



Universitätsbibliothek  
Heidelberg

# Hermann von Helmholtz' Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik

Rede  
zum Geburtsfeste des höchstseligen Großherzogs  
Karl Friedrich  
und zur akademischen Preisverteilung  
am 22. November 1895

von

**Dr. Leo Koenigsberger**  
Großherzoglich Badischem Geheimen Rat und o. ö. Professor der  
Mathematik  
d. z. Prorektor der Großherzogl. Bad. Universität Heidelberg

In moderner Rechtschreibung neu herausgegeben von  
**Gabriele Dörflinger**,  
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2008.

**Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte**

**Leo Koenigsberger**

\* 15. Oktober 1837 in Posen

† 15. Dezember 1921 in Heidelberg



Fotografie aus dem Universitätsarchiv Heidelberg

Der Text wurde durch ein Texterkennungsprogramm wiedergewonnen; die Rechtschreibung wurde modernisiert.

Als Anhang ist ein Auszug des Schriftenverzeichnisses Hermann Helmholtz' beigegeben, der die in dieser Rede angesprochenen Arbeiten Hermann Helmholtz' nachweist. Im Text wurden die Nummern dieses Verzeichnisses jeweils in eckigen Klammern eingefügt.

### *Hochansehnliche Versammlung!*

Bei der Wiederkehr des Tages, an dem ein hochherziger und erleuchteter Herrscher dieses Landes unsere Hochschule zu neuem Leben erstehen ließ und dadurch eine Epoche der Blüte der Wissenschaften an derselben inaugurierte, deren hundertjährige Dauer wir in naher Zeit festlich begehen werden, richten wir unsere Blicke voll Ehrfurcht und Dankbarkeit auf unsern durchlauchtigsten Rector Magnificentissimus, der stets mit dem wärmsten Interesse und der tatkräftigsten Unterstützung das Gedeihen unserer Universität zu fördern, ihr Ansehen und ihren Ruhm immer fester zu begründen sucht. Ich glaube, dass wir unsere Dankbarkeit nicht besser und würdiger betätigen können, als wenn wir der großen Gelehrten gedenken, welche in der Zeit seiner Begierung den Stolz und die Zierde unserer Hochschule, den Ruhm unseres Vaterlandes bildeten, und so möge diese festliche Stunde dem Andenken eines Mannes gewidmet sein, den wir ohne Bedenken als einen der größten und tiefsten Forscher bezeichnen dürfen, welche in diesem Jahrhundert unserer Universität angehörten, und auf dessen Bedeutung ich Ihre Aufmerksamkeit zu lenken mir erlauben will vom Standpunkte meiner Wissenschaft aus, der er im Grunde sein Leben hindurch am meisten zugetan war, und deren Wesen er heute vor dreiunddreißig Jahren an eben dieser Stelle so klar und schön in den Worten kennzeichnete: „Wir sehen in der Mathematik die bewusste logische Tätigkeit unseres Geistes in ihrer reinsten und vollendetsten Form, wir können hier die ganze Mühe derselben kennen lernen, die Schwierigkeit, abstrakte Begriffe zu bilden und zu verstehen, aber ebenso Vertrauen fassen lernen in die Sicherheit, Tragweite und Fruchtbarkeit solcher Gedankenarbeit.“ [73]

Erst vor Kurzem betrauerte die ganze gebildete Welt den Verlust unseres unvergesslichen HERMANN v. HELMHOLTZ, der von 1858 bis 1871 auf dem Gipfel seines Ruhmes stehend unserer Universität angehörte und im Verein mit BUNSEN und KIRCHHOFF dieselbe zum Mittelpunkt naturwissenschaftlicher Forschung gemacht hat.

Wer sich die Aufgabe stellt, die Verdienste von HELMHOLTZ um die mathematische Wissenschaft ihrer Bedeutung entsprechend darzulegen, kann nicht umhin, von jeder einzelnen seiner zwei- bis dreihundert, zum Teil nicht leicht verständlichen Arbeiten Kenntnis zu nehmen, da jede derselben, selbst wenn sie sich der mathematischen Sprache nicht bedient, durch die eminente Schärfe logischen Denkens das höchste Interesse des Mathematikers erregt; aber gerade darin liegt auch wieder die Schwierigkeit, jener Aufgabe völlig gerecht zu werden, da der Darsteller seiner unvergleichlichen Leistungen auf allen Gebieten der Naturwissenschaften Physiologe und Physiker, Mathematiker, Philosoph und Ästhetiker zugleich sein müsste, um einen so großen

Denker wie HELMHOLTZ nicht bloß bewundern und anstaunen, sondern auch würdigen und verstehen zu können. Es lag eben nicht in der Natur seines Geistes begründet, mathematische Untersuchungen um ihrer selbst willen durchzuführen, sich zu erfreuen an der Herleitung völlig abstrakter Wahrheiten, welche Eigenschaften der geometrischen und arithmetischen Gebilde darstellen, die dann möglicherweise in den exakten Naturwissenschaften ihre Anwendung finden; er holte sich vielmehr seine mathematischen Probleme — und es ist dies gewiss der einzig wahre, aber auch nur von einem so großen Meister mit Erfolg einzuschlagende Weg — unmittelbar aus der Beobachtung der Natur, indem er von der Voraussetzung ausging, dass die Wissenschaft, deren Zweck es ist, die Natur zu begreifen, auch annehmen müsse, dass sie begreiflich sei, und begreiflich sein bedeutet für ihn nichts anderes als — um mit den Worten seines größten Schülers HEINRICH HERTZ zu reden — die denknotwendigen Folgen der inneren Scheinbilder äußerer Gegenstände mit den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände in Übereinstimmung zu bringen, oder die Probleme der Natur mathematisch zu formulieren. So findet sich in allen seinen Arbeiten eine unendliche Fülle auch vom rein mathematischen Gesichtspunkte aus interessanter Resultate, die aber stets sogleich eine mechanisch-physikalische Deutung finden, und dann tiefliegende und umfassende Naturgesetze aufdecken, welche von ihrer mathematischen Einkleidung befreit, man darf wohl sagen, nicht bloß in der naturwissenschaftlichen, sondern in der ganzen gebildeten Welt einer wesentlich neuen Auffassung von den Vorgängen in der Natur Bahn gebrochen haben. Nur dann interessierten ihn auch mathematische Untersuchungen an sich, wenn es sich um die Aufsuchung der Grundlagen und Axiome mathematischer Disziplinen handelte, und so hat er in der Tat darauf bezügliche Forschungen für die drei großen Gebiete der Mathematik, die Geometrie, Arithmetik und Mechanik angestellt, die für die Erkenntnistheorie, sowie für die gesamte Entwicklung der mathematischen Physik bahnbrechend gewesen sind, wobei ihm aber auch hier wieder im Gegensatz zu ähnlichen oder ganz gleichgerichteten Untersuchungen anderer ausgezeichneten Mathematiker stets die Beobachtung und Erfahrung den festen Boden und eine sichere Richtschnur für seine Wege gaben, auf denen er zu den abstraktesten mathematischen Wahrheiten gelangte.

Die Mathematik in ihrer ganzen Ausdehnung, wie ich sie hier betrachten will, hat es mit drei von einander unabhängigen Grundvorstellungen zu tun, denen des Raumes, der Zeit, und der Masse; mit den Gebilden des Raumes beschäftigt sich die Geometrie, mit denen der Zeit die Arithmetik, mit den Beziehungen der Masse zu Raum und Zeit die Mechanik und mathematische Physik. Die von KANT aufgestellte Ansicht von Raum und Zeit als transzendentalen Anschauungsformen, welche durch die bekannten Axiome

näher bestimmt sein sollten, war die bei fast allen Mathematikern und Philosophen vorherrschende, bis HELMHOLTZ dieselbe insofern in den Bereich seiner Untersuchungen zog, als er die a priori'sche Existenz jener Axiome in Zweifel zu ziehen anfang, und zwar nicht auf Grund abstrakter mathematischer Betrachtungen, wie es zum Teil von GAUSS und RIEMANN geschehen, sondern physiologisch-optische Untersuchungen hatten ihn veranlasst, über den Ursprung der allgemeinen Raumanschauung überhaupt nachzudenken, und sehr bald zur Überzeugung geführt, dass nur die Anschaulichkeit der Raumverhältnisse uns das als selbstverständlich voraussetzen lässt, was in Wahrheit eine besondere Eigentümlichkeit unserer Außenwelt ist, und wir dadurch die Axiome der Geometrie für durch transzendente Anschauung gegebene Sätze halten. Schon in seinem im Jahre 1852 in Königsberg gehaltenen Habilitationsvortrage „Über die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen“ [20] hatte er durch tiefgehende physiologisch-physikalische Gegenüberstellung der Objekte und der Sinneswahrnehmungen derselben die Ansicht gewonnen, dass Licht und Farbenempfindungen nur Symbole für Verhältnisse der Wirklichkeit sind, und so den Weg gefunden, auf dem ein weiterer Fortschritt in der tieferen Erkenntnis der Natur der Sinneswahrnehmungen sich ermöglichen ließ. Im Gegensatz zur nativistischen Theorie der Raumanschauung, in welcher die Annahme gemacht wird, dass die Netzhaut sich selbst in ihrer räumlichen Ausdehnung empfinde, und bestimmte Raumvorstellungen vermittels eines angeborenen Mechanismus entstehen, dass also auch die spezielle Lokalisation jedes Eindruckes durch die unmittelbare Anschauung gegeben ist, wurde HELMHOLTZ der eigentliche Gründer der empiristischen Theorie, wonach die Sinnesempfindungen für unser Bewusstsein nur Zeichen der äußeren Dinge und Vorgänge sind, deren Bedeutung kennen zu lernen unserm Verstande überlassen bleibt, und es sonach nicht nötig erscheint, dass z. B. bei der Wahrnehmung örtlicher Unterschiede irgend welche Übereinstimmung zwischen den Lokalzeichen für unsern Gesichtssinn und den ihnen entsprechenden äußeren Raumunterschieden existiere, dass also überhaupt eine prästabilisierte Harmonie bestehe zwischen den Gesetzen des Denkens und Vorstellens mit denen der äußeren Welt. Diesen physiologisch-philosophischen Betrachtungen gab er nun in den 1862 – 1864 erschienenen, auch in mathematischer Beziehung interessanten Arbeiten „Über den Horopter“ [75, 82, 83] eine festere Basis; indem er als Horopter den geometrischen Ort derjenigen Punkte des äußeren Raumes definiert, welche sich auf korrespondierenden Stellen beider Netzhäute abbilden und deshalb einfach gesehen werden, findet er für denselben im Allgemeinen eine räumliche Kurve dritten Grades, und wenn ein Linienhoropter die Fläche genannt wird, in welcher gerade Linien bestimmter Richtung liegen müssen, damit bei einer fortdauernd kongruenten Verschiebung in sich die

Bilder sich noch in ganzen Linien decken, ohne dass die Punkte der Bilder zu korrespondieren brauchen, so ergeben sich für den Vertikal- und Horizontalhoropter oder für Linien, welche in beiden Sehfeldern normal oder parallel zu den Netzhauthorizonten erscheinen, Flächen zweiten Grades, deren Diskussion HELMHOLTZ in seiner „Physiologischen Optik“ [47, 67, 94] mit Hinzufügung der Annahme der Asymmetrie der Netzhäute und einer etwas veränderten Definition der identischen Stellen derselben in streng mathematischer Form durchführt. So entwickelt sich in ihm auf Grund unwiderlegbarer mathematisch-physikalischer Spekulationen die Überzeugung, dass, so wie beim Akte des Sehens gleichzeitig zwei verschiedene Empfindungen unverschmolzen zum Bewusstsein kommen, und daher ihre Verschmelzung zu dem einfachen Anschauungsbilde der körperlichen Welt durch einen Akt des Bewusstseins auf Grund der Erfahrung geschieht, es überhaupt unmöglich sei, den Teil unserer Anschauungen, welcher der unmittelbaren Empfindung angehört, von demjenigen zu trennen, der erst durch Erfahrung gewonnen ist, und dass nur die Beziehungen des Raumes und der Zeit, also auch der davon abgeleiteten der Zahl, somit nur das Mathematische, der äußern und innern Welt gemeinsam sind, in diesen allein also eine volle Übereinstimmung der Vorstellungen mit den abgebildeten Dingen erstrebt werden kann. Und nun trat naturgemäß die Frage an ihn heran, mit deren Beantwortung er sich in den im Jahre 1868 erschienenen Arbeiten „Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“ [103, 104] beschäftigt, wodurch wird diese Übereinstimmung der Raum- und Zeitvorstellungen mit den abgebildeten Dingen erreicht, was ist in diesen Vorstellungen priorisch, was Ausfluss der Erfahrung, und welches ist der Ursprung der allgemeinen Raumanschauung überhaupt? HELMHOLTZ verwarft sich dagegen, etwa Widerspruch zu erheben gegen die KANT'sche Auffassung des Raumes als transzendentaler Form der Anschauung; aber er hatte auf dem Gebiete der Sinneswahrnehmungen sich klar gemacht, dass es z. B. in der Organisation unseres Auges liegt, alles, was wir sehen, nur als eine räumliche Verteilung von Farben zu sehen, ohne dass durch diese Gesichtswahrnehmung selbst irgendwelche räumliche oder zeitliche Aufeinanderfolge der Farben bedingt wird — und da lag für ihn die Frage nahe, ob denn diese transzendente Form der Raumanschauung notwendig die Annahme nach sich zieht, dass nach oder neben bestimmten Raumwahrnehmungen auch eine andere bestimmte eintreten müsse, oder — mit anderen Worten — ob damit die Annahme gewisser Axiome eingeschlossen ist. In dem Bestreben, die Begriffsentwicklungen in der Geometrie von den Ergebnissen der Erfahrung, die scheinbar als Denknöthigkeiten auftreten, zu sondern, erkennt er als die Grundlage aller Beweise in der EUCLID'schen Geometrie den Nachweis der Kongruenz räumlicher Gebilde, und somit als Postulat die Vorstellung, dass diese Gebilde zu einander hin bewegt werden

können, ohne ihre Form und Dimension zu ändern, und wird daher mit Notwendigkeit vor die Frage gestellt, ob die Annahme der freien Beweglichkeit, welche wir von frühester Jugend an erfahren haben, keine logisch unerwiesene Voraussetzung einschließt, wie sich ihm dies bei tieferem Eindringen in die Frage in der Tat mit immer größerer Sicherheit ergibt. HELMHOLTZ malt sich die Geometrie aus, wie sie sich verstandbegabten Wesen von nur zwei Dimensionen darstellen würde, die an der Oberfläche irgend eines unserer festen Körper leben und nicht die Fähigkeit haben, irgend etwas außerhalb dieser Oberfläche wahrzunehmen, indem er von der Annahme ausgeht, dass es uns als Bewohnern eines Raumes von drei Dimensionen möglich ist, uns die verschiedenen Arten, in denen flächenhafte Wesen ihre Raumvorstellungen ausbilden, zur Anschauung zu bringen und deren sinnliche Eindrücke uns auszumalen, während wir Räume von mehr als drei Dimensionen nicht mehr anschauen können, da alle unsere Mittel sinnlicher Wahrnehmung sich nur auf einen dreidimensionalen Raum erstrecken. Was wird dann aus den Axiomen unserer Geometrie, dass es zwischen zwei Punkten nur *eine* kürzeste Linie, die gerade Linie, gibt, dass durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte des Raumes eine Fläche gelegt werden kann, in welche jede, zwei ihrer Punkte verbindende gerade Linie ganz hineinfällt, und die eine Ebene genannt wird, dass endlich, wenn zwei in derselben Ebene liegende und sich niemals schneidende Linien als parallel bezeichnet werden, durch einen außerhalb einer geraden Linie liegenden Punkt zu dieser nur eine einzige parallele Gerade gelegt werden kann, und was wird aus all' den andern Axiomen, welche die Kontinuität der geometrischen Gebilde u. s. w. betreffen? Jene Flächenwesen würden ebenfalls im Allgemeinen kürzeste Linien zwischen je zwei Punkten ziehen können, die jedoch nicht notwendig gerade Linien wären, und welche HELMHOLTZ geradeste Linien nennt, aber schon in dem einfachsten Falle der Kugel würden zwischen je zwei Polen sich unendlich viele geradeste Linien legen lassen, parallele geradeste Linien würde man gar nicht ziehen können, und die Summe der Winkel im Dreieck würde von zwei Rechten verschieden sein; jene Wesen würden den Raum ebenfalls unbegrenzt, aber endlich ausgedehnt finden, und bei der Ausbildung einer Geometrie würden sie andere geometrische Axiome haben als wir, aber sie könnten noch immer ihre Raumgebilde beliebig auf der Kugel verschieben, ohne deren Dimensionen zu ändern. Doch auch diese Eigenschaft geht im Allgemeinen auf jedem andern Körper verloren, da nur solche Flächen eine derartige Verschiebung gestatten, welche in allen Punkten eine konstante Krümmung besitzen, von denen die einer konstanten positiven Krümmung durch Biegung ohne Dehnung und Zerreißung auf einer Kugel sich abwickeln lassen und sphärische Flächen, diejenigen einer konstanten negativen Krümmung pseudosphärische Flächen genannt werden, und die analytische Untersuchung von Flächen der letzte-

ren Art ergibt, dass die geradesten Linien sich unendlich verlängern lassen, ohne wie bei der Kugel in sich zurückzulaufen, und dass wie in der Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten immer nur *eine* kürzeste Linie möglich ist; aber die Gültigkeit des Parallelenaxioms hört hier auf, da sich durch einen Punkt außerhalb einer geradesten Linie unendlich viele solcher Linien legen lassen, welche auch in's Unendliche verlängert die erstere nicht schneiden, und die drei oben angeführten Axiome sind somit notwendig und hinreichend, um die Fläche, auf welche sich die EUCLID'sche Geometrie bezieht, im Gegensatz zu allen andern Raumgebilden zweier Dimensionen als Ebene zu charakterisieren. Treten wir nun in den Raum mit drei Dimensionen ein und vergleichen denselben, als ein Gebiet von Größen betrachtet, in welchem die Lage eines jeden Punktes durch drei Abmessungen bestimmt werden kann, mit andern ebenfalls dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, wie sie z. B. die räumliche Darstellung des Systems von Farben liefert, um zu untersuchen, ob spezielle charakteristische Eigenschaften unserm Räume zukommen, so zeigt sich in der Tat, dass derselbe noch besondere Bestimmungen enthält, welche bedingt sind durch die vollkommen freie Beweglichkeit der festen Körper mit unveränderter Form nach allen Orten hin und durch den besonderen Werth des Krümmungsmaßes. Dieses ist für den tatsächlich vorliegenden Raum gleich Null zu setzen — so wie es unter allen Flächen für die Ebene allein und die auf diese abwickelbaren Flächen gleich Null wird — um den EUCLID'schen Axiomen von der Eindeutigkeit der kürzesten Linie und von den Parallelen Genüge zu leisten; wäre letzteres von Null verschieden, so würden Dreiecke von großem Flächeninhalte freilich eine andere Winkelsumme haben als kleine, aber das Resultat der geometrischen und astronomischen Messungen, welche uns die Winkelsumme eines Dreiecks nur nahezu und nie streng gleich zwei rechten Winkeln ergeben können, berechtigt uns offenbar nur zu schließen, dass das Krümmungsmaß unseres Raumes sehr klein ist; dass es in Wirklichkeit verschwindet, lässt sich nicht beweisen, es ist ein Axiom. HELMHOLTZ geht aber weiter; er zeigt, dass wir uns den Anblick einer sphärischen, einer pseudosphärischen Welt, begrifflich entwickelt nach Analogie der oben charakterisierten Flächen, nach allen Richtungen hin ausmalen können, dass also die Axiome unserer Geometrie durchaus nicht in der gegebenen Form unseres Anschauungsvermögens begründet sein können, ja er macht es durch Abbildungsbetrachtungen plausibel, dass, wenn unsere Augen mit passenden Konvexgläsern bewaffnet wären, uns der pseudosphärische Raum verhältnismäßig gar nicht sehr fremdartig erschiene, und dass wir nur in der ersten Zeit bei der Abmessung der Größe und Distanz fernerer Gegenstände Täuschungen unterworfen sein würden.

Diese Untersuchungen bildeten zum Teil den Inhalt einiger in Heidelberg im Jahre 1868 gehaltenen Vorträge, und zwanzig Jahre später kommt er in



seiner Arbeit über „Kürzeste Linien im Farbensystem“ [205] auf seine und RIEMANN's Ergebnisse wieder zurück, nach welchen sich alle Eigenschaften der besonderen Art unseres Raumes daraus ableiten lassen, dass man den Werth der Entfernung zweier benachbarter Punkte durch die zugehörigen Inkremente der Koordinaten ausdrücken kann, und somit von der Entfernung zweier Punkte eines festen Körpers verlangt, dass sie durch die Lage ihrer Endpunkte vollkommen gegeben sei und gleich bleibe bei allen möglichen Verschiebungen und Wendungen des festen Körpers. Indem er davon ausgeht, dass jede besondere Farbe sich herstellen lässt durch die Vereinigung der entsprechend abgemessenen Quanta dreier passend gewählter Grundfarben, welche die Stelle der Koordinaten vertreten, findet er in der Deutlichkeit der Unterscheidung zwischen zwei nahestehenden Farben eine der Entfernung für Punkte des Raumes analoge Größe und stellt einen analytisch sehr einfach zusammengesetzten Ausdruck auf, von dem er hofft, dass er für den Bereich der Farbenempfindungen dieselbe Rolle spielen wird, wie die Formel für die Länge des Linienelementes in der Geometrie. Derselbe lässt den Grad der Deutlichkeit im Unterschiede zweier Farben erkennen, die sich gleichzeitig in den Quanten aller drei Grundfarben, welche in ihre Zusammensetzung eingehen, von ein- ander unterscheiden und also in Helligkeit und Qualität verschieden sind, und analog den kürzesten Linien zwischen zwei Punkten im Räume definiert er als kürzeste Farbenreihen diejenigen Reihen von Übergangsfarben zwischen zwei gegebenen Endfarben von verschiedener Qualität und Quantität, für welche die Summe der wahrnehmbaren Unterschiede ein Minimum ist. Diese Anschauung des Bereiches der Farbenempfindungen führt ihn auch in der Arbeit „Die erweiterte Anwendung des FECHNER'schen Gesetzes im Farbensystem“ [203] dazu, dieses Gesetz, welches nur Änderungen der Lichtstärke bei umgeänderter Mischung des Lichtes in Frage zog, auf Mannigfaltigkeiten von mehr als einer Dimension auszudehnen, und die Größe der unterscheidbaren Abstufungen in den Farbentönen und in der Sättigung der Farben bei gleichzeitiger Änderung der Helligkeit in Betracht zu ziehen. Endlich kommt er noch in einer seiner letzten Arbeiten „Über den Ursprung der richtigen Deutung unserer Sinneseindrücke“ [215] wieder auf die Frage der Raumanschauung zurück und wird zu überaus geistvollen und bedeutsamen philosophischen Betrachtungen geleitet. Die Vorstellung der stereometrischen Form eines körperlichen Objekts spielt für ihn die Rolle eines aus einer großen Reihe sinnlicher Anschauungsbilder zusammengefassten Begriffs, der ganz unabhängig von der geometrischen Definition nur durch die lebendige Vorstellung des Gesetzes, nach dem seine perspektivischen Bilder auf einander folgen, zusammengehalten wird, und von dieser Anschauung ausgehend erkennt er in der unbewussten Tätigkeit unseres Gedächtnisses die Veranlassung zu all' den Vorstellungsverbindungen, deren Resultate wesent-

lich mit denen des bewussten Denkens übereinstimmen. Dann ist aber nach ihm der Induktionsschluss nichts anderes als die Erwartung, dass die in ihren Anfängen beobachtete Erscheinung unseren bisherigen Wahrnehmungen entsprechend weiter verlaufen wird, und die falschen Induktionen identisch mit unsern Sinnestäuschungen, so dass unser Wissen nur die Kenntnis des Objektes in Worte fasst, von dem wir vermöge der uns angeborenen Organisation und mit Hilfe der auf unbewusster Arbeit des Gedächtnisses beruhenden Induktionsschlüsse ein Anschauungsbild gewonnen haben.

Erst lange nach Veröffentlichung seiner Arbeiten über die Axiome der Geometrie wandte er sich, immer wieder angeregt durch die Tatsache der geringen Anzahl und der unmittelbaren Evidenz der Axiome der Mathematik und Mechanik bei ihrem unendlichen Umfange, im Jahre 1887 in einer EDUARD ZELLER zu dessen fünfzigjährigem Doktorjubiläum gewidmeten Schrift der erkenntnistheoretischen Untersuchung des Zählens und Messens [191] zu, um auch hier der Ansicht KANT's entgegenzutreten, dass die Axiome der Arithmetik a priori gegebene Sätze seien, welche die transzendente Anschauung der Zeit in demselben Sinne näher bestimmen, wie die Axiome der Geometrie die des Raumes, und legt sich die Frage nach der Bedeutung und Berechtigung der Rechnung mit reinen Zahlen und der Möglichkeit von deren Anwendung auf physische Größen vor. Indem er das Zählen daraus herleitet, dass wir im Stande sind, die Reihenfolge, in der Bewusstseinsakte zeitlich nach einander eingetreten sind, im Gedächtnis zu behalten, wird für ihn die Lehre von den reinen Zahlen lediglich eine auf psychologischen Tatsachen aufgebaute Methode zur folgerichtigen Anwendung eines Zeichensystems von unbegrenzter Ausdehnung und Möglichkeit der Verfeinerung, zum Zwecke der Darstellung der verschiedenen, zu demselben Endergebnis führenden Verbindungsweisen dieser Zeichen. Nach der aus dieser Anschauung gewonnenen Definition der gesetzmäßigen Reihe der positiven ganzen Zahlen und der Eindeutigkeit ihrer Aufeinanderfolge stellt er den Begriff der Addition der reinen Zahlen fest, und zeigt, dass sich die Axiome der Arithmetik von der Gleichheit zweier Zahlen in Rücksicht einer dritten, das Assoziationsgesetz der Addition und das Kommutationsgesetz nur durch die Übereinstimmung des Ergebnisses mit dem, welches aus dem Zählen von äußeren zählbaren Objekten hergeleitet werden kann, beweisen lassen; damit aber die Objekte zählbar sind, müssen gewisse Bedingungen erfüllt werden, über deren Vorhandensein nur die Erfahrung entscheiden kann. Indem nun Objekte, welche in irgend einer bestimmten Beziehung gleich sind und gezählt werden, als Einheit der Zählung, die Anzahl derselben als eine benannte Zahl, und die besondere Art der Einheiten, die sie zusammenfasst, als Benennung der Zahl bezeichnet werden, wird der Begriff der Gleichheit zweier Gruppen von benannten Zahlen gleicher Benennung durch dieselbe Anzahl festgestellt. Nennt

man nun Objekte oder Attribute von Objekten, die mit ähnlichen verglichen den Unterschied des größer, gleich oder kleiner zulassen, Größen — worüber nur die empirische Kenntniss gewisser Seiten des physischen Verhaltens beim Zusammentreffen und Zusammenwirken mit andern entscheiden kann — und können wir diese Größen durch eine benannte Zahl ausdrücken, so nennen wir diese den Werth der Größe und das Verfahren, durch welches wir die benannte Zahl finden, die Messung derselben. So messen wir eine Kraft entweder durch die Massen und Bewegungen des Systems, von welchem sie ausgeübt wird, oder bei der dynamischen Messung durch die Massen und die Bewegung des Systems, auf welches sie wirkt, oder endlich bei der statischen Methode der Kraftmessung dadurch, dass wir die Kraft mit bekannten Kräften in's Gleichgewicht bringen. Es bleibt somit nur die Frage zu beantworten, wann können wir Größen durch benannte Zahlen ausdrücken, und was wird damit an tatsächlichem Wissen erreicht? und zu dem Zwecke werden nun die für die Physik so interessanten und wichtigen Betrachtungen angestellt über physische Gleichheit und über das Kommutations- und Assoziationsgesetz physischer Verknüpfungen, wobei die Addition als eine solche von Größen gleicher Art definiert wird, deren Ergebniss nicht geändert wird durch Vertauschung der einzelnen Elemente unter sich oder durch Vertauschung der Glieder mit gleichen Größen gleicher Art. Bei der Einführung der irrationalen Verhältnisse endlich stellt sich HELMHOLTZ auf den Standpunkt des Physikers, den er auch stets, wie wir später sehen werden, bei der Erörterung der Prinzipien der Mechanik und mathematischen Physik festhält, indem er erklärt, dass wir in der Geometrie und Physik noch nicht solchen diskontinuierlichen Funktionen begegnet sind, zu deren Berechnung die Kenntniss der hinreichend eng gezogenen Grenzen, zwischen denen der irrationale Werth liegt, nicht genügt; freilich kennt der Mathematiker auch Funktionen anderer Art, und die neuesten Untersuchungen BOLTZMANN's scheinen solchen analytischen Gebilden auch eine Existenz in der Physik zuweisen zu wollen.

Indem wir uns nun zu dem weitaus schwierigeren Teile unserer Aufgabe, zur Darlegung der Verdienste HELMHOLTZ's um die analytische Mechanik wenden, um die durch einige seiner glänzendsten Arbeiten erfolgte teilweise Umgestaltung der Prinzipien derselben erkennen zu lassen, wird es nötig sein, die Wege genauer zu verfolgen, die ihn durch die große Reihe bewundernswerter mathematisch-physikalischer Untersuchungen und weittragender physikalischer Entdeckungen, welche wir nach den großen Klassen der hydrodynamischen, aerodynamischen und elektrischen Arbeiten sondern werden, schließlich zur Untersuchung der Axiome der Mechanik geführt haben.

Um sich über die den Gesetzen der mechanischen Naturwissenschaften widersprechende Annahme vieler damaliger Physiologen, dass durch die sogenannte Lebenskraft Naturkräfte in's Unendliche erzeugt werden können,

ein Urteil zu bilden, beschäftigt er sich, von der durch die mechanischen Gesetze erwiesenen Voraussetzung ausgehend, dass eine bestimmte Quantität einer bewegenden Kraft bei aller Komplikation ihres Mechanismus immer nur dasselbe bestimmte Quantum von Bewegung hervorbringen könne, in seiner „Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen“ [5, 8, 13, 26] mit der für die theoretische Ansicht vom Lebensprozesse so wichtigen Frage über den Ursprung der tierischen Wärme. Die Resultate dieser Untersuchung sowie der ziemlich gleichzeitig angestellten „über die Wärmeentwicklung bei der Muskelaction“ [7] gaben ihm die Bestätigung des großen Gesetzes von der Erhaltung der Kraft, das den Inhalt eines im Jahre 1847 in der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gehaltenen Vertrages bildete. Es war gewiss ein für die Geschichte der Wissenschaften interessanter Moment, als heute vor 30 Jahren einer der ausgezeichnetsten Physiker unseres Jahrhunderts, GUSTAV KIRCHHOFF, von eben dieser Stelle aus in seiner schönen und lichtvollen Rede „Über das Ziel der Naturwissenschaften“ in Gegenwart von HELMHOLTZ die Erkenntnis dieses Gesetzes die unzweifelhaft wichtigste nannte, die in unserm Jahrhundert auf dem Gebiete der Naturwissenschaften gewonnen worden, und noch heute nach 50 Jahren behauptet HERTZ in seinem nachgelassenen Werke „Die Prinzipien der Mechanik“ [216], dass die Physik am Ende unseres Jahrhunderts einer völlig neuen Denkweise ihre Vorliebe zugewandt hat und beeinflusst von dem überwältigenden Eindrucke, welchen die HELMHOLTZ'sche Entdeckung von der Konstanz der Energie der Physik gemacht, es nunmehr liebt, die Rückführung der Erscheinungen auf die Gesetze der Energieverwandlung als ihr letztes Ziel zu behandeln. Ich muss zum Verständnis dieser großen Entdeckung von HELMHOLTZ, sowie seiner späteren fundamentalen Arbeiten über die Prinzipien der Mechanik einen kurzen Rückblick auf die Entwicklung der theoretischen Mechanik überhaupt werfen.

Aus den ersten Untersuchungen über den Hebel, die Rolle und die schiefe Ebene entwickelten sich sehr bald die allgemeinen Anschauungen, welche die Lehre vom Gleichgewicht begründeten, und die Definition der Arbeit als das Produkt aus der Größe einer Kraft in die, in der Richtung dieser gemessene, unendlich kleine Verschiebung eines materiellen Punktes ließ als Grundlage der gesamten Statik das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erkennen, nach welchem sich irgend ein materielles System dann und nur dann im Gleichgewicht befindet, wenn für jede virtuelle d. h. mit den Verbindungen der Punkte verträgliche unendlich kleine Verrückung die Arbeit des gesamten Systems gleich Null ist. Nachdem weiter durch GALILEI die Kenntnis der Trägheit der Massen, durch NEWTON der Begriff der Fernkraft hinzugekommen, entwickelte sich die Mechanik auf der Grundlage der drei berühmten NEWTON'schen Gesetze, nach welchen jeder Körper in seinem Zustande von Ruhe oder von gradliniger gleichförmiger Bewegung verharret, außer wenn er

durch äußere Kräfte zu einer Veränderung dieses Zustandes veranlasst wird, ferner die Beschleunigung eines einzelnen materiellen Punktes in der Richtung der Kraft erfolgt, welche auf den Punkt wirkt, und gleich der Größe der Kraft ist, dividiert durch die Masse des Punktes, und endlich die Wirkungen zweier Körper auf einander immer gleich sind und entgegengesetzte Richtungen haben. So gelangte man wenigstens für NEWTON'sche Kräfte und unter der Annahme fester Verbindungen zwischen den materiellen Punkten des Systems zu dem die ganze Dynamik beherrschenden D'ALEMBERT'schen Prinzip: Wenn man gewonnene Kraft diejenige nennt, die man zu der auf jeden Punkt wirkenden hinzufügen müsste, wenn derselbe sich im isolierten Zustande so bewegen sollte, wie er es in Wirklichkeit tut, so sagt das D'ALEMBERT'sche Prinzip aus, dass sich die sämtlichen gewonnenen Kräfte das Gleichgewicht halten, und liefert dem Mathematiker ein Mittel, wenn die Bewegungsbeschränkungen der Punkte des Systems in analytisch darstellbaren Gleichungen ihrer Koordinaten, ferner die Kräfte, die auf diese wirken, sowie Ort und Geschwindigkeit eines jeden Punktes des Systemes für irgend einen Moment gegeben sind, die Lage derselben zu jeder Zeit zu ermitteln. Die Fortentwicklung der Mechanik in dieser Richtung würde somit die Erforschung aller Kräfte der Natur d. h. aller Eigenschaften der Materie erfordern, da die letztere für uns keine andern Merkmale hat als die Kräfte, welche ihre Teile auf einander ausüben. Nachdem nun diese beiden Grundprinzipien der Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung erkannt waren, bestrebte man sich, allgemeine Gesetze und Eigenschaften der Bewegung zu ermitteln, und eine der wichtigsten und folgereichsten Entdeckungen war die von HUYGHENS, JOHANN und DAVID BERNOULLI [i.e. Daniel Bernoulli] gegebene Herleitung des Prinzips von der Erhaltung der lebendigen Kraft; nennt man nämlich das halbe Produkt aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit eines Punktes die lebendige Kraft desselben, und für ein aus beliebig vielen Punkten bestehendes materielles System, in welchem die einzelnen Punkte Beschränkungen ihrer freien Beweglichkeit unterliegen dürfen, die Summe der einzelnen lebendigen Kräfte die lebendige Kraft des Systems oder dessen kinetische Energie, so ist der Zuwachs, welchen ein den Bedingungen des D'ALEMBERT'schen Prinzips unterliegendes materielles System bei der Bewegung von irgend einer Lage aus in irgend eine andere an lebendiger Kraft gewinnt, genau gleich der in der Zwischenzeit von den Kräften geleisteten Arbeit. Hängt nun die während der Bewegung geleistete Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage ab, so folgt hieraus, dass, wenn ein System bei der Bewegung wieder in seine Anfangslage zurückkehrt, auch seine kinetische Energie wieder denselben Werth erlangt, und dieses Gesetz nennt man den Satz von der Erhaltung der kinetischen Energie, sowie die Systeme, für welche dasselbe gilt, konservative Systeme. Eine einfache Umformung

dieses Satzes führt aber zu den weittragendsten Folgerungen; die Tatsache nämlich, dass ein Körper bei seiner Bewegung von einer Lage in eine andere eine bestimmte Arbeit leistet, sagt nichts anderes aus, als dass seine Leistungsfähigkeit oder potentielle Energie in der Anfangslage um die geleistete Arbeit größer ist als in seiner Endlage, so dass für konservative Systeme der oben ausgesprochene Satz von der Erhaltung der kinetischen Energie in das Gesetz von der Konstanz der Energie übergeht, dass bei der Bewegung eines beliebigen konservativen Systems die Summe der potentiellen und kinetischen Energie unveränderlich ist, jedoch nur unter der wesentlichen Voraussetzung, dass die bei der Bewegung des Systems geleistete Arbeit nicht von dem beschriebenen Wege, sondern nur von der Anfangs- und Endlage des Systems abhängig ist. Für die NEWTON'schen Kräfte und Systeme, für welche dieses Prinzip zunächst gilt, besagt nun offenbar die Gültigkeit dieses Gesetzes nichts anderes als die Unmöglichkeit des perpetuum mobile oder durch irgend eine Kombination von Naturkörpern bewegendende Kraft fortdauernd aus nichts zu erschaffen, da wir vermöge der auf dem einen Wege im Vergleich zum andern, den wir zur Zurückführung des Systems benutzen, gewonnenen Arbeitsgröße mechanische Kraft in's Unbestimmte erzeugen könnten. Nun war zwar die Unmöglichkeit eines solchen für die Kräfte der angegebenen Art längst erkannt, und also auch für diese das Gesetz von der Konstanz der Energie, aber nicht alle Kräfte der Natur schienen diese Eigenschaft zu teilen, und somit auch dem erwähnten Gesetze unterworfen zu sein. Wenn ein System sich auf ein und derselben Bahn erst ohne und dann mit Reibung bewegt, so wird im letzteren Falle die kinetische Energie wegen der verminderten Geschwindigkeit kleiner sein, und man wird daher, um den Satz von der Konstanz der Energie in seiner ganzen Allgemeinheit aufrecht zu erhalten, den Begriff der potentiellen Energie, die bisher nur eine Energie der Lage gewesen, auch auf die Energie ausdehnen müssen, welche sich in Form von Wärme und anderen Naturkräften darstellt, also in dem obigen Falle den Verlust an kinetischer Energie durch eine in Folge der Reibung entstandene äquivalente Wärmemenge ersetzen müssen. So hat R. MAYER, von der Voraussetzung ausgehend, dass die Erschaffung und Vernichtung einer Kraft außer dem Bereiche menschlichen Denkens und Wirkens liege, die Äquivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit als Grundgesetz der Naturerscheinungen ausgesprochen. HELMHOLTZ zog nun, ohne von den Untersuchungen MAYER's Kenntnis zu haben, gleich von vornherein alle Naturkräfte in den Kreis seiner Betrachtungen und folgerte aus der Annahme der Gültigkeit des Gesetzes von der Konstanz der Energie, dessen Richtigkeit er experimentell prüfen und für eine große Reihe physikalischer Vorgänge erweisen konnte, die Unmöglichkeit eines perpetuum mobile, auch wenn Wärme, Licht, Elektrizität und chemische Prozesse als wirkende Kräfte eintreten, oder des dem-

selben äquivalenten Satzes, dass die Arbeit, die irgendwelche Naturkräfte leisten, indem ihre Angriffspunkte aus einem gewissen Anfangszustand in einen gewissen Endzustand übergehen, nur von diesen beiden Zuständen, aber nicht von der Art des Überganges abhängt. Indem er daraus folgerte, dass in jedem abgeschlossenen Systeme einem Gewinne an Energie ein gleicher Verbrauch von Energie entsprechen muss, gelangte er zu der großen und umfassenden Wahrheit, dass die Leistungsfähigkeit der Welt konstant ist.

In seiner stets so bewundernswerten Bescheidenheit hebt er hervor, dass es nur seine Absicht war, den Physikern in möglichster Vollständigkeit die theoretische, praktische und heuristische Wichtigkeit des Gesetzes von der Konstanz der Energie darzulegen, „dessen vollständige Bestätigung wohl als eine der Hauptaufgaben der nächsten Zukunft der Physik betrachtet werden muss,“ und es mag nur noch, um immer wieder auf die naturphilosophischen Anschauungen HELMHOLTZ's hinzuweisen, hervorgehoben werden, dass er im Gegensatz zu den Anhängern metaphysischer Spekulation, welche das Gesetz von der Erhaltung der Kraft als ein a priorisches hinzustellen suchten, das Gesetz, wie alle Kenntnis von den Vorgängen der wirklichen Welt, auf induktivem Wege gefunden erklärte, und zwar durch die nach vielen vergeblichen Versuchen gewonnene Induktion, dass man ein perpetuum mobile nicht bauen kann. Dieses große allgemeine Gesetz, welches die quantitativen Verhältnisse regelt, die bei Umsetzungen walten müssen, ließ jedoch noch unentschieden, ob Arbeit unbegrenzt in Energie der Wärme und umgekehrt sich verwandeln lässt, und wie es sich damit beim Lichte, der Elektrizität und andern Naturkräften verhält, Fragen, deren Beantwortung erst später die tiefe und umfassende Bedeutung des Energiebegriffes in der mathematischen Physik darlegen sollte.

Nachdem HELMHOLTZ dieses Grundprinzip der Mechanik für die Physik nach den verschiedensten Seiten hin durchforscht hatte, wandte er sich neben physiologischen Untersuchungen, wie schon aus seinen Berichten über die „Theorie der Akustik“ [25, 31] hervorgeht, sehr allgemeinen mechanischen Problemen, spezieller hydrodynamischen Untersuchungen zu und legte im Jahre 1858 in seiner berühmten Arbeit „Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“ [55] die Grundlage zu einer völlig neuen Anschauung der Bewegung der Flüssigkeiten, die später durch W. THOMSON in seiner Theorie der Wirbelatome und andere Physiker für die verschiedensten Teile der Naturwissenschaften fruchtbar gemacht wurde. Unter der Annahme, dass der Druck in einer idealen d. h. nicht reibenden Flüssigkeit nach allen Seiten derselbe sei, war es bereits EULER und LAGRANGE gelungen, analytische Beziehungen aufzustellen zwischen dem Drucke in der Flüssigkeit, deren Dichtigkeit, der Zeit, den Koordinaten eines Teilchens und einerseits den Geschwindigkeitskomponenten

desselben, andererseits der Lage dieses Teilchens beim Beginne der Bewegung, und ferner die sogenannte Kontinuitätsgleichung zu folgern, welche aussagt, dass die Masse eines bestimmten materiellen Teilchens der Flüssigkeit sich mit der Zeit nicht ändere, also die Oberfläche der Flüssigkeit stets aus denselben Teilchen zusammengesetzt sein müsse. Alle diese Gleichungen bilden für die Theorie der Bewegung idealer Flüssigkeiten das Analogon zu dem oben erwähnten D'ALEMBERTSchen Prinzip und führen die Bestimmung der variablen Größen durch die Zeit und die Anfangszustände auf ein rein mathematisches Problem zurück, dessen Auflösung uns, um mich einer KIRCHHOFFSchen Ausdrucksweise zu bedienen, die Bewegung beschreiben wird. In der Tat ist auch die eben bezeichnete Aufgabe in einzelnen Fällen gelöst worden, in welchen die Komponenten der Geschwindigkeit jedes Wasserteilchens gleich gesetzt werden können den nach den entsprechenden Richtungen genommenen Differentialquotienten einer bestimmten Funktion, welche HELMHOLTZ das Geschwindigkeitspotential nennt, und die wenigstens für inkompressible Flüssigkeiten vermöge der Kontinuitätsgleichung dieselben Eigenschaften besitzt, welche dem Potential gravitierender Massen in Punkten außerhalb dieser Massen zukommen. Aber ein solches Geschwindigkeitspotential existiert nicht immer, und deshalb greift HELMHOLTZ das überaus schwierige Problem der Bewegungsformen in jener Arbeit, welche in dem Jahre seiner Übersiedlung nach Heidelberg erschien, ganz allgemein an.

Zunächst erkennt er, dass die Veränderung, welche ein unendlich kleines Flüssigkeitsvolumen in einem unendlich kleinen Zeiteilchen erleidet, zusammengesetzt ist aus drei verschiedenen Bewegungen, einer Fortführung des Teilchens durch den Raum hin, einer Ausdehnung oder Zusammenziehung desselben nach drei auf einander senkrechten Richtungen und endlich einer Rotation um eine temporäre Drehachse, wobei die Existenz von Rotationsbewegungen ausgeschlossen ist, wenn ein Geschwindigkeitspotential existiert. HELMHOLTZ nennt nun Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential nicht zukommt, Wirbelbewegungen, und indem er die Änderungen der Rotationsgeschwindigkeiten während der Bewegung zu bestimmen sucht, findet er, dass diejenigen Flüssigkeitsteilchen, welche nicht schon Rotationsbewegungen haben, auch im Verlaufe der Zeit keine Rotationsbewegungen bekommen; nennt man nun eine Wirbellinie eine solche, deren Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsachse der dort befindlichen Teilchen zusammentrifft, so ergibt sich der merkwürdige Satz, dass eine jede Wirbellinie fortdauernd aus denselben Teilchen zusammengesetzt bleibt, während sie mit diesen Teilchen in der Flüssigkeit fortschwimmt, und dass die Größe der resultierenden Rotationsgeschwindigkeit in einem bestimmten Flüssigkeitsteilchen sich in demselben Verhältnis ändert wie der Abstand dieses Teilchens von seinen Nachbarn in der Wirbellinie. Bezeichnet man weiter



als Wirbelfaden den durch einen unendlich dünnen Mantel von Wirbellinien eingeschlossenen Teil der Flüssigkeit, so bleibt das Produkt aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt eines Wirbelfadens in der ganzen Länge desselben und auch bei der Fortbewegung konstant, so dass ein Wirbelfaden nirgends in der Flüssigkeit aufhören darf, sondern entweder ringförmig innerhalb derselben in sich zurückläuft oder bis an die Grenzen dieser reicht. Indem nun HELMHOLTZ noch die Lösung der Aufgabe angreift, aus den Wirbelgeschwindigkeiten die Bewegungsgeschwindigkeiten zu berechnen, hat er durch diese auch in mathematischer Beziehung höchst interessanten Untersuchungen die Reihe der Bewegungsformen wenigstens für die Vorstellung zugänglich gemacht, wenn auch die analytische Ausführung der Probleme nur in den einfachsten Fällen möglich war. Unter gewissen Voraussetzungen über die Natur der Umgebung enthalten die Wirbelfäden und Wirbelringe unveränderlich dieselbe Menge Flüssigkeit und sind unzerstörbar; dann werden zwei Wirbelringe, deren Achse dieselbe ist, und die gleiche Rotationsrichtung besitzen, in gleichem Sinne fortschreiten, und zwar wird der vorangehende sich erweitern und langsamer sich bewegen, der nachfolgende sich verengern und schneller fortschreiten, um schließlich, vorausgesetzt dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten innerhalb bestimmter Grenzen liegen, den andern einzuholen, durch ihn hindurchzugehen und jetzt bei der weiteren Bewegung die Rolle des ersteren zu übernehmen, wobei freilich in Wirklichkeit die Erscheinungen der Wirbelbewegung in Folge der Reibung sich sehr bald anders gestalten werden.

Die Gesetzmäßigkeit und relative Stabilität der Wirbelercheinungen hat W. THOMSON, um die Theorie der Kontinuität der Materie und die Atomtheorie in einer Anschauung zu vereinigen, zu der interessanten Hypothese geführt, den Atomen die Gestalt von Wirbelringen zu geben, und, was weit wichtiger werden sollte, ihn veranlasst, die Resultate der Theorie der Wirbelbewegung mit der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten in Verbindung zu bringen, und so jene Untersuchungen mit vorzubereiten, welche die Fernkräfte aus der Physik fortschaffen wollen, und auf die ich bei den späteren Arbeiten von HELMHOLTZ wieder zurückkommen werde.

Aber sehr bald genügten HELMHOLTZ seine bisher angestellten hydrodynamischen Untersuchungen nicht mehr, und während der Bearbeitung seines so berühmt gewordenen Handbuchs der physiologischen Optik [47, 67, 94] wurde er zu der Überzeugung geführt, dass, wenn man bei der Behandlung von Bewegungsproblemen tropfbarer Flüssigkeiten auch nur einigermaßen übereinstimmende Resultate zwischen Theorie und Experiment erzielen wolle, die Reibung der Flüssigkeitsteilchen unter einander, sowie diejenige an den Wänden des Gefäßes nicht außer Betracht bleiben dürfen. Wie man schon früher durch Versuche von BESSEL angeregt das Problem der Schwingungen

einer Pendelkugel unter dem Einfluss einer umgebenden Flüssigkeit behandelt hatte, untersucht er ebenfalls auf Grund BESSELScher Beobachtungen mit Hilfe der bereits bekannten Bewegungsgleichungen für das Innere einer tropfbar flüssigen Masse, welche der Reibung unterworfen ist, die um einen der Durchmesser vor sich gehenden drehenden Schwingungen einer Pendelkugel, deren Hohlraum von einer reibenden Flüssigkeit erfüllt ist; es gelingt ihm, das Problem mathematisch durchzuführen, die Wellenbewegungen der Flüssigkeit mit Berücksichtigung der Reibung zu charakterisieren, und auf diese Weise theoretisch die experimentell ausgeführten Bestimmungen der Reibungskonstanten der verschiedenen Flüssigkeiten zu kontrollieren.

Nachdem er noch zwei für Theorie und Praxis gleich wichtige Sätze aufstellt, nach welchen unter bestimmten Voraussetzungen die Strömungen reibender Flüssigkeiten durch zylindrische Röhren bei stationärem Strome sich so verteilen, dass der Verlust an lebendiger Kraft durch die Reibung ein Minimum wird, und im Falle des Gleichgewichts eines schwimmenden Körpers im langsamen stationären Strome die Reibung selbst einen kleinsten Wert annimmt, dringt er, nachdem ihn schon seine allgemeine Transformationsmethode der Probleme der elektrischen Verteilung auf die mathematisch so wichtigen Abbildungsprobleme geführt hatte, in der im Jahre 1868 veröffentlichten funktionentheoretisch äußerst interessanten Arbeit „Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen“ [99] tiefer in die Lehre vom Ausfluss der Flüssigkeiten und der Bildung freier Strahlen ein und behandelt die hierfür charakteristischen Erscheinungen der Diskontinuität der Bewegung und des Entstehens von Wirbeln. HELMHOLTZ geht von der Überlegung aus, dass durch die Natur des Problems, die Entstehung freier Flüssigkeitsstrahlen zu beschreiben, von selbst das Eintreten einer Diskontinuität gefordert wird, und dass somit die hydrodynamischen Grundgleichungen die Möglichkeit einer diskontinuierlichen Beziehung der in ihnen vorkommenden Größen zulassen müssen. In der Tat zeigte sich, dass in einer bewegten inkompressibeln Flüssigkeit der Druck, dessen Verminderung der lebendigen Kraft der bewegten Flüssigkeitsteilchen direkt proportional ist, sobald die letztere eine gewisse Größe übersteigt, negativ werden, und die Flüssigkeit zerreißen muss, und es wird nachgewiesen, dass jede geometrisch vollkommen scharf gebildete Kante, an welcher Flüssigkeit vorbeifließt, selbst bei der mäßigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit dieselbe zerreißen und eine Trennungsfläche herstellen wird, dass dagegen an unvollkommen ausgebildeten abgerundeten Kanten dasselbe erst bei größeren Geschwindigkeiten stattfindet. Mit Hilfe von Methoden der Funktionentheorie wird nun die überaus schwierige Frage nach der Gestalt des freien Strahles unter der Voraussetzung erörtert, dass von der Reibung abgesehen wird, äußere Kräfte nicht wirken, die Bewegung stationär ist, das Geschwindigkeitspotential nur von

zwei Koordinaten abhängt, und dass Gefäß und Öffnung ganz speziellen Bestimmungen unterliegen; endlich wird für die Beschreibung der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen im Ausflusstrahle selbst die Fruchtbarkeit der früher in Betreff der Wirbel gewonnenen Resultate nachgewiesen.

Zugleich mit seinen hydrodynamischen Forschungen entwickelten sich schon im Anfange seiner Heidelberger Zeit die akustischen und aerodynamischen Untersuchungen; in seinen Arbeiten „Über Kombinationstöne“ [43, 45, 46] und „Über die Klangfarbe der Vokale“ [59] nimmt er die schon in früheren kleineren Arbeiten vertretene Ansicht anderer Physiker wieder auf, dass jeder Klang d. h. jede Empfindung, wie sie die von einem einzelnen tönenden Körper ausgehende Luftbewegung erregt, sich zusammensetzt aus Empfindungen oder Tönen, wie sie durch eine einfache pendelartige Luftbewegung hervorgebracht werden, und formuliert diese Hypothese mathematisch dadurch, dass er von der FOURIERSchen Darstellung einer jeden periodischen Bewegung durch eine Summe von Sinus-Bewegungen ausgehend, die Höhe eines Klanges als die Höhe des tiefsten darin enthaltenen Tones, des Grundtones, definiert, während die übrigen als Obertöne bezeichnet werden. Die genauere experimentelle Untersuchung ergab, dass die musikalische Klangfarbe nur von der Anwesenheit und Stärke, aber nicht von den Phasenunterschieden der Obertöne abhängt, die in dem Klange enthalten sind, dass man die Klangmassen, die auf das Ohr eindringen, in ihre einfachen Bestandteile zerlegen und aus diesen wieder zusammensetzen kann, und dass ferner die Vokalklänge sich von den Klängen der meisten andern musikalischen Instrumente wesentlich dadurch unterscheiden, dass die Stärke ihrer Obertöne nicht von der Ordnungszahl derselben, sondern von deren absoluter Tonhöhe abhängt. Immer wieder ist sein Bestreben erkennbar, auf allen Gebieten der Sinneswahrnehmungen den wesentlichen Unterschied festzustellen zwischen Empfindungen, insofern sie uns nur als Zustände unseres Körpers, speziell unserer Nervenapparate zum Bewusstsein kommen, wie die Obertöne, und den Wahrnehmungen, insofern wir aus ihnen uns die Vorstellung äußerer Objekte bilden, wie der aus den Partialtönen zusammengefasste Klang.

Nun war aber bei allen bisherigen Betrachtungen der Akustik die sehr allgemeine Hypothese gemacht worden, dass die schwingenden Bewegungen der Luft und anderer elastischer Körper, welche durch mehrere gleichzeitig wirkende Tonquellen hervorgebracht werden, immer die genaue Summe der Bewegungen sind, welche die einzelnen Tonquellen hervorbringen. Indem HELMHOLTZ erkannte, dass dieses Gesetz nur in aller Strenge gilt, wenn die Schwingungen von unendlich kleiner Größe sind, die Dichtigkeitsänderungen also so klein sind, dass sie verglichen mit der ganzen Dichtigkeit nicht in Betracht kommen, und ebenso die Verschiebungen der schwingenden Teilchen verschwindend klein sind gegenüber den Dimensionen der ganzen Massen,

gelangt er für den Fall, dass dieses Gesetz nicht zutrifft, zur Erklärung der Kombinationstöne, deren objektive Existenz unabhängig vom menschlichen Ohre er nachweist, und unterscheidet wieder von diesen Kombinationstönen, bei welchen die Addition der Schwingungen außerhalb oder innerhalb des Ohres Störungen erleidet, die Schwebungen, bei welchen die objektiven Bewegungen dem oben genannten Gesetze folgen, aber die Addition der Empfindungen nicht ungestört stattfindet.

Sehr bald greift er aber noch tiefer in die Theorie der Akustik ein und stellt mit den feinsten Hilfsmitteln der Analysis in seiner berühmten Abhandlung „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“ (1859) [62] Untersuchungen über die Bewegung der Luft an, die seinen vorher besprochenen hydrodynamischen analog sind, indem er die Frage aufwirft, in welcher Weise sich ebene Schallwellen, die im Innern einer zylindrischen Röhre erregt werden und einem einfachen Tone entsprechen bei ihrem Übergange in den freien Raum verhalten, um vor allem die Schwingungsform zu ermitteln, welche sich schließlich herstellt, wenn die die Schwingungen erregende Ursache dauernd und gleichmäßig fortwirkt. Nachdem er die wichtigsten allgemeinen Sätze der Potentialfunktion für die Lehre von den Schallwellen anwendbar gemacht und als Basis für die weitere Untersuchung den interessanten Satz aufgestellt hat, dass, wenn in einem Punkte eines mit Luft gefüllten Raumes Schallwellen erregt werden, das Geschwindigkeitspotential derselben in irgend einem andern Punkte ebenso groß ist, als es in dem ersteren sein würde, wenn im letzteren Wellen von derselben Intensität erregt würden, womit auch Gleichheit des Phasenunterschiedes in beiden Fällen verbunden ist, gelingt es ihm unter gewissen Beschränkungen für die Dimension der Öffnung zwischen den im Innern der Röhre erzeugten ebenen und den sich halb kugelförmig ausbreitenden Wellen in den entfernten Teilen des freien Raumes gewisse Beziehungen herzuleiten, und damit die Frage über den Einfluss des offenen Endes auf die ebenen Wellen zu beantworten. Die weitere Untersuchung liefert die Lage der Schwingungs-Maxima und -Minima -und die davon abhängende Höhe der Töne stärkster Resonanz, und behandelt die schwierige Frage nach einer Reihe von Röhrenformen, für welche sich die Luftbewegung in der Mündung für Schallwellen großer Wellenlänge charakterisieren lässt; besser stimmen die Ergebnisse der Rechnung mit dem Experiment, wie er in einer späteren Arbeit gezeigt hat, wenn noch die innere Reibung in der Luft in Rücksicht gezogen wird.

Alle diese Resultate seiner akustischen Untersuchungen, von denen ich dem Zwecke meines Vertrages entsprechend nur die mathematisch besonders interessanten hervorhebe, finden sich in zusammenhängender Darstellung in seinem berühmten Werke „Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik“ [79] vereinigt, welches eine Fülle

für die Geschichte und das Wesen der Musik wichtiger Resultate enthält, von denen nur noch das eine von allgemeinerem Interesse hervorgehoben werden mag, dass er in der Musik in exakt mathematischer Weise Melodie als die Grundlage der Musik von Harmonie, die nur zur Verstärkung der Melodie dient, trennen lehrte, und dass er für die längst bekannte Tatsache, dass die Schwingungszahlen der Töne in einem einfachen Verhältnis stehen müssen, wenn ein harmonischer Eindruck hervorgebracht werden soll, die mathematische Begründung in dem Nachweise fand, dass die den Grundton begleitenden Partialtöne unangenehme Wirkungen auf das Ohr ausüben, wenn sich das Verhältnis der Schwingungszahlen der Grundtöne nicht durch kleine ganze Zahlen ausdrücken lässt.

Bevor ich mich nun zu einer kurzen Besprechung der weit späteren aerodynamischen Untersuchungen von HELMHOLTZ wende, soweit sie unmittelbar das Interesse des Mathematikers beanspruchen, mag einer auf dem Grenzgebiete der Hydrodynamik und Aerodynamik sich bewegenden Arbeit aus dem Jahre 1873 „Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem Luftballons zu lenken“ [126] Erwähnung geschehen, in welcher die hydrodynamischen Gleichungen dazu verwendet werden, Beobachtungsergebnisse, die an einer Flüssigkeit und an Apparaten von gewisser Größe und Geschwindigkeit gewonnen worden sind, zu übertragen auf eine geometrisch ähnliche Masse einer andern Flüssigkeit und Apparate von anderer Größe und anderer Bewegungsgeschwindigkeit. Die Ausdehnung der gewonnenen analytischen Resultate von den tropfbar inkompressibeln Flüssigkeiten auf Gase führt zu einer Reihe von interessanten Anwendungen; so findet HELMHOLTZ unter anderm, dass die Größe der Vögel eine Grenze hat, wenn nicht die Muskeln in der Richtung weiter ausgebildet werden können, dass sie bei derselben Masse noch mehr Arbeit leisten als jetzt, und dass deshalb die Natur wahrscheinlich im Modell des großen Geier schon die Grenze erreicht hat, welche für die Größe eines Geschöpfes erlangt werden kann, welches sich durch Flügel selbst heben und längere Zeit in der Höhe verbleiben soll, so dass der Mensch wohl keine Aussicht hat, durch den allergeschicktesten flügelähnlichen Mechanismus, den er durch seine Muskelkraft zu bewegen hätte, sein Gewicht in die Höhe zu heben und dort zu erhalten. Wendet man jedoch das oben erwähnte Vergleichungsprinzip auf die Zusammenstellung der Luftballons und der Schiffe an, so gelangt man zu dem interessanten Resultate, dass, wenn der Ballon etwa anderthalbmal so viel wiegt, als die arbeitenden Menschen, die er trägt, das Verhältnis zwischen Arbeitskraft und Gewicht dasselbe wäre, wie wir es in einem Kriegsdampfer dargestellt sehen.

Erst weit später in den Jahren 1888–90 dehnt HELMHOLTZ in seinen Arbeiten „Über atmosphärische Bewegungen“ [194, 197] und „Die Energie

der Wogen und des Windes“ [200] seine Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten mit Berücksichtigung der innern Reibung auf diejenige der atmosphärischen Luft aus, um zu zeigen, wie sich auch in der Luftmasse durch kontinuierlich wirkende Kräfte Diskontinuitätsflächen bilden können. Nachdem er durch streng mathematische Behandlung des Problems erkannt hatte, dass die Wirkungen der Reibung an der Erdoberfläche auf die höheren Luftschichten sehr unbedeutend sind, dass Vernichtung lebendiger Kraft durch Reibung hauptsächlich nur an der Bodenfläche und an den bei Wirbelbewegungen vorkommenden Trennungsflächen stattfindet, und dass ferner Wärmeaustausch, außer an der Grenze gegen den Erdboden und an innern Diskontinuitätsflächen, nur durch Strahlung und Fortführung warmer Luftteilchen vor sich gehen kann, legt er sich die Frage vor, woher es kommt, dass die Zirkulation unserer Atmosphäre nicht weit heftigere Winde als in Wirklichkeit erregt; er findet den Grund in der Vermischung verschieden bewegter Luftschichten durch Wirbel, welche durch Aufrollung von Diskontinuitätsflächen entstehen, und in deren Innern die ursprünglich getrennten Luftschichten in immer zahlreicheren und dünner werdenden Lagen um einander gewickelt durch die ungeheuer ausgedehnte Berührungsfläche einen schnelleren Austausch der Temperatur und Ausgleichung ihrer Bewegung durch Reibung ermöglichen. Aber in weit höherem Grade werden die Wirkungen der Reibung und Wärmeleitung hervorgebracht durch Gleichgewichtsstörungen und Vermischung der atmosphärischen Schichten, welche durch die regelmäßige Fortpflanzung von Wogen in der Atmosphäre veranlasst sind, die wie bei einer Wasserfläche durch die Übereinanderlagerung von zwei Luftschichten verschiedenen spezifischen Gewichtes entstehen. Wirklich sichtbar werden uns derartige Wellensysteme an der Grenzfläche verschieden schwerer Luftschichten erst dann, wenn die untere Schicht so weit mit Wasserdampf gesättigt ist, dass die Wellenberge, in denen der Druck geringer ist, Nebel zu bilden anfangen, und dann erscheinen streifige parallele Wolkenzüge, die sich über breite Himmelsflächen hin in regelmäßiger Wiederholung erstrecken können. HELMHOLTZ hält es daher für überaus wichtig, das Problem der Theorie der Wellen an der gemeinsamen Grenzfläche zweier Flüssigkeiten zu bearbeiten, beschränkt sich aber zunächst der großen mathematischen Schwierigkeiten wegen auf den einfachsten Fall von der Bewegung geradliniger Wellenzüge, welche sich an der ebenen Grenzfläche unendlich ausgehnter Schichten zweier verschieden dichter Flüssigkeiten in unveränderter Form und mit konstanter Geschwindigkeit fortpflanzen. Wie eine ebene Wasserfläche, über die ein gleichmäßiger Wind hinfährt, sich im Zustände labilen Gleichgewichts befindet und hierdurch wesentlich die Entstehung von Wasserwogen veranlasst, so wiederholt sich auch an der Grenze verschieden schwerer und aneinander entlang gleitender Luftschichten eben dieser Vorgang, nur in

weit größeren Dimensionen, und dies veranlasst HELMHOLTZ die Verhältnisse der Energie und ihre Verteilung zwischen Luft und Wasser eingehend zu untersuchen und führt ihn auf Grund ganz allgemeiner mechanischer Spekulationen, deren Auseinandersetzung den Schlussstein unserer Darlegung bilden wird, zu sehr interessanten, aber äußerst schwierigen Betrachtungen, welche den Unterschied stabilen und labilen Gleichgewichts in stationärer Bewegung begriffener Massen in ähnlicher Weise feststellen sollen, wie schon lange zuvor für ruhende Körper im Minimum der potentiellen Energie die Bedingung für das stabile Gleichgewicht gefunden worden, wobei sich unter anderem herausstellt, dass für stationäre Wogen bei konstant gehaltenem Geschwindigkeitspotential das stabile Gleichgewicht ebenfalls dem Minimum der Energie entspricht.

Ich wende mich nun zur Skizzierung der letzten großen Kategorie seiner mathematisch-physikalischen Arbeiten, welche ihn schließlich zu der so bedeutsamen Ausgestaltung der Prinzipien der Mechanik führten, zu seinen Untersuchungen über Elektrizität, die im Wesentlichen mit dem Jahre 1870 begannen, sich nahezu zehn Jahre fortsetzten und vor allem in den Arbeiten „Über die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper“ (1870) [114], „Über die Theorie der Elektrodynamik“ (1870–74) [111, 122, 129, 130], und in dem „Vergleich des AMP‘ERESchen und NEUMANNschen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte“ (1873 [125] niedergelegt sind. Die Gesetze der Elektrodynamik wurden damals in Deutschland von den meisten Physikern aus der Hypothese von WILHELM WEBER hergeleitet, welcher bei Aufstellung des Gesetzes von der Wechselwirkung elektrischer Massenpunkte, ausgehend von dem Gesetze NEWTONs für die Gravitationskraft und dem COULOMBS für statische Elektrizität, die Intensität der Kraft, welche sich durch den Raum mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten sollte, dem Quadrate des Abstandes der auf einander wirkenden elektrischen Quanta umgekehrt, dem Produkte der beiden Quanta aber direkt proportional setzte, und zwar mit abstoßender Wirkung zwischen gleichnamigen, mit anziehender zwischen ungleichnamigen Mengen, die Annahme COULOMBS jedoch dadurch ergänzte, dass er außer den Abständen der wirkenden Teile auch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung, mit der sich die beiden elektrischen Quanta einander näherten oder von einander entfernten, in das Gesetz mit aufnahm. Diese Annahme von Kräften, die nicht bloß von der Lage, sondern auch von der Bewegung der wirkenden Punkte abhängig sind, schien nun freilich den Ansichten von HELMHOLTZ zu widerstreiten, der schon viel früher in seinen Untersuchungen über die Erhaltung der Kraft zu dem Satze gelangt war, dass Kräfte, die von den Entfernungen und den Geschwindigkeiten abhängen, das allgemeine Naturgesetz von der Erhaltung der Energie, welches sich auch in den elektrodynamischen Er-

scheinungen durchaus bestätigte, im Allgemeinen verletzen; aber er hatte den komplizierteren Fall des WEBERSchen Gesetzes, wo die Kräfte auch noch von den Beschleunigungen abhängen, damals nicht berücksichtigt, und es ließ sich in der Tat zeigen, dass das WEBERSche Gesetz keinen Kreisprozess zulässt, der Arbeit aus Nichts erzeugt. Neben dieser WEBERSchen Hypothese von der Wirkung zwischen elektrischen Massenpunkten stand unter andern die ältere von F. E. NEUMANN, welche nicht die Wirkung von Massenpunkt auf Massenpunkt, sondern von einem linearen Stromelement auf ein anderes gibt, und welche HELMHOLTZ für einen der glücklichsten und fruchtbarsten Gedanken hält, welche die neuere mathematische Physik aufzuweisen hat; das aus der WEBERSchen Hypothese abgeleitete Gesetz für die Wirkung zweier linearer Stromelemente unterschied sich jedoch von dem NEUMANNschen Potentialgesetz, und HELMHOLTZ sah sich in seinen Untersuchungen vor die Frage gestellt, ob die WEBERSche Hypothese in der Tat der Wirklichkeit entspreche, und wie sich das NEUMANNsche und WEBERSche Gesetz zu dem nachher zu erwähnenden MAXWELLSchen Gesetze verhalte.

Indem er nun erkennt, dass sich alle die verschiedenen Formen dieser Gesetze auf eine gemeinsame Form zurückführen lassen, aus welcher sie nur durch die verschiedenen Werte einer darin enthaltenen Konstanten hervorgehen, und dass alle Erscheinungen, die vollkommen geschlossene Ströme bei ihrer Zirkulation durch in sich zurücklaufende metallische Leitungskreise hervorrufen, sich aus den verschiedenen Hypothesen gleich gut ableiten lassen, während dieselben in unvollständig geschlossenen leitenden Kreisen zu wesentlich verschiedenen Folgerungen führen, entwickelt er zum Zwecke der Entscheidung mit Hilfe des von ihm verallgemeinerten Induktionsgesetzes die Bewegungsgleichungen der Elektrizität in einem körperlich ausgedehnten Leiter. Er findet, dass dieselben für einen negativen Wert der unbestimmt gebliebenen Konstanten, wie ihn die WEBERSche Annahme erfordert, einem labilen Gleichgewichtszustande der Elektrizität entsprechen, und danach Strömungen sich entwickeln könnten, die zu unendlichen Stromstärken und unendlichen elektrischen Dichtigkeiten führen, während die Annahme des Wertes Null von MAXWELL oder eines positiven Wertes von NEUMANN für jene Konstante auf diese Schwierigkeit nicht stoßen würde. Aber diese Entwicklungen erlitten vielfache Angriffe, und es suchten die Gegner theoretisch und durch Versuche nachzuweisen, dass das von E. NEUMANN aufgestellte und von HELMHOLTZ in erweiterter Anwendung durchgeführte Grundgesetz der elektrodynamischen Erscheinungen mit den experimentellen Erfahrungen unvereinbar sei. In der Tat besteht eine Differenz zwischen dem von E. NEUMANN für geschlossene Ströme aufgestellten Potentialgesetze, wenn dasselbe auf ungeschlossene Ströme angewandt wird, und der Form des Induktionsgesetzes, welches er selbst schon früher abgeleitet hatte, da das Potentialgesetz



elektrodynamische Wirkungen nur der in den Leitern fortströmenden Elektrizität und deren Fernwirkungen, nicht aber der mittels der Fortbewegung elektrisch geladener Körper fortgeführten Elektrizität zuschreibt, während die Versuche zeigten, dass diese Annahme mit den Tatsachen in Widerspruch steht.

Mit wunderbarem Scharfsinn hatte HELMHOLTZ von vornherein erkannt, dass die Entscheidung aller dieser Fragen nur durch die freilich sehr schwierige experimentelle Untersuchung der ungeschlossenen Ströme getroffen werden könne, wenn er auch anfangs nicht vermuten konnte, dass diese Frage ihre Lösung darin finden würde, dass es überhaupt keine ungeschlossenen Ströme gibt, indem auch in dem Isolator, welcher die Leitung des Stromes unterbricht, Änderungen in der Verteilung der Elektrizität vor sich gehen, wodurch scheinbar ungeschlossene Bewegungen der Elektrizität zu geschlossenen werden.

FARADAY, der die Hypothese von der Existenz der Fernkräfte nicht gelten lassen wollte, weil es ihm undenkbar schien, dass eine unmittelbare Wirkung zwischen zwei getrennten Körpern bestehen sollte, ohne dass in den zwischenliegenden Medien eine Veränderung vor sich gehe, suchte zuerst eine solche in Medien aufzufinden, welche zwischen elektrischen oder zwischen magnetischen Körpern lagen, und es gelang ihm in der Tat, in fast allen Körpern Magnetismus oder Diamagnetismus, sowie in gut isolierenden Körpern unter der Einwirkung elektrischer Kräfte eine Veränderung nachzuweisen, welche er als dielektrische Polarisierung der Isolatoren bezeichnete. Wenn man nun mit FARADAY und MAXWELL, welcher diese Hypothesen mathematisch geformt hat, annimmt, dass auch in den Isolatoren elektrische Bewegungen mit elektrodynamischer Wirksamkeit eintreten können, wodurch dieselben dielektrisch polarisiert werden, so ergibt sich die vollständige Theorie aus einer Modifikation des Potentialgesetzes.

Teils vor, teils zwischen diese für die Theorie der Elektrodynamik so wichtigen Arbeiten fallen seine Untersuchungen über die Gesetze der Verteilung der elektrischen Ströme in körperlichen Leitern und über elektrische Grenzschichten. In diesen wird das bekannte Theorem von der Belegung einer Oberfläche mit Elektrizität für elektromotorische Kräfte dahin erweitert, dass stets eine bestimmte Verteilung elektromotorischer Kräfte auf der Oberfläche eines Leiters sich angeben lässt, welche in allen andern angelegten Leitern genau dieselben abgeleiteten Ströme hervorbringen würde, wie die im Innern des Leiters beliebig verteilten elektromotorischen Kräfte, und ferner wird nachgewiesen, dass die bisherige Annahme, dass Elektrizität, wenn sie sich in einem oder mehreren Körpern in's Gleichgewicht setzt, das Innere der Körper gänzlich verlässt und nur auf der Oberfläche derselben eine unendlich dünne Schicht bildet, nur so lange statthaft ist, als wir es mit einer einfachen,

elektrischen Grenzschicht eines Leiters, der ohne Sprung im Werte der Potentialfunktion die benachbarten Leiter oder Isolatoren berührt, zu tun haben; in denjenigen Fällen dagegen, wo ein Sprung im Werte der Potentialfunktion an der Grenze zweier verschiedener Körper eintritt, also wenn zwei Leiter unter dem Einflusse einer zwischen ihnen wirkenden galvanischen Kraft sich berühren, wird längs der Grenzfläche eine elektrische Doppelschicht sich ausbilden, deren Bedeutung für die Erscheinungen, die beim Fließen benetzender Flüssigkeiten längs einer festen Wand eintreten, dargelegt wird.

Inzwischen waren aber die Anschauungen MAXWELLS, der, wie schon erwähnt, an FARADAY anknüpfend die Fernwirkung durch die Wirkung eines Zwischenmediums ersetzte, von entscheidendem Einfluss auf die Arbeiten von HELMHOLTZ geworden, der in einer 1881 veröffentlichten Untersuchung: „Über die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisierter Körper wirkenden Kräfte“ [161] nachweist, dass es ohne alle Zuziehung von Hypothesen über die innere Konstitution elektrisch oder magnetisch polarisierter Körper möglich ist, die ponderomotorischen Kräfte zu finden, welche auf die inneren Teile solcher Körper einwirken. Die analytische Behandlung führt ihn zu Ausdrücken, aus denen die Fernkräfte ganz verschwinden und ersetzt sind durch die Reaktionen des polarisierten Mediums; er gelangt somit zu den Anschauungen von FARADAY und MAXWELL, die auch in dem von ponderabler Substanz leeren Räume den Äther als Träger der Spannungen betrachten und in den in Leitern stattfindenden elektrischen Bewegungen nichts anderes sehen als ein Entstehen und Vergehen der Polarisierungen in den Isolatoren. Und noch enger schließt sich HELMHOLTZ diesen Anschauungen in der im Jahre 1882 erschienenen Arbeit „Über absolute Maßsysteme für elektrische und magnetische Größen“ [169] an, in welcher er ausdrücklich der Theorie von FARADAY-MAXWELL den Vorzug gibt vor allen andern elektrodynamischen Theorien, welche direkte Fernwirkung annehmen, deren Größe und Richtung von den absoluten oder relativen Bewegungen je zweier elektrischer Quanta abhängen, da sie weder das Prinzip der Endlichkeit und Konstanz der Energie, noch das der Gleichheit der Action und Reaktion verletze, und zunächst, um der Theorie nur die konservativen Vorgänge zu Grunde zu legen, diejenigen Prozesse ausschließe, bei denen nach Art der Reibung Wärme erzeugt und elektrische oder magnetische Energie verloren wird.

Diese Arbeit, in der er durch die von FARADAY gefundenen Tatsachen zu der Frage angeregt wurde, ob Fernwirkungen überhaupt existieren und in Betracht gezogen werden müssten, weist schon auf die völlig neue Gedankenreihe hin, welche in ihm seine bald folgenden, für die Prinzipien der Mechanik so hochbedeutsamen Entdeckungen vorbereitete. Aber es war zunächst eine weitere Durchforschung der verschiedensten Gebiete erforderlich, um daraus eine Behandlung der Prinzipien der Mechanik hervorgehen zu lassen, welche

die Gesetze für alle Erscheinungen der Natur in sich schließe, und deshalb wendet sich HELMHOLTZ im Jahre 1882 in seinen Abhandlungen „Über die Thermodynamik chemischer Vorgänge“ [167, 168] der theoretischen Chemie zu, indem er die Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie auf die chemischen Vorgänge anwendet, und schon deutlich die verallgemeinerte Auffassung der Prinzipien der Mechanik erkennen lässt, die hier freilich noch vollständig in physikalische Form gekleidet ist.

Da der Verlust von mechanischer Energie durch Reibung Wärme entstehen lässt, und der Gewinn von mechanischer Energie einen Verlust von Wärme bedingt, da ferner die Menge der verlorenen und gewonnenen Energie proportional ist der Menge der gewonnenen und verlorenen Wärme, so durfte man die Wärme als eine Form der Energie betrachten und gelangte zu der Annahme, dass jedes Partikel eines warmen Körpers sich fortwährend mit beständig variierender Bewegungsrichtung so schnell bewegt, dass dasselbe eine geringe oder gar keine Veränderung seines Ortes im Körper erfährt. Ist dies aber der Fall, so muss ein Teil der Energie eines warmen Körpers die Form der kinetischen Energie haben, und es wird somit die Energie, da jede Art derselben in Wärme verwandelt werden kann, in der Form von Wärme gemessen werden können. Aber das Prinzip von der Erhaltung der Energie gibt keinen Aufschluss darüber, ob Arbeit unbegrenzt in Energie der Wärme und letztere unbegrenzt in Arbeit verwandelbar ist, und wie es sich damit bei all' den andern Naturkräften verhält, und auf diese in praktischer und theoretischer Beziehung so wichtige Bestimmung richtete nun HELMHOLTZ zunächst seine Aufmerksamkeit, indem er untersuchte, ein wie großer Teil der Wärme, die in einem galvanischen Elemente bei chemischen Prozessen entwickelt wird, sich als Stromesarbeit wiederfindet, und die Energieformen in verschiedene Rangstufen ordnete, je nachdem sie mehr oder weniger vollkommen in mechanische Arbeit verwandelbar sind. Die bisherigen Untersuchungen über die Arbeitswerte chemischer Vorgänge bezogen sich fast ausschließlich auf die bei Herstellung und Lösung einer Verbindung auftretenden oder verschwindenden Wärmemengen, während doch mit den meisten chemischen Veränderungen auch Änderungen des Aggregatzustandes und der Dichtigkeit der Körper verbunden sind, und diese letzteren Arbeit in Form von Wärme und anderer, unbeschränkt verwandelbarer Arbeit erzeugen oder verbrauchen. Da nun bei den meisten chemischen Vorgängen die Veränderungen des Schmelzens, Verdampfens u. s. w. auch Wärme aus der Umgebung herbeiziehen, so wird man auch bei diesen nach der Entstehung dieser zwei Formen von Arbeitsäquivalenten fragen müssen, und wenn man weiter bedenkt, dass die chemischen Kräfte nicht bloß Wärme, sondern auch andere Formen der Energie hervorbringen können, ohne dass irgend eine der Größe der Leistung entsprechende Änderung der Temperatur in den zusammenwir-

kenden Körpern einzutreten braucht, so scheint es notwendig, dass auch bei den chemischen Vorgängen eine Scheidung eintreten muss zwischen dem Teile ihrer Verwandtschaftskräfte, welcher in andere Arbeitsformen frei verwandelt werden kann, und dem nur als Wärme erzeugbaren Teile. Diese beiden Teile der innern Energie bezeichnet nun HELMHOLTZ als freie und gebundene Energie und findet, dass die aus dem Ruhezustande und bei konstant gehaltener gleichmäßiger Temperatur des Systems von selbst eintretenden und ohne Hilfe einer äußern Arbeitskraft fortgehenden chemischen Prozesse nur in solcher Richtung vor sich gehen können, dass die freie Energie abnimmt, dass somit unter Voraussetzung unbeschränkter Gültigkeit der Sätze der mechanischen Wärmetheorie die Werte der freien Energie darüber entscheiden, in welchem Sinne die chemische Verwandtschaft tätig werden kann, wobei die Berechnung derselben sich der Regel nach nur bei solchen Veränderungen ausführen lässt, die im Sinne der Thermodynamik vollkommen reversibel sind. Er war durch die Fragen, ob und wann die latente Wärme der bei der Wasserzersetzung sich entwickelnden Gase auf die elektromotorische Kraft von Ketten Einfluss habe, zu dem Begriffe der freien chemischen Energie geführt worden, bedurfte jedoch, um diesen Begriff verwerten zu können, zunächst einer analytischen Umgestaltung der Prinzipien der Thermodynamik. In den bisherigen Anwendungen des Begriffes der potentiellen Energie waren Änderungen der Temperatur der Regel nach nicht berücksichtigt, weil entweder die Kräfte, deren Arbeitswert man berechnete, überhaupt nicht von der Temperatur abhängen, wie z. B. die Gravitation, oder weil die Temperatur während der untersuchten Vorgänge als konstant, oder als Funktion bestimmter mechanischer Änderungen, wie z. B. bei der Schallbewegung als Funktion der Dichtigkeit des Gases angesehen werden konnte. Wenn nun aber auch z. B. in letzterem Falle die Dichtigkeit eine Funktion der Temperatur ist, so blieb doch die im Werte jedes Potentials vorkommende willkürliche Konstante für jede neue Temperatur zu bestimmen, und man konnte die Übergänge von der einen zur ändern Temperatur nicht machen.

HELMHOLTZ zeigt nun, dass die thermodynamischen Gleichungen zu ihrer Darstellung nur die Differentialquotienten des als Funktion der Temperatur vollständig bestimmten sogenannten Ergals erfordern, welches bei allen in konstant bleibender Temperatur vorgehenden Übergängen den Wert der potentiellen Energie darstellt, und das er als die freie Energie bezeichnet, so dass, wenn die Differenz der gesamten inneren Energie und des Ergals die gebundene Energie genannt wird, die letztere durch die Temperatur dividiert die früher eingeführte Entropie liefert. Um ferner das, was die theoretische Mechanik bisher als lebendige Kraft oder aktuelle Energie bezeichnet hat, deutlich zu unterscheiden von den Arbeitsäquivalenten der Wärme, die auch größtenteils als lebendige Kraft unsichtbarer Molekularbewegungen aufzu-

fassen sind, nennt er erstere lebendige Kraft geordneter Bewegung, wobei geordnete Bewegung — und diese Unterscheidungen sind für die späteren Arbeiten von HELMHOLTZ von fundamentaler Bedeutung — eine solche ist, bei welcher die Geschwindigkeitskomponenten der bewegten Massen als differenzierbare Funktionen der Raumkoordinaten angesehen werden können, ungeordnete Bewegung dagegen eine solche, bei welcher die Bewegung jedes einzelnen Teilchens, wie bei der Wärmebewegung, keinerlei Ähnlichkeit mit der seiner Nachbarn zu haben braucht, die also auch vermöge der verhältnismäßig groben Hilfsmittel, über die wir verfügen können, nicht in andere Arbeitsformen frei verwandelbar ist, so dass HELMHOLTZ in diesem Sinne die Größe der Entropie als das Maß der Unordnung bezeichnen darf. Wird eine Zustandsänderung bei konstant bleibender Entropie als eine adiabatische definiert, so ergibt sich die Entropie als Wärmekapazität für die auf Kosten der freien Energie bei adiabatischem Übergange erzeugte Wärme; bei allen Zustandsänderungen, bei denen die Temperatur konstant ist, wird Arbeit nur auf Kosten der freien Energie geleistet, die gebundene ändert sich dabei auf Kosten der ein- und austretenden Wärme. Aus der Zusammenfassung dieser Resultate geht hervor, dass alle äußere Arbeit auf Kosten der freien Energie geliefert wird, alle Wärmeabgabe auf Kosten der gebundenen, und endlich bei jeder Temperatursteigerung im System freie Energie in dem angegebenen Betrage in gebundene übergeht, und hieraus leitet HELMHOLTZ Resultate über das Abgeben und Binden von Wärme bei der Bildung und Zerlegung chemischer Verbindungen ab, die durch die Beobachtungen an galvanischen Elementen bestätigt werden.

In den letzten zehn Jahren seines Lebens von 1884–94 wendet sich nun HELMHOLTZ zu seinen großen Arbeiten über die Prinzipien der Mechanik, in denen er all' die theoretischen Folgerungen verwertet, die er auf dem langen und beschwerlichen Wege des Forschens auf sämtlichen Gebieten der Physik und Physiologie gesammelt.

Die allgemeinen Prinzipien der Mechanik, das D'ALEMBERTSche Prinzip, das Gesetz von der Bewegung des Schwerpunktes, der Flächensatz, das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft und das Prinzip von der kleinsten Aktion wurden alle unter der Voraussetzung NEWTONScher Kräfte und fester Verbindungen bewiesen. Man hat aber später durch Beobachtung gefunden, dass die so hergeleiteten Sätze eine viel allgemeinere Geltung in der Natur in Anspruch nehmen durften, als aus ihrem Beweise folgte, und danach vermutet, dass gewisse allgemeine Eigenschaften der NEWTONSchen konservativen Anziehungskräfte allen Naturkräften zukommen, während man andererseits zweifelhaft wurde, ob z. B. die Anwendung des Prinzips der gleichen Wirkung und Gegenwirkung allgemein berechtigt sei, und war durch derartige Überlegungen, wie schon früher angedeutet, zu der Hypothese geführt worden,

die Fernwirkung in kontinuierlich in einem unsichtbaren Medium verteilte dynamische Einwirkungen aufzulösen und so eine Analogie herzustellen mit der Wirkungsweise einer Feder oder eines Seiles beim Übertragen von Kraft. Da es aber die Aufgabe der Physik ist, die Erscheinungen der Natur auf die einfachen Gesetze der Mechanik zurückzuführen, so entstand zunächst die wichtige Frage, wie baut sich die Mechanik selbst in der einfachsten Weise auf, und welches sind, wie HERTZ es ausdrückt, die letzten und einfachsten Gesetze derselben, denen jede natürliche Bewegung gehorcht, die keine Bewegung zulassen, deren Vorkommen in der Natur schon nach dem Standpunkte unserer heutigen Erfahrung ausgeschlossen ist, und aus denen sich, als den eigentlichen Prinzipien der Mechanik, ohne weitere Berufung auf die Erfahrung die gesamte Mechanik rein deductiv entwickeln lässt. Bis zu den bahnbrechenden Untersuchungen von HELMHOLTZ über die Erhaltung der Energie hatte sich die Mechanik, wie schon oben hervorgehoben wurde, auf Grund der GALILEISchen Vorstellung von der Trägheit der Massen und der drei NEWTONSchen Gesetze von der Bewegung entwickelt, aber man wurde sich, wenn man das gesamte Gebäude der Mechanik auf dieser Grundlage systematisch und streng aufzuführen versuchte, der Unklarheiten in der Definition der mechanischen Begriffe, des Mangels an Strenge in den Beweisen für die elementaren Sätze der Statik, für den Satz von dem Parallelogramm der Kräfte, den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten u. s. w. sehr bald bewusst, ganz abgesehen davon, dass die Fernkräfte, die molekularen Kräfte, die chemischen, elektrischen und magnetischen Kräfte sich der unmittelbaren Erfahrung überhaupt entzogen.

Die Auffindung des Prinzips von der Erhaltung der Energie ermöglichte einen einheitlichen Aufbau der theoretischen Mechanik; der Begriff der Kraft rückte in den Hintergrund, Masse und Energie traten als gegebene unzerstörbare physikalische Größen auf; die vorhandene Energie ergab sich aus zwei Teilen zusammengesetzt, von denen der eine, die kinetische Energie, durch eine in allen Fällen gleiche Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der bewegten Massen gegeben, der andere, die potentielle Energie, durch die gegenseitige Lage der Massen bestimmt, aber in jedem Falle erst aus deren besonderer Natur zu ermitteln ist; die Diskussion der verschiedenen Formen der Energie sowie der Bedingungen ihrer Überführung von einer Form in die andere bildete den Inhalt der gesamten Physik und Chemie. Um nun den Verlauf der Erscheinungen als Funktion der Zeit festzustellen, legt HELMHOLTZ nicht, wie es meist bisher geschehen, die Bewegungsgleichungen zu Grunde, um daraus die allgemeinen Prinzipien der Mechanik abzuleiten, weil zu diesem Zwecke gewisse Voraussetzungen über die wirkenden Kräfte und über die beschränkenden Bedingungen des Problems zu machen sind, deren Existenz große und umfassende Kategorien der durch die Prinzipien darge-

stellten Bewegungen ausschließen würde, sondern er geht von einem dieser Prinzipien selbst aus, welches eine ganze Reihe von Beziehungen zwischen jeder Art von möglichen Kräften herzuleiten gestattet, welche unter den obigen Bedingungen fehlten und doch in der Natur sich finden, nämlich von dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

Dieser Gegenstand bildet den Inhalt der Arbeiten, welche HELMHOLTZ unter dem Titel „Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung“ [184] und „Zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion“ [187] in den Jahren 1886 und 1887 veröffentlicht hat, und welche nach der Ansicht von HERTZ zur Zeit den äußersten Fortschritt der Physik bezeichnen. Definiert man nach LEIBNITZ als quantitatives Maß der aus dem Beharrungsvermögen der bewegten Masse folgenden Aktion das Produkt aus der Masse, der Weglänge und der Geschwindigkeit oder das Produkt aus der lebendigen Kraft und der Zeit, so verlangt das Prinzip der kleinsten Aktion, dass der Gesamtbetrag der Aktion ein Grenzwert sei für den Übergang aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage, wobei die Variation dadurch bewirkt wird, dass man die Koordinaten der einzelnen während des Überganges eintretenden Lagen des Körpersystems, gleichzeitig aber auch die Zeit variiert, und zwar so, dass der vorhandene Betrag der Energie des Systems nicht geändert wird. Dieser letzteren Forderung kann aber entweder dadurch genügt werden, dass man verlangt, dass nur der zur Zeit in der unvariirten Bewegung bestehende Betrag der Energie nicht geändert werde, ohne die Größe dieses Betrages vorzuschreiben, welcher sich möglicherweise im Laufe der normalen Bewegung anderweitig ändern könnte — und so haben LAGRANGE und HAMILTON das Problem behandelt — oder es wird, wie es JACOBI unter der Voraussetzung, dass die potentielle Energie von der Zeit unabhängig ist, getan, verlangt, dass der Betrag der Energie einen vorgeschriebenen Wert behalte, in welchem Falle man diese Beziehung benutzen kann, um das Inkrement der Zeit aus der Aktion zu eliminieren. Physikalisch ist JACOBIS einschränkende Bedingung für ein vollständig bekanntes und in sich abgeschlossenes Körpersystem stets als gültig anzusehen, während die LAGRANGE-HAMILTONSche Form die Bewegungsgleichungen auch für unvollständig abgeschlossene Systeme durchzuführen gestattet, auf welche veränderliche äußere Einflüsse wirken, die von einer Rückwirkung des bewegten Systems unabhängig angesehen werden.

HAMILTON hat nun mit Beibehaltung der LAGRANGESchen Bedingungen dem Prinzip der kleinsten Aktion noch eine andere Form gegeben, die man das HAMILTONSche Prinzip nennt; wird nämlich die HAMILTONSche Prinzipalfunktion definiert als Differenz der potentiellen Energie und der lebendigen Kraft des Systems, so sagt das HAMILTONSche Prinzip aus, dass der für gleiche Zeitelemente berechnete negative Mittelwert der Prinzipal-

funktion bei der normalen Bewegung zwischen den Endlagen ein Grenzwert wird.

Zunächst haben aber LAGRANGE, HAMILTON und JACOBI das von MAUPERTUIS (1744) aufgestellte, aber in keiner Weise begründete Prinzip nur unter der physikalischen Voraussetzung der NEWTONschen Gesetze bewiesen und daraus die Bewegung der Punkte eines materiellen Systems hergeleitet, für welches nur feste Verbindungen derselben unter einander als beschränkende Bedingungen auftraten, und zwar unter der ausdrücklichen Annahme der Gültigkeit des Satzes von der Konstanz der Energie. Nachdem aber HELMHOLTZ gefunden, dass das Gesetz von der Konstanz der Energie allgemein gültig ist, war diese letztere Voraussetzung keine Beschränkung mehr, wenn man nur für den untersuchten Vorgang alle Formen kennt, in denen Äquivalente von Energie auftreten, und es blieb also nur noch die Frage zu entscheiden, ob auch andere physikalische Vorgänge, welche nicht einfach auf Bewegungen wägbarer Massen und auf NEWTONs Bewegungsgesetze zurückzuführen sind, in denen sich aber doch Energiequanta betätigen, auch unter das Prinzip der kleinsten Wirkung begriffen werden dürfen. Wie man früher schon die Kräfte der Wärme auf die verborgenen Bewegungen greifbarer Massen zurückgeführt hatte, und wie MAXWELL in den elektrodynamischen Kräften die Wirkung der Bewegung verborgener Massen erkannte, so wollte HELMHOLTZ nun allgemein Bewegung und Energie solch' verborgener Massen in die Behandlung physikalischer Probleme einführen, da er in dem hinter den Dingen liegenden Unsichtbaren nichts anderes als Bewegung und Masse sah, welche nur für unsere Sinne nicht nachweisbar sind. Und so wählte er zur Darstellung der gesamten Bewegung das HAMILTONsche Prinzip, welches zulässt, dass auf das mechanische System, dessen innere Kräfte als von der Zeit unabhängige Differentialquotienten von Kräftefunktionen der sichtbaren Koordinaten des Systems darstellbar sind, noch äußere von der Zeit abhängige Kräfte wirken, deren Arbeit besonders berechnet wird, welche also nicht zu den konservativen Bewegungskräften gehören, sondern durch andere physikalische Prozesse bedingt sind.

Da, wie schon LAGRANGE gezeigt, die nach außen gewendeten Kräfte des bewegten Systems sich durch die Prinzipalfunktion ausdrücken lassen, nennt HELMHOLTZ dieselbe das kinetische Potential, und lässt somit das Prinzip der kleinsten Wirkung die für den Verlauf einer jeden physikalischen Erscheinung allgemein gültige Eigenschaft aussagen, dass der für gleiche Zeitelemente berechnete negative Mittelwert des kinetischen Potentials auf dem Wege der wirklichen Bewegung des Systems ein Minimum oder für längere Strecken jedenfalls ein Grenzwert ist im Vergleich mit allen andern benachbarten Wegen, die in gleicher Zeit aus der Anfangslage in die Endlage führen. Das kinetische Potential geht für die Ruhe in den Wert der potentiellen Ener-



gie über, und das HAMILTONSche Prinzip lässt dann für das Gleichgewicht ein Minimum der potentiellen Energie erkennen. Es war schon für Systeme wägbarer Massen bekannt, dass, wenn einzelne der Koordinaten nur in ihrem Differentialquotienten in den Wert der Prinzipalfunktion eintreten, und die entsprechenden Kräfte gleich Null sind, der LAGRANGESche Ausdruck für die an den ändern Koordinaten wirkenden Kräfte sich analytisch, genau wie im allgemeinen Falle, als dieselbe Funktion einer transformierten Prinzipalfunktion darstellt, welche nicht mehr wie früher die Ableitungen der Koordinaten nur in der zweiten, sondern auch in der ersten Dimension enthält, so dass also auch Formen des kinetischen Potentials eintreten können, in denen die Trennung der beiden Formen der Energie nicht zu erkennen ist, vielmehr das kinetische Potential irgend welche Funktion der allgemeinen Koordinaten und der entsprechenden Geschwindigkeiten sein kann. Dadurch wurde HELMHOLTZ zu der Frage geführt, welche Form die Prinzipalfunktion annehmen darf, damit der LAGRANGESche Ausdruck für die äußeren Kräfte unverändert bleibt, und er fand zunächst, dass dieser Forderung genügt wird, wenn dieselbe um eine Summe von Produkten der Koordinaten und der in der Richtung dieser Koordinaten wirkenden als Funktion der Zeit gegebenen äußeren Kräfte vermehrt da der in dieser Form erweiterte Minimalatz bei der Variation wiederum den LAGRANGESchen Ausdruck für die Kräfte liefert.

Die Wichtigkeit der von LAGRANGE gegebenen Form der Bewegungsgleichungen, auch auf Fälle anwendbar zu sein, wo neben der potentiellen und aktuellen Energie wägbarer Massen namentlich auch die thermischen, elektrodynamischen und elektromagnetischen Arbeitsäquivalente in Betracht kommen, hatte HELMHOLTZ bereits dadurch erwiesen, dass er die Gesetze der reversibeln Wärmevorgänge in der Form von LAGRANGES Bewegungsgleichungen also auch des Minimalatzes des kinetischen Potentials ausdrückte, welches aber die Temperatur als Maß der Intensität der thermischen Bewegungen nicht, wie die lebendige Kraft ponderabler Systeme die Geschwindigkeiten, nur in quadratischer Form enthält. Will man also die allgemeinen Eigenschaften der Systeme, die durch das Prinzip der kleinsten Wirkungen regiert werden, kennen lernen, so muss man die Annahme fallen lassen, wonach die Geschwindigkeiten nur in dem Werte der lebendigen Kraft und zwar in Form einer homogenen Funktion zweiten Grades vorkommen, und das Prinzip unter der Voraussetzung erörtern, dass die Prinzipalfunktion eine beliebige Funktion der Koordinaten und der Geschwindigkeiten ist. Die wesentliche Veranlassung zu diesen allgemeinen Betrachtungen war für HELMHOLTZ die Untersuchung der Form des kinetischen Potentials gewesen, welches MAXWELLS Theorie der Elektrodynamik fordert, und in welchem die Geschwindigkeiten der Elektrizität in einer Funktion zweiten Grades auftreten, deren Koeffizienten nicht Konstanten werden, wie es die Massen in dem

Werte der lebendigen Kraft ponderabler Systeme sind, und außerdem lineare Funktionen der Geschwindigkeiten hinzutreten, sobald permanente Magnete in Wirkung kommen.

Da nun auch die Erscheinungen des Lichts sich im Wesentlichen durch die Hypothese erklären lassen, dass der Äther ein Medium von ähnlichen Eigenschaften ist wie die festelastischen wägbaren Körper, und somit das Prinzip der kleinsten Wirkung für die Lichtbewegung jedenfalls als gültig angesehen werden muss, so betrachtet HELMHOLTZ schon jetzt den Gültigkeitsbereich des Prinzips der kleinsten Wirkung weit über die Grenze der Mechanik wägbarer Körper hinausgehend und hält es für höchst wahrscheinlich, dass es das allgemeine Gesetz aller reversibeln Naturprozesse sei, wobei noch zu beachten, dass auch die Irreversibilität nicht im Wesen der Sache sondern nur auf der Beschränktheit unserer Hilfsmittel beruhe, die es uns nicht möglich machen, ungeordnete Atombewegungen wieder zu ordnen, also z. B. die Bewegung aller in Wärmebewegung begriffenen Atome genau rückwärts gehen zu machen.

Die Allgemeingültigkeit des Prinzips der kleinsten Wirkung bildet aber ein wesentliches Hilfsmittel, die Gesetze neuer Klassen von Erscheinungen zu formulieren, indem es die sämtlichen für diese Erscheinung wesentlichen Bedingungen in einen einzigen mathematischen Ausdruck zusammenfasst; alle die Fälle physikalischer Vorgänge, in denen das kinetische Potential in den Geschwindigkeiten lineare Glieder enthält, nennt HELMHOLTZ Fälle mit verborgener Bewegung. Zunächst wird gezeigt, dass das Prinzip der kleinsten Wirkung in der oben angegebenen allgemeinen Form das Prinzip von der Konstanz der Energie stets einschließt, und der Wert der Energie aus dem Werte des kinetischen Potentials berechnet; da jedoch nicht umgekehrt in jedem Falle, wo die Konstanz der Energie gewahrt ist, auch das Prinzip der kleinsten Wirkung gilt, so wird das letztere mehr aussagen als das erstere, und noch eine besondere Eigenschaft der vorhandenen Naturkräfte ausdrücken, die nicht schon durch ihren Charakter als konservative Kräfte gegeben ist. Die Herleitung des Wertes des kinetischen Potentials aus dem der Energie bringt willkürliche Größen hinein, welche homogene Funktionen ersten Grades der Geschwindigkeiten sind, und ist deshalb von Bedeutung, weil es nunmehr möglich sein wird, aus der vollständigen Kenntnis der Abhängigkeit der Energie von den Koordinaten und Geschwindigkeiten das kinetische Potential und somit die Bewegungsgesetze des Systems zu finden, vorausgesetzt, dass das Prinzip der kleinsten Wirkung gültig ist, und es gelingt, die nach den Geschwindigkeiten linearen Glieder, welche verborgenen Bewegungen entsprechen, zu finden.

Nachdem HELMHOLTZ einige allgemeine Wechselbeziehungen zwischen den Kräften, die das System gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen hin

ausübt, seinen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten entwickelt, die z. B. das thermodynamische Gesetz ergeben, dass, wenn Steigerung der Temperatur den Druck eines Körpersystems steigert, Kompression desselben die Temperatur steigern wird, weist er wenigstens für eine beschränkte Anzahl von Koordinaten nach, dass auch umgekehrt das Prinzip der kleinsten Wirkung jedesmal gültig ist, wenn eben diese Wechselbeziehungen der Kräfte bestehen. Endlich werden noch die totalen und partiellen Differentialgleichungen der Bewegung von HAMILTON für die verallgemeinerte Form des kinetischen Potentials, und daraus eine Reihe von Folgerungen für umkehrbare Bewegungen eines Systems, d. h. für solche Bewegungen hergeleitet, bei denen die Reihe der Lagen, die es bei rechtläufiger Bewegung durchgemacht hat, auch rückwärts durchlaufen werden kann ohne Eingriff anderer Kräfte und mit denselben Zwischenzeiten für jedes Paar gleicher Lagen.

Es wird sogleich von den weiteren Anwendungen des verallgemeinerten HELMHOLTZschen Prinzips der kleinsten Wirkung die Rede sein und soll nur noch bemerkt werden, dass HERTZ für dieses Prinzip ein anderes allgemein gültiges Gesetz zu Grunde legen will, welches die Bewegung aller Systeme unmittelbar beschreibt und welches aussagt, dass, wenn die Zusammenhänge des Systems einen Augenblick gelöst werden könnten, sich seine Massen in gradliniger und gleichförmiger Bewegung zerstreuen würden, dass aber, da eine solche Auflösung nicht möglich ist, sie jener angestrebten Bewegung wenigstens so nahe bleiben als möglich.

Die Herleitung der Eigenschaften der Bewegungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung bot große mathematische und physikalische Schwierigkeiten und führte ihn zu den in den „Studien zur Statik monozyklischer Systeme“ (1884) [176] und „Prinzipien der Statik monozyklischer Systeme“ (1884) [179] niedergelegten Untersuchungen, die einen wesentlichen Fortschritt in der Behandlung mechanischer und physikalischer Probleme bilden, und unter den Händen BOLTZMANNs bereits eine beherrschende Stellung in der theoretischen Physik erlangt haben.

Wenn in einem Systeme von Körpern eine Bewegung stattfindet, so verändert sich in der Regel die räumliche Lage oder auch sonst der Zustand dieser Körper; dass dies jedoch nicht notwendig ist, sieht man, wenn z. B. Drähte lange von einem vollkommen unveränderlichen elektrischen Strome durchflossen werden, es bleibt in diesem Falle die Lage, die Temperatur, der magnetische Zustand in der Nähe befindlicher Eisenmassen in jedem Punkte des Raumes unverändert, und es muss also die Bewegung, die wir uns als Ursache der beschriebenen Erscheinungen denken, eine vollkommen stationäre sein dergestalt, dass jedesmal, sobald ein Teilchen seinen Ort verlässt, immer nach verschwindend kurzer Zeit wieder ein genau gleich beschaffenes, mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung bewegtes Teilchen

an dessen Stelle tritt, so dass trotz der fortwährenden Bewegung an keinem Punkte des Raumes eine Veränderung wahrnehmbar ist. HELMHOLTZ nennt nun eine solche Bewegung, wie z.B. die Bewegung des rotierenden Kreisels oder den Strom reibungsloser Flüssigkeit in einem ringförmigen Kanäle, eine zyklische, und wenn alle in einem Systeme von Körpern stattfindenden Bewegungen zyklische sind, das System ein zyklisches; zyklische Bewegungen werden häufig verborgene Bewegungen sein, da sie allein bestehend eine Änderung im Anblick der Massenverteilung nicht hervorrufen, und umgekehrt verborgene Bewegungen fast stets zyklische. Man nennt eine Koordinate eine zyklische, wenn während der Veränderung derselben sich der ganze Zustand des Systems nicht ändert, also auch die in demselben enthaltene lebendige Kraft keine Änderung erleidet, und somit nicht eine Funktion der Koordinate, sondern im Allgemeinen des Differentialquotienten derselben ist, da die lebendige Kraft um so größer sein wird, je rascher die zyklische Bewegung vor sich geht; außer durch die zyklischen Koordinaten mag der Zustand des Systems noch durch andere bestimmt sein, welche HELMHOLTZ die langsam veränderlichen Koordinaten oder die Parameter nennt, und die sich so langsam verändern sollen, dass ihre Differentialquotienten nach der Zeit vernachlässigt werden können, die lebendige Kraft also zwar die Parameter, aber nicht deren Differentialquotienten enthält; wenn die Parameter für einen längeren Zeitraum als konstant betrachtet werden, so wird während desselben die Bewegung eine zyklische sein, und das System je nach der Anzahl der zyklischen Koordinaten ein monozyklisches etc., im Allgemeinen polyzyklisches genannt.

Die Bedingung für das Auftreten eines zyklischen Systems kann mit jedem beliebigen Grade der Annäherung erfüllt sein, sobald das System überhaupt zyklische Koordinaten besitzt, wenn die Teile der Energie, welche die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter enthalten, verschwinden gegen die Teile, welche von den zyklischen Intensitäten abhängen, wenn also die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter hinreichend klein oder die der zyklischen Koordinaten hinreichend groß angenommen werden. Die Kräfte eines zyklischen Systems nach seinen Parametern sind der Annahme eines zyklischen Systems zufolge unabhängig von den Änderungsgeschwindigkeiten dieser Parameter, wie sich unmittelbar aus dem LAGRANGESchen Ausdrucke durch die kinetische Energie ergibt, und ebenso folgt, dass, wenn auf die zyklischen Koordinaten eines zyklischen Systems keine Kräfte wirken, die sämtlichen zyklischen, durch das Produkt aus Masse in Geschwindigkeit definierten Momente des Systems in der Zeit konstant sind, in welchem Falle die Bewegung eine adiabatische genannt wird. Die von HELMHOLTZ charakterisierten Bewegungen sind somit ihrem Wesen nach dadurch definiert, dass potentielle und aktuelle Energie des Systems unabhängig sein sollen von ei-

ner gewissen Anzahl von Koordinaten, welche zur vollständigen Bestimmung der Lage der Teile des Systems notwendig wären, aber nur mit ihrem Differentialquotienten nach der Zeit in die Werte der Energie eintreten, was auch bei nicht streng stationären Bewegungen der Fall sein wird, wenn wir Änderungen im Zustande des Systems so langsam vor sich gehen lassen, dass das System sich niemals merklich aus den Zuständen entfernt, in denen es dauernd beharren könnte. So ist die Wärmebewegung nicht im strengen Sinne monozyklisch, da jedes einzelne Atom wahrscheinlich fortdauernd in der Art seiner Bewegung wechselt und erst dadurch, dass in einer ungeheuer großen Anzahl von Atomen stets alle möglichen Stadien der Bewegung repräsentiert sind, der mechanische Charakter einer monozyklischen Bewegung eintritt.

HELMHOLTZ wirft nun die Frage auf, unter welchen allgemeinsten Bedingungen die bekannten physikalischen Eigentümlichkeiten der Wärmebewegung bei andern bekannten Klassen von Bewegungen vorkommen können, und ob speziell eine Klasse mechanisch verständlicher Bewegungen angegeben werden kann, bei der ähnliche Beschränkungen der Umwandlung von Arbeitsäquivalenten wie beim zweiten Hauptsatz der Wärmelehre vorkommen. Indem er die Definition eines monozyklischen Systems dahin erweitert, dass in demselben entweder nur *eine* zyklische Koordinate vorkommt, oder wenn deren mehrere, dann alle diese Funktionen *einer* andern Größe sind, hebt er zunächst den besonders wichtigen und interessanten Fall hervor, in welchem zwischen zwei monozyklischen Systemen gewisse mechanische Verbindungen zur Herstellung fester Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten eingeführt werden, welche gar keinen Einfluss haben, so lange die Bewegung schon an und für sich so vor sich geht, wie es ihnen entspricht, dass sie aber beginnenden Abweichungen allemal solche Kräfte entgegenstellen, als nötig sind, die Abweichungen zu verhindern. HELMHOLTZ nennt das so entstehende System, wie z. B. zwei Kreisel, deren Axen so verbunden sind, dass sie zu gleicher Umlaufgeschwindigkeit gezwungen werden, das gefesselte, den Zustand die Koppelung des Systems und erkennt in dieser das einzige Mittel, direkt auf die innere Bewegung der gegebenen monozyklischen Systeme zu wirken, wie wir ja auch bei der Wärmebewegung der Atome in Folge der Beschränkung der uns zu Gebote stehenden Methoden unsere Einwirkungen nicht auf bestimmte Atome isolieren können, sondern notwendig immer alle in einem gewissen Raum enthaltenen gleichmäßig treffen müssen. Wenn nun zwei ursprünglich von einander unabhängige monozyklische Systeme durch passende Regulierung der äußeren Kräfte in einen Zustand versetzt werden, der den Bedingungen einer bestimmten Art fester Verbindung entspricht, so kann man eine solche feste Verbindung zwischen ihnen eintreten lassen, ohne dadurch die vorhandene Bewegung zu stören, und sie von da ab unter Einhaltung dieser Verbindung sich weiter bewegen lassen, so wie zwei Körper

gleicher Temperatur ohne Veränderung ihrer innern Bewegung in leitende Berührung gesetzt werden können, so dass sie bei neuen hinreichend langsamen Veränderungen gleiche Temperatur behalten, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass jene beiden Systeme in der Lage, die ihnen behufs der Koppelung gegeben ist, noch mit Druck oder Fernkräften auf einanderwirken.

Mit Hilfe von mathematischen Betrachtungen, die den in der Wärmelehre angestellten ganz analog sind, zeigt nun HELMHOLTZ allgemein, dass, wenn monozyklische Systeme nur solche Verbindungen unter einander zulassen, dass die äußern Kräfte jedes einzelnen Systems nur von dem augenblicklichen Zustande des Systems und nicht von der eintretenden oder aufgehenden Verbindung mit ändern Systemen abhängen, die Koppelung also eine reine Bewegungskoppelung ist und ein neues monozyklisches System erzeugt, wenn ferner, sobald die Bedingungen des Austausches der innern Bewegung zwischen zweien oder mehreren Systemen eintreten, das Gleichgewicht der innern Bewegungen zwischen ihnen davon abhängt, dass eine bestimmte Funktion der Parameter eines jeden einzelnen — in der Wärmelehre die Temperatur — denselben Wert hat, wie die entsprechenden Funktionen der andern, dann auch die dritte durch das CARNOTSche Gesetz ausgesprochene wesentliche Eigentümlichkeit der Wärme, die beschränkte Umwandlungsfähigkeit, für sie gelten wird.

Diesen für die Prinzipien der Mechanik fundamentalen Untersuchungen von HELMHOLTZ über das Prinzip der kleinsten Wirkung und die monozyklischen Systeme reihen sich noch teils ergänzend, teils berichtend seine drei letzten Arbeiten an, die sich schon ganz auf den Boden der von FARADAY, MAXWELL und HERTZ geschaffenen Anschauungen stellen, nach welchen die elektrischen Oszillationen in dem den Weltraum füllenden Äther in ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ihrer Natur als Transversalschwingungen, der damit zusammenhängenden Möglichkeit der Polarisationserscheinungen, der Brechung und Reflexion vollständig den Oszillationen des Lichtes und der Wärme entsprechen, und die anscheinenden Fernkräfte durch Übertragung der Wirkung von einer Schicht des zwischenliegenden Mediums zur nächsten fortgeleitet werden.

In der Arbeit „Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik“ (1892) [207] untersucht HELMHOLTZ, ob sich die empirisch gefundenen Sätze der Elektrodynamik, wie sie in MAXWELLS Gleichungen ausgesprochen sind, in die Form eines Minimalgesetzes bringen lassen, und auf Grund von Erwägungen, wie wir sie früher besprochen, ergab sich, dass die ponderomotorischen Kräfte in der Tat aus dem verallgemeinerten HAMILTONSchen Prinzip vollkommen übereinstimmend mit MAXWELLS Theorie hergeleitet werden können, wobei die Energie sich aus zwei Teilen zusammensetzt, die dieselbe Rolle gegen einander spielen, wie die potentielle und aktuelle Ener-

gie in den Problemen für wägbare Massen; die elektrische Energie erscheint dabei als potentielle Energie ruhender Massen, soweit keine Änderungen der Momente oder elektrische Ströme mitspielen, die magnetische Energie als lebendige Kraft.

Nun vertieft er sich weiter in die elektromagnetische Theorie des Lichtes und sucht von der Überlegung ausgehend, dass die Dispersion des Lichtes stets nur in oder an der Grenze von Räumen vorkommt, die außer dem Äther auch ponderable Masse enthalten, in einer im Jahre 1892 erschienenen Arbeit die Farbenzerstreuung mit Zuhilfenahme dieser Theorie und mit Rücksicht auf die dem Äther eingelagerten Massen zu erklären. Die mathematische Theorie von MAXWELL weist nun nach, dass auch ponderomotorische Kräfte innerhalb des von elektrischen Oszillationen durchzogenen Äthers wirksam werden müssen, welche schwere Atome, die im Äther liegen, in Bewegung setzen könnten; HELMHOLTZ zeigt, dass dann die wägbaren Teilchen auch Ladungen wahrer Elektrizität enthalten müssen, so dass in den zu bildenden Bewegungsgleichungen die elektrischen Momente, welche durch die wahre Elektrizität jener Träger gebildet werden, da sie von veränderlicher Größe und Richtung sind, und auch von nicht elektrischen Kräften, Beharrungsvermögen, Reibung etc. angegriffen werden, von denen des freien Äthers zu trennen und die Wellenschwingungen in dem mit beweglichen Molekülen beladenen und im freien Äther besonders zu untersuchen sind, woraus die Gesetze der Farbenzerstreuung sich ermitteln lassen.

Von hohem Interesse sind endlich seine allgemeinen „Folgerungen aus MAXWELLS Theorie über die Bewegungen des reinen Äthers“ (1893) [213], welcher dem Äther Beweglichkeit zuschreibt und sich denselben von ponderabler Substanz durchdrungen vorstellt, die sich mit ihm bewegt; in der Tat kommen derartige Einmischungen in allen Substanzen vor, die entweder leitend oder lichtbrechend gegen das Vakuum sind, oder Werte der dielektrischen und magnetischen Konstanten haben, die von denen des Vakuums abweichen, und man wird aus den Bewegungen der wägbaren Teile auf die damit übereinstimmenden Bewegungen des Äthers schließen können. Sind jedoch die Räume von wägbaren Körpern frei und nur mit Äther gefüllt, so tritt die Frage auf, ob reiner Äther ganz frei von allem Beharrungsvermögen bestehen kann, ob er den sich durch ihn hinbewegenden wägbaren Körpern ausweichen muss oder sie durchdringt, indem er dabei in Ruhe bleibt oder sich zum Teil mit ihnen bewegt oder auch zum Teil ausweicht. Unter der Voraussetzung, dass der Äther in mechanischer Beziehung die Eigenschaften einer reibungslosen, inkompressibeln Flüssigkeit hat, dabei aber ganz ohne Beharrungsvermögen ist, findet HELMHOLTZ, dass die von MAXWELL aufgestellten und von HERTZ vervollständigten Gesetze in der Tat geeignet sind, vollständigen Aufschluss über die Gesetze der im Äther auftretenden

Veränderungen und Bewegungen zu geben und zwar so, dass die Zusammenfassung der Gesetze der Elektrodynamik unter das Prinzip der kleinsten Wirkung, wie sie HELMHOLTZ früher gegeben, nur noch der Einführung der Hypothese der Inkompressibilität bedarf, und zwar durch Ergänzung des elektrokinetischen Potentials durch die linke Seite der Definitionsgleichung der Inkompressibilität, und hieraus werden wichtige Schlüsse über das Entstehen und Vergehen ponderomotorischer Kräfte im ruhenden und bewegten Äther gezogen.

In dem nicht mehr vollendeten „Nachtrag zu dem Aufsätze: Über das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik“ (1894) [218] kommt HELMHOLTZ noch einmal auf seine Zusammenfassung der MAXWELL-HERTZschen Gesetze der Elektrodynamik in der verallgemeinerten Form des Prinzips der kleinsten Wirkung zurück, um zu entscheiden, ob der bekannte Wert der gesamten Energie der elektromagnetischen Vorgänge noch den Zusatz einer nach den Geschwindigkeiten linearen Funktion verlangt, und wenn dieses der Fall, die ponderomotorischen Kräfte in übersichtlicher Form aus diesem Prinzip herzuleiten.

Hiermit endet die lange Reihe glänzender mathematischer und mathematisch-physikalischer Arbeiten dieses unvergleichlichen Forschers, von deren Inhalt und Bedeutung ich Ihnen, soweit es ohne tieferes Eingehen in die Feinheiten seiner mathematischen Analyse möglich war, ein wenn auch gewiss unvollkommenes Bild zu entwerfen mich bestrebte. Was der Inhalt des Vertrages sein sollte, den HELMHOLTZ für die vorjährige Naturforscherversammlung in Wien unter dem Titel ankündigte: „Über dauernde Bewegungsformen und scheinbare Substanzen“ und von dem sich im Nachlasse nur wenige Schriftseiten zu der Einleitung vorgefunden haben, wird uns für immer unbekannt bleiben, aber man darf wohl nicht ohne Grund der Vermutung Raum geben, dass der naturwissenschaftlichen Welt der philosophische Kern der großen Forschungen dargelegt werden sollte, welche er in den letzten Jahren seines Lebens über die Grundlagen und Prinzipien der Mechanik und Physik angestellt hatte.



## Auswahlverzeichnis der Schriften Hermann von Helmholtz' in zeitlicher Folge

Die Liste ist ein Auszug des in Band 3 der *Wissenschaftlichen Abhandlungen von Hermann von Helmholtz* angegebenen Titelverzeichnisses sämtlicher Veröffentlichungen. Die Zeitschriftentitel wurden vereinheitlicht; zusätzlich wurde die Signatur des Bandes in der Universitätsbibliothek Heidelberg in eckigen Klammern angegeben.

### 1847

5. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen“ betreffenden Arbeiten aus dem Jahre 1845. *Die Fortschritte der Physik im Jahre 1845. 1. Jahrgang. S. 346–355. Berlin 1847. G. Reimer.*  
[Signatur: O 4005::1]

### 1848

7. Ueber die Wärmeentwicklung bei der Muskelaction. *Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medicin. Jahrg. 1848. S. 144–164.*  
[Signatur: P 877::1848]
8. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen“ betreffenden Arbeiten aus dem Jahre 1846. *Die Fortschritte der Physik im Jahre 1846. 2. Jahrgang. S. 259–260. Berlin 1848. G. Reimer.*  
[Signatur: O 4005::2]

### 1850

13. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen“ betreffenden Arbeiten aus dem Jahre 1847. *Die Fortschritte der Physik im Jahre 1847. 3. Jahrgang. S. 232–245. Berlin 1850. G. Reimer.*  
[Signatur: O 4005::3]

### 1852

20. Ueber die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen. *Königsberger naturwissenschaftl. Unterhaltungen. Bd. III, S. 1–20.*  
[Signatur: O 65::3]

25. Bericht über „die Theorie der Akustik“ und „akustische Phänomene“ betreffende Arbeiten vom Jahre 1848. *Fortschritte der Physik im Jahre 1848. 4. Jahrgang. S. 101–118 und S. 124–125. Berlin 1852. G. Reimer.*

[Signatur: O 4005::4]

26. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen“ betreffenden Arbeiten aus dem Jahre 1848. *Die Fortschritte der Physik im Jahre 1848. 4. Jahrgang. S. 222–223. Berlin 1852. G. Reimer.*

[Signatur: O 4005::4]

## 1854

31. Bericht über „die Theorie der Akustik“ betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1849. *Die Fortschritte der Physik. 5. Jahrgang. S. 93–98. Berlin 1854. G. Reimer.*

[Signatur: O 4005::5]

## 1856

43. Ueber die Combinationstöne oder Tartinischen Töne. *Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn. 1856. S. LXXV–LXXVII.*

45. Ueber Combinationstöne. *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 22. Mai 1856. S. 279–285.*

[Signatur: H 64::1856]

46. Ueber Combinationstöne. *Annalen der Physik. Folge 2, Bd. 99, S. 497–540.*

[Signatur: O 4001::175]

47. Handbuch der physiologischen Optik. *1. Lieferung, S. 1–192. Leipzig 1856. Leopold Voss.*

[Signatur: O 5153-2 Folio]

## 1858

55. Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 55, S. 25–55.*

[Signatur: L 4::55]

## 1859

59. Ueber die Klangfarbe der Vocale. *Gelehrte Anzeigen / Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München*. 1859, Nr. 67–69, S. 537–541; 545–549; 553–556. — *Annalen der Physik*. Folge 2, Bd. 108, S. 280–290.  
[Signatur: H 92 A::1859 bzw. O 4001::184]
62. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. *Journal für die reine und angew. Mathematik*. Bd. 57, S. 1–72.  
[Signatur: L 4::57]

## 1860

67. Handbuch der physiologischen Optik. 2. Lieferung, S. 193–432. Leipzig 1860. Leopold Voss.  
[Signatur: O 5153-2 Folio]

## 1862

73. Ueber das Verhältniss der Naturwissenschaften zur Gesamtheit der Wissenschaften. *Rectoratsrede. Heidelberger Universitätsprogramm* 1862.  
[Signatur: F 2102-2 RES::5]
75. Ueber die Form des Horopters, mathematisch bestimmt. *Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins zu Heidelberg*, 13. Oktober 1862. Bd. III, S. 51–55  
[Signatur: H 95-4::3]

## 1863

79. Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. XI., 605 S. Braunschweig 1863. Fr. Vieweg u. Sohn.  
[Signatur: G 660 A RES]

## 1864

82. Bemerkungen über die Form des Horopters. *Annalen der Physik*. Folge 2, Bd. 123, S. 158–161.  
[Signatur: O 4001::199]

83. Ueber den Horoptor. *Heidelberger Jahrbücher der Literatur*. 1864, S. 340–342  
[Signatur: H 415 RES::57]

### 1867

94. Handbuch der physiologischen Optik. 3. (Schluss)-Lieferung, S. 433–874. Leipzig 1867. Leopold Voss.  
[Signatur: O 5153-2 Folio]

### 1868

99. Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monatsbericht der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 1868. S. 215–228.  
[Signatur: H 64::1868]
103. Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. *Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins zu Heidelberg*, Bd. IV, S. 197–202. 1868.  
[Signatur: H 95-4::4]
104. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*. 1868, 3. Juni. Nr. 9. S. 193–221.  
[Signatur: H 308::1868]

### 1870

111. (Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung:) Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern. *Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins zu Heidelberg*, 21. Januar 1870. Bd. V, S. 84–89.  
[Signatur: H 95-4::5]
114. Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Bd. 72, S. 57–129.  
[Signatur: L 4::72]

## 1872

122. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. *Monatsbericht der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 18. April 1872. S. 247–256.  
[Signatur: H 64::1872]

## 1873

125. Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte. *Monatsbericht der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 6. Februar 1873. S. 91–104.  
[Signatur: H 64::1873]
126. Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. *Monatsbericht der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 1873, S. 501–514.  
[Signatur: H 64::1873]
129. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Zweite Abhandlung: Kritisches. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Bd. 75, S. 35–66.  
[Signatur: L 4::75]

## 1874

130. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Dritte Abhandlung: Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Bd. 78, S. 273–324.  
[Signatur: L 4::78]

## 1881

161. Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisierter Körper wirkenden Kräfte. *Monatsbericht der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 17. Februar 1881. S. 191–243. — *Annalen der Physik*. Folge 3, Bd. 13, S. 335–406.  
[Signatur: H 64::1881 bzw. O 4001::249]

## 1882

167. Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 2. Febr. 1882.  
[Signatur: H 64::1882]
168. Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 27. Juli 1882.  
[Signatur: H 64::1882]
169. Ueber absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen. *Annalen der Physik. Folge 3, Bd. 17*, S. 42–54, 1882.  
[Signatur: O 4001::253]

## 1884

176. Studien zur Statik monocyclischer Systeme. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 6. März, 27. März und 10. Juli 1884. S. 159–177, S. 311–318 u. S. 755–759.  
[Signatur: H 64::1884]
179. Principien der Statik monocyclischer Systeme. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1884. Bd. 97, S. 111–140, S. 317–336.  
[Signatur: L 4::97]

## 1886

184. Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1886. Bd. 100, S. 137–166 u. S. 213–222.  
[Signatur: L 4::100]

## 1887

187. Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 1887. S. 225–236.  
[Signatur: H 64::1887]
191. Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet. *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*. Leipzig 1887. Fues' Verlag. S. 17–52

## 1888

194. Ueber atmosphärische Bewegungen. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 31. Mai 1888, S. 647–663.* — *Meteorologische Zeitschrift.* 1888, S. 329–340.  
[Signatur: H 64::1888 bzw. O 4900-0 Folio::5]

## 1889

197. Ueber atmosphärische Bewegungen. Zweite Mitteilung. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 25. Juli 1889, S. 761–780.*  
[Signatur: H 64::1889]

## 1890

200. Die Energie der Wogen und des Windes. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* 17. Juli 1890, S. 853–872. — *Annalen der Physik. Folge 3, Bd. 41, S. 641–662.*  
[Signatur: H 64::1890 bzw. O 4001::277]

## 1891

203. Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane.* Bd. 2, S. 1–30.  
[Signatur: M 1573 A::2]
205. Kürzeste Linien im Farbensystem. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 17. December 1891, S. 1071–1083.*  
[Signatur: H64::1891]

## 1892

207. Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 12. Mai 1892, S. 459–475.* — *Annalen der Physik. Folge 3, Bd. 47, S. 1–26.*  
[Signatur: H 64::1892 bzw. O 4001::283]

## 1893

213. Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 6. Juli 1893, S. 649–656.* — *Annalen der Physik. Folge 3, Bd. 53, S. 135–143.*  
[Signatur: H 64::1893 bzw. O 4001::289]

## 1894

215. Über den Ursprung der richtigen Deutung unseres Sinneseindrücke. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. 7, S. 81–96.*  
[Signatur: M 1573 A::7]
216. Vorwort zu: Heinrich Hertz, Prinzipien der Mechanik. *Leipzig 1894. Joh. Ambr. Barth, S. VII–XXVII.*  
[Signatur: 64 A 446]

## Nachgelassene Arbeiten

218. Nachtrag zu dem Aufsatz: Ueber das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik.  
*Der Inhalt der Abhandlung wurde vorgetragen in der Sitzung der Berliner Akademie vom 14. Juni 1894; das unvollendet hinterlassene Manuscript ist veröffentlicht in: Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 597.*  
[Signatur: O 416-10::3]