Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Stäckel, Paul** (1862–1919)

Titel: **Variierte Kurven bei Daniel Bernoulli und Leonhard Euler**

Quelle: Festschrift Moritz Cantor anläßlich seines achtzigsten Geburtstages.
Leipzig, 1909. — S. 1-8
Signatur UB Heidelberg: 62 B 1074

Der Autor behandelt die für eine richtige Geschichtsschreibung wichtige Lehre, daß aus der Kenntnis eines Forschers von den Sätzen A und B für ihn nicht die Kenntnis der Verbindung (A, B) folgen müsse. Nachgewiesen wird dies an zwei Beispielen bei Euler: das erste aus der Lehre von der totalen Differentialgleichungen in ihrer Beziehung zur Geradstreckung ebener Kurven, das zweite aus der Lehre von der Variationsrechnung einerseits und den kleinen Schwingungen einer Seite andererseits.

(Rezension von Peter Treutlein (1845-1912) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 40. 1909)

Festschrift

MORITZ CANTOR

anläßlich seines achtzigsten Geburtstages

gewidmet

von Freunden und Verehrern

herausgegeben von

Siegmund Günther u. Karl Sudhoff

namens der Leitung und des Verlags des
„Archivs für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik.“

LEIPZIG
VERLAG VON F. C. W. VOGEL.
1909.

Variierte Kurven bei Daniel Bernoulli und Leonhard Euler.

Von PAUL STÄCKEL (Karlsruhe).

(Mit 4 Abbildungen).

Vor einigen Jahren habe ich auf die merkwürdige Erscheinung hingewiesen, daß bisweilen Methoden und Resultate der mathematischen Forschung, von denen man annehmen darf, daß sie allgemein bekannt sind, bei der Untersuchung von Problemen, die damit in engem Zusammenhang stehen, ganz unbeachtet gelassen werden. So ist bei der Frage nach der Gestalt einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes wiederholt ein Fehlschluß gemacht worden, obwohl die Mittel, die bereits im achtzehnten Jahrhundert für die Diskussion algebraischer Kurven bereit gestellt worden waren, sofort zu der richtigen Einsicht in bezug auf die Schnittkurve der Fläche und der Tangentialebene geführt haben würden [1]). Ohne Zweifel hat es den betreffenden Mathematikern nicht an der Kenntnis jener Mittel gefehlt; sie haben jedoch davon keinen Gebrauch machen können infolge gewisser Hemmungen, die teils aus der Enge des Bewußtseins, teils aus tiefer liegenden psychischen Bedingungen entspringen.

Für den Geschichtschreiber ergibt sich hieraus eine wichtige Lehre. Aus der Tatsache, daß einem Autor die Sätze A und B bekannt gewesen sind, darf noch nicht geschlossen werden, daß dieser auch die Verbindung (A, B) und die daraus unmittelbar fließenden Folgerungen besessen habe. Wie vorsichtig man in dieser Beziehung sein muß, zeigen folgende Beipiele.

Im Jahre 1772 hatte LAGRANGE (Oeuvres III, S. 519) die Integration der *allgemeinen* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit *zwei* unabhängigen Veränderlichen auf die Integration einer *linearen* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit *drei* unabhängigen Veränderlichen zurückgeführt. Obwohl er nun bald darauf, 1779, entdeckt hatte (Oeuvres IV, S. 625), daß sich die Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen bewerkstelligen lasse, so erklärte er doch in einer Abhandlung aus dem Jahre 1785 (Oeuvres V, 543), er sei nicht

1) Vgl. meine Abhandlung: *Über das Modell einer Fläche dritter Ordnung, die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 51 (1904), S. 98.

imstande, die allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen zu integrieren. Die für uns selbstverständliche Verbindung zwischen den beiden Sätzen ist erst durch CHARPIT vollzogen worden [1]).

Ferner sagt EULER in den *Institutiones calculi integralis*, III (1770), S. 3, eine totale Differentialgleichung der Form:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

sei völlig sinnlos, falls die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist, und erklärt auch (S. 26) eine Gleichung der Form:

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 + 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz = 0$$

für absurd, sobald sie sich nicht durch Wurzelziehen auf eine integrable lineare Gleichung zwischen dx, dy, dz reduzieren lasse. Und doch hatte derselbe EULER, im Anschluß an seinen Lehrer JOHANN BERNOULLI, bereits im Jahre 1738 eine ausführliche Untersuchung über die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = 0$$

angestellt, die bei der Rektifikation der ebenen Kurven auftritt. Auch nach der Abfassung der *Institutiones calculi integralis* ist EULER wiederholt auf diese Gleichung zurückgekommen, ohne indessen jemals den Zusammenhang zwischen der Lehre von den totalen Differentialgleichungen und jenem geometrischen Problem herzustellen [2]).

Die eingehende Beschäftigung mit solchen Erscheinungen wird sicherlich wichtige Aufschlüsse über das Wesen der mathematischen Forschung und die Psychologie der mathematischen Forscher gewähren [3]), und daher darf die Mitteilung eines neuen Beispiels dieser Art, das ebenfalls LEONHARD EULER betrifft, auf Interesse rechnen.

Wenn man in der Variationsrechnung von einer Kurve zu einer benachbarten übergeht, so pflegt man jedem Punkte P (x, y) der Urkurve einen Punkt P′ (x, y + δy) der variierten Kurve zuzuordnen. Alsdann entspricht der Tangente in P mit dem Richtungskoeffizienten y' die Tangente in P′ mit dem Richtungskoeffizienten $y' + \delta y'$. Daß die auf diese Art eingeführte Variation $\delta y'$ zugleich mit der Variation δy unendlich klein wird,

1) Vgl. LACROIX, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2. ed., Paris 1814, II, S. 548.

2) Vgl. meine Abhandlung: *Darstellungen der Minimalkurven*, Leipziger Berichte 1902, S. 102—105, wo man ausführliche Literaturangaben findet, sowie A. v. BRAUNMÜHL, *Zur Geschichte der Differentialgleichungen*, Verhandl. d. III. intern. Math. Kongresses zu Heidelberg, Leipzig 1905, S. 550; BRAUNMÜHL zeigt hier, daß bereits NEWTON eine spezielle PFAFFsche Gleichung der Form $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ genau in dem Sinne integriert hat, wie es später von MONGE allgemein durchgeführt worden ist.

3) Vgl. die wertvollen Bemerkungen von C. R. WALLNER, M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Band IV, Leipzig 1908, S. 1033—1035.

hat EULER in seinen Arbeiten zur Variationsrechnung als selbstverständlich angesehen und daher ohne weiteres

$$\delta f(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'$$

gesetzt. Wenn aber auch die *Ordinate* einer Kurve nur unendlich wenig abgeändert wird, so hindert doch nichts, gleichzeitig die *Tangente* um einen endlichen Winkel zu drehen, sodaß $\delta y'$ einen endlichen Wert erhält. In der Tat hat LEGENDRE (1786) von solchen Variationen Gebrauch gemacht; um zu zeigen, daß bei dem Problem des Drehungskörpers kleinsten Widerstandes die der NEWTONschen Differentialgleichung genügende Meridiankurve kein Minimum liefere, ersetzt er diese durch eine Zickzacklinie geringer Neigung gegen die Achse der Drehung [1]). TODHUNTER (1871) machte hiergegen das Bedenken geltend, solche Variationen seien nicht erlaubt, da bei den klassischen Methoden der Variationsrechnung vorausgesetzt werde, daß $\delta y'$ ebenso wie δy unendlich klein sein soll [2]). Aber erst WEIERSTRASS hat erkannt, daß vielmehr diese Methoden einer Erweiterung bedurften, wenn man die Bedingungen dafür aufstellen will, daß die *Extremale* einen Wert des betrachteten Integrals liefert, der im Falle des Maximums größer, im Falle des Minimums kleiner ausfällt, als bei der *Gesamtheit* der benachbarten Kurven (starke Variation); übrigens ist für WEIERSTRASS nach mündlichen Mitteilungen, die er mir gemacht hat, gerade die Beschäftigung mit dem Drehungskörper kleinsten Widerstandes, zu der er durch KUMMERS Untersuchungen über den Luftwiderstand veranlaßt wurde [3]), der Ausgangspunkt der Untersuchungen über Variationsrechnung gewesen.

Während nun bei EULER in der *Variationsrechnung* keine Spur einer Unterscheidung zwischen „schwachen" und „starken" Variationen zu bemerken ist, so hat er doch bei Untersuchungen auf einem anderen Gebiete Betrachtungen über die Beschaffenheit der variierten Kurven angestellt, bei denen der Unterschied deutlich in die Erscheinung tritt, nämlich bei den *kleinen Schwingungen einer Saite.*

In dem dritten Bande der *Miscellanea Taurinensia* für 1762—1765, der im Jahre 1766 zu Turin erschienen ist, findet sich auf S. 1 bis 26 der

1) Sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations, Mem. de math. et de phys. Année 1786, Paris 1789, § 6; OSTWALDs Klassiker, Heft 47, S. 73, 106.

2) Researches on the calculus of variations, London and Cambridge 1871, S. 169, 269; vgl. auch die Bemerkung in TODHUNTERS History of the progress of the calculus of variations, Cambridge and London 1861, S. 426.

3) Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt, insbesondere auch auf Geschosse, Berliner Monatsberichte 1874, S. 703; 1875, S. 286; Berliner Abhandlungen 1875, S. 1—57; 1876, S. 1—9.

zweiten, für sich paginierten Abteilung eine Note EULERS: *Éclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes.* Sie beginnt mit Auseinandersetzungen über die Erklärung des Begriffes kleiner Schwingungen einer Saite:

[1] 1) „I. Tous ceux qui ont entrepris de déterminer le mouvement des cordes vibrantes ont borné leurs recherches à ces trois conditions:

„1^0 Ils ont considéré la corde comme fixe en ses deux extrémités A et B (fig. 1), et tendue par une force quelconque, en sorte que dans son état naturel sa figuresoit représentée par la ligne droite AB: ce n'est que dans cet état que la corde peut demeurer en repos ou en équilibre.

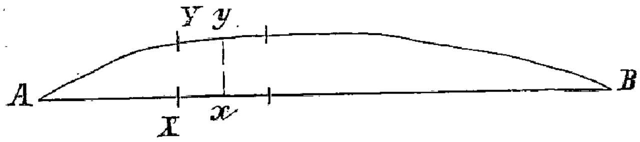

Fig. 1.

„2^0 Ils n'ont considéré que les mouvements extrémément petits d'une telle corde, en sorte que si la ligne AYB représente la figure que la corde prend pendant son mouvement à un instant quelconque, on puisse toujours regarder les appliquées XY de cette ligne comme infiniment petites.

„3^0 Ils ont supposé que le mouvement de chaque élément de la corde Y[y] 1) se fasse toujours suivant la direction de l'appliquée YX ou qu'il ne s'en écarte qu'infiniment peu. On pourrait bien traiter plus généralement cette question, mais alors la Théorie conduit à un calcul si embarassé qu'on n'en sauroit rien conclure.

II. La dernière condition se réduit à celle-ci, que l'inclination de chaque élément de la corde Yy à l'axe AB soit infiniment petite, ou bien que la tangente tirée à chaque point Y fasse avec l'axe AB un angle infiniment petit. Ce n'est que dans ce cas qu'on peut regarder chaque élément de la courbe Yy comme égale a l'élément répondant de l'axe Xx: or cette condition est absolument nécessai-[2]re, pour que le mouvement de chaque point Y se fasse dans la direction de l'appliquée YX. De là on comprend aussi réciproquement que toutes les fois, que cette condition convient à la figure AYB, le mouvement de chaque point Y ne sauroit s'écarter de la direction de l'appliquée YX.

„III. Donc quand on demande le mouvement de la corde après qu' elle aura reçu une impulsion quelconque, il faut absolument que la figure qui lui a été imprimée d'abord soit telle, que non seulement toutes les appliqués XY soient quasi infiniment petites, mais que l'inclinaison de tous les éléments de la courbe AYB soit aussi infiniment petite".

Damit kein Zweifel möglich ist, lasse ich noch eine zweite Stelle aus den *Éclaircissements* folgen:

[3] „V. Soit AB (fig. 2) la corde fixée dans ses deux extrémités A

1) Zusätze in eckigen Klammern rühren von mir her.

et B, et tendue par une force quelconque, à laquelle on ait imprimé au commencement la figure ASB, et d'abord cette courbe doit être telle, que 1⁰ toutes ses appliquées soient quasi infiniment petites, et 2⁰ que toutes se[s] tangentes ne s'écartent qu'infiniment peu de l'axe AB. Ces deux conditions sont si naturellement liées avec la tension, qu'il seroit presque impossible de réduire la corde à une telle figure, où ces deux conditions n'eussent pas lieu. De là il est clair, que la figure initiale peut être variée à l'infini, et qu'elle dépend entièrement de notre volonté. Il est donc possible de donner à la corde une telle figure, qui ne sauroit être exprimée par aucune équation analytique, comme si on la tiroit par un mouvement libre de la main, sans qu'aucune loi de continuité y ait lieu.

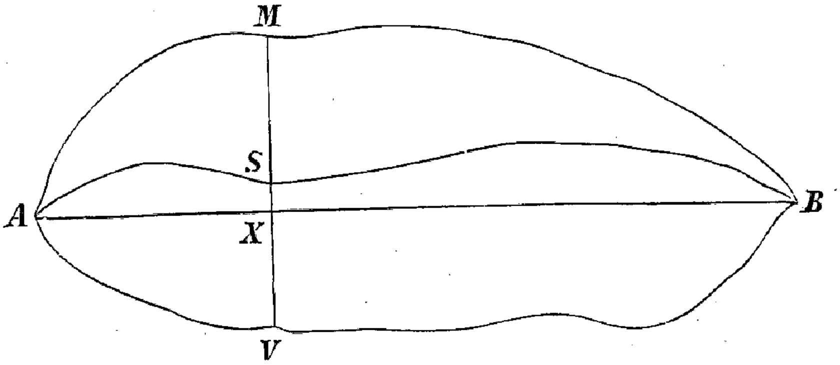

Fig. 2.

„VI. Il n'y a certainement aucun doute, qu'on puisse imprimer à la corde une telle figure, et où pourtant les deux conditions préscrites aient lieu. Pour s'en assurer mieux, on n'a qu'a tirer de A à B une ligne courbe quelconque AMB en observant cette seule condition, qu'il n'y ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe: alors en diminuant toutes les appliquées XM quasi à l'infini selon un même rapport, de sorte que XS $= \alpha$ XM, prenant α pour une fraction extrémément petite, non seulement toutes les appliquées deviendront infiniment petites, mais aussi les tangentes dans tous les points S seront infiniment peu inclinées à l'axe AB, tout comme les deux conditions préscrites l'exigent."

Deutlicher und eindringlicher läßt es sich wohl kaum sagen, daß die *courbe variée,* die aus der geradlinigen Strecke AB hervorgeht und die Gestalt der schwingenden Saite zur Anfangszeit darstellt, zwei wesentlich verschiedenen Bedingungen zu genügen hat; denn es müssen *erstens* die Ordinaten XS „sozusagen" unendlich klein sein, *zweitens* aber muß dasselbe für die Neigung der Tangenten gelten. EULER hält es sogar für notwendig, die Existenz solcher variierten Kurven ausdrücklich zu beweisen [1]).

1) Welchen Fortschritt EULERS Éclaircissements darstellten, erkennt man am besten, wenn man damit die Abhandlungen von d'ALEMBERT: Sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, Mém. de Berlin. année 1747 (1749),

Ganz anders äußert er sich in einer bald darauf verfaßten Abhandlung zur Variationsrechnung: *Methodus nova ac facilis calculum variationum tractandi,* die am 14. Januar 1771 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde [1]). Während EULER bei dem Problem aus der *Mechanik* die klare Erkenntnis des Sachverhalts besitzt, kann er sich hier von dem Vorurteil nicht losmachen, in das er sich verstrickt hatte. Ja noch mehr, dasselbe Mittel, das er dort zum Beweise der Existenz *besonderer* Variationen verwandt hatte, will er hier benutzen, um die *Gesamtheit* aller benachbarten Kurven zu erhalten. Seine Absicht ist nämlich, das *singulare genus calculi* der *Variationsrechnung* auf die gewöhnliche Differentialrechnung zurückzuführen, und dazu glaubt er zu gelangen, indem er den Übergang von der ursprünglichen Kurve zu der benachbarten durch die Änderung eines Parameters bewirkt. „Alia relatio requiritur", sagt er dort, „quae omnes alias curvas huic saltem proximas complectatur; omnes autem eiusmodi curvas, si X denotet illam functionem cui y aequatur, tali aequatione contineri posse

$$y = X + tV$$

manifestum est, denotante V functionem quamcunque ipsius x. Sumta enim t infinite parva haec aequatio omnes omnino curvas propositae proximas in se comprehendit."

Diese beschränkte Auffassung der Variationen bedeutete geradezu einen Rückschritt gegenüber dem Standpunkt, den EULER früher eingenommen hatte. In der Abhandlung: *Elementa calculi variationum,* die er am 16. Sept. 1756 der Berliner Akademie vorlegte, die aber erst 1766 in den Novi Commentarii Petrop. 10, S. 51 abgedruckt worden ist, führt er aus, daß man zwar von einer Kurve zu benachbarten Kurven übergehen könne, indem man diese als Bestandteil einer Kurvenschar

$$y = f(x, a)$$

auffaßt, wo a einen Parameter bezeichnet, daß hiermit jedoch keineswegs die Gesamtheit der benachbarten Kurven erschöpft sei. Gerade aus diesem Grunde bringe er für die neue Rechnungsart einen eigenen Namen: *Variationsrechnung* in Vorschlag. Jetzt aber heißt es weiter:

„Cuius necessitas adhuc clarius perspicietur, si perpendamus, eius vim multo latius patere, quam ad solam parametrorum variabilitatem, qua etsi lineae curvae in infinitum multiplicentur, omnes tamen semper sub certo quodam genere, quod scilicet in data aequatione continetur, comprehendun-

---

S. 214 und von EULER selbst: Sur la vibration des cordes, Mém. de Berlin année 1748 (1750), p. 60 vergleicht; siehe auch M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 3, Leipzig 1898, S. 872—876.

1) Novi Commentarii Petrop. 16 (1772), S. 35; wiederabgedruckt in den Inst. calc. int. IV (1794), S. 590.

tur. Nostrum autem calculum variationum non solum ad huiusmodi genera curvarum determinata extendi conveniet, sed etiam ad omnes omnino curvas, quae quidem concipi queant",

und später (S. 55) sagt EULER von der Forderung, daß die gesuchte Kurve beim Maximum einen größeren, beim Minimum einen kleineren Wert des betrachteten Integrals liefere, als die benachbarten Kurven:

„Haecque quaestio iam infinite latius patet, quam superior, ubi tantum mutatio ex variatione parametri oriunda assignari debeat."

Freilich ist EULER niemals der Frage nach *hinreichenden* Bedingungen für das Eintreten eines Extremums näher getreten, und hierin liegt wohl einer der Gründe, warum er den Begriff der benachbarten Kurve in der Variationsrechnung keiner genaueren Untersuchung unterzog. Erst wenn man feststellen will, ob ein Extremum vorliegt oder nicht, ist man genötigt, sich bestimmte Vorstellungen über die Menge der Kurven zu bilden, mit denen die Extremale verglichen wird. Solange es sich jedoch nur um *notwendige* Bedingungen handelt, und im besonderen, wenn nur die Differentialgleichung aufgestellt werden soll, der die Extremale genügen muß, so reicht es hin, besondere Variationen zu betrachten, und hierbei kommt man sogar mit dem Verfahren aus, das EULER in der Abhandlung vom Jahre 1771 angewandt hatte; da also der Zweck erreicht wurde, war keine Veranlassung vorhanden, sich wegen der Berechtigung der angewandten Mittel zu beunruhigen.

Ein weiterer Grund für EULERS Verhalten liegt wohl darin, daß ihm, dessen Losung immer *Vorwärts* hieß, ein Zurückgehen auf prinzipielle Fragen über die Grundlagen seiner Wissenschaft nicht zusagte; mit dem gesunden Instinkte des Genies lehnte er alles ab, was seine Produktivität hätte schädigen können. Diese Auffassung wird bestätigt durch EULERS Briefwechsel mit DANIEL BERNOULLI, der an EULERS Untersuchungen zur Variationsrechnung lebhaften Anteil nahm und auch den Druck der *Methodus inveniendi* durch den Verlag von BOUSQUET zu Lausanne vermittelt hat[1]). In einem verloren gegangenen Briefe aus dem Jahre 1736 hatte ihm EULER die Aufgabe vorgelegt, die Kurve zu finden, die mit ihrer Evolute und dem Krümmungsradius an jeder Stelle den kleinsten Raum einschließt[2]) und hinzugefügt, daß die Zykloide die einzige Lösung sei[3]). Am 12. Sept. 1736 antwortet DANIEL BERNOULLI[4]):

1) Brief an EULER vom 9. Februar 1743, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIième siècle,* publiée par P. H. FUSS, St. Petersburg 1843, II, S. 521.

2) Vgl. über die Aufgabe: *Methodus inveniendi,* Lausanne 1744, S. 64; OSTWALDS Klassiker, Heft 46, S. 72.

3) *Corr.* II, S. 448. 4) *Corr.* II, S. 435.

„Was das problema anbelangt de invenienda curva in qua $\int rds$ habeat inter omnes lineas inter eosdem terminos sitas minimum valorem, so dünkt mich, daß es etwas Besonderes habe. Eigentlich zu reden hat das problema keine Solution und ist kein minimum da; denn ich darf ja die puncta A et B [Fig. 3] nur mit lauter cycloidibus infinite parvis, die doch eine lineam continuam ausmachen, ausfüllen, oder an einander henken, so ist $\int rds = 0$. Es kann auch $\int rds = 0$ seyn hoc alio modo quam figura [Fig. 4] ostendit, allwo sich die valores affirmativi und negativi von $\int rds = 0$ destruiren können. Wenn man aber curvam forderte, quae nullibi habeat radium osculi nec $= 0$, nec $= \infty$, scheint es, das problema habe eine reelle Solution, und wollte ich, um dieselbe zu finden, die evolutam suchen und zwar methodo isoperimetricorum, mutatis aliquibus circumstantiis."

Fig. 3.

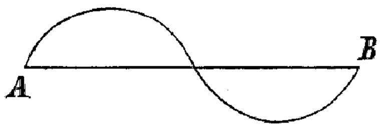

Fig. 4.

Hiernach hat DANIEL BERNOULLI bereits im Jahre 1736, also fünfzig Jahre vor LEGENDRE, starke Variationen angewandt. Wie sich EULER dazu gestellt hat, wissen wir nicht, da leider seine Briefe an DANIEL BERNOULLI nicht aufgefunden worden sind. Es scheint jedoch, als ob er auf die Betrachtungen seines Freundes gar nicht eingegangen ist; denn in einem Briefe vom 24. Mai 1738 kommt DANIEL BERNOULLI auf jenes Problem zurück und schreibt[1]:

„Ew. haben mir vor etwas Zeit gesagt von einem problemate simili, nämlich determinare inter curvas omnes, inter eosdem terminos positas, illam quae habeat $\int rds$ minimum, und sagen, daß die cyclois unice satisfacere, da ich doch finde analytice, daß $R = 0$, cui aequationi infinitae curvae aut veluti curvae satisfaciunt."

Was mit dem Ausdruck *veluti curvae* gemeint ist, geht aus dem Briefe vom 12. Sept. 1736 deutlich hervor.

Da sich in den späteren Briefen DANIEL BERNOULLIS nichts über den Gegenstand findet, so darf man annehmen, daß EULER einer Erörterung aus dem Wege gegangen ist, von der er sich keinen Nutzen versprach. In der Tat, so scharfsinnig auch die Bemerkung DANIEL BERNOULLIS sein mag, so war sie doch verfrüht; denn um sie für die Variationsrechnung fruchtbar zu machen, hätte man bereits die tiefere Einsicht in die Begriffe der Kurve und der Funktion besitzen müssen, die in mühsamer Arbeit erst im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts errungen worden ist.

1) *Corr.* II, S. 448.