hansen nur darin, dafs die Gröfsen δM und $\delta \log r$ in etwas anderer Weise gespalten werden, und zwar so, dafs man zu einer möglichst einfachen Gestalt für die Störungen der rechtwinkligen Koordinaten gelangt.

Leipzig, 1889 Oktober 7.

Über einige Konstruktionen von Lionardo da Vinci.

(Von Moritz Cantor in Heidelberg.)

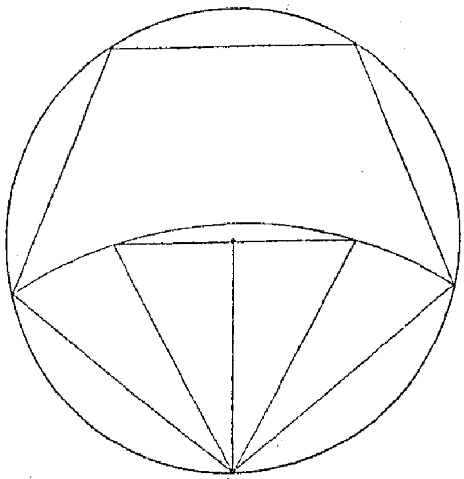
Es ist bekannt, dafs, als Lionardo da Vinci am 2. Mai 1519 starb, der ganze Nachlafs desselben an Schriften, Zeichnungen und Apparaten bei den Erben, Francesco Melzi und dessen Nachkommen, keineswegs die Beachtung fand, welche ihm gebührte. Aus Verwahrlosung, Verschleuderung und Diebstahl haben nur 13 Hefte handschriftlicher Notizen sich auf den heutigen Tag gerettet, von denen 12 in Paris, 1 in Mailand sich befinden. Die Pariser Hefte sind nachträglich mit den Buchstaben A bis M bezeichnet worden, das Mailänder Heft führt aus der Zeit, zu welcher es sich gleichfalls in Paris befand, die Bezeichnung N, wird aber meistens Codice atlantico genannt.

Alle 13 Hefte enthalten kunterbunt durcheinander gewürfelte Aufzeichnungen über alle Zweige der Künste wie der Wissenschaften, und da sie überdies in Spiegelschrift geschrieben, ohne gröfsere Vorbereitungen so gut wie nicht lesbar sind, so hat die Überzeugung bei allen Sachkundigen Platz gegriffen, dafs nur eine photographische Wiedergabe jener Hefte möglich sei, damit verschiedene Fachmänner sich der Durchforschung gerade derjenigen Stellen, deren Verständnis sie gewachsen sind, in aller Mufse widmen mögen. Bisher sind unter der Leitung von Herrn Charles Ravaisson-Mollien in Paris vier stattliche Foliobände mit solchen Lichtdrucken erschienen, deren geradezu vollendete Ausstattung jede Lobeserhebung weit hinter sich läfst. Der I. Band von 1881 enthält Heft *A*. Der II. Band von 1883 enthält die Hefte *B*, *D*. Der III. Band von 1888 enthält die Hefte *C*, *E*, *K*. Der IV. Band von 1889 enthält die Hefte *F*, *I*. Mathematisches findet sich an verschiedenen Stellen dieser acht der allgemeinen Forschung zunächst dargebotenen Hefte. Hier soll nur auf wenige dem Inhalte nach zusammengehörige, wenn auch in den Heften *A* und *B* räumlich getrennt erscheinende Bruchstücke eingegangen werden, jetzt etwa 400 Jahre alte Zeugnisse dafür, wie ein genialer Mann, um dessen Zugehörigkeit Künste und Wissenschaften streiten dürfen, regelmäfsige Vielecke zu zeichnen lehrte.

Die Aufgaben sind nach zwei Grundgedanken unterschieden. Bald handelt es sich um die Teilung eines gegebenen Kreises in n gleiche Teile, bald um die Beschreibung eines Kreises, zu dessen n^{tem} Teile eine gegebene Strecke als Sehne gehört. Bei der Zeichnung bedient sich Lionardo da Vinci mit Vorliebe eines Zirkels mit unveränderlicher Zirkelöffnung. Diese Einschränkung war nicht neu, nicht vorübergehend. Seit Pappos von den *ἑνὶ διαστήματι γραφόμενα* [vergl. unsere Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, 383] schrieb bis zur Zeit, als Steiner die Einschränkung noch weiter trieb und Anwendung nur eines einzigen Kreises gestattete, hat die geistvolle geometrische Spielerei sich Freunde zu erwerben gewufst, die zahlreichsten in Italien während des XVI. Jahrhunderts. Deren unmittelbarer, vielleicht sie beeinflussender Vorgänger dürfte Lionardo da Vinci gewesen sein. Wir beabsichtigen bei dieser unserer Veröffentlichung den Gang einzuschlagen, dafs wir von der steigenden Eckenzahl des Vielecks, welches immer als regelmäfsiges Sehnenvieleck gemeint ist, ohne dafs wir es besonders zu sagen brauchen, uns leiten lassen. Die Figuren nebst ihren Buchstaben sind den Zeichnungen der Hefte *A* und *B* nachgebildet. Wo wir zur Diskussion der Zeichnung Hilfslinien brauchten, sind diese immer punktiert gezeichnet. Die Diskussion selbst hat, wie wir kaum zu sagen haben werden, unsere Quelle nicht angestellt.

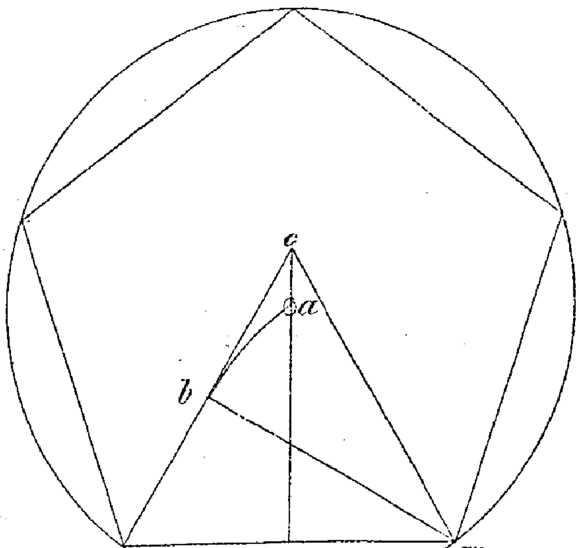
Ein einziges Vieleck werden wir nicht besonders zu diskutieren haben: das Sechseck. Dafs dessen Seite mit dem Halbmesser des umschriebenen Kreises — wofür wir künftig schlechthin Kreis sagen werden — übereinstimme, war so allgemeines Eigentum, dafs dieser Satz allen übrigen Konstruktionen als Grundlage dient. Und bekannt ist demgemäfs auch, dafs zweimaliges Herumtragen des Halbmessers den Bogen von 120^0, dreimaliges den von 180^0 oder einen Halbkreis gewinnen läfst.

Fig. 1.



Das Fünfeck ist dasjenige Vieleck, welches am häufigsten dem Künstler als Aufgabe gestellt sein kann und hat unseren Schriftsteller wiederholt beschäftigt. In *A* fol. 13v hat er Fig. 1 eingezeichnet und an einer daneben befindlichen Figur, eine Vereinigung von Fünfeck und Sechseck darstellend, einen Beweis für die Richtigkeit der Zeichnung zu führen gesucht, der ihm aber mifsglückte, was durch ein beigeschriebenes falso bezeugt ist. Gleichwohl findet sich *A* fol. 17v wieder Figur 2, den gleichen Gedanken einfach wiederholend. Über der gegebenen Seite mn ist das gleichseitige Dreieck mnc mit seinen beiden Höhen cr und mb gezeichnet. Von m als Mittelpunkt wird mit mb als Halbmesser der Bogen ba geschlagen, so ist mb Halbmesser, a Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Nennen wir ein für allemal ϱ den Halbmesser des Kreises, σ die Vielecksseite, φ den halben Centriwinkel über σ (beim Fünfeck also $\varphi = 36^0$, wenn die Zeichnung richtig geführt ist), so ist hier $\varrho = \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{3}$, und da immer $\sin \varphi = \frac{\sigma}{2\varrho}$, so ist hier $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $= \frac{1.7320508}{3} = 0{,}5773503$, woraus

Fig. 2.



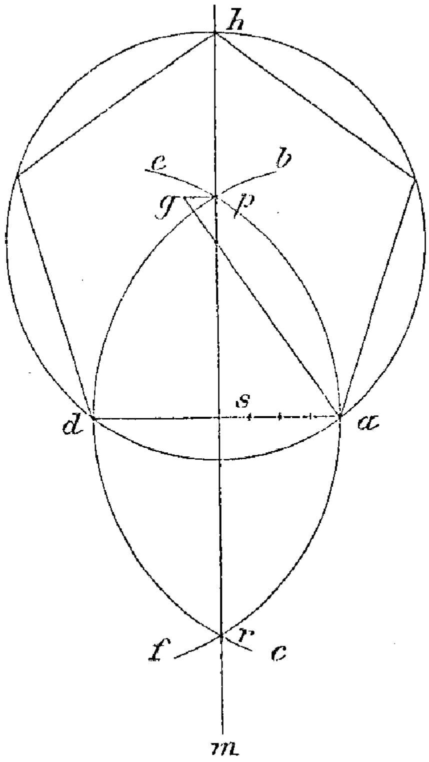
$$\varphi = 35^0\, 15'\, 53'', \qquad 2\varphi = 70^0\, 31'\, 46''.$$

Eine zweite Konstruktion finden wir *B* fol. 13v. Es wird Fig. 3 über $ad = \sigma$ die Spitze p des gleichseitigen Dreiecks gesucht und dessen Höhelinie $hpsm$ gezeichnet. Dann wird sa in vier gleiche

Teile geteilt und $pg \mp as$ und $= \frac{as}{4}$ gezogen. Die ga schneidet alsdann ps in dem durch keinen Buchstaben gekennzeichneten Mittelpunkt des Kreises. Der zu Grunde liegende Gedanke ist offenbar der, dafs während ad im Kreise um p sechsmal herumgetragen wird, im gesuchten Kreise solches nur fünfmal möglich sein soll; der Mittelpunkt mufs also der ad sich nähern, und zwar beträgt, man weifs freilich nicht warum, die Näherung $\frac{ps}{5}$. Da $ps = \frac{\sigma}{2}\sqrt{3}$, so ist die Entfernung des neuen Mittelpunktes von s nur noch $\frac{2\sigma}{5}\sqrt{3}$, $as = \frac{\sigma}{2}$, also $\varrho^2 = \left(\frac{2\sigma}{5}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = 0{,}73\,\sigma^2$ und $\frac{\sigma}{2\varrho} = \frac{5}{\sqrt{73}}$. Aus $\sin\varphi = \frac{5}{8{,}5440037} = 0.5852056$ folgt aber

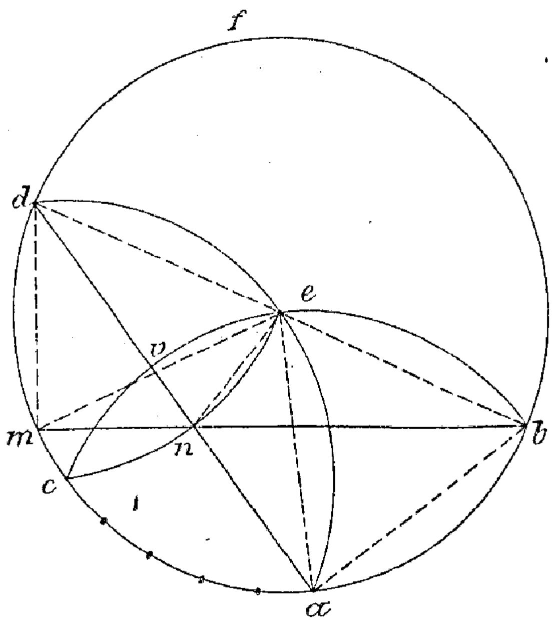
$$\varphi = 35^0\,49'\,3'' \qquad 2\varphi = 71^0\,38'\,6''.$$

Fig. 3.



Ein drittes Verfahren führt B fol. 27^v zu Fig. 4. Nachdem um e als Mittelpunkt der Kreis gezeichnet ist, wird mit unverändertem Halbmesser um einen beliebigen Peripheriepunkt a der Bogen bc, um c der Bogen ad, um d der Bogen ce beschrieben, welchen die Gerade ad in n schneidet. Dann verbindet man bn geradlinig und erhält durch Fortsetzung von bn den Peripheriepunkt m, welcher $\sphericalangle\, mea = 2\varphi$ macht. Zum Beweise dienen vier zwischen a und c auf der Peripherie in gleichen Entfernungen bemerkbar gemachte Punkte. Da arc $ac = 60^0$, ist jedes Fünftel $= 12^0$, und ist cm, wie es den Anschein hat, eben so grofs, so ist arc $am = 60^0 + 12^0 = 72^0$. Wir ziehen die Geraden eb, ea, en, em, dm. Weil arc ba = arc ac = arc $cd = 60^0$, mufs bed Durchmesser sein, und die Winkel bei a und m über diesem Durchmesser sind Rechte. Aufserdem ist $\sphericalangle\, nba = ndm$, $\triangle nba \sim ndm$

Fig. 4.



und $\frac{dm}{dn} = \frac{ba}{bn}$, also $dm = \frac{dn}{bn} \cdot ba = \frac{dn}{bn} \cdot \varrho$. Ferner ist $\triangle\, cdm$ gleichschenklig und in ihm $dm = 2\varrho \cdot \sin \frac{dcm}{2}$, folglich

$$\sin \frac{dcm}{2} = \frac{1}{2} \frac{dn}{bn},$$

$dn = da - na = 2\varrho \cdot \sin 60^0 - na$. Um auch na zu finden, benutze man $\triangle\, aen$, dessen Winkel gegeben sind. Im gleichschenkligen $\triangle\, den$ ist nämlich $\sphericalangle\, edn = 30^0$, $\sphericalangle\, den = dne = 75^0$, also $\sphericalangle\, ena = 105^0$; ferner $\sphericalangle\, nea = 180^0 - den - aeb = 180^0 - 75^0 - 60^0 = 45^0$. Daher $\frac{an}{ac} = \frac{an}{\varrho} = \frac{\sin aen}{\sin ane} = \frac{\sin 45^0}{\sin 105^0}$ und $na = \varrho \frac{\sin 45^0}{\sin 105^0} = \varrho \cdot \frac{\sin 45^0}{\cos 15^0}$.
Mithin

$$dn = \varrho \left[2 \sin 60^0 - \frac{\sin 45^0}{\cos 15^0}\right],$$

$bn^2 = ab^2 + an^2 = \varrho^2 \left[1 + \left(\frac{\sin 45^0}{\cos 15^0}\right)^2\right]$, also $bn = \varrho \cdot \sqrt{\frac{(\sin 45^0)^2 + (\cos 15^0)^2}{(\cos 15^0)^2}}$
und endlich

$$2 \sin \frac{dcm}{2} = \frac{2 \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - \sin 45^0}{\sqrt{(\sin 45^0)^2 + (\cos 15^0)^2}}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks vereinfacht sich sehr, indem man $45^0 = 60^0 - 15^0$ setzt. $2 \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - \sin 45^0 = 2 \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - [\sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - \cos 60^0 \cdot \sin 15^0] = \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 + \cos 60^0 \cdot \sin 15^0 = \sin 75^0 = \cos 15^0$. Überdies ist bekanntlich

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \cos 15^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

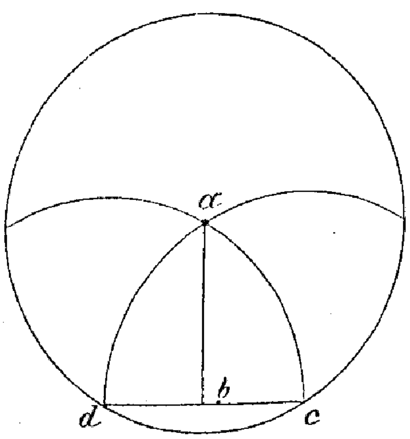
Folglich

$$\sin \frac{dcm}{2} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{52}} = \sin 23^0\, 47'\, 38''.$$

Daraus folgt endlich

$$2\varphi = 120^0 - 2\,(23^0\, 47'\, 38'') = 72^0\, 24'\, 44''.$$

Fig. 5.



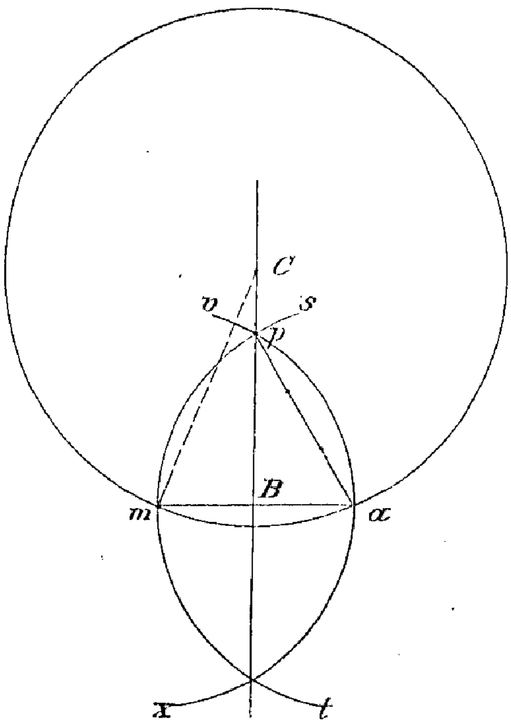
Zum Siebeneck führt B fol. 28ʳ die in Figur 5 dargestellte Zeichnung. Von einem beliebigen Peripheriepunkt c aus als Mittelpunkt beschreibt man den Bogen ad, um d als Mittelpunkt den Bogen ac und zieht $ab \perp cd$, so ist $ab = \sigma$. Hier wird also $\sigma = \frac{\varrho}{2}\sqrt{3}$ und $\sin \varphi = \frac{\sigma}{2\varrho} = \frac{1}{4}\sqrt{3} = 0{,}4330127$

$$\varphi = 25^0\, 39'\, 32'', \qquad 2\varphi = 51^0\, 19'\, 4''.$$

Richtig wäre $2\varphi = 51^0\,25'\,43''$; die Genauigkeit dieser Zeichnung ist demnach eine sehr beträchtliche, wenn es auch nicht wahr ist, was Lionardo da Vinci dazu bemerkt, dafs arc cd auf den Punkt genau (apunto) $\frac{1}{7}$ des Kreisumfangs sein werde. Wer übrigens einigermafsen mit der Geschichte der Geometrie bekannt ist, weifs, dafs gerade diese Siebeneckszeichnung weit älter ist, als Lionardo da Vinci. Sie kommt gegen Ende des X. Jahrhunderts bei Abû'l Wafâ, am Anfange des XIII. Jahrhunderts bei Jordanus Nemorarius vor und wird von letzterem eine indische Regel genannt.

Das Achteck tritt zweimal auf. Zuerst B fol. 17r (wenn man zur naheliegenden Annahme berechtigt ist, dafs in einem und demselben Hefte das räumlich früher Geschriebene auch der Zeit nach früher entstand) ist die Aufgabe behandelt, über einer gegebenen Seite am ein Achteck zu zeichnen, Fig. 6. Von a und von m aus als Mittelpunkten werden mit $am = \sigma$ als Halbmesser die Bögen st und vx beschrieben und deren Durchschnittspunkte geradlinig vereinigt, aufserdem der eine Durchschnittspunkt p mit a verbunden. Der dritte Teil von ap wird sodann der Mittelsenkrechten zu am jenseits p zugesetzt, so findet man den Mittelpunkt des Kreises. Ähnlich wie bei der zweiten Fünfeckskonstruktion ist also der Mittelpunkt für das Achteck weiter hinausgerückt als für das Sechseck, und die Dreiteilung der ap mag von der Thatsache beeinflufst sein, dafs 8 um den dritten Teil mehr als 6 ist. Die Rechnung giebt hier folgendes. Nennen wir B den Mittelpunkt von am und C den Kreismittelpunkt und ziehen $Cm = \varrho$, so ist $mB = \frac{\sigma}{2}$, $BC = \frac{\sigma}{2}\sqrt{3} + \frac{\sigma}{3}$,

Fig. 6.

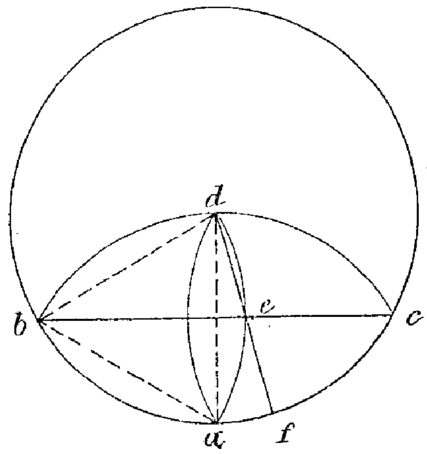


also $\varrho^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\left[1 + \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)^2\right] = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\left[\frac{40}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right]$, $\frac{\sigma}{2\varrho} = \sqrt{\frac{1}{\frac{40}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3}}}$ $= \sqrt{\frac{90 - \sqrt{2187}}{292}}$ und

$$\varphi = 22^0\,37'\,51'' \qquad 2\varphi = 45^0\,15'\,41''.$$

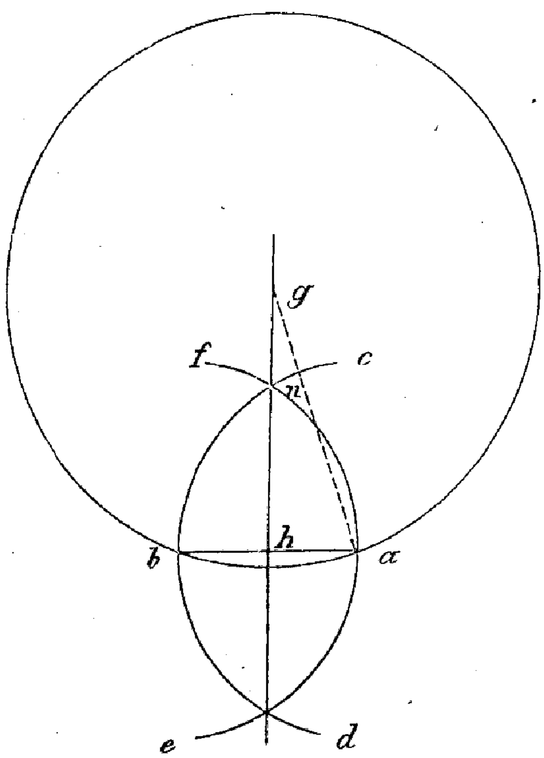
Später wird B, fol. 40r die Aufgabe der Achtteilung des Kreises in vollkommen genauer Weise gelöst. Figur 7. Von einem beliebigen Peripheriepunkte a aus als Mittelpunkt wird mit ϱ als Halbmesser der Bogen bdc beschrieben; ebenso Bögen von b und c aus als Mittelpunkten. Dann zieht man bd und durch den so gewonnenen Durchschnittspunkt e die Gerade def. Der Bogen cf ist der achte Teil des Kreises. Man ziehe noch da, ab, bd. Leicht ersichtlich ist $\sphericalangle\, dbc = 30^0$ und $\triangle\, dbe$ gleichschenklig, folglich $\sphericalangle\, bdf = 75^0$ und arc $cf = 120^0 - 75^0 = 45^0$. Zugleich ist auch arc $af = 60^0 - 45^0 = 15^0$ oder $\frac{1}{24}$ des Kreises mit erhalten.

Fig. 7.



Beim Neuneck B fol. 29[r] setzte der Verfasser offenbar die Schlufsfolgerung weiter fort, die wir beim Achteck vermuten durften. Weil $9 = 1\frac{1}{2} \cdot 6$, mufs der Mittelpunkt des Neunecks um einen halben Halbmesser weiter hinausrücken als der Mittelpunkt des Sechsecks. Figur 8 zeigt die Ausführung. Von den Endpunkten a und b der Seite $ab = \sigma$ als Mittelpunkten werden die in n sich schneidenden Bögen cd, ef geschlagen, $ng = \frac{ab}{2}$ genommen, so ist um g als Mittelpunkt der gewünschte Kreis zu beschreiben, der das Neuneck genau in sich schliefse: „e tera in se apunto 9 delle date linie!" Der Halbmesser $ga = \varrho$ werde gezogen, so zeigt sich $\varrho^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \left[1 + \sqrt{3}\right]^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \left[5 + 2\sqrt{3}\right]$,

Fig. 8.

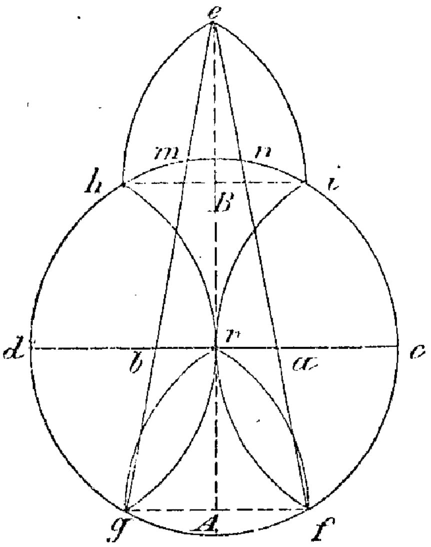


$$\frac{\sigma}{2\varrho} = \sqrt{\frac{1}{5+2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{12}}{13}}.$$ Folglich

$$\varphi = 20^0\, 6'\, 12'' \qquad 2\varphi = 40^0\, 12'\, 25''.$$

Das Achtzehneck ist ziemlich früher B fol. 13[r] nach ähnlichem Grundgedanken gezeichnet, liefert aber einen Winkel 2φ, der von dem genauen Werte 20^0 weiter abweicht, als es bei den übrigen Vielecken der Fall war. Hier ist dem Erfinder auch die Mangelhaftigkeit zum Bewufstsein gekommen, wie ein beigefügtes falso beweist. Nach Figur 9 war folgende Konstruktion beabsichtigt. Nachdem von den Endpunkten c, d eines Durchmessers als Mittelpunkten die Bögen fi, gh, und dann von i und h aus als Mittelpunkten die Bögen he, ie beschrieben sind, zieht man die Geraden ef, eg, welche mn als $\frac{1}{18}$ des Kreisumfanges zwischen sich schliefsen. Die Bögen fr, gr sind für die Absicht des Zeichners überflüssig, wenn sie nicht die Entstehung einer als Zierat verwendbaren Gestaltung zeigen sollen. Zieht man die Hilfslinien gf, hi, $eBrA$, so ist sofort klar $eB = Br = rA$, also $eA = 3\,rA = \frac{3\varrho}{2}\sqrt{3}$, $Af = \frac{\varrho}{2}$, tg $feA = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{9}\sqrt{3} = 0{,}1924501$ und

Fig. 9.



$\sphericalangle feA = 10^\circ 53'36''$. Folglich $\sphericalangle feg = 21^\circ 47' 12''$. Nun ist aber $\sphericalangle feg$ als von zwei Sekanten gebildet durch die halbe Differenz der Bögen fg, mn gemessen, oder 60° — arc $mn = 43^\circ 34' 24''$, arc $mn = 16^\circ 25' 36''$, wodurch die Verurteilung dieser Konstruktion sich vollauf rechtfertigt.

So die Vieleckskonstruktionen des Lionardo da Vinci. Richtig ist von ihnen allerdings nur eine einzige, aber ganz unbrauchbar auch nur eine einzige. Die übrigen liefern praktisch vollauf genügende Ergebnisse. Dafür aber, dafs Lionardo da Vinci eine Prüfung der Methoden nicht vollgültig vorzunehmen imstande war, darf man mit ihm nicht zu streng ins Gericht gehen. Noch war die Zeit nicht erschienen, in welcher ein Künstler solcher geometrischen Schärfe fähig war. Erst mit Albrecht Dürer brach sie an.

Die Knotenlinien der Atmo- und Hydrosphäre.

(Von S. Günther in München.)

Die neuere Meteorologie war, nachdem sie sich durch die Aufstellung des Buys-Ballotschen Gesetzes in den Besitz eines wirklich zuverlässigen Schlüssels zur Erschliefsung der Geheimnisse der atmosphärischen Veränderungen gesetzt sah, den Versuchen, alle Luftbewegungen als Bestandteile eines einheitlichen Zirkulationssystems der irdischen Lufthülle aufzufassen, einigermafsen abhold geworden. Die Dovesche Theorie, welche auf einer solchen Voraussetzung auf-