Universitätsbibliothek
Heidelberg

Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht

von

Helmut Hasse

Mit Genehmigung der Tochter des Autors, Frau Jutta Kneser,
neu herausgegeben von Gabriele Dörflinger,
Universitätsbibliothek Heidelberg
2008

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Vorwort[1]

Am 20. Januar 1951 habe ich meine Antrittsvorlesung in der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Hamburg über das Thema „Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht“ gehalten. Einer Aufforderung des Amerikahauses in Hamburg folgend, habe ich dann in der dortigen öffentlichen Vortragsreihe am 15. Januar 1952 über dieses Thema etwas ausführlicher gesprochen. Viele Freunde, die einen dieser Vorträge gehört oder mein Manuskript gelesen hatten, haben mich zur Veröffentlichung meiner Ausführungen ermutigt, und der Verlag für angewandte Wissenschaften hat sich freundlicherweise dazu bereit erklärt.

Ich folge diesem Wunsche gerne, weil ich jede Gelegenheit begrüße, in einer breiteren Öffentlichkeit Verständnis für das wahre Wesen der so oft verkannten Mathematik zu wecken. Da es sich um persönliche Bekenntnisse und nicht um wissenschaftliche Erkenntnisse handelt, schien es mir angebracht, die lebendige Form des mündlichen Vertrags auch im Druck beizubehalten.

Dem Verlag sei für den Entschluß, dieses anspruchslose Schriftchen herauszubringen, und für sein bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche bei der Drucklegung herzlichst gedankt.

Hamburg, im Herbst 1952
Der Verfasser

Einleitung

Wenn ich, von anderen nach meinem Beruf gefragt, mich als Mathematiker zu erkennen gebe, muß ich nur allzuoft die Antwort hören:
„Ach, Mathematiker! Davon verstehe ich so gut wie gar nichts!“
oder auch:
„Dafür bin ich völlig unbegabt“,
und dies keineswegs nur von einfachen Menschen, sondern recht häufig auch von hochgebildeten!

Ich erwidere dann gewöhnlich:
„Nun, dann hat niemand Ihnen die Mathematik richtig nahegebracht“,
und:
„Sie haben wahrscheinlich eine ganz falsche Vorstellung davon, was die Mathematik wirklich ist“.

[1]Die Rede wurde 1952 im Verlag für Angewandte Wissenschaften, Wiesbaden publiziert.

Ein Wissenschaftler, dem sein Fach ans Herz gewachsen ist und der sein Leben der ernsten Beschäftigung mit diesem Fach gewidmet hat, wird es aber bei solchen kurzen Antworten nicht bewenden lassen. Er wird vielmehr tiefer über Wesen und Bedeutung seiner Wissenschaft nachdenken. Und er wird auch das Bedürfnis haben, die Ergebnisse solchen Nachdenkens bei sich bietender Gelegenheit vor einem breiteren Kreise darzulegen.

So begrüße ich denn die heutige Gelegenheit dazu aufs wärmste. Meine folgenden Ausführungen richten sich keineswegs nur an Mathematiker, vielmehr an alle geistig und kulturell interessierten Menschen, mögen sie der mathematischen Wissenschaft nahe- oder fernstehen, sie hoch- oder geringschätzen, wenn sie nur das Bedürfnis haben, ihren Blick einmal über ihr eigenes fachliches Tätigkeitsgebiet hinaus zu erheben, um sich für eine Stunde mit einer so bedeutenden Kulturerscheinung zu beschäftigen, wie es die mathematische Wissenschaft ist. Und diese Bereitschaft darf ich ja bei Ihnen, meine sehr verehrten Zuhörer, voraussetzen; denn sonst wären Sie gar nicht hierhergekommen.

Nicht zuletzt richte ich mich mit meinen Ausführungen auch an die akademische Jugend meines eigenen Faches, von der vielleicht mancher heute anwesend ist; an diese Jugend, die im nur allzuvoll ausgefüllten Rahmen des eigentlichen Fachstudiums erfahrungsgemäß nur wenig Zeit findet, um sich über den tieferen Sinn der Mathematik und ihre Stellung im Ganzen unserer Kultur Gedanken zu machen.

Auf die Frage „Was ist Mathematik?“ gibt es ebenso viele Antworten, wie es Mathematiker gibt, ganz entsprechend, wie jeder Künstler seine eigene, individuell bedingte Vorstellung von der Kunst hat.

Als Mathematiker liegt es mir in ganz besonderem Maße am Herzen, von vornherein klar festzustellen, daß das, was ich hier sagen will, keineswegs *apodiktische Wahrheiten a priori* mit dem Anspruch *objektiver, universeller Gültigkeit* sind. Ganz im Gegenteil: Das einzige, was ich zur Beantwortung der Frage nach dem Wesen der Mathematik tun kann, ist, daß ich Ihnen meine eigene, völlig *subjektive Einstellung* zu meinem Fach schildere, so wie sie sich mir durch eine mehr als dreißigjährige ernste Beschäftigung mit diesem Fach und durch häufiges Nachdenken über die eigentlichen Triebkräfte dieser Tätigkeit gebildet hat.

So hätte ich denn diesen Vortrag eigentlich besser mit der Überschrift „Bekenntnisse eines Mathematikers“ versehen sollen. Ich will aber in dieser Richtung nicht so weit gehen wie der jüngst verstorbene große englische Mathematiker Hardy, der am Schlusse seines an wissenschaftlichen Triumphen größten Ausmaßes überreichen Lebens ein Büchlein mit dem Titel „A mathematician's apology" veröffentlicht hat[2], in dem er sich sozusagen für seine eigene Existenz als Mathematiker entschuldigt.

Denn ich finde: Eine Wissenschaft, deren über zweitausendjährige Geschichte ein dauerndes, stetiges Aufsteigen in immer größere Höhen gewesen ist, hat es nicht nötig, sich bescheiden für ihre Existenz zu entschuldigen, sondern sie darf stolz und mutig vor die Welt treten, mit dem Bekenntnis: „Hier bin ich; seht voll Ehrfurcht auf die tiefen Erkenntnisse im Reiche des Denkens, die ich gewonnen habe; bewundert meine kristallklare, lebendige Schönheit und staunt, welche Fähigkeiten ich euch in die Hand gebe!"

In anderer Hinsicht aber glaube ich, daß ich mich für diesen Vortrag entschuldigen muß. Ich komme dazu auf meinen Ausgangspunkt zurück. Es ist gelegentlich vorgekommen, daß ein Geisteswissenschaftler mir gesagt hat: „Die Mathematik ist mir auf der Schule immer ein Greuel gewesen." Da habe ich zur Antwort gegeben: „Mir der deutsche Aufsatz; besonders der über sogenannte freie Themata", wie es auch tatsächlich gewesen ist. Und so muß ich Ihnen bekennen, daß mir der Entschluß nun heute, nach lange zurückliegender Schulzeit, über ein solches „freies Thema" zu sprechen, nicht leicht gewesen ist, und daß mir die Vorbereitung dazu mindestens ebenso viele geistige Schmerzen bereitet, hat wie damals in meiner Primanerzeit die deutschen Aufsätze.

Wem von der Natur nicht die Gabe, eines Dichters oder Redners verliehen ist, der muß sich bei einer solchen Aufgabe für jeden einzelnen Gedanken, den er zu entwickeln hat, den geeigneten Ausdruck mühsam abringen. Ich kann hier nur das tun, was einst der große Dichter DANTE tat, als er nach der recht realistischen, grausigen Schilderung des Inferno dazu überging, die lichteren Gefilde des Purgatorio und des Paradiso in seinen Versen vor den Augen des Lesers aufsteigen zu lassen, nämlich die Muse der Dichtkunst Kalliope anrufen, daß sie seine Worte beflügeln möchte. Aber da ich als Mathematiker der Gunst dieser gütigen Muse nicht so gewiß sein kann wie der begnadete Dichter, so muß ich Sie bitten, mit der Ausdrucksform meiner Darlegungen freundlichst Nachsicht zu haben.

Schließlich noch ein letztes Wort in diesen einleitenden Ausführungen. Es liegt in der Natur meiner „Bekenntnisse", daß ich — wie schon bisher — auch im folgenden sehr oft von meiner *eigenen* Person, von meinen Gedanken, seelischen Erfahrungen und Erlebnissen reden muß. Bitte sehen Sie darin nicht ein ungebührliches Hervorstellen meiner Person, sondern nur eine, wie mir scheint, zweckmäßige, ja unumgängliche Methode, Ihnen möglichst lebendig nahezubringen, was in *Verstand und Seele* eines Mathematikers vorgeht. Ich kann Ihnen ja hier das Wesen der Mathematik und gerade *die* Züge, auf die

[2]Cambridge University Press 1948.

es mir ankommt, *nicht* gut durch Proben aus dem eigentlichen Inhalt dieser Wissenschaft nahebringen und muß daher *anders*, eigentlich weniger durch das, *was* ich sage, als vielmehr durch die Art und Weise, *wie* ich über meine Wissenschaft spreche, versuchen, in Ihnen eine lebendige Vorstellung von dieser zu erwecken.

Und lassen Sie es mich noch einmal sagen, was diese Methode mit sich bringt: Alle an mir selbst gemachten Beobachtungen und damit auch alle aus ihnen gezogenen Folgerungen über das Wesen der Mathematik haben *rein subjektiven Charakter;* sie treten an Sie nicht mit dem Anspruch auf *objektive, allgemeingültige Wahrheit* heran.

I. Mathematik als Wissenschaft

Eine weitverbreitete Vorstellung ist diese: Der Mathematiker ist ein Mann, der etwas *berechnen* kann. Er verbringt seine Zeit mit *komplizierten Berechnungen*. Wenn er *normal* ist, berechnet er Dinge, die anderen Menschen *Nutzen bringen* oder einmal werden bringen können. Es gibt aber auch Mathematiker, die sich, aus reiner Freude am Berechnen, irgendwelche *ausgefallenen* Aufgaben selbst ausdenken und sie dann lösen; und über diese kann man nur *mitleidig lächeln*.

Meine sehr verehrten Zuhörer! Als ich im Jahre 1925 als neu berufener Professor der Mathematik nach Halle kam, mußte ich, dem dortigen Brauch entsprechend, eine Antrittsrede vor Rektor und Senat halten. Nun war dort in Halle vor kurzem die alte, große *Philosophische Fakultät* in eine *Philologisch-Historische* und eine *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät* aufgespalten worden, während ich mein Studium und meine Privatdozentenzeit in vereinigten Fakultäten verbracht hatte und mich in der Tat über Mathematik und Physik hinaus auch in Philosophie und anderen Geisteswissenschaften umgesehen hatte. So nahm ich denn die in Halle erfolgte Aufspaltung der Fakultät zum Anlaß, um vor einem hochwürdigen Rektor und Senat in jugendlichem Kampfgeist die These zu vertreten:

„*Die Mathematik ist eine Geisteswissenschaft.*“

Meine damaligen Ausführungen haben bei den dortigen Naturwissenschaftlern, die über ihre „Befreiung vom geisteswissenschaftlichen Joch“ froh waren, lebhaften Protest hervorgerufen, weil ich mit der ganzen Einseitigkeit eines jugendlichen Hitzkopfes über die Bedeutung der Mathematik für die Naturwissenschaften hinwegging. Ich hoffe, daß Sie mich heute nicht dieser Einseitigkeit bezichtigen werden, nachdem Sie gehört haben, was ich im dritten Teil dieses Vortrags über die Bedeutung der Mathematik für die Naturwissenschaften sagen will. Aber für diesen ersten Teil erscheint mir jene damalige These, an der ich auch heute noch voll festhalte, der geeignete Ausgangspunkt, eben weil sie sagt, wo meiner Ansicht nach die *Mathematik als Wissenschaft* hingehört: *unter die Geisteswissenschaften*.

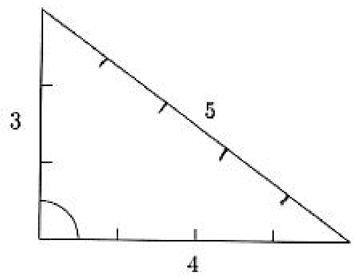
Wer mit der Mathematik lediglich die Vorstellung des *Berechnens*, genauer des *Berechnenkönnens* verbindet, sieht an ihrem wahren Charakter vorbei.

Um diesen wahren Charakter zu erfassen, wollen wir uns an der *Geschichte der Mathematik* orientieren.

Die *Babylonier* konnten den *Lauf der Gestirne berechnen*; sie benutzten dazu das, was wir heute *sphärische Trigonometrie* nennen, verbunden mit einer bis ins einzelne durchgebildeten Technik des *Zahlenrechnens* in ihrem hexagesimalen Zahlsystem.

Die *Ägypter* hatten die Kunst der *Feldvermessung* zu hoher Vollendung gebracht; sie benutzten dazu Regeln aus der *elementaren Geometrie*.

Aber bei beiden Völkern waren die verwendeten Regeln für das Rechnen und Vermessen *reine Erfahrungstatsachen*. So etwa die bekannte Regel, nach der die Ägypter rechte Winkel absteckten, nämlich mittels einer geschlossenen 12 Einheiten langen Schnur, die um drei Pflöcke so gespannt wurde, daß die Seiten des entstehenden Dreiecks 3, 4 und 5 Einheiten lang werden:



Im Hinblick auf die zwischen den gewählten Zahlen 3, 4 und 5 bestehende Beziehung

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ruft uns diese ägyptische Rechtwinkelregel den wohl am meisten bekannten Lehrsatz der Dreiecksgeometrie, den Satz des PYTHAGORAS vor Augen. Genauer gesagt stellt sie ein Beispiel für die Umkehrung dieses Satzes dar, die aussagt: Ein Dreieck, für das die Quadratsumme zweier Seiten gleich dem Quadrat der dritten Seite ist, ist notwendig rechtwinklig.

Erst als solche *rein empirischen Kenntnisse* unter die Hand der *Griechen* kamen, die tiefer darüber nachdachten, kam die entscheidende Wendung von der *Mathematik als Berechnungs- und Vermessungskunst zur Mathematik* *als Wissenschaft.* Die Griechen, und zwar genauer die *Pythagoreische Schule* in dem griechischen Kolonialland Magna Graecia (Süditalien und Sizilien), begnügten sich nämlich *nicht mit der mehr oder weniger genauen Bestätigung* solcher Regeln durch die *Erfahrung*, sondern hielten es für nötig, sie durch *rein logische Prozesse* als *exakt gültig zu erweisen.* So entstand aus der erwähnten ägyptischen Rechtwinkel*regel* der *Satz* des Pythagoras (nebst seiner Umkehrung).

Mit diesem erstmalig von den Griechen empfundenen und erfüllten Bedürfnis nach *rein logischen Beweisen* wird die Mathematik aus dem niederen *Bereich des Berechnenkönnens* in den höheren *Bereich des logischen Denkens* emporgehoben. Sie wird, um mit den Griechen zu reden, zu einem Zweig der *Philosophie* und damit zu einer *Geisteswissenschaft.* Ja die Griechen sahen die Mathematik als den eigentlichen Urgrund aller Wissenschaft an, wie das schon in der gewählten Bezeichnung $\mu\alpha\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$ (Erkenntnis) zum Ausdruck kommt. Das hat dann auch in der später folgenden Blütezeit des griechischen Geisteslebens PLATON dadurch betont, daß er über seine berühmte Akademie die Worte setzte:

$$\mu\eta\delta\epsilon\iota\varsigma \quad \alpha\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\eta\tau o\varsigma \quad \epsilon\iota\sigma\iota\tau\omega$$

(Kein Nichtmathematiker soll Eintritt haben!)

Und es ist auch bezeichnend, daß in den Platonischen Dialogen die „Logistik“ (Rechenkunst) als eine untergeordnete, nicht an die echte Wissenschaft heranreichende Fähigkeit hingestellt wird.

Für PLATON war die Mathematik, wie zweitausend Jahre später für LEIBNIZ und noch mehr für KANT, das *Urbild einer echten Wissenschaft.* Unter den in seinen Dialogen gezeichneten Gestalten tritt die des jungen, genialen Mathematikers THEATET in besonders leuchtenden Farben hervor. Jedem Wissenschaftler unserer Zeit, der einmal das Glück gehabt hat, einen hochbegabten jungen Menschen zum Schüler zu haben und bei einer bedeutenden Entdeckung dieses Schülers Pate zu stehen, muß das Herz höher schlagen, wenn er liest, mit welcher Liebe der große Meister und weltumspannende Geist des klassischen Griechentums das sprudelnde Genie dieses seines Jüngers lebendig vor Augen führt.

Bezeichnend dafür, welch eine hohe Meinung Platon von dem Wert der Mathematik als der erhabensten Betätigung des menschlichen Geistes und von ihrem Einfluß auf die Formung edelster menschlicher Eigenschaften hatte, ist es auch, daß er in seinem „Staat“ die Mathematiker als die Menschen hinstellt, die vor allem zu führenden Stellungen im öffentlichen Leben geeignet und berufen sind.

Vielleicht sähe die Welt heute besser aus, wenn in den vergangenen über zweitausend Jahren dieser Platonische Gedanke realisiert gewesen wäre! Es mag sich hierbei um eine aus reinstem Idealismus geborene Idee handeln, die in der Praxis kaum durchführbar ist und zu der man, neben der sicher wahren Randbemerkung: „Ja, aber Politik verdirbt doch den Charakter!“, als Mathematiker auch noch etwas scherzhaft bemerken könnte: „Wie sollte denn die mathematische Wissenschaft weiter gedeihen, wenn ihre Besten das Schwergewicht auf politische Betätigung legen müßten?“ Aber es ist doch zu wünschen, daß das *Ansehen des Mathematikers* bei der großen Masse seiner Mitmenschen wieder so hoch wird wie in der klassischen griechischen Zeit, so daß dann die Reaktion auf das Bekenntnis „Ich bin Mathematiker“ in der Mehrzahl aller Fälle von der in der Einleitung dieses Vertrages geschilderten wesentlich verschieden ausfällt. Gerade bei uns in *Deutschland* ist das Ansehen der Mathematik, das noch im Aufklärungszeitalter recht hoch war, unter dem dann einsetzenden Einfluß von Romantik und Humanismus stark zurückgedrängt worden, ganz im Gegensatz etwa zu *Frankreich*, wo die hohe Bewertung der Mathematik und der Mathematiker durch NAPOLEON noch heute nachklingt, und wo übrigens in der Tat gar mancher Mathematiker zu einer führenden Stellung im öffentlichen Leben gelangt ist, so wie bei uns in früherer Zeit etwa LEIBNIZ.

Wenn ich nach dieser historischen Digression auf mein eigentliches Thema zurückkomme, so darf ich jetzt voraussetzen, daß wir uns darüber klar sind, *welche Mathematik gemeint und welche nicht gemeint ist.* Gemeint ist die Mathematik im Platonischen Sinne, also als eine *Wissenschaft des Geistes*, und nicht gemeint ist die Mathematik als eine *Fähigkeit des Rechnens und Vermessens.*

Und wenn ich nun sagen soll, welches das primum movens ist, das mich zu dieser Wissenschaft hingezogen und mich für mein Leben in ihren Bann geschlagen hat, so werden Sie die Antwort voraussehen.

Es ist der in uns Menschen tief eingewurzelte *Trieb zur Erkenntnis der Wahrheit*, der in der Mathematik deshalb seine reinste Erfüllung findet, weil es hier nicht bei dem rein *subjektiven* Erkennen oder Erschauen der Wahrheit bleibt, sondern weil diese Wahrheit durch *objektive*, für alle Zeiten Gültigkeit behaltende *Beweise* erhärtet wird.

Dies Letztere ist das eigentlich Entscheidende. Es ist in der Tat in *keiner* von der Mathematik verschiedenen Wissenschaft der Fall. Nicht in der *Philosophie*, in der erfahrungsgemäß immer wieder ein System von „Wahrheiten“, mögen sie mit noch so stichhaltig erscheinenden sogenannten „Beweisen“ versehen und als nunmehr endgültige, objektive Erkenntnis verkündet worden sein, durch ein neues ihm widersprechendes oder an ihm vorbeigehendes System abgelöst wird. Nicht in der *Physik*, in der die dauernde Vervollkommnung unserer Experimentiertechnik immer wieder neue Phänomene aufzeigt, zu deren Erklärung die bisher als gültig angenommenen Gesetze umgestoßen oder modifiziert werden müssen. Und ebenso nicht in den *anderen Naturwis-*

senschaften sowie in den völlig anders gearteten *philologischen, historischen, juristischen* und *theologischen Wissenschaften.*

Es liegt mir fern, hiermit ein herabsetzendes Urteil über Wert und Bedeutung aller dieser von der Mathematik verschiedenen Wissenschaften fällen zu wollen — ein Fehler, den ich vielleicht in meiner Jugend aus reiner, übermäßiger Begeisterung für die Mathematik manchmal begangen habe. Ganz im Gegenteil: Je mehr ich im Lauf der Jahre durch meinen Lebensweg in der universitas litterarum Einblick in die anderen Wissenschaften nehmen durfte, um so mehr bin ich zu der Überzeugung gekommen, daß sie alle von höchstem Interesse sind; so sehr, daß es mir oft schwergefallen ist, nicht meine eigene Wissenschaft beiseite zu legen und mich ganz in eine andere zu vertiefen.

Meine Wahl ist *deshalb* auf die Mathematik gefallen, weil in mir schon in frühester Jugend der *Trieb zur Erkenntnis objektiver, unumstößlich gültiger Wahrheiten* so stark war, daß er alle anderen Interessen in den Schatten stellte. Sie werden mir zugeben müssen, daß es bei dieser Veranlagung für mich keine andere Wahl gab.

Wenn ich nun aber heute auch sagen soll, was mich so lange Jahre an diese Wissenschaft derart gefesselt hat, daß ich jeder späteren Versuchung zum Abschweifen widerstanden habe, so reicht die gegebene Begründung — der Charakter der Mathematik als der *reinsten* Wissenschaft — dazu *nicht* aus. Es sind andere Momente hinzugekommen, die eigentlich den gewichtigsten Teil dessen darstellen, was ich heute hier ausführen will. Darüber will ich in den folgenden beiden Teilen dieses Vertrages sprechen.

II. Mathematik als Kunst

Oft habe ich hören müssen, besonders von Damen:
„Ihr Mathematiker seid alle kalte, nüchterne *Verstandesmenschen*! Wie könnt ihr nur Befriedigung in einer Tätigkeit finden, die nichts für das *Herz*, nichts für die *Seele* bietet?“

Hierzu möchte ich aus meiner eigenen, tiefsten Erfahrung bekennen, daß ich in der Mathematik, *neben* ihrem geisteswissenschaftlichen Charakter und *über diesen hinaus*, in immer steigendem Maße die *Merkmale einer Kunst* und damit sehr viel für Herz und Seele sehe.

Wenn ich hier von *Kunst* rede, so denke ich nach meiner persönlichen Veranlagung vornehmlich an die *Musik*. Ich bin jedoch überzeugt, daß das, was ich jetzt sagen will, in ähnlicher Weise auch auf den Vergleich der Mathematik mit anderen Künsten zutrifft.

Die Tatsache, daß eine Reihe von hervorragenden Mathematikern gleichzeitig hochmusikalisch gewesen sind, hat schon mehrfach Anlaß gegeben, sich

Gedanken darüber zu machen, ob *überhaupt* und, wenn ja, *welche* inneren Beziehungen zwischen diesen beiden Veranlagungen bestehen. Man hat da mancherlei *Erklärungsversuche* gemacht.

1. Solch ein ganz primitiver Versuch liegt in der Feststellung, daß das *Reich der Töne* von den *mathematischen Gesetzlichkeiten der Harmonielehre* beherrscht wird. In der Tat hat die Pythagoreische Entdeckung, daß die harmonischen Intervalle durch einfache Verhältnisse ganzer Zahlen, nämlich der Schwingungszahlen, beschreibbar sind, den Anstoß zur *Zahlenlehre der Pythagoreer* gegeben, die einerseits eine für diese Frühzeit der griechischen Kulturepoche beachtliche Reihe von interessanten *mathematischen* Ergebnissen über die ganzen Zahlen enthält, andererseits nach der *metaphysischen* Seite hin in der bekannten These gipfelt: „Alles ist Zahl."

Aber dieser *arithmetische Charakter des Tonmaterials* hat doch ganz und gar nichts mit dem *künstlerischen Charakter eines Tonwerkes* zu tun. Man muß schon tiefer schürfen, um dem Wesen der Sache näherzukommen.

2. Andere haben gesagt, daß das *kunstvolle Gefüge einer mehrstimmigen Fuge* zu vergleichen sei mit dem *kunstvollen Gefüge eines mathematischen Beweises*. Dies scheint mir der Sache schon einen Schritt näherzukommen. Sicherlich wird ein Fugenkomponist während seiner Arbeit ähnliche Freude daran haben, sein Kunstwerk unter Einhaltung aller Regeln der Harmonie und musikalischen Form zu gestalten, wie ein Mathematiker beim Entwickeln eines Beweises unter Einhaltung aller Regeln des logischen Schließens und des mathematischen Rechnens. Und dasselbe gilt wohl auch für das Hören einer Fuge bzw. Kennenlernen eines Beweises.

Aber auch dieser Vergleich erscheint mir noch nicht tief genug angesetzt.

3. Niemand wird bestreiten, daß ein nach allen Regeln der Kunst gesetztes Tonstück noch lange kein Kunstwerk im echten Sinne zu sein braucht. Was etwa eine BACHsche Fuge zum unvergänglichen Kunstwerk macht, ist nicht die strenge oder gar raffinierte Einhaltung dieser Regeln, sondern die über dem Ganzen liegende *kristallklare Schönheit* und die das Ganze durchziehende *gewaltige Dynamik*. Die *tiefe Seele eines Bach*, der alle seine Werke durchziehende, mit Worten gar nicht faßbare, unendlich reiche *musikalische Gehalt*, der sofort an die Seele rührt, wenn auch nur ein paar Takte erklingen, wäre auch zum Ausdruck gekommen, wenn Bach in einer *anderen* Zeit gelebt und dann wohl in *deren Form* komponiert hätte. Dieser musikalische Gehalt hängt *nicht* an der kunstvollen Fugen*form*.

Ganz analog sage ich: Auch ein in der *Sprache der Mathematik geschriebener Beweis*, bei dem alle Regeln des Schließens und Rechnens getreulich eingehalten sind, braucht noch lange keine *Mathematik* im echten Sinne des Wortes zu sein. In der Ausdrucksweise der Mathematik selbst formuliert: *Dafür, daß eine solche Komposition Mathematik ist, ist ihre logische Rich-*

tigkeit zwar notwendig aber keineswegs hinreichend. Es muß vielmehr das Analogon der musikalischen *Schönheit* und *Dynamik* hinzukommen.

Beides gibt es in sehr hohem Maße auch in der Mathematik, entgegen der Vorstellung von deren trockenem und nüchternem Charakter. Das müssen mir diejenigen unter Ihnen, die es nicht aus eigenem Erlebnis *wissen* — und das dürfte wohl die Mehrzahl sein —, schon *glauben.* Die *mathematische Schönheit und Dynamik* erschließt sich nämlich erst, wenn man völlig über dem rein Technischen, Handwerksmäßigen steht, wenn man nicht mehr mit der nun einmal spröden Form mathematischer Ausdrucks- und Schlußweise zu ringen hat. Die Mathematik ist wegen dieser Form eine sehr *exklusive Kunst*, so wie etwa die letzten Sonaten und Quartette BEETHOVENs, in denen man das Erlebnis von etwas Schönem, Gewaltigem erst auf Grund einer sehr gründlichen musikalischen Erziehung und selbst dann meist erst als ausgereifter Mensch und nach längerer Beschäftigung mit dem Kunstwerk haben kann.

Nebenbei gesagt ist für das musikalische Erlebnis auch bei einfacheren Kunstwerken — an Stelle der schweren Bachschen Fugen und spätbeethovenschen Sonaten und Quartette — eine Vorbildung im Hören und Verstehen notwendig; nur daß wir diese meist schon durch Erziehung und Gewöhnung besitzen. Eine *MOZART*sche Symphonie oder ein *SCHUBERT*sches Lied würden sicherlich auf einen Zeitgenossen Platons oder gar einen alten Germanen bei weitem nicht dieselbe Wirkung ausgeübt haben wie heute auf uns, zum mindesten nicht beim ersten Hören.

Nachdem ich so klargemacht habe, worin ich die Analogie zwischen Mathematik und Kunst sehe, möchte ich diesen Vergleich in einigen Richtungen ausspinnen, um dabei eine Reihe von in meinen Augen wesentlichen Feststellungen über die Mathematik herauszuarbeiten.

1. Freiheit des Mathematikers zu rein künstlerischer Gestaltung. Auch darin hebt sich die Mathematik vor den anderen Wissenschaften heraus, daß in ihr das künstlerische Element nicht durch Rücksicht auf die rauhe Wirklichkeit gehemmt ist. Schon in dieser Hinsicht ist der Mathematiker vergleichbar mit einem *frei* nach, seiner *Begabung* und *Eingebung* gestaltenden Künstler.

Etwa in der *Physik* kommt es immer wieder vor, daß nach Entdeckung eines neuen Phänomens eine mit allen Kriterien der Schönheit ausgestattete Theorie durch eine ganz häßliche ersetzt werden muß. Zum Glück zeigt sich dann allerdings im Verlauf der weiteren Entwicklung meist, daß diese häßliche Theorie nur ein Provisorium war, und daß in Wahrheit viel einfachere, elegante Gesetze gelten. Im großen und ganzen gesehen bewahrheitet sich in der Physik eben doch die alte LEIBNIZsche Idee von der *prästabilierten*

Harmonie.

In der *Mathematik* ist diese Idee in sehr vielen Fällen der *Führer zur Wahrheit.* Man hat ein ungelöstes Problem vor sich und sieht zunächst gar nicht, wie die Lösung lauten, noch weniger, wie man sie finden könnte. Da kommt man auf den Gedanken, sich einmal auszumalen, wie die gesuchte Wahrheit lauten müßte, wenn sie *schön* wäre. Und siehe da, zunächst zeigen Beispiele, daß sie *wirklich* so zu lauten scheint, und dann gelingt es, die Richtigkeit des Erschauten durch einen allgemeinen Beweis zu erhärten.

2. Intuitives Schaffen in der Mathematik. In dieser eben dargelegten *intuitiven* Art des Schaffens ähnelt der Mathematiker ebenfalls dem Künstler. Man denkt gemeinhin, daß mathematische Wahrheiten durch logische Denkprozesse gewonnen werden. Das ist aber keineswegs immer der Fall. Gerade die größten und auf lange Zeit richtungweisenden mathematischen Entdeckungen sind zuerst mit dem geistigen Auge *erschaut* worden, so wie dem schaffenden Künstler sein Werk schon vor Beginn der Arbeit als Ganzes vor Augen steht. Und wie beim Künstler die Einzelgestaltung nach den Regeln der Kunst erst auf Grund dieser Gesamtschau möglich ist, so setzt beim Mathematiker die *logische* Durchführung des *Beweises* erst nach dem *Erschauen der Wahrheit* ein. Richtlinie für dieses Erschauen einer mathematischen Wahrheit ist, wie gesagt, in vielen Fällen die Schönheit, der harmonische Zusammenklang in sich und mit bereits Bekanntem.

Daß das so ist, mögen Sie mir glauben. Ich habe es selber erlebt, gerade bei denjenigen meiner mathematischen Arbeiten, die von der Fachwelt am meisten beachtet worden sind. Und gerade darum kann ich die Vorstellung von dem trockenen und nüchternen Charakter der mathematischen Forschung aus tiefster Überzeugung als nicht der Wirklichkeit entsprechend bezeichnen.

3. Schönheit im Kleinen und im Großen. In der Musik gibt es verschiedene Stufen von Schönheit. Ein einzelner Ton oder Akkord hat schon an sich einen Wohlklang. Auf höherer Ebene liegt dann die Schönheit einer Melodie oder einer Akkordfolge, und noch viel höher liegt die Schönheit eines ganzen aus solchen Einzelteilen aufgebauten Satzes oder gar eines mehrsätzigen Werkes. Hier kommt zu der *Harmonie im Kleinen* die *Harmonie im Großen* hinzu, die zum Beispiel empfindlich verletzt wäre, wenn man dem ersten Satz von BEETHOVENs neunter Symphonie ein Menuett von HAYDN folgen ließe. Alles dies gibt es ganz entsprechend auch in der Mathematik.

a) Eine *einzelne Formel* oder die *Formulierung einer einzelnen mathematischen Aussage in Worten* kann auf verschiedene Arten ausgedrückt werden. Man hat die Wahl der Bezeichnungen für die mathematischen Größen, die Anordnung der einzelnen Glieder oder Satzteile in ihrer zeitlichen Folge und auch in ihrer räumlichen Gruppierung sowie die Abstufung durch mehr oder weniger nachdrückliches Hervorheben in der Hand. Wir empfinden im allgemeinen eine Formulierung um so schöner, je *klarer, übersichtlicher* und *prägnanter* sie ist.

Erstes Beispiel. Die Formel für eine *dreireihige Determinante* schrieb man früher etwa in der Form:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Sie kommt aber klarer und durchsichtiger zum Ausdruck, wenn man sie in der modernen Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{rrrrrr} & a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{12}a_{21}a_{33} \end{array} \right\}$$

schreibt. In der alten Form ist nur mühsam zu erkennen, welchen Platz jeder der neuen Buchstaben rechts in dem vorgegebenen quadratischen Schema links einnimmt. In der neuen Form ist dieser Mangel dadurch beseitigt, daß die neun gegebenen Größen statt durch die *neun* ersten Buchstaben des Alphabets durch nur *einen* solchen mit zwei angehängten Indizes bezeichnet sind (die eigentlich durch ein Komma voneinander getrennt sein sollten, da sie nicht etwa zweistellige Zahlen bedeuten). Der erste Index gibt jeweils die Nummer der Zeile, der zweite die der Spalte an, in der die betr. Größe in dem quadratischen Schema links steht. Und rechts sind die sechs auftretenden Tripelprodukte in sich und untereinander gesetzmäßig angeordnet, nämlich so, daß die ersten Indizes in jedem Tripel 1, 2, 3 lauten; die zweiten haben dann gerade alle sechs möglichen Anordnungen der drei Zahlen l, 2, 3, wobei noch ein hier nicht zu diskutierendes Gesetz für die Vorzeichen hinzukommt. In dieser Weise geschrieben ist die Formel leicht zu merken, und ihre Struktur tritt klar hervor.

Die Wahl einer guten, suggestiven Bezeichnung und Anordnung der Glieder in den Formeln der Algebra und Analysis ist, wie schon LEIBNIZ und nach ihm KRONECKER betont haben, nicht nur aus Gründen der Ästhetik (hier Klarheit und Durchsichtigkeit) erwünscht, sondern ermöglicht in schwierigen Fällen sehr häufig erst die Erkenntnis von sonst nicht hervortretenden Wahrheiten (hier zum Beispiel das Gesetz, nach dem höherreihige Determinanten gebildet sind). Die mathematische Welt hat sich heute diese damals durchaus nicht selbstverständlichen Gesichtspunkte weitgehend zu eigen gemacht, sehr zu Gunsten der Klarheit und Durchsichtigkeit ihrer Formelsprache, wenn auch im einzelnen noch manchmal dagegen verstoßen wird.

Zweites Beispiel. Ich formuliere die Aussage:

Es ist $a = b^2+c^2$, wenn a Primzahl, $a = 4d+1$; dabei sind b, c, d natürliche Zahlen, $b < c$, und b, c eindeutig bestimmt.

Sie werden zunächst gar nicht erkennen, was ich eigentlich sagen will, und bei genauerem Nachdenken feststellen, daß hier Voraussetzung und Behauptung so miteinander verquickt sind, und daß die logische Struktur der Aussage so wenig herausgearbeitet ist, daß die Klarheit, Durchsichtigkeit und Prägnanz empfindlich beeinträchtigt ist.

Was gemeint ist und worauf der Nachdruck liegt, werden Sie sofort aus der folgenden Formulierung derselben Aussage erkennen:

Jede Primzahl p, die von der Form $p = 4n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n ist, läßt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen x, y darstellen, also in der Form

$$p = x^2 + y^2.$$

Dabei sind die beiden natürlichen Zahlen x, y voneinander verschieden und, von der Reihenfolge abgesehen, durch die Primzahl p eindeutig bestimmt.

Hier ist zunächst schon die Bezeichnung suggestiver:

p	Primzahl,
n	natürliche Zahl,
x, y	die gesuchten Unbekannten.

Ferner beginnt die Aussage mit der Formulierung des Gegebenen (Voraussetzung) und unterläßt auch nicht, durch das Wort „jede“ den Nachdruck darauf zu legen, daß man die Primzahl p von der Form $4n + 1$ ganz beliebig wählen darf, daß es sich also um einen Satz handelt, der für *alle* Primzahlen dieser Form gilt. Sodann ist die eigentliche Aussage (Behauptung) klar zerlegt in ihre beiden wesentlichen Teile, die Existenzaussage („läßt sich“) und die Eindeutigkeitsaussage („sind . . . eindeutig bestimmt“). Und dies alles ist erreicht, ohne daß dem Fluß der suggestiven Sprache des täglichen Umgangs durch übertriebene, von mathematischen oder logischen Gesichtspunkten beherrschte Formalisierung Gewalt angetan ist.

Nun habe ich zwar dieses Beispiel nicht aus der Fachliteratur entnommen, sondern es mir für diesen Vortrag mit einer dem Inhalt nach möglichst allgemeinverständlichen Aussage zurechtgelegt. Die ästhetischen Mängel jedoch, die ich an ihm aufzeigen wollte, sind keineswegs meiner Phantasie entsprungen. Die moderne Tendenz zu allzustarker mathematischer und logischer Formalisierung mathematischer Sachverhalte, zu weitestgehender Zurückdrängung der Sprache des täglichen Umgangs aus mathematischen Aussagen, hat es leider mit sich gebracht, daß derartige und andere Verstöße gegen die Schönheit von Bezeichnung und Formulierung heute recht häufig sind, vor allem in der *nordamerikanischen* Literatur, die heutzutage wohl mehr als die Hälfte der mathematischen Weltliteratur ausmacht. Dort sprechen allerdings auch andere Gesichtspunkte mit, zum Beispiel die Rationalisierung und Ökonomie der Drucktechnik. Aber es ist doch wohl so, daß dort das Gefühl für die *ästhetischen* Werte der Mathematik, die nach meiner Ansicht vor rein *praktischen* Gesichtspunkten den unbedingten Vorrang haben sollten, weniger ausgeprägt ist als in den europäischen Ländern.

Ich habe diesen Abschnitt über die *Schönheit im Kleinen* der Mathematik breiter ausgeführt, weil es mir hier auch im Rahmen dieses allgemeinverständlichen Vortrags möglich erschien, einige Merkmale — wenn auch nicht die am tiefsten liegenden — für die von mir empfundene, vielen vielleicht unerwartete Schönheit in der Mathematik an ihren Gegenständen selbst aufzuzeigen und zu erläutern. In den folgenden beiden Abschnitten muß ich es mir hier leider versagen, eine entsprechende explizite Erläuterung an der Sache selbst für die auf höherer Stufe liegende *Schönheit im Großen* der Mathematik zu geben; denn dazu müßte ich einen mathematischen Beweis oder gar eine mathematische Theorie im einzelnen durchsprechen. Der Vergleich mit der Kunst wird es mir aber ermöglichen, wenigstens anzudeuten, worin ich die Merkmale dieser Schönheit sehe.

b) Auch ein *einzelner Beweis* kann auf sehr verschiedene Arten dargestellt werden. Hier kommen zu den Ansprüchen an Klarheit, Durchsichtigkeit und Prägnanz noch die Forderungen nach *Zielstrebigkeit* und *Eleganz* hinzu.

Was die *Zielstrebigkeit* betrifft, so meine ich damit die Vermeidung von langatmigen, unwesentlichen Umschweifen. Am Analogen der Musik erläutert, unterscheidet sich BEETHOVEN dadurch vorteilhaft von etwa SCHUMANN, daß er die Durchführung seiner Themen nicht unnötig lange ausspinnt, sich nicht, den Faden verlierend, frei treiben läßt, sondern den durch die gewählte Kunstform und die künstlerische Absicht bestimmten Weg derart gerade und beherrscht vorwärts geht, *daß man in jedem Augenblick weiß, wo man steht, und das Ziel vor Augen sieht.* Genau so sollte auch die Durchführung eines mathematischen Beweises gestaltet sein.

Und was die *Eleganz* betrifft, so liegt ja ihr ästhetischer Charakter auf der Hand. Genau wie in der Kunst hat man sich jedoch auch in der Mathematik vor *übertriebener* Eleganz zu hüten, die zwar für den Augenblick blendet, aber den eigentlichen künstlerischen bzw. mathematischen Inhalt in den Schatten stellt. Genau wie in der Kunst sollte auch in der Mathematik der *Inhalt* über der *Form* stehen. Ich komme hierauf am Schluß dieses zweiten Teils meines Vertrags noch einmal zurück.

c) Als höchste Stufe haben wir in der Mathematik die *Schönheit einer ganzen Theorie*, deren einzelne Bestandteile (Ausgangspunkt, Fragestellung, grundlegende Definitionen, vorbereitende Sätze und Hauptsätze nebst ihren Beweisen) durch die Klarheit ihrer Formulierungen, durch ihre gegenseitigen Beziehungen, durch ihre Tragweite, ihre Zielstrebigkeit, durch die Wucht ihrer

Überzeugungskraft und durch ihre Verallgemeinerungsfähigkeit einen lebendigen *harmonischen Organismus* bilden. Mathematiker, die es fertigbringen, eine solche einheitliche Theorie nicht nur in rohen Umrissen zu konzipieren, sondern auch in ihren Einzelheiten zu gestalten, von der Erfindung einer adäquaten Bezeichnungsweise angefangen, über die Entwicklung der adäquaten Beweismethoden bis zur Lösung der Fragestellungen, die Anlaß für die Schöpfung der Theorie waren, und unter Umständen weiterer Probleme, zu denen die Theorie vielleicht in überraschender Weise den Zugang öffnet — Mathematiker dieser Art, wie etwa LEIBNIZ, der Schöpfer der Differential- und Integralrechnung — ich sage absichtlich Schöpfer, nicht nur Entdecker — , sind mit den Schöpfern monumentaler Kunstwerke, einem BEETHOVEN, GOETHE, MICHELANGELO, zu vergleichen.

LANDAU, ein hervorragender und überaus fruchtbarer Mathematiker unseres Jahrhunderts, dem allerdings der ästhetische Gesichtspunkt völlig fern lag, hatte doch für dies letztere, die *Schönheit im Großen* oder auch die *Dynamik* in der Mathematik, so viel Sinn, daß er einen seiner riesenhaften, aus unzähligen Hilfssätzen zusammengesetzten Beweise für ein wichtiges mathematisches Theorem ein „*großes Drama in drei Akten*“ nannte, „*das sich von anderen Dramen dadurch unterscheidet, daß in ihm etwas bewiesen wird*“. Dieser echt Landausche Zusatz, mit seiner abfälligen, wenn auch wohl nur scherzhaft gemeinten Kritik an der dramatischen Kunst, übersieht in meinen Augen die Tatsache, daß in guten Dramen in einem tieferen Sinne ebenfalls „etwas bewiesen wird“, indem nämlich die Kunst des Dichters seelische Wahrheiten überzeugend vor Augen führt. Der Landausche Vergleich, zwischen schöpferisch gestaltender Mathematik und Dramatik, ist mir aber als *solcher* aus dem Herzen gesprochen. Bringt er doch gerade *das* zum Ausdruck, was in meinen Augen ein sehr wesentlicher Zug wirklich großer mathematischer Schöpfungen ist, nämlich ihren dynamischen, mit reißenden Charakter.

4. Mitteilung von Mathematik. Ein bedeutender Mathematiker des vorigen Jahrhunderts hat einmal gesagt:
„*Die Mathematik ist eine großartige Unterhaltung des menschlichen Geistes mit sich selbst.*“

Das ist gewiß richtig. Aber ich glaube, daß es das Wesen der Mathematik ebensowenig vollständig wiedergibt, wie wenn ein Künstler seine Werke nur in dem Gedanken schafft, *sich selbst* damit zu erbauen. Das wahrhaft Große an der Kunst ist ja doch gerade, daß sie eine Sprache ist, die von Menschenseele *zu Menschenseele* spricht. Und so ist es auch mit der Mathematik. Ein *echter* Mathematiker, der etwas Schönes gefunden hat, spürt in sich den unwiderstehlichen Drang, diese seine Entdeckung *anderen mitzuteilen*. Für die eigene Erbauung genügt in den meisten Fällen schon die *rohe, intuitiv erschaute* Form und der unbehauene Beweis. Für die Mitteilung an andere aber muß, ebenso wie in der Kunst, das Werk erst in eine Form *vollendeter Schönheit* gegossen sein.

Besser als der eben angeführte Ausspruch gefällt mir daher das von dem großen Mathematiker JACOBI ebenfalls im vorigen Jahrhundert geprägte Wort:
„*Die Mathematik dient einzig und allein der Ehre des menschlichen Geistes.*"

Denn dieser Ehre wird erst durch den Widerhall der mathematischen Entdeckungen und Erkenntnisse in der kulturellen Welt gedient.

Ich habe nun vorher gesagt, daß die *Wahrheit allein* zwar *notwendig* aber nicht *hinreichend* für echte Mathematik ist. Wir wissen jetzt, was noch hinzukommen muß: Die *schöne Form* und die *harmonische Zusammenfügung* zu einem *organischen* Ganzen.

Wie in der Kunst kann auch in der Mathematik der schönste Gedanke durch eine häßliche äußere Form entstellt werden. Dies gilt sowohl für den schaffenden Mathematiker als auch für den, der mathematische Sachverhalte in Vortrag, Abhandlung oder Buch anderen mitteilt. Ähnlich, wie ein noch so schönes Musikstück durch eine schlechte Wiedergabe seine Wirkung als Kunstwerk völlig verfehlen kann, liegt das auch bei mündlichem Vortrag oder schriftlicher Darlegung mathematischer Wahrheiten.

Der Mathematiker muß demnach, wenn er seine eigenen Erzeugnisse oder die von anderen seiner Umwelt mitteilt, größten Wert auf die ästhetischen Gesichtspunkte legen. Er darf *keineswegs* die folgende Einstellung haben, die man leider, mehr oder weniger ausgesprochen oder ausgeprägt, gelegentlich antrifft: „*Die Wahrheit und Richtigkeit dessen, was ich vortrage oder schreibe, spricht für sich selbst. Es ist Aufgabe meiner Zuhörer oder Leser, sie herauszuhören oder sich klarzumachen. Ich selbst brauche über die bloße Mitteilung hinaus nichts zu tun, um das Verständnis der anderen zu erzielen.*"

Man denke sich einen Pianisten, der mit *dieser* Einstellung vor sein Publikum tritt, oder einen Komponisten, der sein Werk nur so weit durchgestaltet, daß *er selbst* das heraushört, was ihm bei der Komposition vorgeschwebt hat!

Weil es zum innersten Wesen der Mathematik gehört, daß sie *mitgeteilt* werden will, und weil sie zudem eine so *exklusive*, schwer zugängliche Kunst ist, ist es in meinen Augen die Pflicht jedes Mathematikers, daß er sein Bestes dazu tut, anderen das Tor zum Verständnis zu öffnen. Vernachlässigung dieser Pflicht wäre Verstoß gegen eines der *Lebensgesetze* der Mathematik, Verkennung ihres nach allem Gesagten wohl deutlich hervorgetretenen Charakters als ein blutvolles *Lebewesen*, das von einem starren, toten Gebilde himmelweit verschieden ist.

5. Tragik des Mathematikers durch Streben nach Formalisierung. Wie schon gesagt, darf in der Mathematik, ganz entsprechend wie in der Kunst, die äußere Form nicht so in den Vordergrund treten, daß durch sie der eigentliche mathematische Inhalt übertönt wird. Hier liegt für jeden schaffenden und gestaltenden Mathematiker eine große Gefahr, ja eine inhärente Tragik seiner Existenz.

Betrachten wir noch einmal den mathematischen Gestaltungsprozeß! Von einer ursprünglichen intuitiv konzipierten Idee aus führt er über einen ersten ausgearbeiteten Entwurf durch vielfache weitere Überarbeitung, Verbesserung, Ergänzung, Umgestaltung schließlich zur endgültigen Gestalt.

Bei jedem dieser Schritte geht nun notwendig etwas von dem ursprünglichen Leben, von der intuitiven Erfaßbarkeit, von der dem Ganzen innewohnenden Dynamik, kurz von der Schönheit im Großen verloren, während die Schönheit im Kleinen vielleicht gewinnt. Treibt man diesen Prozeß bis zum äußersten, so bleibt schließlich ein *blutloses, totes Gebilde* von der nüchternen Struktur: *Definition, Satz, Beweis* in vielfacher Wiederholung; und es ist damit in eklatanter Weise das schon genannte *Lebens*gesetz der Mathematik verletzt.

Musterbeispiel für diesen lebenslosen Endzustand ist die zusammenfassende Darstellung des mathematischen Wissens der klassischen griechischen Epoche in EUKLIDS „Elementen“, einem mathematischen Lehr- und Handbuch, das für den Belehrung oder Information Suchenden maßlos langweilig und ermüdend ist.

Damit soll nichts Herabsetzendes über den hohen wissenschaftlichen Wert dieses berühmten Zeugnisses griechischen Geisteslebens gesagt sein. Dieser steht, nachdem das Werk bis in unsere Zeit hinein beherrschenden Einfluß auf die Gestaltung des mathematischen Schulunterrichts gehabt hat — in England heißt das Schulfach Mathematik noch heute gelegentlich Euclid —, auch heute noch in hohem Kurs, vor allem bei denjenigen Mathematikern, die an den logischen Grundlagen ihrer Wissenschaft und axiomatischen Untersuchungen in ihr interessiert sind. Für diese ist gerade die hier bis zum äußersten getriebene *Formalisierung* und die durch sie erreichte *Form* eigentlicher Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtung, ähnlich wie etwa die Harmonielehre für einen Musiktheoretiker, und sie finden in *dieser* Sphäre beim Studium von Euklids Elementen Wohlklänge, die an dem auf den mathematischen *Inhalt* gerichteten Leser vorbeigehen.

Vom Standpunkte des mathematischen Inhalts betrachtet, der mir hier vorschwebt, erinnert das Werk Euklids an ein Musikstück, das strengstens nach einem vorgegebenen Kanon von sehr vielen einengenden Regeln geschrieben ist, und zwar so, daß sich beim Hören nur noch das Erfülltsein aller dieser Regeln aufdrängt, während jede melodische oder dynamische Linie zugunsten der ausnahmslosen Einhaltung aller Regeln geopfert ist.

Der Zug zu einer derartigen, in der äußeren Form vollendeten, aber innerlich blutleeren Gestaltung, nach Formalisierung und Axiomatisierung nicht um ihrer selbst willen, sondern auch dort, wo der Nachdruck auf der informierenden oder belehrenden Vermittlung des Inhalts liegt, ist seit Euklids Zeiten erst in diesem Jahrhundert wieder aufgelebt. Höchste Blüten treibt dieses Bestreben, wie schon gesagt, gegenwärtig in Nordamerika. Aber auch bei uns greift es, teils als Folge des Lebenswerkes unseres großen HILBERT, der in seinen „Grundlagen der Geometrie“[3] direkt an Euklid anknüpfte, teils auch als Rückwirkung der amerikanischen Geschmacksrichtung auf die europäische Mathematik, immer mehr um sich. Ich sehe darin eine Tragik, die jedem Mathematiker innewohnt: Der an sich gesunde Trieb, das Erschaute und Erkannte formvollendet zu gestalten, endet, wenn man ihn sich bis zur letzten Konsequenz auswirken läßt, mit dem völligen Abtöten alles Lebendigen in dem ursprünglich von sprühendem Leben durchströmten eigenen Werk. In diesem Euklidischen Endzustand hat das Werk dann völlig die Fähigkeit verloren, andere zu erbauen und Quelle neuen wissenschaftlichen Lebens zu werden.

Der Mathematiker sollte daher seinem Gestaltungs- und vermeintlichen Verbesserungstrieb weise Zügel anlegen, und er sollte den Mut haben, ihm ein entschlossenes Halt zu gebieten und sein Werk auch trotz der oder jener vermeintlichen Unvollkommenheit der Öffentlichkeit zu übergeben, ehe er seinem eigenen geistigen Kinde den Todesstoß versetzt hat. Es gilt hier wie in der Kunst: Manches ist vielleicht gerade deshalb schön, weil es *noch nicht* den zwar *vollendeten*, aber *kalten* Zustand *klassischer Schönheit* erreicht hat.

III. Mathematik als Macht

Ich sagte am Schluß des ersten Teils dieses Vertrages, daß zu dem Charakter der Mathematik als der *reinsten Wissenschaft* andere Momente hinzugekommen sind, die es vermocht haben, daß ich mich für mein Leben an diese Wissenschaft gebunden habe. Über eines von diesen, die *Schönheit der Mathematik*, habe ich im zweiten Teil in großer Ausführlichkeit gesprochen. Über ein weiteres will ich jetzt reden, kann mich aber dabei etwas kürzer fassen. Denn während

„Die Mathematik als Kunst“

eine These ist, die wohl den meisten Menschen zunächst als paradox erscheint, ist

„Die Mathematik als Macht“

eine Realität, die auch dem dieser Wissenschaft Fernstehenden auf Grund dessen, was er über ihre *Anwendungen* weiß, sofort einleuchten wird.

[3] 7. Auflage, Leipzig 1930.

Durch die eben gegebene Erläuterung ist, wenigstens in erster Annäherung, klargestellt, was ich meine, wenn ich jenes weitere Moment als die *Macht der Mathematik* bezeichne. Vielleicht wird man sich nur etwas an der Wahl des Wortes „Macht“ stoßen. Ich habe Anlaß zu der Annahme, daß ich hinsichtlich dieses Wortes mißverstanden werden könnte. Denn man hat mich verschiedentlich danach gefragt, wie ich es verstehe, und von einer Seite wurde mir sogar vorgeschlagen, statt „Macht“ doch lieber gleich „Versklavung“ zu sagen. Das sei ferne von mir! An diese Art von *Macht über andere*, die zur Versklavung führt, habe ich nicht im entferntesten gedacht.

Ich habe vielmehr genauestens in mir selbst nach den seelischen Erlebnissen gesucht, die mir die Beschäftigung mit der Mathematik gebracht hat; und da habe ich neben dem Erlebnis der *Begeisterung für die objektive, ewige Wahrheit* und dem Erlebnis der *Freude an der kristallklaren oder berauschenden Schönheit* noch ein Drittes gefunden, nämlich das Erlebnis des *Vollgefühls der eigenen Kraft*, wenn es mir gelungen war, eine allgemeine Methode zu schaffen, nach der man ein offenes Problem lösen und alle weiteren in Zukunft etwa auftauchenden speziellen Fragen über den behandelten Gegenstand beantworten kann.

Stellen Sie sich etwa vor, was ein Leibniz empfunden haben muß, als es ihm gelungen war, seinen allgemeinen *Infinitesimalkalkül* aufzustellen und zu entwickeln! Vorher mußte man, wie uns das schon Archimedes an zahlreichen Einzelproblemen gelehrt hat, jedes einzelne Inhaltsproblem, Tangentenproblem, Maximalproblem nach einem besonderen Verfahren ansetzen und jedesmal eine für gerade dies Problem zugeschnittene, oft schwierige Rechnung durchführen, um zur Lösung zu gelangen. Leibniz gab einen *allgemeinen Kalkül*, mit dem man alle diese klassischen, für die Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik so wichtigen Probleme in völlig einheitlicher, überaus einfacher und eleganter Weise lösen konnte, und der darüber hinaus für jedes in aller Zukunft auftretende derartige Problem ein sicher und schnell zum Ziel führendes Lösungsrezept an die Hand gab.

Ich meine also nicht die Macht über andere, sondern die *Macht über die spröde Materie*, eine Materie, die im Falle der Mathematik nicht in der Außenwelt, vielmehr in der *Begriffswelt unseres Denkens* liegt.

Ganz allgemein ist der *Trieb zur Macht* einer der häufigsten Beweggründe für das Aufwärtsstreben der Menschen. Ist er auf die *Macht über andere Menschen* gerichtet, so ist er eine große Gefahr für den Fortschritt und die Glückseligkeit der Menschheit. Ist er auf die *Macht über die äußere Materie* gerichtet, so wirkt er sich im Fortschreiten der *naturwissenschaftlichen Erkenntnis* und der *technischen Vervollkommnung* im allgemeinen zum Segen der Menschheit aus.

Beim Mathematiker ist er auf die *Macht über die Begriffswelt unseres*

Denkens gerichtet. Es ist eine allbekannte Tatsache, daß diese Macht die vielfältigsten und segensreichsten Anwendungen im Bereich der Naturwissenschaften und der Technik gestattet, ja daß Naturwissenschaften und Technik ohne eine hochausgebildete theoretische Mathematik heute überhaupt gar nicht mehr denkbar sind. Ich brauche darüber hier keine weiteren Worte zu verlieren.

Es ist aber auch eine Erfahrungstatsache, daß dem echten reinen Mathematiker diese Anwendungsmöglichkeiten seiner Wissenschaft gar nicht vorschweben, wenn er seinem Trieb zur Erkenntnis der Wahrheit, Gestaltung in vollendeter Form und Erlangung von Macht über die Begriffswelt des Denkens nachgeht.

Man soll dem mathematischen Forscher aus dieser *Weltabgewandtheit* keinen Vorwarf machen. Denn *erstens* ist die Mathematik als eine reine Geisteswissenschaft seit den Zeiten Platons ein so erhabener Bestandteil der menschlichen Kultur, daß der Mathematiker es nicht nötig hat, seine Existenz durch Hinweis auf oder Denken an die Anwendungsmöglichkeit seiner Wissenschaft in Naturwissenschaften und Technik zu rechtfertigen. Und *zweitens* lehrt die Erfahrung in reichem Maße, daß gerade Mathematiker von *dieser* auf das rein Geistige gerichteten Art durch die von ihnen aus lauterstem Idealismus gewonnenen Erkenntnisse die Naturwissenschaften und die Technik am entscheidendsten fördern. Man denke etwa an die RIEMANNsche *Geometrie*, die zwei Menschenalter später zur entscheidenden Grundlage der Relativitätstheorie und Kosmologie wurde, oder — um ein weniger oft angeführtes Beispiel zu nennen — an die von GAUSS im Rahmen seiner zahlentheoretischen Untersuchungen geschaffenen *komplexen Zahlen*, die in der heutigen Physik und insbesondere in der Elektrotechnik eine gar nicht mehr wegzudenkende Rolle spielen. Die meisten der Mathematik und theoretischen Physik Fernstehenden sind auch überrascht, wenn sie hören, daß der Physiker HEISENBERG wesentliche Anregung zu seiner Konzeption der *Quantenmechanik*, der Grundlage der Atomphysik, aus der Berührung mit dem Arbeitskreis über *abstrakte Algebra* der großen Göttinger Mathematikerin EMMY NOETHER geschöpft hat. Solche Beispiele ließen sich häufen.

Es gibt in neuerer Zeit den Berufstypus des *Industriemathematikers*, und während des letzten Krieges sind in allen beteiligten Ländern Mathematiker zu den verschiedenartigsten *technischen* Aufgaben herangezogen worden; nicht nur solche, deren Ausbildung von vornherein auf die Anwendungen ausgerichtet war, sondern auch solche, die vorher niemals an Anwendbarkeit oder bestimmte Anwendungen ihrer wissenschaftlichen Fähigkeiten und Ergebnisse gedacht hatten. Dabei hat sich etwas Überraschendes gezeigt: Im großen und ganzen waren die reinen Mathematiker den nur auf die Anwendungen gedrillten Industriemathematikern weit überlegen, nicht nur im

Ausmaß des Blickfeldes, das sie auf bisher unversuchte Ansätze und Methoden führte, sondern auch in der Einzeldurchführung der gestellten Aufgaben, bei der ihnen ihr souveräner Standpunkt dem rein handwerksmäßigen Kalkül gegenüber zugute kam. Die Macht, die man sich durch das Studium der *allgemeinen Methoden der theoretischen Mathematik* und die Beschäftigung mit ihr angehörigen tiefliegenden Problemen erwirbt, ist eben doch größer als die eines enger begrenzten, wenn auch noch so gründlichen Könnens in einer von vornherein durch den Gedanken an Anwendungen bestimmten Richtung.

Weitblickende industrielle Persönlichkeiten, wie es etwa ein Werner von Siemens war, haben das längst eingesehen. Sie geben der reinen mathematischen Forschung in ihren sonst nur auf Förderung der Technik und Erzielung von finanziellem Gewinn eingestellten Betrieben Raum, und sie stören die hochqualifizierten Mathematiker, die sie enger an ihr Werk gekettet haben, in ihrem psychischen Gleichgewicht und damit in ihrer Produktionskraft *nicht* durch die Frage: „*Ja, wozu ist denn das eigentlich gut, was du da treibst?*“

Und wenn ich im ersten Teil meines Vertrags gesagt habe, daß das Ansehen der Mathematik in breiten Kreisen der Bevölkerung heute sehr zu wünschen übrigläßt, so habe ich unter anderem gemeint, daß eine solche Frage jedenfalls von gebildeten Menschen, die durch ihre Schulerziehung mit den Grundlagen der Mathematik in enge Berührung gekommen sind, überhaupt nicht gestellt werden dürfte.

Wenn sie doch immer wieder gestellt wird, so ist das ein *grundsätzlicher Mangel in der Art des mathematischen Unterrichts auf unseren höheren Schulen*, ein Thema, über das sich viel sagen ließe. Das würde aber den Rahmen dieses schon allzulang gewordenen Vertrags übersteigen, so daß es bei dieser Andeutung bleiben soll.

Schluß

Ich stehe damit am Schluß meiner „Bekenntnisse eines Mathematikers“. Aus meiner innersten Erfahrung heraus habe ich Ihnen so ehrlich wie nur möglich geschildert, was mich zur Mathematik hingezogen und was mich bei ihr festgehalten hat. Und ich habe versucht, Ihnen durch meine Erläuterungen zu den drei für mich wesentlichen Aspekten der Mathematik: als Wissenschaft, als Kunst, als Macht — vielleicht aber noch mehr durch die Art und Weise, wie ich über mein Fach gesprochen habe — ein wenig von dem zu vermitteln, was ich als das *wahre Wesen der Mathematik* ansehe. Schon wenn es mir gelungen sein sollte, Sie durch das Beispiel meiner Person davon zu überzeugen, daß nicht jeder Mathematiker ein nüchterner, trockener Mensch ist, über den man nur mitleidig lächeln kann, sondern daß es wenigstens einen

Mathematiker gibt, bei dem, wenn er auch kein Dichter oder Redner ist, doch in der mathematischen Gehirnecke auch Herz und Seele wohnen, so bin ich dadurch für die Schmerzen und Wehen bei der Gestaltung dieses Vertrages reichlich belohnt.