# Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Noether, Max** (1844–1921)

Titel: **Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen**

Hochschulschr. Vermerk: Heidelberg, Univ., Habil.-Schr., 1870



Diese Abhandlung betrachtet vorzugsweise diejenigen Flächen, aus denen ein Flächenbüschel eine Schaar von rationalen Curven ausschneidet, das heisst, von solchen Curven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen. Das Problem der Abbildung solcher Flächen auf Kegelflächen oder specieller auf Ebenen wird zuerst für den Fall gelöst, dass die Curven der Schaar von ungrader Ordnung oder auch von der $2n^{ten}$ Ordnung mit $(2n-1)$fachen Punkte sind. Erfüllen die Flächen diese Bedingung nicht, so lassen sie sich auf einfachere Flächen $\varphi$ zurückführen, welche, von der $m^{ten}$ Ordnung, eine $(m-2)$fache Gerade besitzen, von einer Ebene im allgemeinen, aber in mehreren Kegelschnitten geschnitten werden. Auch für diese Flächen $\varphi$ wird die Abbildung auf einer Ebene untersucht, und namentlich die Abbildung der auf ihnen liegenden $(n-2)$fachen Geraden eingehend erörtert.

Der zweite Theil der Abhandlung wendet die im ersten Theile entwickelte eigenthümliche Methode der Abbildung auf einer Ebene auf drei speciellere Flächenarten an, und zwar zuerst auf die windschiefe Fläche $n^{ter}$ Ordnung mit einer $(n-1)$fachen Geraden. Bei dieser geschieht die Abbildung durch die Projection aus einem Punkte $P$ der vielfachen Geraden auf die Bildebene, wobei die vielfache Gerade zu einem $(n-1)$fachen Fundamentalpunkte $A$ wird, die $n-1$ von $P$ ausgehenden Geraden der Fläche zu ebenso vielen einfachen Fundamentalpunkten $B$ werden, und die dreifach unendliche Schaar von ebenen Curven der Fläche zu einer dreifach unendlichen Schaar von Curven $n^{ter}$ Ordnung mit einem $(n-1)$ fachen Punkte in $A$ und $n-1$ einfachen festen Punkten in $B$ wird. Die zweite Anwendung besteht darin, durch Projection, die auch von Herrn Clebsch in anderer Weise behandelte Fläche fünfter Ordnung, welche ein Raumcurve vierter Ordnung zur Doppelcurve hat, auf eine Fläche $\varphi$ zu reduciren. Endlich werden die Eigenschaften und die Abbildung einer Fläche von der $6^{ten}$ Ordnung mit einer doppelten Raumcurve dritter Ordnung und einer diese nicht schneidenden Doppelgeraden ausführlich erörtert.

(Rezension von Hermann Caesar Hannibal Schubert (1848–1911) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 2. 1869/70, S. 616–617)

# Ueber Flächen,

## welche Schaaren rationaler Curven besitzen.

Habilitationsschrift

von

Dr. phil. **Max Noether**
in Heidelberg.

Leipzig,
Druck von B. G. Teubner.
1870.

# Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.

Von Max Noether in Heidelberg.

In der Flächentheorie concentrirt sich das Hauptinteresse, sowohl von geometrischem als algebraischem Gesichtspunkte aus, auf das Studium der Curven und Curvenschaaren, welche auf einer Fläche liegen können, da ihre Kenntniss einerseits den geometrischen Zusammenhang der Fläche mit andern Gebilden liefert und andrerseits zur Untersuchung der Art der Irrationalität, welche mit der Flächengleichung verbunden ist, nothwendig ist. Indem ich hauptsächlich von letzterem Gesichtspunkt ausgehe, werde ich in dieser Abhandlung solche Flächen einer Betrachtung unterziehen, aus welchen ein Flächenbüschel eine Schaar rationaler Curven, nämlich Curven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen, so ausschneidet, dass jede Fläche des Büschels die gegebene Fläche in mehreren beweglichen Curven schneiden kann. Die allgemeinen Flächen dieser Art werde ich durch eindeutige Transformationen auf speciellere Flächenfamilien zurückführen, welche sich übersichtlicher behandeln und sich übrigens selbst noch weiter reduciren lassen; insbesondere werde ich mich aber mit solchen Flächen beschäftigen, welche von jeder Fläche des Büschels in *einer* beweglichen rationalen Curve geschnitten werden, und von ihnen das Haupttheorem beweisen, dass ihre Coordinaten sich immer *rational* durch zwei Parameter ausdrücken lassen, und zwar so, dass man diese Parameter auch umgekehrt als rationale Functionen der Coordinaten der Fläche darstellen kann, so dass hiedurch ein Punkt für Punkt *eindeutiges* Entsprechen zwischen der Fläche und einer Ebene hergestellt ist. Der Gang des Beweises wird so genommen werden, dass er zugleich auch diese in zwei Parametern rationale Darstellung der Coordinaten der Fläche selbst liefert. Daher wird es dann möglich sein, die Geometrie dieser Art von Flächen aus der Geometrie der Ebene vollständig zu entwickeln, in welchem Punkte sich die Abhandlung somit an die

1

Arbeiten*) des Herrn Clebsch reiht, in denen an einer Reihe von Flächen, der allgemeinen Flächen $3^{\text{ter}}$ Ordnung und specielleren Flächen $4^{\text{ter}}$ und $5^{\text{ter}}$ Ordnung, die Abbildung auf einer Ebene gezeigt ist. Als ein Beispiel der Anwendung der vorgelegten Methode der Abbildung behandle ich näher eine merkwürdige Fläche $6^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine Doppelgerade und eine diese nicht schneidende doppelte Raumcurve $3^{\text{ter}}$ Ordnung enthält.

Diese Arbeit ist zugleich dazu bestimmt, einige Punkte, welche ich in einer, in den Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1869, Nr. 15 enthaltenen Note über algebraische Functionen angeregt habe, zu erledigen. Den Gang eines Theils der hier folgenden Untersuchungen habe ich schon ib. Jahrg. 1870, Nr. 1 kurz angedeutet.

## § 1.

### Abbildbare Flächen und ebene Systeme.

Wenn eine Fläche auf einer Kegelfläche (speciell einer Ebene) eindeutig abbildbar ist, so muss sie, entsprechend der Schaar der Erzeugenden der Kegelfläche, eine einfach unendliche Schaar von rationalen Curven besitzen, welche ein Flächenbüschel, jede Fläche im Allgemeinen mehrere bewegliche Curven, ausschneidet. Eine solche Fläche kann dann, ohne dass sie auf einer Ebene abbildbar ist, keine weitere rationale Curve mehr besitzen; denn einer solchen würde auch auf der Kegelfläche eine, von einer Erzeugenden derselben verschiedene, rationale Curve entsprechen, d. h. der Kegel wäre über einer rationalen Curve beschrieben und könnte folglich auf einer Ebene abgebildet werden.

Wenn umgekehrt auf einer Fläche $F$ eine von einem Flächenbüschel, dessen Parameter $\lambda$ sei, ausgeschnittene Schaar $\Sigma$ von rationalen Curven bekannt ist, so sieht man sofort, dass man die Abbildung von $F$ auf einer Kegelfläche wirklich leisten kann, sobald man auf jeder Curve der Schaar $\Sigma$ so viel Punkte eindeutig kennt, als erforderlich sind, um die Coordinaten dieser Curve rational durch einen Parameter $\varrho$ ausdrücken zu können. Denn eine Curve von $\Sigma$ ist durch eine algebraische Function von $\lambda$, also durch die Werthe zweier Parameter $\lambda, \mu$, zwischen welchen eine algebraische Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ besteht, bestimmt; die Coordinaten der Fläche werden daher dann rationale Functionen des Parameters $\varrho$, während die Coefficienten dieser

*) S. besonders Crelle's Journal, Bd. 65 u. 68; Math. Annalen, Bd. 1; Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Band 15.

Functionen sich als rationale Functionen von $\lambda$ und $\mu$ darstellen, welche durch eine Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ mit einander verbunden sind. Diese Gleichung lässt sich als die einer Kegelfläche auffassen, welche über der Curve $f(\lambda, \mu) = 0$ beschrieben ist, wobei der Parameter $\varrho$ die Punkte jeder Erzeugenden bestimmt. Und da durch jeden Punkt der Fläche im Allgemeinen nur eine Curve der Schaar geht, und da wir weiter vorausgesetzt haben, dass man, wenn eine solche Curve durch die Werthe von $\lambda$ und $\mu$ fixirt ist, keine weitere Gleichung mehr aufzulösen hat, um die Coordinaten dieser Curve rational durch $\varrho$ ausdrücken zu können, so ergeben sich auch umgekehrt die Coordinaten $\lambda, \mu, \varrho$ der Kegelfläche als rationale Functionen der Coordinaten der Fläche $F$.

Anders verhielte es sich, wenn es nicht möglich wäre, auf jeder Curve von $\Sigma$ genau so viel Punkte anzugeben, als erforderlich und hinreichend sind, um die Coordinaten der Curve als rationale Functionen eines Parameters $\varrho$ darzustellen. In diesem Falle wäre man also genöthigt, auf jeder Curve unter den bekannten Punkten eine hinreichende Zahl für die Basispunkte *auszuwählen*, wodurch eine weitere Irrationalität in die Darstellung der Coordinaten von $F$ einginge. Dabei wäre es nun wohl noch möglich, die Coordinaten von $F$ eindeutig durch die Coordinaten einer Kegelfläche auszudrücken, aber die Umkehrung dieser Darstellung könnte nicht mehr auf rationale Functionen führen.

Unter den Punkten jeder Curve der Schaar $\Sigma$ kann man immer ihre vielfachen Punkte als bekannt annehmen. Wenn die Curve eine Raumcurve ist, so werden an die Stelle eines Theils dieser Punkte die scheinbaren Doppelpunkte, auf einen beliebigen Punkt des Raums bezogen, treten. Die übrigen einfachen Punkte der Curve, welche nothwendig sind, um dieselbe einer Geraden eindeutig entsprechen lassen zu können, werden im Allgemeinen nur dadurch festzulegen sein, *dass man eine auf der Fläche $F$ liegende Curve aufsucht, welche jede Curve der Schaar in der erforderlichen Anzahl von Punkten schneidet.* Die Theorie der Abbildung der Flächen der betrachteten Art ist somit darauf zurückgeführt, solche Curven der Fläche aufzusuchen.

Dass dieser Gang auch bei den bisher bekannten Abbildungen von Flächen auf Ebenen eingeschlagen worden ist, lehrt ein Blick auf dieselben. Ich nehme als Beispiel die Fläche 4[ter] Ordnung mit einer Doppelgeraden. Ein Büschel von Ebenen, dessen Achse die Doppelgerade ist, schneidet in einer Schaar von Kegelschnitten. Nun hat Herr Clebsch nachgewiesen (s. Math. Ann. Bd. I pag. 260), dass eine endliche Anzahl von Kegelschnitten auf der Fläche liegt, welche jedes Glied der Schaar in je einem Punkte schneiden. Nimmt man also einen beliebigen dieser Kegelschnitte heraus, so ist hiedurch auf jedem Kegelschnitt der Schaar je *ein* Punkt eindeutig bestimmt, und es wird möglich, durch einen Geradenbüschel, der in diesem Punkte seinen Scheitel hat, den betreffenden Kegelschnitt der Schaar als Gerade auf eine Ebene zu projiciren, was hier gleichbedeutend mit einer eindeutigen Abbildung ist.

Ich werde die Fragen, welche sich hier in Betreff der Abbildung der rationalen Curven auf Geraden aufgeworfen haben, in dem nächsten § beantworten. Für die auf höheren Kegelflächen abzubildenden Flächen ist die Schaar rationaler Curven eine gegebene; dagegen liegen auf den auf Ebenen abzubildenden Flächen unzählig viele Schaaren solcher Curven. Dass man aber hier von irgend einer einfach unendlichen der Schaaren ausgehen kann, beweist man auf folgende Weise durch die Untersuchung der ebenen Systeme, deren gegenseitige Ueberführung sich auf eine diesen eigenthümliche Art behandeln lässt.

Wenn eine Fläche auf einer Ebene eindeutig abbildbar ist, so entspricht bei einer gegebenen Abbildung irgend einer rationalen, einfach unendlichen Curvenschaar der Fläche, welche von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, ein Büschel rationaler Curven auf der Ebene. Es ist daher gezeigt, dass man die Abbildung immer so einrichten kann, dass der Curvenschaar der Fläche ein *Geradenbüschel* der Ebene entspricht, sobald nachgewiesen ist, dass man durch eine Cremona'sche Transformation, durch welche zwei ebene Systeme in einander übergeführt werden, einem beliebigen Büschel rationaler Curven einer Ebene einen Geradenbüschel der zweiten Ebene entsprechen lassen kann.

Auf der Ebene $E$ sei ein Büschel rationaler Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung gegeben, dessen gemeinschaftliche Basispunkte $\alpha_i$ $i$ fache Punkte $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, nämlich $\alpha_1$ einfache, $\alpha_2$ Doppelpunkte etc. seien. Die beiden Annahmen, des Büschels und des Rationalen, geben die zwei Beziehungen:

$$\frac{n \,.\, \overline{n+3}}{2} - 1 = \sum_1^{n-1} \frac{i \,.\, \overline{i+1}}{2}\,\alpha_i\,, \tag{1}$$

$$\frac{\overline{n-1} \,.\, \overline{n-2}}{2} = \sum_1^{n-1} \frac{i \,.\, \overline{i-1}}{2}\,\alpha_i\,, \tag{2}$$

aus welchen sogleich die weiteren folgen:

$$n^2 = \sum_1^{n-1} i^2\,\alpha_i, \tag{3}$$

$$3\,n - 2 = \sum_1^{n-1} i\,\alpha_i\,. \tag{4}$$

Gleichung (3) sagt aus, dass die Curven des Büschels ausser den angenommenen Basispunkten sich nicht mehr schneiden.

Nach Herrn Cremona reichen diese Bedingungen, im Falle der Curvenbüschel durch Zufügung eines weitern einfachen Basispunktes zu den Basispunkten einer zweifach unendlichen Schaar von rationalen Curven aus dieser entstanden ist, hin, um die Ebene $E$ so auf einer Ebene $E'$ abbilden zu können, dass dem Curvenbüschel auf $E$ ein Geradenbüschel auf $E'$ entspricht. In der That braucht man nur diese zweifach unendliche Schaar von Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung, bei der ein einfacher Basispunkt des Büschels fortgefallen ist, als Transformationscurven zu benutzen, um die gesuchte Ueberführung zu erhalten.

Indess braucht unter den Basispunkten des Curvenbüschels nicht nothwendig ein einfacher Basispunkt enthalten zu sein; dann aber giebt es keine Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung mehr, durch welche die Ueberführung in einen Geradenbüschel zu bewerkstelligen wäre. Ich werde daher jetzt einen ganz allgemeinen Weg zeigen, auf dem der Curvenbüschel immer in einen Geradenbüschel übergeführt werden kann, und hiezu einen Satz beweisen, der mehrfacher Anwendung fähig ist:

*Ein Büschel rationaler Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung auf einer Ebene kann immer durch eine Transformation zweiter Ordnung auf einen Büschel von niedrigerer als der $n^{\text{ten}}$ Ordnung gebracht werden.*

Die Transformation $2^{\text{ter}}$ Ordnung besteht darin, dass man auf der Ebene $E$ des Curvenbüschels eine zweifach unendliche Schaar von Kegelschnitten mit drei gemeinschaftlichen festen Grundpunkten annimmt, und dieser Schaar die zweifach unendliche Geradenschaar einer Ebene $E'$ eindeutig entsprechen lässt. Legt man nun diese 3 Fundamentalpunkte der Transformation resp. in einen $m_1$, $m_2$, $m_3$ fachen Basispunkt des Büschels rationaler Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung der Ebene $E$, so entspricht diesem Büschel auf der Ebene $E'$ eindeutig Punkt für Punkt ein Büschel rationaler Curven der Ordnung

$$2n - m_1 - m_2 - m_3\,,$$

mit einem $(n - m_2 - m_3)$, einem $(n - m_3 - m_1)$ und einem $(n - m_1 - m_2)$ fachen Basispunkte an Stelle der $m_1$, $m_2$, $m_3$ fachen Punkte, während den übrigen Basispunkten bei dem transformirten Büschel wiederum Basispunkte gleicher Ordnung entsprechen. Man kann nun die 3 Fundamentalpunkte des Kegelschnittbündels in die 3 Basispunkte höchster Vielfachheit des Curvenbüschels auf $E$ hineinlegen, und in diesem Fall wird, wie ich jetzt beweisen will, die resultirende Ordnung $2n - m_1 - m_2 - m_3$ immer kleiner als $n$.

Es sei der höchste Basispunkt ein $(n - m)$ facher, der zweithöchste ein $(m - k)$ facher, also

$$n > m, \qquad n - m \geqq m - k\,.$$

Wenn nun der dritthöchste Basispunkt nicht niedriger, als ein $(k+1)$ facher Punkt, so ist die resultirende Ordnung des Büschels auf $E'$

nicht höher als $2n - (n - m) - (m - k) - (k + 1) = n - 1$. Ich habe daher zu zeigen, dass von den übrigen Basispunkten wenigstens einer ein höherer als ein $k$facher Punkt sein muss, und werde dies thun, indem ich annehme, dass alle Basispunkte, die beiden höchsten ausgenommen, von der $k^{\text{ten}}$ oder niedrigerer Ordnung seien und die Unrichtigkeit dieser Annahme nachweise. Es sei also:

$$m - k \gtreqless k\,.$$

Aus Gleichung (2) folgt, dass ausser den beiden höchsten Basispunkten noch

$$\frac{n-1\,.\,n-2}{2} - \frac{n-m\,.\,n-m-1}{2} - \frac{m-k\,.\,m-k-1}{2}$$

$$= n\,(m-1) - m\,(m-k) + 1 - \frac{k\,.\,k+1}{2}$$

Doppelpunkte unter den Basispunkten enthalten sind, welche den vorhandenen $k$fachen, $(k-1)$fachen Punkten etc. so äquivalent sind, dass ein $i$facher Punkt für $\frac{i\,.\,i-1}{2}$ Doppelpunkte zählt. Es seien $\lambda_0$ $k$fache, $\lambda_1$ $(k-1)$fache, ..., $\lambda_{k-2}$ Doppelpunkte als Basispunkte. Man kann zeigen, dass ihr Beitrag zu

$$\sum_1^{n-1} i\,\alpha_i$$

diesen Ausdruck schon $> 3n - 2$ macht, so dass dann nach Gleichung (4) den Bedingungen eines Büschels nicht zu genügen ist.

Es wird nämlich ihr Beitrag

$$\sum_2^{n-1} i\,\alpha_i = (n - m) + (m - k) + k\,\lambda_0 + (k - 1)\,\lambda_1 + \cdots + 2\,\lambda_{k-2}\,.$$

Dieser Ausdruck wird nun ein Minimum, wenn man $\lambda_0$ den grösstmöglichen Werth giebt, welcher die Gleichung (2) befriedigt, da dann die geringste Anzahl Constanten in der Gleichung des Büschels absorbirt, also auch die rechte Seite der Gleichung (1) zu einem Minimum wird. Dieser grösstmögliche Werth ist nach dem Obigen

$$\lambda_0 = \frac{2}{k\,.\,k-1}\cdot\left\{n\,(m-1) - m\,(m-k) + 1 - \frac{k\,.\,k+1}{2}\right\},$$

wenn zugleich

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-2} = 0$$

gesetzt wird. Wenn daher

$$(5)\quad (n-m) + (m-k) + \frac{2}{k-1}\cdot\left\{n(m-1) - m(m-k) + 1 - \frac{k.k+1}{2}\right\} > 3n-2,$$

so ist um so mehr auch der obige Ausdruck

$$\sum_2^{n-1} i\,\alpha_i > 3n - 2\,.$$

Die Ungleichung (5) geht aber über in

$$(m - k)(n - m) > k \cdot k - 1\,,$$

und diese ist wegen $m - k \gtreqless k$, $n - m > k - 1$ erfüllt.

Somit muss die Summe der Ordnungen der 3 höchsten Basispunkte eines Büschels rationaler Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung immer $> n$ sein, und der Curvenbüschel kann immer durch eine Transformation $2^{\text{ter}}$ Ordnung, deren 3 Fundamentalpunkte in die 3 höchsten Basispunkte des Büschels fallen, auf einen Büschel von niedrigerer, als der $n^{\text{ten}}$ Ordnung reducirt werden. Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens, also durch eine Reihenfolge von Transformationen zweiter Ordnung, wird daher offenbar der Curvenbüschel als ein Geradenbüschel eindeutig abgebildet.

Wir bezeichnen noch eine weitere interessante Anwendung dieses Satzes, von der wir in der Folge Gebrauch machen werden. Eine zweifach unendliche Schaar rationaler Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung der Ebene, die linear von 2 Parametern abhängen, lässt sich durch eine Reihenfolge von Transformationen $2^{\text{ter}}$ Ordnung auf die zweifach unendliche Schaar von Geraden einer Ebene Punkt für Punkt eindeutig beziehen, da hiezu nur erforderlich, dass die linke Seite von Ungleichung (5) $> 3n - 3$, was der Fall ist. Mit andern Worten:

*Man kann irgend eine Cremona'sche Transformation, die zwei ebene Systeme in einander überführt, durch eine Reihenfolge von Transformationen zweiter Ordnung ersetzen, indem man nur die 3 Fundamentalpunkte einer solchen Transformation jeweils in die höchsten Basispunkte des Systems hineinlegt.*

Die Cremona'schen Transformationen sind somit nichts anderes, als Verbindungen von Transformationen $1^{\text{ter}}$ und $2^{\text{ter}}$ Ordnung, die sich für nicht homogene Coordinaten in die Form setzen lassen:

$$s = \frac{\alpha\,\sigma + \beta\,\zeta + \gamma}{\alpha''\,\sigma + \beta''\,\zeta + \gamma''}\,, \qquad z = \frac{\alpha'\,\sigma + \beta'\,\zeta + \gamma'}{\alpha''\,\sigma + \beta''\,\zeta + \gamma''}\,;$$

$$s' = \frac{a\,s + b}{c\,s + d}\,, \qquad z' = \frac{a'\,z + b'}{c'\,z + d'}\,.$$

## § 2.

## Das Problem der Abbildung.

Nach den Untersuchungen des § 1. über die Abbildungen von Flächen auf Kegelflächen haben wir die Bedingungen aufzustellen, unter welchen eine rationale Curve, die einer Schaar solcher Curven angehört, eindeutig in eine Gerade übergeführt werden kann. Es genügt dabei, die rationale Curve als eine *ebene* Curve anzunehmen, da man eine Raumcurve einer solchen durch Projection von einem beliebigen Punkte aus eindeutig entsprechen lassen kann.

Ich will gleich den folgenden allgemeineren Satz beweisen:

*Man kann irgend eine Curve $C$ von der $n^{ten}$ Ordnung auf die Normalcurve ihres Geschlechts $p$ eindeutig zurückführen; wenn ein fester Punkt $P$ von $C$ eindeutig bekannt ist.*

In der That, diese Zurückführung geschieht *), für $p > 2$, durch eine Transformation $(n-3)^{ter}$ Ordnung, wobei die Transformationscurven durch die $i$ fachen Punkte von $C$ $(i-1)$ fach hindurchgehen und ausserdem durch $p-3$ feste Punkte von $C$ hindurchzulegen sind. Nimmt man daher für diese $p-3$ festen Punkte den Punkt $P$ und die $p-4$ Punkte, die diesem auf $C$ unendlich benachbart liegen, d. h. schreibt man den Transformationscurven vor, $C$ im Punkte $P$ $(p-3)$ punktig zu berühren, so hat man eine eindeutige Transformation, bei welcher nur der Punkt $P$ benutzt ist, und durch welche $C$ in die betreffende Normalcurve $(p+1)^{ter}$ Ordnung übergeht.

Aehnlich verfährt man für $p = 2$, 1 oder $p = 0$. Insbesondere legt man, für $p = 0$, in der Ebene der rationalen Curve $C$ einen Büschel von Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welche durch jeden $i$ fachen Punkt von $C$ $(i-1)$ fach hindurchgehen und in dem festen Punkt $P$ von $C$ mit dieser Curve eine $(n-3)$ punktige Berührung haben. Diese Bedingungen sind linear und, nach Gleich. (2), § 1., an der Zahl $\frac{n-1\,.\,n-2}{2} + n - 3 = \frac{n\,.\,n-1}{2} - 2$. Jede Curve dieses Büschels schneidet $C$ noch in *einem* beweglichen Punkte, wieder nach (2), § 1., so dass sich die Coordinaten der Curve als rationale Functionen des Parameters des Curvenbüschels $(n-2)^{ter}$ Ordnung darstellen. Man hätte auch einen Curvenbüschel $(n-1)^{ter}$ Ordnung benutzen können, so einen Geradenbüschel für die Kegelschnitte.

Diese Bemerkungen erlauben schon, das Problem, welches bei der Abbildung von Flächen auf Kegelflächen zu lösen ist, enger zu begrenzen. Im Falle die Fläche auf einer Ebene abbildbar ist, lässt sich, wie ich nachgewiesen habe, die Abbildung immer so einrichten, dass irgend einer einfach unendlichen Schaar $\Sigma$ rationaler Curven der Fläche, die von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, ein Geradenbüschel der Ebene entspricht; und im Falle der Abbildung auf einer Kegelfläche entspricht der Schaar $\Sigma$ rationaler Curven der Fläche die Schaar der Erzeugenden des Kegels. Da nun dem Scheitelpunkt dieser Geraden der Bildfläche, oder den unzählig vielen Curven der Bildfläche, welche die Geraden derselben in je *einem* Punkte schneiden und welche sämmtlich von gleichem Geschlecht sind, wiederum Curven desselben Geschlechts auf der abzubildenden Fläche entsprechen, Curven, die mit jeder Curve der auf der Fläche liegenden Schaar $\Sigma$

*) Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, § 18 ff.

je *einen* Punkt gemein haben, so folgt, indem man aus diesen Curven eine beliebige herauswählt, dass man bei einer abbildbaren Fläche für jede ihrer Schaaren $\Sigma$ immer auf jeder Curve derselben eindeutig *einen* festen Punkt finden kann, dadurch dass auf der Fläche eine Curve existirt, welche jede Curve der Schaar in *einem* Punkte schneidet.

Umgekehrt habe ich oben nachgewiesen, dass die Kenntniss *eines* Punktes auf jeder Curve einer Schaar $\Sigma$ genügt, um die Coordinaten jeder dieser Curven rational durch einen Parameter ausdrücken zu können, ohne dass eine weitere Irrationalität in diese Darstellung eingeht, als diejenige, welche die Curve der Schaar bestimmt. Für Flächen, für welche eine Abbildung auf einer Kegelfläche möglich sein soll, stellt sich daher hier die Aufgabe der Abbildung folgendermassen:

*Es ist auf der Fläche eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven aufzusuchen, welche ein Flächenbüschel, eine Fläche im Allgemeinen mehrere Curven, ausschneidet. Sodann hat man eine Curve $C$ aufzusuchen, welche ganz auf der Fläche liegt und die Curven der Schaar in je einem einfachen Punkte schneidet.*

Das Geschlecht dieser Curve $C$ ist sodann das nämliche, wie das einer ebenen Schnittcurve der Kegelfläche, welche der vorliegenden Fläche $F$ entspricht, und bestimmt somit die algebraische Classe, zu welcher die Kegelfläche und die Fläche $F$ gehört, das *Curvengeschlecht* der Fläche $F$. Wenn $C$ eine rationale Curve, lässt sich die Fläche auf einer Ebene abbilden.

Ich werde aber jetzt zeigen, dass sich das Problem der Abbildung noch viel weiter reduciren lässt. Dies beruht auf einer besondern Eigenschaft der rationalen Curven.

Man kann nämlich einer rationalen Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, *ohne Benutzung irgend eines Punktes derselben* ausser den vielfachen Punkten, eindeutig eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechen lassen. Es sei in der $x$-Ebene eine rationale Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung gegeben, $C$, mit $\alpha_i$ $i$ fachen Punkten $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$, so, dass

$$\Sigma \frac{i \,.\, i-1}{2} \cdot \alpha_i = \frac{n-1 \,.\, n-2}{2}.$$

Ich lege in der Ebene dieser Curve $C$ Curven $Q$ von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch jeden $i$ fachen Punkt der Curve $(i-1)$ fach, und ausserdem durch $n-4$ feste, übrigens beliebige Punkte dieser Ebene einfach hindurchgehen. Die Curvenschaar $Q$ genügt dann

$$\Sigma \frac{i-1 \,.\, i}{2} \alpha_i + n - 4 = \frac{n-1 \,.\, n-2}{1.\ 2.} + n - 4$$

Bedingungen und ist somit eine

$$\frac{n-2 \,.\, n+1}{2} - \frac{n-1 \,.\, n-2}{2} - (n-4) = 2$$

fach unendliche Schaar. Aus dieser Schaar nehme ich drei Curven $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ heraus, welche nicht einem Büschel angehören, und transformire die $C$ mittelst der eindeutigen Substitution:

$$\varrho y_1 = Q_1$$
$$\varrho y_2 = Q_2$$
$$\varrho y_3 = Q_3 .$$

Hiebei entspricht der Curve $C$ in der $y$-Ebene Punkt für Punkt eindeutig eine Curve $C'$, deren Grad gleich der Anzahl der Schnittpunkte von $C'$ mit einer beliebigen Geraden $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$, also gleich der Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von $C$ mit einer Curve der Schaar $Q$:

$$\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 = 0 ,$$

oder gleich

$$n \,.\, n - 2 - \Sigma i \,.\, i - 1 .\, \alpha_i = n - 2 .$$

Somit führt eine solche Transformation auf eine rationale Curve $(n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Wendet man nun das nämliche Verfahren auf die Curve $C'$ von der $(n - 2)^{\text{ten}}$ Ordnung an, so wird man auf eine Curve $(n - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung geführt, welche $C'$ Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man also endlich, wenn $n$ ungerade ist, zu einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, wenn $n$ gerade, zu einem Kegelschnitt. Die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt wird aber durch einen Strahlenbüschel, der seinen Scheitelpunkt in diesem Doppelpunkt hat, eindeutig auf eine Gerade projicirt, und ihre Coordinaten werden rationale Functionen dritter Ordnung des Parameters dieses Strahlenbüschels. Auf dem Kegelschnitt dagegen muss man *einen* Punkt eindeutig kennen, um ihn durch einen Strahlenbüschel auf eine Gerade projiciren zu können. Bei den Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $(n - 1)$ fachen Punkte degenerirt die Schaar $Q$ überhaupt in den Geradenbüschel, dessen Scheitel der $(n - 1)$ fache Punkt ist, und die Coordinaten einer solchen Curve werden rationale Functionen des Parameters dieses Büschels. Man hat daher den Satz:

*Die rationalen Curven lassen sich, ohne Benutzung eines einfachen Punktes derselben, eindeutig in eine Gerade oder einen Kegelschnitt überführen, je nachdem ihre Ordnung ungerade oder gerade ist. Nur die Curven* $2\,n^{\text{ter}}$ *Ordnung mit einem* $2\,n - 1$ *fachen Punkte verhalten sich noch wie die Curven ungerader Ordnung.*

Dieser Satz vereinfacht das Problem der Abbildung von Flächen auf Kegelflächen sehr bedeutend. Wenn auf der Fläche eine Schaar rationaler Curven, die von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, bekannt ist, so liefert derselbe direct die Abbildung der Fläche, wenn die Curven der Schaar *ungerader* Ordnung oder auch $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit $2n-1$ fachem Punkte sind, und führt im andern Falle die Fläche auf eine einfachere zurück, die eine Schaar von Kegelschnitten besitzt. Ich werde diese Reduction jetzt auseinandersetzen.

## § 3.

## Reduction der Flächen auf einfachere Flächenfamilien. Abbildbarkeit auf der Ebene.

Wir setzen voraus, dass auf der Fläche $F$ eine Schaar $S$ von rationalen Curven, die ein Flächenbüschel, jede Fläche im Allgemeinen mehrere bewegliche Curven gleicher Ordnung *), ausschneidet, bekannt sei.

Um nur eine Schaar ebener Curven behandeln zu müssen, nehmen wir zunächst beliebig im Raume einen Ebenenbüschel an, der dem Flächenbüschel, welcher $S$ ausschneidet, projectivisch ist, und projiciren sodann von einem beliebigen Punkte des Raumes aus jede Curve der Schaar $S$ auf diejenige Ebene des Ebenenbüschels, welche der die Curve aus $F$ ausschneidenden Fläche entspricht. Diese Projectionen $\Sigma$ von $S$ erzeugen eine zweite Fläche $\Phi$, welche der Fläche $F$ Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Die Fläche $\Phi$ enthält eine Schaar $\Sigma$ von rationalen Curven, welche von einem Ebenenbüschel, im Allgemeinen mehrere bewegliche Curven gleicher Ordnung von *einer* Ebene des Büschels, ausgeschnitten werden. Die Achse dieses Büschels ist im Allgemeinen eine vielfache Gerade der Fläche $\Phi$.

Jede Curve der Schaar $\Sigma$ lässt sich nun auf die Weise behandeln, die durch den obigen Satz über die rationalen Curven bezeichnet ist. Eine Curve $C_{\lambda,\mu}$ von $\Sigma$ ist durch die beiden Parameter $\lambda$, $\mu$, welche die Curve aus der Schaar aussondern, und für welche eine algebraische Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ besteht, bestimmt; dabei sei $\lambda$ der Parameter des Ebenenbüschels, welcher $\Sigma$ ausschneidet. $C_{\lambda,\mu}$ sei von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung.

In der Ebene $E_\lambda$ der Curve $C_{\lambda,\mu}$ legen wir die zweifach unendliche Schaar $Q_{\lambda,\mu}$ von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch jeden $i$ fachen Punkt von $C_{\lambda,\mu}$ $(i-1)$ fach, und ausserdem durch $(n-4)$ feste Punkte der Ebene $E_\lambda$ hindurchgehen. Wenn man diese Schaar $Q_{\lambda,\mu}$ zur Transformation von $C_{\lambda,\mu}$ benutzt, so entspricht der $C_{\lambda,\mu}$ nach dem Obigen Punkt für Punkt eindeutig eine neue rationale Curve

*) Diese letztere Annahme schliesst keine Beschränkung ein; denn die Fläche zerfällt, wenn die beweglichen Curven, die von jeder Fläche eines *Flächenbüschels* ausgeschnitten werden, ungleicher Ordnung sind.

$C'_{\lambda,\mu}$, die von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, und die in einer Ebene $E'_\lambda$ eines mit $E$ projectivischen Ebenenbüschels liegt. Um für jede Curve $C_{\lambda,\mu}$ so verfahren zu können, wird es nur nöthig sein, die $n-4$ festen Punkte der $E_\lambda$, welche sich auf $C_{\lambda,\mu}$ beziehen, eindeutig von den Parametern $\lambda$, $\mu$ der Curve $C_{\lambda,\mu}$ abhängen zu lassen. Da bei diesem Verfahren dann keine weiteren Punkte ausser den vielfachen Punkten auf $C_{\lambda,\mu}$ zu benutzen sind, und somit keine weitere Irrationalität, als die durch $f(\lambda, \mu) = 0$ gegebene, eingeht, so erhält man eine zweite Schaar $\Sigma'$ von rationalen Curven $C'_{\lambda,\mu}$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche eine Fläche $\Phi'$ erzeugen, die $\Phi$ Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Die Ordnung dieser Fläche $\Phi'$ hängt noch von der Wahl der $n-4$, zu jeder Curve $C_{\lambda,\mu}$ gehörigen festen Punkte ab; aber ein Ebenenbüschel schneidet aus $\Phi'$ eine Schaar von rationalen Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung aus, und zwar jede Ebene des Büschels ebensoviele Curven, als eine Ebene $E$ aus $\Phi$ ausschneidet, Curven, die sich ebenfalls durch die Beziehung $f(\lambda, \mu) = 0$ bestimmen.

Durch eine wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man, wenn $n$ *ungerade* ist, endlich zu einer eindeutigen Abbildung der gegebenen Fläche $F$ auf einer Fläche $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$, aus welcher ein Ebenenbüschel eine Schaar rationaler Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, eine Ebene im Allgemeinen mehrere Curven, ausschneidet. Diese Flächen sind aber direct auf einer Kegelfläche abbildbar, indem man jede der Curven von ihrem Doppelpunkt aus auf eine Gerade projicirt. Man lässt den Projectionsstrahl an der von den Doppelpunkten der Curven dritter Ordnung erzeugten Curve und an der vielfachen Geraden $\alpha$ von $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$, welche die Achse des Ebenenbüschels ist, gleiten; ein solcher Strahl schneidet eine Curve, durch deren Doppelpunkt er geht, nur noch in *einem* beweglichen Punkte, und umgekehrt gehört zu einem Punkte der Fläche im Allgemeinen nur *ein* Projectionsstrahl. Die Coordinaten der Fläche $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$ werden also dann rationale Functionen von $\lambda$, $\mu$ und einem Parameter $\varrho$, der die Punkte der vielfachen Geraden $\alpha$ von $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$ bestimmt, und jedem Punkte der Fläche entspricht bei dieser Abbildung nur *ein* Werthsystem von $\lambda$, $\mu$, $\varrho$. Es ist hiedurch eine Punkt für Punkt eindeutige Abbildung der gegebenen Fläche $F$ auf einer Kegelfläche $f(\lambda, \mu) = 0$ geliefert.

Die nämliche Methode der Abbildung, wie die bei der Fläche $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$ befolgte, wendet man überhaupt an, wenn die Curven der Schaar $S$ von $F$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung sind und einen $(n-1)$ fachen Punkt besitzen. Diese Flächen lassen sich direct durch Projection von den Punkten der $(n-1)$ fachen Curve der Fläche aus abbilden.

Von den Flächen mit einer Schaar $S$ von Curven ungerader Ordnung bleiben nur noch die windschiefen Flächen zu erledigen. Die Coordinaten einer solchen Fläche lassen sich direct als rationale Functionen von $\lambda$, $\mu$, $\varrho$ darstellen, wo $\varrho$ der Parameter irgend eines Ebenenbüschels, also die Punkte der Erzeugenden der windschiefen Fläche bestimmt, und wo eine Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ besteht, welche die Irrationalität eines ebenen Querschnitts dieser Fläche angibt. Diese Darstellung ist auch eindeutig umkehrbar, repräsentirt also eine Abbildung. Ich werde im § 7. noch insbesondere die auf einer Ebene abbildbaren windschiefen Flächen näher untersuchen.

Wenn die Curven der Schaar $S$ von $F$ von *gerader* Ordnung sind, so gelangt man (den schon behandelten speciellen Fall ausgenommen) durch eine Reihe von eindeutigen Abbildungen auf Flächen $\Phi$ hindurch auf die oben angegebene Weise endlich zur Abbildung von $F$ auf einer Fläche $\varphi$, aus welcher ein Ebenenbüschel eine Schaar von Kegelschnitten, eine Ebene im Allgemeinen mehrere Kegelschnitte, ausschneidet. Die weitere Behandlung einer solchen Fläche $\varphi$ erfordert nun complicirte geometrische Untersuchungen, da sich die Aufgabe darbietet, eine Curve $C$ auf $\varphi$ aufzusuchen, welche die Kegelschnitte der Schaar in je *einem* Punkte schneidet. Das Geschlecht einer solchen Curve $C$ stimmt überein mit dem der Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, welche zur Fläche $F$ oder $\varphi$ gehört. Wenn eine solche Curve $C$ bekannt ist, kann man direct die Abbildung der Fläche $F$ oder $\varphi$ auf der Kegelfläche $f(\lambda, \mu) = 0$ leisten.

Ich werde mich hier darauf beschränken, die Zurückführung der Flächen $F$ auf die Flächenfamilie der $\varphi$ nachgewiesen zu haben. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass diese Zurückführung, sowie die vorhin geleistete Abbildung der Flächen $F$ mit Curven $S$ von ungerader Ordnung, *ohne Auflösung irgend einer höhern Gleichung*, nur durch Eliminationsprocesse geschieht, sobald nur die Schaar $S$ bekannt ist.

Nur den besonders interessanten Fall, in dem die Schaar $S$ auf $F$ so von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, dass jede Fläche des Büschels in nur *einer* beweglichen Curve schneidet, will ich in § 4. etc. vollständig durchführen, durch Untersuchung der Flächen $\varphi$ von der $r^{\text{ten}}$ Ordnung mit einer $(r-2)$fachen Geraden, auf welche Flächen jene durch unsere Methode zurückgeführt werden. Ich werde die Existenz der Curven $C$ auf diesen Flächen nachweisen und die Curven selbst angeben, so dass hiedurch die Abbildung dieser Flächen $\varphi$ und $F$ auf einer Ebene geleistet ist. Diesen Nachweis vorausgesetzt, können wir daher die Lösung des Problems der Abbildung algebraischer Flächen auf Ebenen dahin aussprechen:

*Sobald eine Fläche eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven besitzt, welche von einem Flächenbüschel, je eine bewegliche Curve von* *einer Fläche des Büschels, ausgeschnitten werden, lässt sich die Fläche Punkt für Punkt eindeutig auf einer Ebene abbilden.*

Bei der Abbildung, welche diese Methode liefert, bildet sich die Curvenschaar der Fläche, von der man ausgegangen, als ein Geradenbüschel der Ebene ab, wobei sich die ebenen Schnitte der Fläche im Allgemeinen nicht durch Curven von möglichst niedriger Ordnung abbilden werden. Da indess eine solche Abbildung aus jener durch eine Cremona'sche Transformation hervorgehen muss, so liefert der Satz am Schlusse des § 1. das Mittel, zu einer solchen Abbildung zu gelangen. Man hat nur eine Reihenfolge von Transformationen 2ter Ordnung auszuführen und die 3 Grundpunkte einer solchen Transformation jeweils in die höchsten Fundamentalpunkte der Bildebene hineinzulegen. Wenn auf diese Weise keine Erniedrigung der Ordnung der Abbildungsfunctionen mehr stattfindet, so ist die Ordnung schon eine möglichst niedrige.

Indem ich hier die Abkürzungen übergehe, welche dieses ganze Reductionsverfahren in speciellen Fällen erleiden kann, will ich noch die hier erlangten Resultate mit den Sätzen in Verbindung bringen, die ich in der oben citirten Note, Göttinger Nachrichten, 1869 Nr. 15, ausgesprochen habe.

Zu jeder Fläche $F$, welche eine von einem Flächenbüschel ausgeschnittene Schaar $S$ von rationalen Curven besitzt, gehört eine Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, durch welche die Curven der Schaar so bestimmt werden, dass die Werthsysteme $\lambda, \mu$, welche dieser Gleichung genügen, und die Curven von $S$ einander eindeutig entsprechen. Wenn die Schaar $S$ bekannt ist, ergibt sich die Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, indem man die reductible Gleichung, welche die von einer Fläche $\lambda$ des Büschels ausgeschnittenen Curven repräsentirt, in ihre Factoren zerlegt.

Es sei nun $F'$ eine zweite Fläche, die $F$ Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Ihre Schaar sei $S'$ und die zugehörige Curvengleichung $f'(\lambda, \mu) = 0$. Da die sämmtlichen Curven einer Fläche $F$, ob sie nun die Curven der Schaar $S$ in je einem oder in mehreren Punkten schneiden, ein Geschlecht haben müssen, das gleich oder grösser ist, als das Geschlecht der Curve $f(\lambda, \mu) = 0$ (die Curven von $S$ selbst ausgenommen), so folgt, dass bei der Abbildung von $F$ auf $F'$ die Curven der Schaaren $S$ und $S'$ einander Glied für Glied entsprechen müssen, und dass $f(\lambda, \mu) = 0$ somit das gleiche Geschlecht, wie $f(\lambda, \mu) = 0$, haben muss. Das Geschlecht von $f(\lambda, \mu) = 0$ habe ich das *Curvengeschlecht* der Fläche $F$ genannt. *Daher ist die Gleichheit des Curvengeschlechts zweier Flächen ein nothwendiges Criterium für die Möglichkeit einer Abbildung der beiden Flächen aufeinander.*

Die Bestimmung des Curvengeschlechts einer Fläche, auf der eine Schaar $S$ bekannt ist, macht nach dem Obigen keine Schwierigkeit. So führen diejenigen Flächen, aus welcher die Flächen eines Büschels je 2 bewegliche rationale Curven ausschneiden, auf die Gleichung einer hyperelliptischen Curve; und die windschiefen Flächen $r^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(r-2)$ fachen Geraden und einer diese nicht schneidenden Doppelgeraden, ebenso die Flächen $(r+2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(r-2)$ fachen Geraden und einer diese nicht schneidenden doppelten Raumcurve $4^{\text{ter}}$ Ordnung erster Species etc., haben das Curvengeschlecht $r-3$.

Wenn $f(\lambda, \mu) = 0$ das Geschlecht 0 hat, so kann man statt $\lambda$, $\mu$ einen einzigen Parameter den Curven der Schaar $S$ eindeutig zuordnen, mit andern Worten, es ist dann immer möglich, und dies auf unzählig viele Weisen, einen Flächenbüschel anzugeben, von dem jede Fläche die Fläche $F$ nur in *einer* Curve der Schaar $S$ schneidet. In diesem Falle gibt aber unser obiger Satz die Abbildbarkeit auf einer Ebene. Daher lässt sich dieser Satz dahin erweitern, dass die Bedingung, dass das Curvengeschlecht der Fläche $F$ gleich 0 ist, ein *nothwendiges* und *hinreichendes* Criterium für die Abbildbarkeit von $F$ auf einer Ebene ist.

In einem Aufsatz in den Math. Annalen, Bd. 2, pag. 293 habe ich ein weiteres allgemeines Criterium, die Gleichheit des *Flächengeschlechts*, für die Möglichkeit des eindeutigen Entsprechens zweier Flächen nachgewiesen. Das Flächengeschlecht $p$ einer Fläche $F$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung ist gleich der Anzahl der von einander linear unabhängigen Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche man durch die vielfachen Curven und Knotenpunkte von $F$, durch eine $i$ fache Curve $(i-1)$ mal, durch einen $i$ fachen conischen Knotenpunkt $(i-2)$ mal, gehen lassen kann. Für die hier betrachteten Flächen mit Schaaren rationaler Curven ist das Flächengeschlecht gleich 0, wie sich aus ihrer Abbildung auf Kegelflächen oder Flächen $\varphi$ ergibt. Diese Bedingung, dass $p = 0$ ist, kann bei einer vorliegenden Fläche bequem dazu dienen, zu entscheiden, ob die Fläche überhaupt eine Schaar rationaler Curven besitzen kann. Die Frage, ob die hier nach dem Curvengeschlecht entwickelten Classen alle Classen innerhalb $p = 0$ begreifen, lasse ich hier unentschieden.

## § 4.

## Flächen $\varphi$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden.

Zum vollständigen Beweis der im vorigen § aufgestellten Sätze wird noch der Nachweis der Abbildbarkeit auf der Ebene für diejenigen Flächen erfordert, auf welche die Flächen mit einer einfachen

Schaar rationaler Curven gerader Ordnung zurückgeführt worden sind, nämlich die Flächen $\varphi$, $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden, aus welchen ein Ebenenbüschel eine einfache Schaar $\Sigma$ von Kegelschnitten ausschneidet. Ich werde diesen Nachweis zugleich mit einer directen Durchführung der Abbildung geben.

Die Gleichung dieser Flächen $\varphi$ ist von der Form:

$$(1) \qquad 0 = x_3^{\,n-2}\, u_0 + x_3^{\,n-3}\, x_4 \,.\, u_1 + \cdots\cdots + x_4^{\,n-2} \,.\, u_{n-2}\,,$$

wo die $u_i$ homogene Functionen $2^{\text{ter}}$ Ordnung in $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ sind. Die Schaar der Kegelschnitte wird von dem Ebenenbüschel

$$(2) \qquad 0 = x_4 - \lambda x_3$$

ausgeschnitten und ergibt sich aus (2) in Verbindung mit (1) oder in Verbindung mit der Gleichung:

$$(3) \qquad 0 = u_0 + u_1 \lambda + u_2 \lambda^2 + \cdots\cdots + u_{n-2} \lambda^{n-2}.$$

Der Nachweis, den wir führen wollen, knüpft sich an die Betrachtung der Geradenpaare, in welcher eine Anzahl der Kegelschnitte dieser Schaar $\Sigma$ zerfällt. Ein solches Zerfallen tritt ein, wenn eine Ebene (2) das zugehörige Hyperboloid (3) berührt, wofür die Bedingung, wenn man mit $u_{l,\,ik}$ die Coefficienten von $u_l$ bezeichnet, die folgende wird:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} u_{0,11}+u_{1,11}\lambda+\cdots+u_{n-2,11}\lambda^{n-2}, & --, & u_{0,14}+u_{1,14}\lambda+\cdots+u_{n-2,14}\lambda^{n-2}, & 0 \\ - & -- & - & 0 \\ - & -- & - & -\lambda \\ u_{0,41}+u_{1,41}\lambda+\cdots+u_{n-2,41}\lambda^{n-2}, & --, & u_{0,44}+u_{1,44}\lambda+\cdots+u_{n-2,44}\lambda^{n-2}, & 1 \\ 0 & 0\;\; -\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Da dieses eine Gleichung vom Grade $3(n-2)+2 = 3n-4$ für $\lambda$ ist, so gibt es $3n-4$ Paare von je zwei sich schneidenden Geraden, welche durch die $(n-2)$ fache Gerade gehen, auf der Fläche $\varphi$.

Wir wollen indess noch den Fall berücksichtigen, dass die Fläche $\varphi$ Doppelpunkte besitzt, deren Zahl $= s$ sei. Man erkennt leicht, dass einer jeden der durch die $(n-2)$ fache Gerade und die Doppelpunkte gehenden Ebenen eine Doppelwurzel $\lambda$ der Gleichung (4) entspricht. Die Zahl der Geradenpaare von $\varphi$, welche nicht durch die Knotenpunkte gehen, beträgt daher nur $3n-2s-4$. Da überdies die Gleichung (4) nur $3n-4$ Wurzeln haben kann, so gibt dies zugleich eine obere Grenze für die Zahl der möglichen Knotenpunkte, nämlich $\frac{3n-4}{2}$. Diese Zahl kann nur dadurch überschritten werden, dass die Knotenpunkte besondere Lagenverhältnisse annehmen, so dass Ebenen des Büschels (2) die Fläche längs gerader Linien berühren; indess bleiben unsere folgenden Betrachtungen auch für solche Fälle gültig.

Unsere Aufgabe ist, unter Benutzung dieser Daten eine rationale Curve $C$ zu suchen, welche ganz auf der Fläche gelegen ist und jeden Kegelschnitt der Schaar $\Sigma$ in *einem* Punkte schneidet. Ich will hier sogleich diese Curve näher bezeichnen:

*Es existirt auf der Fläche $\varphi$ eine rationale Curve $C$ $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $n-3$ Punkte mit der $(n-2)$fachen Geraden $a$ von $\varphi$ gemein hat.*

Um diese Curve $C$ vollständiger zu bestimmen, muss ich zwischen geraden und ungeraden $n$ unterscheiden.

1. Es sei $n = 2m$. Die Curve $C$ entsteht als Schnitt zweier Flächen, einer Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(m-2)$fachen Geraden in $a$, und einer Fläche $m^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(m-1)$fachen Geraden in $a$. Ihr Schnitt ist in der That ausserhalb $a$ von der Ordnung $(m-1)\,m-(m-2)\,(m-1) = 2m-2 = n-2$.
2. Es sei $n = 2m+1$. Die Curve $C$ entsteht als Schnitt zweier Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die vielfache Gerade $a$ von $\varphi$ zur $(m-1)$fachen Geraden haben. Dieser Schnitt ist ausser $a$ von der Ordnung $m^2-(m-1)^2 = 2m-1 = n-2$.

Man übersieht direct, dass eine solche Curve $C$ rational ist und mit $a$ $(n-3)$ Punkte gemein hat; denn jede Ebene des Ebenenbüschels schneidet aus jeder der beiden Flächen, deren Schnitt $C$ ist, *eine* Gerade aus, bestimmt also ausserhalb $a$ *einen* Schnittpunkt, welcher dem Parameter des Ebenenbüschels eindeutig entspricht.

Um nun den Grad der Vielfachheit der Schaar von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu finden, welche $a$ in $n-3$ Punkten schneiden, suche ich die Zahl der windschiefen Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung der betrachteten Art auf. Wenn eine Fläche von der Ordnung $m$ eine gegebene Gerade als $r$fache Gerade besitzen soll, wird in dieser Fläche eine Anzahl $N_r$ von Constanten absorbirt, die gleich

$$N_r = \frac{r \,.\, r+1}{2 \,.\, 3} \cdot (3m-2r+5)\,.$$

Man findet diese Zahl, indem man die Bedingungen aufstellt, unter welchen eine Fläche, die eine Gerade $(r-1)$fach enthält, durch diese Gerade noch einmal hindurchgeht; die Zahl dieser Bedingungen wird

$$N_r - N_{r-1} = r(m-r+2)\,,$$

welche Gleichung in Verbindung mit $N_1 = m+1$ die Zahl $N_r$ ergibt*).

---

*) In ganz ähnlicher Weise ergiebt sich für die Zahl der Bedingungen, welche eine Fläche $m^{\text{ter}}$ Ordnung erfüllen muss, wenn sie eine Curve der Ordnung $\mu\,\nu$, die der Schnitt zweier Flächen $\mu^{\text{ter}}$ und $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung ist, als $r$fache Curve enthalten soll (vorausgesetzt, dass $m$ eine gewisse von $\mu$, $\nu$, $r$ abhängige Grösse übersteigt):

Es gibt daher eine

$$\frac{m+1\,.\,m+2\,.\,m+3}{1\,.\,2\,.\,3} - 1 - \frac{m-1\,.\,m}{2\,.\,3}(m+7) = 3m$$

fach unendliche Schaar von Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume, die eine gegebene Gerade als $(m-1)$ fache Gerade besitzen.

1. Für $n = 2m$. Die fraglichen Curven $(2m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung werden aus $\varphi$ von Flächen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten, welche $a$ zur $(m-2)$ fachen Geraden haben. Von diesen Flächen gibt es eine $3(m-1)$ fache Schaar. Durch eine gegebene der Curven geht nur eine einzige dieser Flächen, denn eine solche Curve erfordert von der Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung noch die Erfüllung von

$$(m-1)(2m-2) - (m-2)(2m-3) + 1 = 3(m-1)$$

linearen Bedingungen. Ferner geht durch jede der Curven eine zweifach unendliche Schaar von Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(m-1)$ facher Geraden $a$; denn damit die Curve auf der Fläche $m^{\text{ter}}$ Ordnung liege, muss sie mit ihr noch

$$m(2m-2) - (m-1)(2m-3) + 1 = 3m-2$$

Punkte gemein haben. Combinirt man daher die $3(m-1)$ fache Schaar von Flächen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $3m-2$ fachen Schaar der Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung, so erhält man alle Curven der betrachteten Art und jede nur einmal, woraus hervorgeht, dass es eine

$$3(m-1) + 3m - 2 = 6m - 5$$

fach unendliche Schaar von rationalen Curven $(2m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gibt, welche $2m-3$ Punkte mit einer gegebenen Geraden gemein haben.

2. Für $n = 2m+1$. Damit eine der Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine der Curven $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehe, muss sie mit ihr noch

$$m(2m-1) - (m-1)(2m-2) + 1 = 3m-1$$

Punkte gemein haben; also geht durch jede der Curven eine einfach unendliche Schaar der Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung. Man hat daher, um sämmtliche Curven der betrachteten Art zu erhalten, eine $(3m-1)$ fache Schaar der Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer weitern $(3m-1)$ fachen Schaar zu combiniren, woraus folgt, dass es eine $2(3m-1) = 6m-2$ fach unendliche Schaar der gesuchten Curven gibt.

Durch Zusammenfassen dieser beiden Resultate findet man:

---

$$N_r = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r\,.\,r+1}{2\,.\,3} \cdot \mu\nu \cdot \{6m - (2r+1)(\mu+\nu) + 12\};$$

und ähnlich, wenn die $r$ fache Curve eine Raumcurve $3^{\text{ter}}$ Ordnung ist:

$$N_r = \frac{r\,.\,r+1}{2\,.\,3} \cdot \{9m - 10r + 13\}.$$

*Es existirt eine* $(3r+1)$ *fach unendliche Schaar von Raumcurven* $r^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche* $r-1$ *Punkte mit einer gegebenen Geraden* $a$ *gemein haben.*

Im Raume gibt es eine $(3r+5)$ fach unendliche Schaar von rationalen Raumcurven $r^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Eigenschaft haben, $r-1$ Punkte zu besitzen, durch welche sich eine Gerade legen lässt. Ausgenommen ist $r=1, 2, 3, 4$, in welchen Fällen resp. eine 4, 8, 12, 16 fache Schaar existirt.

Man kann den Curven $r^{\text{ter}}$ Ordnung nun weitere Bedingungen auflegen, z. B. durch feste Punkte des Raumes oder durch Gerade zu gehen, welche die gegebene Gerade schneiden. Die obige Entwicklung zeigt, dass ein fester Punkt zwei lineare Bedingungen mit sich bringt, nämlich eine für jede der beiden Flächen, deren Schnitt die Curve ist. Die Anzahl $s$ dieser festen Punkte hat zur obern Grenze

1. Für ein gerades $r$: $s=\frac{3r}{2}$. Es existirt dann noch eine einfach unendliche Schaar von Curven, welche auf einer Fläche von der Ordnung $\frac{r}{2}$ liegen, welche die Gerade $a$ zur $\left(\frac{r}{2}-1\right)$ fachen Geraden hat. Die Fläche ist durch die $s$ Punkte eindeutig bestimmt, und ein weiterer fester Punkt müsste auf dieser Fläche angenommen werden.

2. Für ein ungerades $r$: $s=\frac{3r+1}{2}$. Es existirt dann noch eine einzige Curve, die durch diese $s$ Punkte hindurchgeht und $a$ in $r-1$ Punkten schneidet.

Sollen die Curven $r^{\text{ter}}$ Ordnung, die mit $a$ $r-1$ Punkte gemein haben, noch durch eine Gerade gehen, welche selbst $a$ schneidet, so wird hierdurch den Curven *eine* Bedingung vorgeschrieben. Ich werde aber jetzt nachweisen, dass, sobald nur feste Punkte und der Schnitt mit solchen Geraden die Bedingungen bilden und die Anzahl dieser Bedingungen $=3r+1$ ist, die Anzahl der Curven, welche diesen Bedingungen genügen, im Allgemeinen gleich *eins* ist.

Es sei den Curven $r^{\text{ter}}$ Ordnung, die eine Gerade $a$ in $r-1$ Punkten schneiden, vorgeschrieben, durch $s$ $\left(s \overline{\gtrless} \frac{3r+1}{2}\right)$ feste Punkte des Raumes zu gehen und $3r-2s+1$ feste Gerade $b$, die sämmtlich $a$, aber nicht sich schneiden, in je einem Punkte zu treffen.

Ich nehme aus den $3r-2s+1$ Geraden $b$ $3r-2s$ beliebige heraus und lege durch dieselben und durch die $s$ festen Punkte eine Fläche von der Ordnung $2r-s$, welche $a$ als $(2r-s-1)$ fache Gerade besitzt. Diese Fläche ist durch diese Bedingungen vollständig und eindeutig bestimmt; denn es existirt, wenn die Bedingungen für die $(2r-s-1)$ fache Gerade erfüllt sind, noch eine $3(2r-s)$ fache Schaar solcher Flächen, und jede der $3r-2s$ Geraden $b$ bringt 2, jeder der $s$ Punkte eine lineare Bedingung mit sich. Aber diese Fläche enthält auch alle Curven, welche den vorgeschriebenen Bedingungen genügen; denn sie hat mit jeder solchen Curve

$$(r-1)(2r-s-1)+s+(3r-2s)=r(2r-s)+1$$

Punkte gemein, also einen mehr, als der Schnitt einer Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Fläche von der Ordnung $2r-s$ betragen kann. Durch einen Punkt der Fläche $(2r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung geht im Allgemeinen nur *eine* der Curven, wie z. B. eine Abbildung der Fläche auf der Ebene lehrt, bei der der Curvenschaar der Fläche ein Curvenbüschel der Ebene entspricht. Da nun die noch nicht benutzte der $3r-2s+1$ Geraden $b$ die Fläche $(2r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung ausserhalb $a$ nur in *einem* Punkte schneidet und durch diesen Punkt nur *eine* Curve geht, so ist die Anzahl der allen Bedingungen genügenden Curven gleich 1. Diesen letztern, auf der Abbildung der Fläche beruhenden Schluss kann man auch dadurch ersetzen, dass man noch eine weitere Fläche $(2r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung betrachtet, welche durch $3r-2s$ andere der $3r-2s+1$ Geraden geht. Beide Flächen haben dann $3r-2s-1$ der Geraden gemein und enthalten sämmtliche Curven $r^{\text{ter}}$ Ordnung, welche *allen* Bedingungen genügen; ihr Schnitt ist aber von der Ordnung:

$$(2r-s)^2-(2r-s-1)^2-(3r-2s-1)=r,$$

der Schnitt besteht also aus *einer* Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung.

Hiermit ist eine ganze Reihe geometrischer Sätze erwiesen, die wir direct für die Abbildungsaufgaben benutzen werden und so zusammenfassen können:

*Wenn eine Gerade $a$, ferner $s$ feste Punkte $\left(s \overline{\gtrless} \frac{3r+1}{2}\right)$ beliebig im Raume und $3r-2s+1$ Gerade $b$, welche sämmtlich $a$, aber nicht sich, schneiden, gegeben sind, so existirt nur* e i n e *Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die $s$ festen Punkte geht, die Gerade $a$ $(r-1)$mal und die Geraden $b$ je einmal schneidet.*

Ich kehre nach diesen Vorbereitungen zu der Fläche $\varphi$, von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung mit der $(n-2)$fachen Geraden $a$ und $s$ Knotenpunkten, zurück. Nach dem Frühern enthält diese Fläche $3n-2s-4$ solcher Paare von je zwei sich schneidenden Geraden, welche in Ebenen liegen, die durch die Gerade $a$, aber nicht durch die Knotenpunkte gehen.

Man nehme nun aus diesen Geradenpaaren $3n-2s-5$ beliebige Paare und aus diesen Paaren je *eine* Gerade heraus, und lege eine Curve $C$ von der Ordnung $n-2$, welche diese $3n-2s-5$ Geraden je einmal, die vielfache Gerade $a$ $(n-3)$mal schneidet und durch die $s$ Doppelpunkte der Fläche $\varphi$ hindurchgeht. Nach dem obigen

Satze existirt *eine* Curve, welche diesen Bedingungen genügt. Diese Curve $C$ schneidet aber die Fläche $\varphi$ in

$$(n-2)(n-3) + 2s + (3n - 2s - 5) = n(n-2) + 1$$

Punkten *und liegt somit ganz auf der Fläche.* Da sie ferner mit $a$ $(n-3)$ Punkte gemein hat, so schneidet sie jeden Kegelschnitt der Schaar $\Sigma$, welche von dem Ebenenbüschel aus der Fläche ausgeschnitten wird, in *einem* Punkte, und führt somit zu einer Abbildung der Fläche auf einer Ebene, indem man jeden Kegelschnitt der Schaar $\Sigma$ von diesem auf ihm eindeutig bestimmten Punkte aus durch einen Strahlenbüschel projicirt.

*Hiedurch ist der Beweis der Abbildbarkeit der Flächen $\varphi$ und damit zugleich der Beweis der in § 3. ausgesprochenen Sätze geführt.*

Die hier gefundene Curve $C$ schneidet die Ebene, in welcher das letzte noch unbenutzte Geradenpaar der Fläche $\varphi$ liegt, in einem Punkte, also eine *bestimmte* der Geraden dieses Paares in einem Punkte. Hieraus folgt, dass man die sämmtlichen Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung von der verlangten Eigenschaft auf der Fläche $\varphi$ erhält, wenn man die Geraden der ersten $3n - 2s - 5$ Geradenpaare beliebig unter sich combinirt, indem man nur aus jedem Paare immer eine der Geraden herausnimmt. Die Anzahl dieser Combinationen beträgt $2^{3n-2s-5}$.

Im Falle $n$ gerade, gibt es eine einzige Fläche von der Ordnung $\frac{n}{2} - 1$, welche durch eine solche Curve hindurchgeht und $a$ zur $\left(\frac{n}{2} - 2\right)$fachen Geraden hat. Diese Fläche schneidet $\varphi$ dann noch in einer weitern der Curven $C$ von der Ordnung $n-2$.

Im Falle $n$ ungerade, gibt es dagegen eine einfach unendliche Schaar von Flächen von der Ordnung $\frac{n-1}{2}$, welche durch eine der Curven $C$ hindurchgehen und die Gerade $a$ zur $\left(\frac{n-3}{2}\right)$fachen Geraden besitzen. Jede Fläche dieser Schaar schneidet $\varphi$ noch ausserdem in einer rationalen Curve von der Ordnung $n-1$, die ganz ähnliche Eigenschaften hat, wie die Curve $C$ von der Ordnung $n-2$; denn sie schneidet ebenfalls die Kegelschnitte der Schaar $\Sigma$ in je einem Punkte, und da sie selbst einer Schaar angehört, so hat man hiedurch eine Abbildung, bei der die Coordinaten der Fläche rationale Functionen der Parameter dieser Schaar und des Ebenenbüschels werden. Man kann statt dessen den Flächen $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung die Bedingung auflegen, eine der Geraden, welche von der Curve $C$ geschnitten wird, vollständig zu enthalten; es existirt dann ebenfalls nur *eine* solche Fläche, die $\varphi$ noch in einer weitern Curve $C$ von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung schneidet.

Wir haben also folgende Resultate:

*Auf den Flächen* $\varphi$ *existiren* $2^{3n-2s-5}$ *Curven* $C$ *von der* $(n-2)^{\text{ten}}$ *Ordnung, welche jedes Glied der Kegelschnittschaar* $\Sigma$ *in je einem Punkte schneiden. Die Curven gehen sämmtlich durch die Knotenpunkte der Fläche, und jede der Curven trifft je eine Gerade jedes Geradenpaares, welches nicht durch die Knotenpunkte geht. Im Falle* $n$ *gerade, liegen je zwei solcher Curven, welche durch sich je zu einem Paar ergänzende Gerade gehen, auf einer Fläche von der Ordnung* $\frac{n}{2}-1$, *die* $a$ *zur* $\left(\frac{n}{2}-2\right)$*fachen Geraden hat, von welchen Flächen es daher* $2^{3n-2s-6}$ *gibt. Je zwei solche adjungirte Curven schneiden sich in* $\frac{3n}{2}-3$ *Punkten, welche nicht auf der vielfachen Geraden liegen; die Fläche* $\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\text{ter}}$ *Ordnung ist daher eine* $\left(\frac{3n-6}{2}\right)$*fach berührende, d. h. sie berührt in der höchstmöglichen Anzahl von Punkten.*

*Im Falle* $n$ *ungerade, geht durch jede der Curven* $C$ *ein Flächenbüschel* $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ter}}$ *Ordnung, mit* $a$ *als* $\left(\frac{n-3}{2}\right)$*facher Geraden, von dem jede Fläche* $\varphi$ *noch in einer rationalen Curve* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung mit* $n-2$ *Punkten auf* $a$ *schneidet. Diese Flächen sind* $\left(\frac{3n-5}{2}\right)$*fach berührende. Schreibt man einer solchen Fläche* $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ter}}$ *Ordnung vor, eine der Geraden, durch welche die betrachtete Curve* $C$ *geht, ganz zu enthalten, so ist sie dadurch eindeutig bestimmt. Diese Fläche schneidet dann* $\varphi$ *noch in einer weitern Curve* $C'$ *von der* $(n-2)^{\text{ten}}$ *Ordnung, welche ebenfalls durch die ausgezeichnete Gerade geht, durch die ergänzende Gerade ihres Paares, wie* $C$, *nicht, welche aber ausserdem, in Bezug auf die übrigen Geradenpaare, durch diejenigen Geraden geht, welche die der Curve* $C$ *zugehörigen Geraden je zu einem Paar ergänzen. Solche zwei adjungirte Curven* $C$ *und* $C'$, *die nur eine gemeinschaftliche Gerade treffen, schneiden sich noch in* $\frac{3n-7}{2}$ *Punkten. Die Fläche* $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche durch beide Curven und durch die ausgezeichnete Gerade geht, ist eine* $\left(\frac{3n-3}{2}\right)$*fach berührende, da sie noch in den 2 Punkten berührt, in welchen diese Gerade die beiden Curven schneidet, d. h. die Fläche berührt in der höchstmöglichen Anzahl von Punkten. Solcher Flächen gibt es* $2^{3n-2s-6}\,.\,2^{3n-2s-5}=2^{6n-4s-11}$.

Die Aufsuchung dieser Curven $C$ und die Abbildung der Flächen $\varphi$ erfordert die Auflösung *einer* höhern Gleichung vom Grade $3n-2s-4$, welche die Geradenpaare der Fläche liefert, und die von $3n-2s-5$

quadratischen Gleichungen*). Diese Gleichungen sind zugleich die einzigen, auf welche unsere Methode der Abbildung von Flächen überhaupt führt. Ich bemerke noch, dass die hier angegebenen Zahlen für die Fläche $\varphi$ noch eine Voraussetzung einschliessen; denn die Curven $C$ sind unter der Annahme gefunden worden, dass die Geradenpaare, welche sie bestimmen, eine von einander unabhängige Lage haben. Aber eine Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist schon durch die Bedingungen, eine Gerade $a$ als $(n-2)$ fache Gerade und $2n-1$ Gerade, welche $a$ schneiden, einfach zu enthalten, vollständig und eindeutig bestimmt. Unsere Betrachtungen erweisen aber jedenfalls die Existenz von Curven $C$, und da man sodann durch eine Abbildung der Fläche zeigen kann, dass die gegenseitige Abhängigkeit der Lage der Geradenpaare nicht unendlich viele den Bedingungen genügende Curven $C$ zulässt, so ergibt sich mit der Endlichkeit der Zahl dieser Curven auch die Gültigkeit der oben angegebenen Zahlen.

## § 5.

### Abbildung der Flächen $\varphi$ auf der Ebene.

Ich wende mich jetzt zur Ausführung der Abbildung einer Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden auf der Ebene. Die geringen Modificationen, welche die folgende Abbildung durch Knotenpunkte erleidet, werde ich weiter unten erwähnen. Es wird wieder nöthig, die beiden Fälle, dass $n$ gerade oder ungerade ist, getrennt zu behandeln.

1. Es sei *$n$ gerade*: $n = 2m$.

Auf dem in § 4. angegebenen Wege sei eine Curve $C$ von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung aufgesucht, und die Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der $(m-2)$ fachen Geraden $a$ bekannt, welche durch $C$ hindurchgeht. Da diese Fläche die Fläche $\varphi$ in zwei Curven $C$, $C'$ schneidet, durch welche man noch Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(m-1)$ fachen Geraden in $a$ legen kann, deren vollständiger Schnitt mit der Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus $C$, $C'$ und $a$ besteht, so nimmt die Gleichung der gegebenen Fläche $\varphi$ die Form an:

$$\begin{aligned}&(A_1 x_3^{m-1} + A_2 x_3^{m-2} x_4 \cdots + A_m x_4^{m-1})(B_1 x_3^{m-1} + B_2 x_3^{m-2} x_4 \cdots + B_m x_4^{m-1}) \\ (1)\quad &= (C_1 x_3^{m-2} + C_2 x_3^{m-3} x_4 \cdots + C_{m-1} x_4^{m-2})(D_0 x_3^m \quad + D_1 x_3^{m-1} x_4 \cdots + D_m x_4^m \quad),\end{aligned}$$

wo die $A$, $B$, $C$, $D$ lineare homogene Ausdrücke in $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ sind. Um aus dieser Gleichung die schon erwähnte Abbildung zu erhalten,

*) Das entsprechende algebraische Problem findet sich bereits von Herrn Camille Jordan, in seinem Werke: „Traité des Substitutions et des Équations algébriques", Nr. 435, behandelt.

zerlegt man sie durch Einführung zweier Parameter $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ und $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ in die drei Gleichungen:

$$(2)\begin{cases}\xi_2 x_3 - \xi_1 x_4 = 0\\ \xi_3(C_1\xi_1^{m-2}+C_2\xi_1^{m-3}\xi_2+\cdots+C_{m-1}\xi_2^{m-2})=A_1\xi_1^{m-1}+A_2\xi_1^{m-2}\xi_2+\cdots+A_m\xi_2^{m-1}\\ \xi_3(B_1\xi_1^{m-1}+B_2\xi_1^{m-2}\xi_2+\cdots+B_m\xi_2^{m-1})=D_0\xi_1^m+D_1\xi_1^{m-1}\xi_2+\cdots+D_m\xi_2^m.\end{cases}$$

Diese Gleichungen geben nicht nur die Verhältnisse der $\xi$ als rationale Functionen der $x$, sondern auch umgekehrt die Verhältnisse der $x$ als rationale Functionen der $\xi$, und zwar werden die $x$ proportional mit Functionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung der $\xi$.

Die geometrische Bedeutung dieser Abbildung schliesst sich eng an unsere frühern Betrachtungen an, wie sich aus den Gleichungen (2) ergibt. Denn die beiden ersten derselben stellen eine Gerade vor, die an der $(n-2)$fachen Geraden $a$ und an einer Curve $C$ der Fläche gleitet; dabei ist $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ der Parameter $\lambda$ des Ebenenbüschels $x_4 - \lambda x_3 = 0$, und $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ lässt sich als der Parameter eines Büschels von Flächen $m^{\text{ter}}$ Ordnung auffassen, welche durch $C$ gehen und $a$ zur $(m-1)$fachen Geraden haben.

Durch Auflösen der Gleichungen (2) erhält man:

$$(3)\qquad \varrho x_i = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i}, \quad (i=1,2,3,4),$$

wobei

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & \xi_1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix}$$

Hierbei sind die $X$ Functionen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\xi$, welche für $(\xi_1=\xi_2=0)$ $(m-2)$fach verschwinden, die $Y$ Functionen $m^{\text{ter}}$ Ordnung der $\xi$, die für $(\xi_1=\xi_2=0)$ $(m-1)$fach verschwinden. Der Punkt $(\xi_1=\xi_2=0)$ ist also ein $(2m-2)=(n-2)$facher Fundamentalpunkt.

Von den $4m^2$ Punkten, in welchen sich $\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}=0$ und $\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}=0$ schneiden, fallen $(2m-2)^2$ in den Punkt $(\xi_1=\xi_2=0)$ und $8m-4$ ausserhalb dieses Punktes. Für diese Punkte verschwindet auch $\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}X_3+\frac{\partial R}{\partial \alpha_4}X_4$, also auch

$$(\xi_1 X_3+\xi_2 X_4)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)=0,$$

und auch $\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}$ und $\frac{\partial R}{\partial \alpha_4}$ sind für diejenigen der $8m-4$ Punkte 0, für welche

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0.$$

Für $2m$ der $8m-4$ Punkte verschwindet aber $\xi_1 X_3 + \xi_2 X_4$; denn für die Punkte, in denen $\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = 0$, $\xi_1 X_3 + \xi_2 X_4 = 0$ hat man auch $\xi_1 Y_3 + \xi_2 Y_4 = 0$, welche beiden letztern Gleichungen $m(m+1)$ Schnittpunkte liefern, von denen $(m-1)m$ in den Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ fallen. In den übrigen $8m - 4 - 2m = 6m - 4 = 3n - 4$ Punkten verschwindet $X_1 Y_2 - X_2 Y_1$ und somit die sämmtlichen Functionen $\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}$.

Die Functionen (3) haben daher noch $3n-4$ einfache Fundamentalpunkte.

2. Es sei $n$ *ungerade*: $n = 2m+1$. Vermöge des Flächenbüschels $m^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher $a$ zur $(m-1)$fachen Geraden hat und durch eine der Curven $C$ hindurchgeht, nimmt die Gleichung der Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung die Form an:

$$(4)\quad \begin{aligned} &(A_1\, x_3^{m-1} + A_2\, x_3^{m-2}\, x_4 \cdots + A_m\, x_4^{m-1})(B_0\, x_3^m + B_1\, x_3^{m-1}\, x_4 \cdots + B_m x_4^m) \\ =\ &(C_1\, x_3^{m-1} + C_2\, x_3^{m-2}\, x_4 \cdots + C_m\, x_4^{m-1})(D_0\, x_3^m + D_1\, x_3^{m-1}\, x_4 \cdots + D_m x_4^m) \end{aligned}$$

wo die $A$, $B$, $C$, $D$ wieder lineare Ausdrücke sind. Diese Form ist aber den folgenden drei Gleichungen äquivalent:

$$(5)\quad \begin{cases} \xi_2 x_3 - \xi_1 x_4 = 0 \\ \xi_3 (C_1\, \xi_1^{m-1} + C_2\, \xi_1^{m-2} \xi_2 \cdots + C_m\, \xi_2^{m-1}) = B_0 \xi_1^m + B_1 \xi_1^{m-1}\, \xi_2 \cdots + B_m\, \xi_2^m \\ \xi_3 (A_1\, \xi_1^{m-1} + A_2\, \xi_1^{m-2} \xi_2 \cdots + A_m \xi_2^{m-1}) = D_0 \xi_1^m + D_1 \xi_1^{m-1}\, \xi_2 \cdots + D_m\, \xi_2^m, \end{cases}$$

welche Gleichungen die Abbildung liefern. Die Auflösung derselben gibt wieder Functionen von der Form (3), wobei aber die $X$ und $Y$ Functionen $m^{\text{ter}}$ Ordnung werden, welche in $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ einen $(m-1)$fachen Punkt haben. Eine der obigen analoge Entwicklung zeigt, dass die Coordinaten $x$ der Fläche $\varphi$ auch hier proportional werden mit Functionen $(2m+1) = n^{\text{ter}}$ Ordnung der $\xi$, welche in $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ einen $(n-2)$fachen Punkt, und ausserdem $6m - 1 = 3n - 4$ einfache Punkte gemeinschaftlich haben. Auch die geometrische Bedeutung der Abbildung ist der sub 1. ähnlich. Durch Zusammenfassen dieser Resultate sub 1. und 2. ergiebt sich nun:

*Die ebenen Schnitte der Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden bilden sich auf der Ebene durch Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung ab, welche einen festen $(n-2)$ fachen und $3n-4$ feste einfache Punkte gemeinschaftlich haben.*

Hiebei stellt der $(n-2)$ fache Fundamentalpunkt eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Fläche, und die einfachen Fundamentalpunkte diejenigen $3n-4$ Geraden der Fläche vor, durch welche diese Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung *nicht* geht.

Umgekehrt reicht auch das hier angegebene ebene System, bei beliebiger Wahl der $3n-3$ Fundamentalpunkte, vollständig hin, um die abgebildete Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung zu characterisiren; denn einmal gibt es eine dreifach unendliche Schaar von Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem festen $(n-2)$ fachen und $3n-4$ festen einfachen Punkten, der die dreifach unendliche Schaar von ebenen Schnitten der Fläche entsprechen kann. Sodann aber entspricht hiebei dem ebenen System eine Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Doppelcurve von der Ordnung $\frac{\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}}{1.2}$, die hier in eine $(n-2)$ fache Gerade übergehen muss. Diesen letztern Punkt kann man auf folgende Weise einsehen. Unter dem System von Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welchem die ebenen Schnitte der Fläche entsprechen, ist eine einfach unendliche Schaar enthalten, welche in einen Geradenbüschel, dessen Scheitelpunkt der $(n-2)$ fache Fundamentalpunkt ist, und in eine feste Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt, die in dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt einen $(n-3)$ fachen Punkt besitzt und durch die einfachen Fundamentalpunkte einfach hindurchgeht, wodurch diese Curve $S$ völlig und eindeutig bestimmt ist. Dem Geradenbüschel muss hier nun eine Schaar von Kegelschnitten entsprechen, welche von einem Ebenenbüschel aus der Fläche ausgeschnitten wird. Die Axe dieses Büschels ist also eine $(n-2)$ fache Gerade der Fläche. Zugleich sieht man, dass die Curve $S$ die *Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden* der Fläche ist.

Ich bemerke weiter, dass die hier gefundene Abbildung der Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung auch diejenige ist, bei welcher den ebenen Schnitten Curven der möglichst niedrigen Ordnung auf der Ebene entsprechen. Denn wendet man eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung an, indem man die drei Grundpunkte dieser Transformation in den $(n-2)$ fachen und zwei der einfachen Fundamentalpunkte der Ebene hineinlegt, so wird die dreifach unendliche Schaar von Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung in eine solche von der Ordnung $2n-(n-2)-2=n$ transformirt, mit einem dem erstern ähnlichen System von Fundamentalpunkten.

Es bleibt jetzt noch übrig, den Fall zu berücksichtigen, dass die Fläche $\varphi$ Doppelpunkte besitzt. Ein Doppelpunkt tritt nun dadurch ein, dass zwei der einfachen Fundamentalpunkte der Bildebene mit dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt auf einer geraden Linie liegen; und diese Art der Abbildung entspricht auch genau den Modificationen, welchen die Hülfsflächen $m^{\text{ter}}$ und $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die wir früher behandelt haben, in diesem Fall unterliegen. Denn diese Flächen müssen, nach der Entwicklung des § 4., durch die Knotenpunkte der Fläche $\varphi$ hindurchgelegt werden. Wenn also z. B. $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ ein Knotenpunkt von $\varphi$ ist, so geschieht dies dadurch, dass in der Gleichungsform (1) $A_m$, $B_m$, $C_{m-1}$, $D_m$, in der Gleichungsform (4) $A_m$, $B_m$, $C_m$, $D_m$ lineare Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ werden. Dann folgt aber aus (2) und (5), dass $X_4$ und $Y_4$ in (3) den Factor $\xi_1$ erhalten, wodurch die Abbildung (3) in die folgende übergeht:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \xi_1 Q \\ \varrho x_2 = \xi_1 R \\ \varrho x_3 = \xi_1 S \\ \varrho x_4 = \xi_2 S, \end{cases}$$

wo $Q$, $R$, $S$ Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche den Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ zum $(n-3)$ fachen Punkt und ausserdem noch $3n-6$ feste Punkte gemeinschaftlich haben. Als Fundamentalpunkte treten daher hier der Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ als $(n-2)$ facher Punkt, die $3n-6$ weiteren Basispunkte von $Q$, $R$, $S$ einfach und ferner die beiden Punkte auf, in welchen die Gerade $\xi_1 = 0$ die Curve $S = 0$ ausserhalb $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ schneidet. Dem Doppelpunkte $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ der Fläche entspricht hiebei die Gerade $\xi_1 = 0$, und dem Geradenpaar der Fläche, welches durch den Doppelpunkt geht, die beiden einfachen Fundamentalpunkte, welche auf der Geraden $\xi_1 = 0$ liegen. $S = 0$ ist die Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden der Fläche. Aehnlich liegen im Allgemeinen, den $s$ Knotenpunkten der Fläche $\varphi$ entsprechend, $s$ mal je zwei einfache Fundamentalpunkte mit dem $(n-2)$ fachen auf einer Geraden.

Ich will im Folgenden bei der Fläche $\varphi$ nur die Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden näher betrachten. Eine weitere Untersuchung der Abbildung der Fläche würde zeigen, dass ausser den schon betrachteten Geradenpaaren und der Kegelschnittschaar keine weitern Curven unter der Ordnung $n-2$ auf der Fläche liegen. Von dieser Ordnung existiren nur die schon behandelten $2^{3m-2s-5}$ Curven $C$. Als specielle Fälle der hier durchgeführten Abbildung der Flächen $\varphi$ lassen sich die bekannten Abbildungen der Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung (wobei die Curven $C$ in zwei Punkte ausarten), der Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung und der Fläche $4^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Doppelgeraden ansehen.

## § 6.

## Die Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden der Flächen $\varphi$.

Im ersten Bande der Math. Ann., pag. 270., hat Herr Clebsch die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve einer abbildbaren Fläche entwickelt. Eine Erweiterung dieser Untersuchung, welche ich in meiner Abhandlung, Math. Ann. Bd. 2., pag. 312, gegeben habe, führt zu folgendem Resultate.

Die Fläche $N^{\text{ter}}$ Ordnung, $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ sei durch die Functionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varrho x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

auf der Ebene abgebildet. Man bilde nun die Gleichung

$$\frac{\Omega}{\Theta} = 0,$$

wo

$$\Omega = \sum_i z_i \cdot \frac{\partial F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial \varphi_i}$$

$$\Theta = \Sigma \pm z_1 \frac{\partial \varphi_2(\xi)}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3(\xi)}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_4(\xi)}{\partial \xi_3}$$

Im Falle bei dieser Abbildung auf $F = 0$ keine Fundamentalpunkte, die einfache Punkte von $F = 0$ sind, auftreten, ist $\Theta$ in $\Omega$ theilbar, und $\frac{\Omega}{\Theta} = 0$ stellt die Abbildung der auf $F = 0$ befindlichen vielfachen Curven und Flächen dar, aber so, dass $\frac{\Omega}{\Theta} = 0$ durch die Abbildung einer $\mu$fachen Curve von $F = 0$ $(\mu - 1)$fach, durch die Abbildung eines $\mu$fachen Knotenpunkts von $F = 0$ $(\mu - 2)$fach hindurchgeht.

Wenn auch auf $F = 0$ ein Fundamentalpunkt, der ein einfacher Punkt von $F = 0$ ist, existirt, so ist der betreffende Factor, welcher die dem Fundamentalpunkt auf der Ebene entsprechende Curve darstellt, in $\Theta$ einfach, nicht aber in $\Omega$ enthalten, und muss von $\Theta$ abgesondert werden.

Die Ordnung von $\frac{\Omega}{\Theta}$ ist $(N - 4)n + 3$, und einen $r$fachen Fundamentalpunkt der Ebene hat diese Curve $\frac{\Omega}{\Theta}$ zum $[(N - 4)r + 1]$fachen Punkte. Wenn also auf $F$ eine $\mu$fache Curve und nur 2fache Knotenpunkte existiren, und die Abbildung von $F$ auf der Ebene soll derart sein, dass auf $F$ kein einfacher Punkt als Fundamentalpunkt auftritt, so müssen die Zahlen $n$ und $r$ den Bedingungen genügen, dass

$$(N - 4)n + 3 \quad \text{und} \quad (N - 4)r + 1 \quad \text{und folglich auch} \quad n - 3r$$

ganze *Vielfache* von $\mu - 1$ sind.

Diese Zahlen finden sich bei unserer Fläche $\varphi$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, mit einer $(n - 2)$fachen Geraden $a$ und $s$ Doppelpunkten, bestätigt. Es wird hier $N = n$, $\mu = n - 2$, $r = n - 2$ oder $= 1$, und die vielfache Gerade der Fläche bildet sich ab als Curve $S = 0$, von der Ordnung $n - 1$, welche in dem $(n - 2)$fachen Fundamentalpunkt einen $(n - 3)$fachen Punkt besitzt und durch die $3n - 4$ einfachen Fundamentalpunkte einfach hindurchgeht. Das Geschlecht dieser eindeutig bestimmten Curve $S$ ist $n - 3$. Ferner hat diese Curve die Eigenschaft, ihre Coordinaten als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen zu lassen. Denn fügt man zur Gleichung der Curve $S$ die Gleichung des Geradenbüschels, dessen Scheitel in dem $(n - 3)$fachen Punkte von $S$ liegt, so ergeben sich, da jede dieser

Geraden in zwei beweglichen Punkten schneidet, die Coordinaten der Curve in der Form:

$$\varrho\,\xi_i = P_i + Q_i \cdot \sqrt{R}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo $P_i$, $Q_i$, $R$ rationale ganze Functionen eines Parameters $\lambda$ und $R$ auf den Grad $2n - 4$ steigt. Die beiden Punkte, in welchen eine Gerade des Büschels die Curve schneidet, entsprechen den beiden Punkten der vielfachen Geraden, welche ein Kegelschnitt der Schaar mit dieser gemein hat.

Um aber weiter die Curve $S$ nach den Punkten zu studiren, welche *einen* Punkt der vielfachen Geraden $a$ von $\varphi$ abbilden, ist es zweckmässig, ähnlich wie es für den specielleren Fall der Fläche 4ter Ordnung von Herrn Clebsch, Math. Ann., Bd. 1., pag. 284, geschehen, die $(n - 3)$ allenthalben endlichen Integrale einzuführen, welche der betrachteten Curve $S$ zugehören, und auf diese das Abel'sche Theorem in der von Herrn Clebsch (Crelle, Bd. 63.) gegebenen Form anzuwenden.

Die obern Grenzen dieser Integrale sind die Coordinaten der beweglichen Punkte der Curve $S$; die untere Grenze sei ein beliebiger fester Punkt der Curve. Die $n - 3$ endlichen Integrale unterscheide ich von einander durch unten angefügte Indices, während der Buchstabe selbst und der oben angefügte Index sich auf den Punkt beziehen soll, dessen Coordinaten die obere Grenze des Integrals bilden. Es seien nun

$$u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots u_{n-3}^{(i)} \quad , \quad [i = 1, 2, \ldots, r(n-1)]$$

die Werthe der $n - 3$ Integrale, welche sich auf den $i^{\text{ten}}$ Schnittpunkt einer Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Curve $S$ beziehen. Dann bestehen nach dem Abel'schen Theorem die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{r(n-1)} = r \cdot c_1 \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{r(n-1)} = r \cdot c_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{n-3}^{(1)} + u_{n-3}^{(2)} + \cdots + u_{n-3}^{r(n-1)} = r \cdot c_{n-3}, \end{cases}$$

wo die $c_i$ Constanten bedeuten, die unabhängig sind von der Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung. Wir werden diese Gleichungen hier nur auf solche Fälle anwenden, in denen, nach der Theorie der Abel'schen Functionen, das Bestehen derselben auch umgekehrt beweist, dass die $(n - 1)r$ Punkte, auf welche sich die Integrale der linken Seiten beziehen, Schnittpunkte einer Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung mit $S$ sind.

Es sei nun weiter die constante Summe der $n - 3$ endlichen Integrale $u_k$, ausgedehnt über die $n - 3$ im $(n - 2)$ fachen Fundamentalpunkte vereinigt liegenden Punkte der Curve $S$, bezeichnet durch

$$A_k \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 3),$$

und die Werthe der Integrale für den $\lambda^{\text{ten}}$ einfachen Fundamentalpunkt bezeichnet durch:

$$a_1^{(\lambda)},\ a_2^{(\lambda)},\ \ldots\ a_{n-3}^{(\lambda)}\quad,\quad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3n-4).$$

Um die Punkte der Curve $S$ zu erhalten, deren entsprechende Punkte auf $\varphi$ in einen Punkt der vielfachen Geraden zusammenfallen, betrachte ich zunächst die Abbildungen ebener Schnitte der Fläche. Es sind Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $3n-4$ feste Punkte von $S$ einfach gehen und in dem $(n-3)$ fachen Punkt von $S$ einen $(n-2)$ fachen Punkt haben. Da jede solche Curve die Abbildung eines ebenen Schnittes ist, so sind die $n-2$ beweglichen Punkte, in welcher eine solche $S$ schneidet, immer die Abbildung eines Punktes der vielfachen Geraden. Die endlichen Integrale für solche $n-2$ Punkte seien, dem $h^{\text{ten}}$ dieser Punkte entsprechend, mit

$$\nu_1^{(h)},\ \nu_2^{(h)},\ \ldots\ \nu_{n-3}^{(h)}\quad,\quad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2)$$

bezeichnet. Für eine einen ebenen Schnitt abbildende Curve $T$ gehen daher die Gleichungen (1) über in das System:

$$(2)\quad\begin{cases} \nu_1^{(1)}+\nu_1^{(2)}\cdots+\nu_1^{(n-2)}+(n-2)A_1+a_1^{(1)}+a_1^{(2)}\cdots+a_1^{(3n-4)}=n\,.\,c_1\\ \nu_2^{(1)}+\nu_2^{(2)}\cdots+\nu_2^{(n-2)}+(n-2)A_2+a_2^{(1)}+a_2^{(2)}\cdots+a_2^{(3n-4)}=n\,.\,c_2\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \nu_{n-3}^{(1)}+\nu_{n-3}^{(2)}\cdots+\nu_{n-3}^{(n-2)}+(n-2)A_{n-3}+a_{n-3}^{(1)}+a_{n-3}^{(2)}\cdots+a_{n-3}^{(3n-4)}=n\,.\,c_{n-3} \end{cases}$$

Es sei nun mit $\varepsilon$ eine Zahl bezeichnet, die $=0,\ 2,\ 4\ldots$, wenn $n$ gerade, und $=1,\ 3,\ 5\ldots$, wenn ungerade, sein kann. Ich greife aus den Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung, $T$, eine bestimmte $T'$ heraus, welche $S$ in gewissen $n-2$ Punkten schneidet. Durch diese $n-2$ Punkte $\nu$ lege ich eine Curve von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon-2}{2}$, welche in dem $(n-3)$ fachen Punkt von $S$ einen $\frac{n+\varepsilon-4}{2}$ fachen Punkt besitzt, also eine rationale Curve, und lasse diese Curve überdies durch $\varepsilon$ beliebige Punkte $l$ von $S$ gehen, wodurch dieselbe gerade bestimmt ist. Diese Curve schneidet dann $S$ noch in

$$(n-1)\cdot\frac{n+\varepsilon-2}{2}-(n-3)\cdot\frac{n+\varepsilon-4}{2}-(n-2)-\varepsilon=n-3$$

Punkten $p$. Die Gleichungen (1) geben daher für den Schnitt von $S$ mit dieser Curve, wenn man die Integrale, die sich auf die festen Punkte $l^{(i)}$ beziehen, mit

$$l_1^{(i)},\ l_2^{(i)},\ \ldots\ l_{n-3}^{(i)}\quad,\quad (i = 1,\ 2,\ldots\varepsilon),$$

und die auf die Punkte $p^{(i)}$ bezüglichen Integrale mit

$$p_1^{(i)},\ p_2^{(i)},\ \ldots\ p_{n-3}^{(i)}\quad,\quad (i = 1,\ 2,\ldots n-3)$$

bezeichnet:

$$(3)\begin{cases} \nu_1^{(1)}+\nu_1^{(2)}\cdots+\nu_1^{(n-2)}+\frac{n+\varepsilon-4}{2}\cdot A_1+l_1^{(1)}\cdots+l_1^{(\varepsilon)}+p_1^{(1)}+\cdots+p_1^{(n-3)}=\frac{n+\varepsilon-2}{2}\cdot c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_{n-3}^{(1)}+\nu_{n-3}^{(2)}\cdots+\nu_{n-3}^{(n-2)}+\frac{n+\varepsilon-4}{2}\cdot A_{n-3}+l_{n-3}^{(1)}\cdots+l_{n-3}^{(\varepsilon)}+p_{n-3}^{(1)}+\cdots+p_{n-3}^{(n-3)}=\frac{n+\varepsilon-2}{2}\cdot c_{n-3} \end{cases}$$

Dieses System von Gleichungen (3) besteht neben dem System (2). Verbindet man beide, indem man je eine Gleichung (2) von der entsprechenden in (3) subtrahirt, so erhält man das folgende System, das sich ebenfalls auf die Curve $T'$ bezieht:

$$(4)\begin{cases} p_1^{(1)}+p_1^{(2)}\cdots+p_1^{(n-3)}=\frac{n-\varepsilon}{2}\cdot A_1\quad +a_1^{(1)}\cdots+a_1^{(3n-4)}-l_1^{(1)}\cdots-l_1^{(\varepsilon)}-\frac{n-\varepsilon+2}{2}c_1 \\ p_2^{(1)}+p_2^{(2)}\cdots+p_2^{(n-3)}=\frac{n-\varepsilon}{2}\cdot A_2\quad +a_2^{(1)}\cdots+a_2^{(3n-4)}-l_2^{(1)}\cdots-l_2^{(\varepsilon)}-\frac{n-\varepsilon+2}{2}\cdot c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-3}^{(1)}+p_{n-3}^{(2)}\cdots+p_{n-3}^{(n-3)}=\frac{n-\varepsilon}{2}\cdot A_{n-3}+a_{n-3}^{(1)}\cdots+a_{n-3}^{(3n-4)}-l_{n-3}^{(1)}\cdots-l_{n-3}^{(\varepsilon)}-\frac{n-\varepsilon+2}{2}\cdot c_{n-3} \end{cases}$$

Nach dem Jacobi'schen Umkehrproblem der Abel'schen Functionen lassen diese $n-3$ Gleichungen aber eine eindeutige Auflösung für die $n-3$ Punkte $p$ zu, und bestimmen dieselben als eindeutige Functionen der rechten Seiten dieser Gleichungen. Hier tritt nun der besondere Umstand ein, dass diese rechten Seiten vollständig constant sind, indem sie in keiner Weise von der individuellen Curve $T'$ abhängen, welche aus der dreifach unendlichen Schaar von Curven $T$ herausgenommen wurde. Dies beweist den folgenden Satz:

*Legt man durch $\varepsilon$ beliebige feste Punkte der Curve $S$ eine Curve $K$ von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, welche in dem $(n-3)$fachen Punkt von $S$ einen $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$fachen Punkt besitzt, und lässt diese Curve $K$ weiter durch irgend ein System $Q$ von $(n-2)$ Punkten von $S$ gehen, welches einem Punkte der vielfachen Geraden $a$ von $\varphi$ entspricht, wodurch dann die Curve $K$ gerade bestimmt ist, so schneidet eine solche Curve $K$, welches System $Q$ man auch wählen mag, die Curve $S$ immer in demselben System $P$ von $n-3$ weitern Punkten.*

Und umgekehrt, wenn die $\varepsilon$ Punkte $l$ fest gegeben sind, findet man aus (4) eindeutig ein Punktsystem $P$ von $n-3$ Punkten $p$. Legt man sodann eine Curve $K$ von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, die im $(n-3)$fachen Punkte von $S$ einen $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$fachen Punkt hat, und durch die $\varepsilon$ Punkte $l$ und das Punktsystem $P$ hindurchgeht, so schneidet diese $K$ die Curve $S$ noch in $n-2$ Punkten, für welche neben (4) auch (3), also auch das Gleichungssystem (2) besteht. In Bezug auf die Gleichungen (2), welche sich auf den Schnitt von $S$ mit einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung beziehen, die einen $(n-2)$fachen Punkt in dem

$(n-3)$ fachen Punkt von $S$ hat, lässt sich aber der Satz des Abel'schen Theorems umkehren; das Bestehen dieser Gleichungen beweist, dass die Punkte $\nu$ ein Punktsystem $Q$ bilden, welches einem Punkte der vielfachen Geraden der Fläche entspricht. Jede Curve des Büschels von Curven $K$, welche hier bestimmt worden sind, schneidet daher $S$ in solchen $n-2$ Punkten, die ein Punktsystem $Q$ bilden, woraus der Satz folgt, der diese Systeme $Q$ auffinden lehrt:

*Zu irgend welchen festen Punkten $l$ der Curve $S$, von der Anzahl $\varepsilon$, existiren auf der Curve $S$ gewisse $n-3$, durch die Punkte $l$ vollständig bestimmte Punkte $p$. Jede Curve $K$ des Büschels von rationalen Curven der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, welche in dem $(n-3)$ fachen Punkt von $S$ einen $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$ fachen Punkt besitzen und durch die Punkte $l$ und $p$ einfach hindurchgehen, schneidet die Curve $S$ noch in einem System $Q$ von $n-2$ Punkten, welches einem Punkt der vielfachen Geraden der Fläche entspricht. Die einfach unendliche Schaar dieser Systeme $Q$ stellt also die Abbildung der Punkte der vielfachen Geraden vor.*

Es fragt sich nun, was diesen Sätzen auf der Fläche $\varphi$ entspricht. Den Curven $K$ von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, mit einem $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$ fachen Punkt in dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt der Ebene, entsprechen auf der Fläche Raumcurven von der Ordnung

$$n \cdot \frac{n+\varepsilon-2}{2} - (n-2) \cdot \frac{n+\varepsilon-4}{2} = 2n+\varepsilon-4,$$

welche

$$(n-1) \frac{n+\varepsilon-2}{2} - (n-3) \cdot \frac{n+\varepsilon-4}{2} = 2n+\varepsilon-5$$

Punkte mit der vielfachen Geraden gemein haben. Es ist eine $(n+\varepsilon-2)$ fach unendliche Schaar von rationalen Curven $L$.

Für ein gerades $\varepsilon$, also für $n=2m$, werden diese Curven $L$ von Flächen der Ordnung $n-2+\frac{\varepsilon}{2}$ ausgeschnitten, welche die vielfache Gerade $a$ zur $\left(n-3+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ fachen Geraden haben und durch diejenige rationale Curve $C$ von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung hindurchgehen, welche der dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkte entsprechenden Curve $C$ adjungirt ist.

Für ein ungerades $\varepsilon$, für $n=2m+1$, legt man die Flächen der Ordnung $n-1+\frac{\varepsilon-1}{2}$, welche $a$ zur $\left(n-2+\frac{\varepsilon-1}{2}\right)$ fachen Geraden haben, und lässt sie noch durch irgend eine der Curven derjenigen einfach unendlichen Schaar von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Fläche hindurchgehen, welche der dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt entsprechenden Curve $C$ adjungirt ist.

Da hier bei der Abbildung eine der $2^{3n-2\varepsilon-5}$ Curven $C$ der Fläche bevorzugt ist, so gibt es $2^{3n-2\varepsilon-5}$ solcher $(n+\varepsilon-2)$ fach unendlichen Schaaren von Raumcurven $(2n+\varepsilon-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die $2n+\varepsilon-5$ Punkte mit $a$ gemein haben, auf der Fläche.

Ich wähle nun eine $(n+\varepsilon-2)$ fach unendliche Schaar, die einer Curve $C$ zugeordnet ist, heraus, und schreibe den Curven dieser Schaar weiter vor, durch $\varepsilon$ beliebig gewählte Punkte $l'$ der vielfachen Geraden einfach hindurchzugehen. Die durch diese festen Punkte (bei festen Tangentenebenen) gehenden Curven bilden noch eine $(n-2)$ fach unendliche Schaar. Aber unter dieser Schaar gibt es eine einfach unendliche Schaar von Curven $K'$, welche in der vielfachen Geraden einen $(n-2)$ fachen Punkt besitzen, und ihr entspricht in der Abbildung der Büschel der Curven $K$, welche durch ein Punktsystem $Q$ und ein System von Punkten $l$, die $l'$ entsprechen, hindurchgehen. Da diese Punkte $l$ nun auf $S$ ein Punktsystem $P$ bestimmen, so folgt, dass alle Raumcurven $K'$ der Fläche durch ein constantes, nur von den Punkten $l'$ abhängiges, System $\Pi$ von $n-3$ weitern festen Punkten von $a$ hindurchgehen, und zwar so, dass auch die Tangenten der Curven in jedem dieser Punkte immer in der nämlichen Tangentenebene der vielfachen Geraden für jede Curve der Schaar liegen. Auf diese Weise gibt es, wenn die Zahl $\varepsilon$ und die Punkte $l'$ mit ihren Tangentenebenen fest gewählt sind, noch $2^{3n-2\varepsilon-5}$ Punktsysteme $\Pi$.

Unter diesen Curven $K'$ gibt es solche mit zwei zusammenfallenden Zweigen in dem $(n-2)$ fachen Punkt. Dies tritt dann ein, wenn dieser Punkt ein Rückkehrpunkt der vielfachen Geraden $a$, d. h. ein solcher Punkt, in dem zwei der $n-2$ Tangentenebenen zusammenfallen, ist. Die Zahl dieser Rückkehrpunkte ist $4n-12$; denn jedem Werth $\lambda$ des Parameters des Ebenenbüschels durch $a$ entsprechen zwei Werthe $\mu$ des Parameters des Punktsystems von $a$, indem jeder der Kegelschnitte der Schaar $a$ in zwei Punkten schneidet, und jedem Werthe von $\mu$ entsprechen $n-2$ Werthe von $\lambda$, welche die $n-2$ Tangentenebenen *eines* Punktes von $a$ bestimmen. Man hat daher eine Gleichung vom Grade $n-2$ in $\lambda$, vom Grade 2 in $\mu$, und die Discriminante dieser Gleichung, in Bezug auf $\lambda$ genommen, ist vom Grade $4n-12$ für $\mu$. Ebensoviel Curven des Büschels $K$ der Bildebene gibt es, welche $S$ berühren.

Es ist noch zu bemerken, dass eine Raumcurve $K'$ dann in eine Gerade und eine Curve der Ordnung $2n+\varepsilon-5$ zerfällt, wenn die entsprechende ebene Curve $K$ durch einen der $3n-4$ einfachen Fundamentalpunkte hindurchgelegt wird. Ausserdem gehen die Curven $K'$ durch alle Knotenpunkte der Fläche einfach hindurch. Wir haben daher die folgenden Resultate:

*Auf der vielfachen Geraden a der Fläche $\varphi$ gibt es $4n - 12$ Rückkehrpunkte, in denen je zwei der Tangentenebenen zusammenfallen.*

*Nimmt man auf $a$ $\varepsilon$ Punkte $l$ mit fester Tangentenebene beliebig an ($\varepsilon = 0, 2, 4 \ldots$ für ein gerades $n$, $\varepsilon = 1, 3, 5 \ldots$ für ein ungerades $n$), so gibt es auf der Fläche $2^{3n-2\varepsilon-5}$ einfach unendliche Schaaren von rationalen Raumcurven der Ordnung $(2n + \varepsilon - 4)$, welche durch die Punkte $l$ innerhalb der festen Tangentenebenen einfach hindurchgehen, welche ferner in irgend einem der Punkte der vielfachen Geraden einen $(n-2)$ fachen Punkt besitzen, welche weiter durch je ein bestimmtes von $2^{3n-2\varepsilon-5}$ Systemen von $n-3$ Punkten $\Pi$ auch so hindurchgehen, dass die Zweige der Curven für jeden dieser Punkte in der nämlichen Tangentenebene liegen, und welche endlich durch die Knotenpunkte der Fläche hindurchgehen und noch $\frac{n+\varepsilon}{2} - 2$ Punkte mit je einer der $2^{3n-2\varepsilon-5}$ Curven $C$ von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung gemein haben.*

*Jede dieser Schaaren enthält $4n - 12$ solcher Curven, in deren $(n-2)$ fachem Punkt zwei Zweige der Curve zusammenfallen, und diese singulären Punkte fallen in je einen der Rückkehrpunkte von $a$. Ferner gibt es in einer solchen Schaar $3n - 4$ Curven, welche in eine Gerade und eine Raumcurve $(2n + \varepsilon - 5)^{\text{ter}}$ Ordnung, die noch einen $(n-3)$ fachen Punkt in $a$ besitzt, zerfallen.*

## § 7.

## Anwendungen. 1) Windschiefe Flächen $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-1)$ fachen Geraden.

Ich werde mich im Folgenden, in der Absicht, die praktische Anwendbarkeit der hier dargelegten Methode der Abbildung auf der Ebene nachzuweisen, mit drei specielleren Flächenarten beschäftigen, bei deren Abbildung die verschiedenen Theile der Methode zur Verwendung kommen; zuerst mit den windschiefen Flächen $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-1)$ fachen Geraden, um dabei durch successive Transformationen $2^{\text{ter}}$ Ordnung die möglichst niedrige Abbildung zu entwickeln; sodann mit der Fläche $5^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine Raumcurve $4^{\text{ter}}$ Ordnung erster Species zur Doppelcurve hat, um durch Projectionen die Fläche auf eine Fläche $\varphi$ zurückzubringen, und endlich mit einer Fläche $6^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Doppelgeraden und doppelter Raumcurve $3^{\text{ter}}$ Ordnung, um die Schaar rationaler Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung dieser Fläche auf die Kegelschnittschaar einer Fläche $\varphi$ zu reduciren.

Die windschiefen Flächen $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-1)$ fachen Geraden bildet man durch Projection von einem Punkte der vielfachen Geraden aus auf der Ebene ab. Dabei bildet sich die vielfache Gerade

$a$ einer solchen Fläche $\Phi$ als $(n-1)$facher Fundamentalpunkt $A$ ab, und ausserdem existiren $n-1$ einfache Fundamentalpunkte $B$ der Bildebene, welche den $n-1$ vom Projectionscentrum $P$ ausgehenden Geraden der Fläche $\Phi$ entsprechen. Der dreifach unendlichen Schaar von ebenen Schnitten der Fläche entspricht eine dreifach unendliche Schaar von Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkte in $A$ und $n-1$ einfachen festen Punkten $B$, genommen aus der $(n+1)$fachen Schaar solcher Curven der Bildebene. Dem Punkte $P$ der vielfachen Geraden $a$ entsprechen die $n-1$ Verbindungslinien der Punkte $B$ mit dem Punkte $A$.

Durch eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung, deren Grundpunkte in den Punkt $A$ und zwei der Punkte $B$ hineinzulegen sind, gehen die betrachteten Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung der Bildebene über in Curven von der Ordnung

$$2n-(n-1)-2=n-1\,,$$

mit einem festen $(n-2)$fachen Punkte $A'$ und $n-3$ festen einfachen Punkten $B'$. Dabei bildet sich die vielfache Gerade $a$ der Fläche $\Phi$ auf der neuen Bildebene als eine Gerade ab, mit welcher jede der Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $n-1$ Punkte gemein hat, die auf dieser Geraden eine gewisse Lage gegeneinander haben, welche von $n-2$ Bedingungen abhängt. Dem Punkte $P$ von $a$ entsprechen die $n-3$ Verbindungslinien des Punktes $A'$ mit den Punkten $B'$ und ausserdem zwei Punkte auf der $a$ abbildenden Geraden.

Bei weiterer Transformation zweiter Ordnung gehen die Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in solche von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung über, mit einem festen $(n-3)$fachen Punkte $A''$ und $n-5$ festen einfachen Punkten $B''$. Die vielfache Gerade $a$ bildet sich als Kegelschnitt ab, welcher durch den Punkt $A''$ einfach hindurchgeht. Dem Punkte $P$ entsprechen die $n-5$ Verbindungslinien von $A''$ mit den $B''$, und ausserdem vier Punkte auf dem $a$ abbildenden Kegelschnitte.

Indem man so fortfährt, bis sich die Ordnung der die ebenen Schnitte abbildenden Curven nicht weiter erniedrigen lässt, findet man die folgende Abbildung:

1. für ein gerades $n: n=2m$. Man erhält, nach $m-1$ Transformationen zweiter Ordnung, für die Abbildung ebener Schnitte von $\Phi$ Curven von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, mit einem festen $m$fachen Punkte $\alpha$ und einem festen einfachen Punkte $\beta$. Die vielfache Gerade $a$ von $\Phi$ bildet sich ab als Curve $S$ von der Ordnung $m-1$, welche in $\alpha$ einen $(m-2)$fachen Punkt besitzt. Dem Punkte $P$ der vielfachen Geraden entspricht die Verbindungslinie der beiden Punkte $\alpha$, $\beta$, und ausserdem $2m-2$ Punkte auf der Curve $S$.

2. für ein ungerades $n: n=2m+1$. Man erhält, nach $m$ suc-

cessiven Transformationen zweiter Ordnung, für die Abbildung ebener Schnitte von $\Phi$ Curven von der Ordnung $m+1$; mit einem festen $m$ fachen Punkte $\alpha$. Die vielfache Gerade $a$ bildet sich ab als Curve $S$ von der Ordnung $m$, mit einem $(m-1)$ fachen Punkte in $\alpha$. Dem Punkt $P$ entsprechen, wie jedem andern Punkte von $a$, $2m$ Punkte von $S$.

Ich bemerke, dass, wenn man von der Abbildung durch Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem festen $(n-1)$ fachen Punkte $A$ und $n-1$ festen einfachen Punkten $B$ ausgeht, die Reihenfolge der hier benutzten Transformationen zweiter Ordnung äquivalent ist, für $n=2m$ mit einer einzigen Transformation $m^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Curven $A$ zum $(m-1)$ fachen und $2m-2$ der Punkte $B$ zu einfachen Punkten haben; für $n=2m+1$ mit einer Transformation $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Curven $A$ zum $m$ fachen, die $B$ zu einfachen Punkten haben.

Die Curvenschaaren, welche auf diesen windschiefen Flächen $\Phi$ liegen, kann man nach dem Princip classificiren, welches Herr Clebsch bei den windschiefen Flächen dritter Ordnung, Math. Annalen, Bd. 1, pag. 634 angewendet hat. Man kann nämlich alle Curven der Fläche, die wirkliche vielfache Punkte enthalten, als specielle Fälle solcher betrachten, die nur scheinbare Doppelpunkte besitzen. Indem man nun diese nach ihrer Ordnung und der Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte von einander unterscheidet, findet man diese beiden Merkmale characterisirt durch die beiden Zahlen $r, \gamma$, wenn die entsprechende Curve der Bildebene von der Ordnung $r$ ist und $\gamma$ fach durch den Fundamentalpunkt $\alpha$ der Bildebene hindurchgeht.

Es sei zuerst der Fall, dass *$n$ ungerade*, $n=2m+1$, behandelt.

Die durch $(r, \gamma)$ characterisirten Curven auf der Fläche $\Phi$ seien als eine besondere *Familie* bezeichnet. Die Ordnung dieser Raumcurven sei $N$, ihr Geschlecht $p$, so dass:

$$\begin{cases} N=(m+1)\,r-m\gamma \\ p=\dfrac{r-1\,.\,r-2}{2}-\dfrac{\gamma\,.\,\gamma-1}{2}=\dfrac{r-1-\gamma\,.\,r-2+\gamma}{2}\,. \end{cases}$$

Wenn man diese Familien nach $p$ ordnet und die Bezeichnungen:

$$\begin{cases} x=r-2+\gamma \\ y=r-1-\gamma \end{cases}$$

einführt, so hat man:

$$\begin{cases} r=\dfrac{x+y+3}{2}, \qquad \gamma=\dfrac{x-y+1}{2}, \\ N=\dfrac{x+(2m+1)\,y+2m+3}{2}, \qquad p=\dfrac{xy}{2}\,. \end{cases}$$

Hier ist $\gamma \lesseqgtr r-1$, für $r>1$, daher $x$ und $y$ nicht negativ, das eine gerade, das andere ungerade. Die sämmtlichen hier existirenden Familien sind die folgenden:

1. $r=1$, $\gamma=1$. Die Schaar der Geraden durch den Punkt $\alpha$ sind die Bilder der *Erzeugenden* der Fläche $\Phi$.

2. $\gamma=r-1$, $p=0$. Dies giebt für die Fläche $\Phi$ eine *unendliche Schaar von Curvenfamilien* des Geschlechts 0. Von jeder Ordnung $N \geqq m+1$ existirt eine solche Familie, deren Glieder jede Erzeugende *einmal* treffen; es giebt eine $2(N-m)$ fach unendliche Schaar solcher Curven $N^{\text{ter}}$ Ordnung auf der Fläche. Hierher gehört auch noch, dem Punkte $\alpha$ entsprechend, *eine einzelne rationale Raumcurve* $m^{\text{ter}}$ *Ordnung* der Fläche, die jede Erzeugende in *einem* Punkte trifft.

3. Ausserdem giebt es, jedem $p$ entsprechend, nur eine *endliche Anzahl* von Curvenfamilien. Man erhält die entsprechenden Zahlen $x$, $y$, indem man die Zahl $2p$ auf alle möglichen Arten in einen geraden und einen ungeraden Factor zerlegt, unter Beachtung der Bedingung $y \gtreqless x+1$.

Insbesondere ist hier die Zerlegung $x=2p$, $y=1$ zu erwähnen, die auf $r=p+2$, $\gamma=p$ führt. Dieser Zerlegung entspricht auf der Fläche $\Phi$ eine $(3p+5)$ fach unendliche Schaar von Raumcurven der Ordnung $2m+p+2$, welche zwei Punkte mit jeder Erzeugenden gemein haben.

Für den Fall, dass *$n$ gerade*, $n=2m$, hat die Abbildung einen $m$ fachen Punkt $\alpha$ und einen einfachen Fundamentalpunkt $\beta$. Dieser Punkt $\beta$ stellt eine bestimmte Erzeugende der windschiefen Fläche vor, welche nur in der Abbildung, nicht auch auf der Fläche, besonders ausgezeichnet ist. Wenn man daher die allgemeinen Curven der Fläche untersucht, muss jede Curve der Bildebene von der Ordnung $r$, die in $\alpha$ einen $\gamma$ fachen Punkt besitzt, in $\beta$ einen $(r-\gamma)$ fachen Punkt besitzen; denn dann schneidet diese entsprechende Curve der Fläche *jede* der Erzeugenden in $(r-\gamma)$ Punkten und geht nicht durch den Punkt $P$ der vielfachen Geraden $a$ hindurch. Auch hier kann man daher die Curven der Fläche nach der Characteristik $(r, \gamma)$ in Familien eintheilen und hat nun:

$$\left\{\begin{aligned} N &= (m+1)r - m\gamma - (r-\gamma) = mr - (m-1)\gamma \\ p &= \frac{r-1 \cdot r-2}{2} - \frac{\gamma \cdot \gamma-1}{2} - \frac{r-\gamma \cdot r-\gamma-1}{2} = (\gamma-1)(r-\gamma-1). \end{aligned}\right.$$

Ordnet man wieder nach $p$ und setzt

$$x = r-\gamma-1,$$

so folgt:

$$r = x+\gamma+1, \qquad p = x(\gamma-1), \qquad N = m(x+1)+\gamma.$$

1. $p=0$, $\gamma=1$. Man erhält eine *unendliche Schaar von Curvenfamilien* des Geschlechts 0, von der Ordnung $N=m(r-1)+1$, wo $r$ alle Werthe durchläuft. Darunter sind, für $r=1$, die *Erzeu-*

*genden* der Fläche enthalten. Diese Curven schneiden die vielfache Gerade $a$ in $N - r + 1$ Punkten und bilden eine $(2r - 1)$ fache Schaar.

2. $p = 0$, $\gamma = r - 1$. Man erhält eine *zweite unendliche Schaar von Curvenfamilien* des Geschlechts 0, von jeder Ordnung $N \geqq m$. Ihre Glieder treffen die Erzeugenden der Fläche in je *einem* Punkte. Eine Familie $N$ bildet eine $2(N - m) + 1$ fach unendliche Schaar von Curven. Die Familie $N = m + 1$ ist schon sub 1. enthalten.

3. $p > 0$. Für jedes grössere $p$ giebt es nur *eine endliche Anzahl von Curvenfamilien*, die man erhält, indem man $p$ in zwei Factoren, $x$ und $\gamma - 1$, zerlegt. Insbesondere existirt hier, für $x = p$, $\gamma = 2$, eine $(3p + 5)$ fach unendliche Schaar von Raumcurven der Ordnung $m(p + 1) + 2$, welche jede Erzeugende in $p + 1$ Punkten schneiden, und, für $x = 1$, $\gamma = p + 1$, eine $(3p + 5)$ fach unendliche Schaar von Raumcurven der Ordnung $2m + p + 1$, welche jede Erzeugende in 2 Punkten schneiden.

In Betreff der Abbildung der vielfachen Geraden $a$ der Fläche $\Phi$ finden sich auch hier die am Anfange des § 6. gemachten Bemerkungen bestätigt. Für den Fall $n = 2m$ existirt hier auf der Fläche $\Phi$ ein Punkt $P$, einer der $2m - 1$ in einen Punkt der Geraden $a$ zusammenfallenden Punkte, dem auf der Bildebene eine Gerade entspricht, welche die beiden Fundamentalpunkte $\alpha$ und $\beta$ verbindet. Somit erhält die Function $\theta$ des § 6. einen linearen Factor, der abzusondern ist, und die Abbildung der vielfachen Geraden wird von der Ordnung

$$\frac{(2m - 4)(m + 1) + 4}{2m - 2} = m,$$

mit einem $\frac{(2m - 4)m + 2}{2m - 2} = (m - 1)$ fachen Punkte in $\alpha$ und einem $\frac{(2m - 4) + 2}{2m - 2} = 1$ fachen Punkte in $\beta$. Und da diese Abbildung zerfällt in die dem Punkt $P$ entsprechende Gerade und eine weitere Curve $S$, so wird diese letztere Curve, als die eigentliche Abbildung von $a$, wie schon erwähnt, von der Ordnung $m - 1$, mit einem $(m - 2)$ fachen Punkte in $\alpha$.

## § 8.

### Anwendungen. 2) Fläche fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve vierter Ordnung erster Species*).

Die Gleichung einer solchen Fläche $\Phi$ ist von der Form

*) Diese Fläche ist in jüngster Zeit auf einem neuen, von dem hier eingeschlagenen ganz verschiedenen Wege von Herrn Clebsch behandelt worden, Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Band 15.

$$(1) \qquad \Phi \equiv Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0 ,$$

wo $u$, $v$ Flächen zweiter Ordnung, $A$, $B$, $C$ Ebenen sind. Da der Flächenbüschel

$$(2) \qquad v - \lambda u = 0$$

in einer Schaar von Kegelschnitten schneidet, die aus der Verbindung von (2) mit

$$(3) \qquad A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

hervorgehen, so ist $\Phi$ auf einer Ebene abbildbar. Nach der früher entwickelten Methode projicirt man zu diesem Zwecke die Kegelschnitte zuerst auf die entsprechenden Ebenen eines Ebenenbüschels. Man führt dies dadurch aus, dass man die Coordinaten $x$ der Fläche proportional setzt mit

$$\varrho x_1 = y_1 , \qquad \varrho x_2 = y_2 , \qquad \varrho x_3 = y_3 , \qquad \varrho x_4 = k ,$$

sodann $k$ aus (2) und (3) für die diesen Gleichungen genügenden Werthsysteme von $x$ bestimmt und endlich $\lambda$ durch die Gleichung eines Ebenenbüschels

$$(4) \qquad y_4 - \lambda y_3 = 0$$

eliminirt. Da hier $v - \lambda u = 0$ selbst auf einer Ebene abbildbar ist, so kann man dieses Verfahren vereinfachen. Es seien $u$ und $v$ von der Form

$$u = x_4\, \varphi\,(x_1, x_2, x_3) - \psi\,(x_1, x_2, x_3) ,$$
$$v = x_4\, \varphi'\,(x_1, x_2, x_3) - \psi'(x_1, x_2, x_3) ,$$

wo $\varphi$, $\varphi'$ lineare Functionen, $\psi$, $\psi'$ Functionen zweiten Grades von $x_1$, $x_2$, $x_3$. Indem man von dem Punkte $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ aus projicirt, findet man:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 \left\{ \varphi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda \varphi\,(y_1, y_2, y_3)\right\} \\
\varrho x_2 &= y_2 \left\{ \varphi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda \varphi\,(y_1, y_2, y_3)\right\} \\
\varrho x_3 &= y_3 \left\{ \varphi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda \varphi\,(y_1, y_2, y_3)\right\} \\
\varrho x_4 &= \quad\ \psi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda \psi\,(y_1, y_2, y_3)
\end{aligned}$$

und durch Elimination von $\lambda$ mittelst $y_4 - \lambda y_3 = 0$:

$$(5) \qquad \left.\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 \left\{y_3\, \varphi'(y) - y_4\, \varphi\,(y)\right\} = y_1\, S \\
\varrho x_2 &= y_2 \left\{y_3\, \varphi'(y) - y_4\, \varphi\,(y)\right\} = y_2\, S \\
\varrho x_3 &= y_3 \left\{y_3\, \varphi'(y) - y_4\, \varphi\,(y)\right\} = y_3\, S \\
\varrho x_4 &= \quad\ y_3\, \psi'(y) - y_4\, \psi\,(y) \quad = \quad T
\end{aligned}\right\} .$$

Somit werden die $x$ Functionen dritter Ordnung der $y$, und die Formeln (5) vermitteln den eindeutigen Uebergang von der Fläche (1) zur Fläche

$$(6) \qquad \Phi' \equiv Ay_3{}^2 + 2B\, y_3\, y_4 + C\, y_4{}^2 = 0 ,$$

wo in $A$, $B$, $C$ die $x$ durch (5) zu eliminiren sind. Die Umkehrung geschieht eindeutig durch die Formeln dritter Ordnung

$$y_1 = x_1 u\,, \qquad y_2 = x_2 u\,, \qquad y_3 = x_3 u\,, \qquad y_4 = x_3 v.$$

Die Fläche $\Phi'$ (6) ist von der fünften Ordnung und enthält $(y_3 = y_4 = 0)$ als dreifache Gerade. Sie hat ferner in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ einen Doppelpunkt. Die Abbildung der Fläche $\Phi'$ und damit auch die der Fläche $\Phi$ kann daher nach § 5. ausgeführt werden.

Indess zeigen die Gleichungen (5) und (6), dass man die Abbildung von $\Phi$ noch einfacher durchführen kann, wenn man die Coordinatenebene $x_3 = 0$ mit der Ebene $C = 0$, welche irgend eine der die Kegelschnittschaar aus $\Phi$ ausschneidenden Ebenen vorstellt, zusammenfallen lässt. Denn dann hebt sich aus (6) noch der Factor $y_3$ heraus, und der Fläche $\Phi$ entspricht vermöge (5) Punkt für Punkt eindeutig die Fläche

$$\Phi'' \equiv A y_3 + 2 B y_4 + S y_4^2 = 0\,. \tag{6}$$

Diese Fläche $\Phi''$ ist nur von der vierten Ordnung und enthält $(y_3 = y_4 = 0)$ als Doppelgerade $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ als einfachen Punkt. Ihre Coordinaten drücken sich daher aus als ganze homogene Functionen vierter Ordnung dreier Parameter, mit einem doppelten und 8 einfachen Fundamentalpunkten.

Um nun die Abbildung der Fläche $\Phi$ zu erhalten, muss man auf $\Phi''$ die Curven aufsuchen, welche den ebenen Schnitten von $\Phi$ entsprechen. Zu diesem Zwecke bemerke ich:

1. Die Gerade $(y_3 = y_4 = 0)$ gehört $S$ und $T$ einfach, der Fläche $\Phi''$ doppelt an. Der Punkt $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ ist einfacher Punkt der Fläche $\Phi''$ und des Hyperboloids $S$, ein Doppelpunkt der Fläche $T$. Die Flächen $S$ und $T$ schneiden sich ferner noch in einer Raumcurve fünfter Ordnung, $K$, welche in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ einen Doppelpunkt besitzt und welche mit der Geraden $(y_3 = y_4 = 0)$ drei Punkte gemein hat. Die Fläche $\Phi''$ enthält die Curve $K$ einfach. Die Flächen dritter Ordnung der Schaar (5) verhalten sich wie $T$.

2. Diese Charakteristik der Functionen $T$ genügt, um immer von $\Phi''$ aus zu einer Fläche $\Phi$ zu führen. Denn zwei solcher Flächen dritter Ordnung $T$ schneiden sich noch in einer beweglichen Curve dritter Ordnung, die in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ einen Doppelpunkt besitzt und die Gerade $(y_3 = y_4 = 0)$ einmal, die Curve $K$ noch dreimal trifft. Die Curve dritter Ordnung schneidet daher die Fläche $\Phi''$ noch in

$$3\,.\,4 - 2\,.\,1 - 1\,.\,2 - 3\,.\,1 = 5$$

beweglichen Punkten ausserhalb $K$ und $(y_3 = y_4 = 0)$, daher wird $\Phi$ von der fünften Ordnung, da die Flächen $T$, als eine dreifach unendliche Schaar, zur Transformation zu verwenden sind.

3. Einem beliebigen ebenen Schnitt von $\Phi$ entspricht somit auf $\Phi''$ eine Curve $U$ von der Ordnung $3 \,.\, 4 - 5 - 2 = 5$, deren Abbildung zu suchen ist. Den ebenen Schnitten von $\Phi''$ mögen, in der Abbildung auf einer Ebene, Curven vierter Ordnung entsprechen, die im Punkte $a$ einen Doppelpunkt, in den Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_8$ einfache Punkte besitzen.

Die Abbildung von $K$ ergiebt sich aus der des Schnittes von $S$ mit $\Phi''$. $S = 0$ geht noch durch eine einfache Gerade von $\Phi''$; denn vermöge $S=0$ zerfällt $\Phi''=0$ in $T=0$ und in eine durch $(y_3=y_4=0)$ gehende Ebene. Diese Gerade möge sich auf der Ebene durch den Punkt $b_8$ abbilden. Ferner geht $S$ durch die Doppelgerade $(y_3=y_4=0)$, deren Bild die durch $a, b_1, b_2, \ldots, b_8$ gehende Curve dritter Ordnung ist. Der weitere Schnitt von $S$ mit $\Phi''$, die Curve $K$, bildet sich daher ab als Curve von der Ordnung $2 \,.\, 4 - 3 = 5$, die in $a$ einen $2 \,.\, 2 - 1 = 3$ fachen, in $b_8$ einen $2 \,.\, 1 - 1 + 1 = 2$ fachen und in $b_1, b_2, \ldots, b_7$ $2 \,.\, 1 - 1 =$ einfache Punkte hat.

Die ebenen Schnitte von $\Phi$, oder die Curven $U$ auf $\Phi''$, können jetzt auf der Ebene abgebildet werden. Die Abbildungen von Schnittcurven von Flächen dritter Ordnung mit $\Phi''$ sind Curven zwölfter Ordnung, mit 6 fachem Punkte in $a$, 3 fachen Punkten in den $b$.

Da aber die Flächen $T$ die Doppelgerade und die Curve $K$ einfach enthalten sollen, so geht hievon deren Bild ab:

eine Curve dritter Ordnung, mit 1 fachem Punkte in $a$, einfachen Punkten in den $b$, und

eine Curve fünfter Ordnung, mit 3 fachem Punkte in $a$, Doppelpunkte in $b_8$, einfachen Punkten in $b_1, b_2, \ldots b_7$.

Somit bilden sich die $U$ ab als Curven von der Ordnung $12-3-5=4$, mit einem $6 - 1 - 3 = 2$ fachen Punkte in $a$, nur mit $3 - 1 - 2 = 0$ fachem Punkte in $b_8$ und $3 - 1 - 1 = 1$ fachem Punkte in $b_1, b_2, \ldots b_7$. Durch den dem Punkte $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ auf der Ebene entsprechenden Punkt gehen diese Curven nicht hindurch, da die $U$ durch den Punkt $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ nicht mehr gehen.

*Die ebenen Schnitte von $\Phi$ bilden sich ab als Curven vierter Ordnung mit einem doppelten Fundamentalpunkte und 7 einfachen Fundamentalpunkten.*

Diese Abbildung ist auch die möglichst niedrige. Umgekehrt entspricht, bei beliebiger Lage der Fundamentalpunkte, jeder solchen Abbildung eine Fläche fünfter Ordnung der betrachteten Art.

Diese Abbildung lehrt, dass auf der Fläche $\Phi$ eine endliche Anzahl von Kegelschnitten existirt, welche jeden Kegelschnitt der auf $\Phi$ liegenden Schaar in je einem Punkte schneiden. Die Kenntniss dieser Kegelschnitte würde daher direct zu einer Abbildung geführt haben. Der unmittelbare Nachweis der Existenz derselben würde aber, wie die Betrachtung der 7 zerfallenden Kegelschnitte der Schaar zeigt, die Lösung des folgenden geometrischen Problems erfordert haben:

*Wenn eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species und 5 ihrer Sehnen gegeben sind, soll die Anzahl der Kegelschnitte bestimmt werden, welche die Curve in drei Punkten, die Sehnen je einmal treffen.*

Eine rein geometrische Lösung dieses Problems (Anzahl = 2) giebt Herr Lüroth, Math. Annalen, Bd. 3. Seite 124.

Indessen bemerke ich, dass es hier, wo dieses Problem im Zusammenhange mit einer Abbildungsaufgabe auftritt, nicht nöthig wird, dasselbe unabhängig von diesem Zusammenhange zu lösen. Vielmehr bietet dieser Zusammenhang grosse Vortheile, wenn man sich zugleich des folgenden algebraischen Satzes bedient:

*Wenn ein Problem auf eine Reihe von algebraischen Gleichungen führt, deren Anzahl gleich der der darin enthaltenen Unbekannten ist, und wenn für eine specielle Annahme der Constanten des Problems eine endliche Zahl eigentlicher Lösungen existirt und durch die Specialisirung nicht unendlich viele weitere Lösungen hereingebracht werden, so hat auch der allgemeine Fall eine endliche Anzahl eigentlicher Lösungen.*

Denn es fragt sich im allgemeinen Falle nur, ob die Gleichungen einander nicht widersprechen, oder ob nicht eine schon eine Folge der andern ist. Im letztern Falle treten unendlich viele Lösungen auf und das Gleiche tritt im erstern Falle bei einer Specialisirung ein, durch welche das Widersprechende aufgehoben wird.

Das oben aufgestellte geometrische Problem führt nun auf 8 Bedingungen für die achtfach unendliche Schaar von Kegelschnitten, die im Raume existiren, und jeder Kegelschnitt, welcher den Bedingungen genügt, liegt auf der Fläche fünfter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung als Doppelcurve und die 5 Sehnen einfach enthält. Hier bietet sich nun von selbst die Fläche fünfter Ordnung zur Untersuchung des möglicherweise speciellen Falles dar, dass ein den Bedingungen genügender Kegelschnitt wirklich existirt.

Man kann also so verfahren, dass man die Existenz eines solchen Kegelschnitts supponirt, wodurch nur eine Specialisirung der Fläche fünfter Ordnung und der Lage der Sehnen gegen die Curve herbeigeführt werden könnte. Unter dieser Voraussetzung lässt sich aber die Fläche fünfter Ordnung abbilden. In der Abbildung hat man nun das Mittel, mit Leichtigkeit zu entscheiden, ob eine unendliche oder endliche Anzahl von Kegelschnitten auf der Fläche existirt, welche die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen. Wenn sich, unter Berücksichtigung der möglichen uneigentlichen Lösungen, diese Anzahl als eine *endliche* findet (wie hier = 2), so wird durch diesen Umstand bewiesen, dass auch der allgemeine Fall eine endliche Anzahl von Lösungen hat (hier ebenfalls $= 2$, da keine uneigentlichen Lösungen nachzuweisen sind), dass also überhaupt die abgebildete Fläche schon die allgemeinste ihrer Art war.

Da es bei den meisten Abbildungsaufgaben nicht schwer ist, zu einem zugehörigen geometrischen Problem, analog dem oben für die Fläche $\Phi$ von der fünften Ordnung oder dem § 4. für die Flächen $n^{ter}$ Ordnung mit $(n-2)$ facher Geraden aufgestellten Problem, zu gelangen, so ist das eben gegebene Verfahren für die praktische Durchführung der Abbildung gegebener Flächen sehr anwendbar.

## § 9.

### Anwendungen. 3) Fläche $F$ von der sechsten Ordnung mit einer doppelten Raumcurve dritter Ordnung und einer diese nicht schneidenden Doppelgeraden.

Diese Fläche $F$ lässt sich in die Form setzen:

(1) $$F \equiv \sum_{i,k} A_{ik}\, y_i\, y_k = 0\,, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

wo

(2) $$\begin{cases} y_1 = L_2\, M_3 - L_3\, M_2 \\ y_2 = L_3\, M_1 - L_1\, M_3 \\ y_3 = L_1\, M_2 - L_2\, M_1 \end{cases}$$

und

(3) $$A_{ik} = \alpha_{ik}\, x_3^2 + 2\, \beta_{ik}\, x_3\, x_4 + \gamma_{ik}\, x_4^2\,,$$

wobei die $L_i$, $M_i$ lineare homogene Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, die $\alpha_{ik}$, $\beta_{ik}$ Constanten sind. Die Fläche $F$ lässt sich auf einer Ebene eindeutig abbilden; denn jede Ebene des Ebenenbüschels $x_4 - \lambda x_3 = 0$ schneidet die Fläche in *einer* beweglichen *rationalen* Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

In der Form (1), (2), (3) enthält die Fläche $F$ noch 18 Constanten homogen. Ich will zuerst nachweisen, dass die Doppelcurve dritter Ordnung und die Doppelgerade wirklich $\frac{7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3} - 18 = 66$ Constanten absorbiren.

Wegen der doppelten Raumcurve dritter Ordnung gilt immer die Form (1), (2), oder, was dasselbe ist, die Form:

$$F' \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 & M_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 & M_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 & M_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

wo $A_{ik} = A_{ki}$. Es fragt sich, wie viele Constanten diese Gleichung noch enthält, wenn man die $A_{ik}$ als allgemeinste Flächen zweiter

Ordnung annimmt. Man erkennt aber leicht, indem man die beiden letzten Vertikalreihen der Determinante, mit $A_1$, $B_1$ multiplicirt, zur ersten addirt, die beiden letzten Horizontalreihen, mit $C_1$, $D_1$ multiplicirt, zur ersten addirt, etc., dass man, ohne den Werth der Determinante zu ändern, auch setzen kann.

$$\begin{array}{ll}
A_{11}+(A_1+C_1)L_1+(B_1+D_1)M_1 & \text{statt } A_{11} \\
A_{22}+(A_2+C_2)L_2+(B_2+D_2)M_2 & \quad\text{,,} \quad A_{22} \\
A_{33}+(A_3+C_3)L_3+(B_3+D_3)M_3 & \quad\text{,,} \quad A_{33} \\
2A_{23}+(A_3+C_3)L_2+(B_3+D_3)M_2+(A_2+C_2)L_3+(B_2+D_2)M_3 & \quad\text{,,} \quad 2A_{23} \\
2A_{31}+(A_1+C_1)L_3+(B_1+D_1)M_3+(A_3+C_3)L_1+(B_3+D_3)M_1 & \quad\text{,,} \quad 2A_{31} \\
2A_{12}+(A_2+C_2)L_1+(B_2+D_2)M_1+(A_1+C_1)L_2+(B_1+D_1)M_2 & \quad\text{,,} \quad 2A_{12},
\end{array}$$

wo die $A_i$, $B_i$, $C_i$, $D_i$ lineare Ausdrücke vorstellen. Durch eine Bestimmung dieser Grössen lassen sich somit in den Hyperboloiden $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ je 7 Constanten zerstören. Indess enthalten dann die $(A_i+C_i)$, $(B_i+D_i)$ immer noch je eine willkürliche Grösse, und man kann nachher noch setzen:

$$\begin{array}{ll}
2A_{23}+k\ (L_2M_3-L_3M_2) & \text{statt } 2A_{23} \\
2A_{31}+k'(L_3M_1-L_1M_3) & \quad\text{,,} \quad 2A_{31} \\
2A_{12}-(k+k')(L_1M_2-L_2M_1) & \quad\text{,,} \quad 2A_{12}.
\end{array}$$

Somit kann man in diesen Flächen $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$ dann noch 2 weitere Constanten zerstören, und die Fläche $F'$ enthält noch $6.10-3.7-2=37$ Constanten homogen. Eine Doppelgerade absorbirt aber nach § 4. in einer Fläche sechster Ordnung 19 Constanten, überhaupt werden also $\frac{7.8.9}{1.2.3}-37+19=66$ Constanten absorbirt.

Die *Abbildung* der Fläche $F$ nach unserer Methode macht sich hier sehr einfach. Wir betrachten die Schaar rationaler Curven vierter Ordnung, welche von dem Ebenenbüschel ausgeschnitten wird, der seine Achse in der Doppelgeraden $a$ der Fläche hat. Durch die Doppelcurve dritter Ordnung, $A$, der Fläche werde die zweifach unendliche Schaar von Hyperboloiden gelegt, welche überhaupt durch $A$ hindurchgehen können. In jeder Ebene des Büschels wird dadurch eine zweifach unendliche Schaar von Kegelschnitten bestimmt, die zu Basispunkten die drei Punkte haben, in welchen die Ebene von der Curve $A$ geschnitten wird. Die Transformation, zu welcher diese Schaar führt, ist daher eine Cremona'sche *Transformation zweiter Ordnung* und *direct und eindeutig umkehrbar*. Durch sie wird die ganze Ebene des Büschels eindeutig auf der entsprechenden Ebene eines zweiten Ebenenbüschels abgebildet, wobei der rationalen Curve vierter Ordnung, welche ihre drei Doppelpunkte in den drei Basispunkten der Transformationscurven besitzt, ein *Kegelschnitt* der zweiten

Ebene entspricht. Die durch diese Kegelschnitte erzeugte Fläche wird von der *vierten Ordnung, mit einer Doppelgeraden und einem Doppelpunkt*, und ihre Abbildung ist bekannt.

Um dieses analytisch nachzuweisen, benutze ich aus der zweifach unendlichen Schaar von Hyperboloiden, welche durch $A$ gehen, die drei oben mit $y_i$ bezeichneten, aus welchen sich die übrigen linear zusammensetzen:

$$\begin{aligned} y_1 &= L_2 M_3 - L_3 M_2 \\ y_2 &= L_3 M_1 - L_1 M_3 \\ y_3 &= L_1 M_2 - L_2 M_1 \end{aligned}$$

und füge den Ebenenbüschel

$$y_4 - \lambda y_3 = 0$$

hinzu. Dieser Büschel, mit dem Büschel $x_4 - \lambda x_3 = 0$ verbunden, giebt die Relation

$$x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0, \tag{4}$$

und man erhält die Transformationsformeln:

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho y_1 &= x_3 (L_2 M_3 - L_3 M_2) \\ \varrho y_2 &= x_3 (L_3 M_1 - L_1 M_3) \\ \varrho y_3 &= x_3 (L_1 M_2 - L_2 M_1) \\ \varrho y_4 &= x_4 (L_1 M_2 - L_2 M_1), \end{aligned} \right. \tag{5}$$

welche den Uebergang von der Fläche (1) zu einer neuen Fläche $\varphi$ bewerkstelligen. Diese Fläche $\varphi$ ergiebt sich, indem man die $x$ aus (1) und (5) eliminirt, was hier direct durch Einsetzen von (4) und (5) in (1) geschehen kann. Die Fläche $\varphi$ wird dann

$$\varphi \equiv \sum_{i,k} A_{ik}\, y_i\, y_k = 0 \quad , \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

wo

$$A_{ik} = \alpha_{ik}\, y_3^2 + 2\beta_{ik}\, y_3\, y_4 + \gamma_{ik}\, y_4^2, \tag{7}$$

eine Fläche vierter Ordnung, die $(y_3 = y_4 = 0)$ als Doppelgerade, $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ als Doppelpunkt besitzt. Die Formeln (2) oder (5) lassen sich aber direct umkehren. Man hat zuerst

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_i L_i\, y_i &= \sum_k \lambda_k\, x_k = 0 \\ \sum_i M_i\, y_i &= \sum_k \mu_k\, x_k = 0 \end{aligned} \right. \tag{8}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

wobei

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_k &= \sum_i l_{ki}\, y_i \\ \mu_k &= \sum_i m_{ik}\, y_i\,. \end{aligned} \right.$$

Fügt man noch $y_4 x_3 - y_3 x_4 = 0$ hinzu, so ergiebt die Elimination der $x$:

$$(9) \qquad \sigma x_k = f_k = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_k},$$

$$(10) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & -y_4 & y_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix}.$$

Die Formeln (5) und (9) geben den Uebergang von $F$ zu $\varphi$ und von $\varphi$ zu $F$. Ich betrachte jetzt die Abbildung von $F$ auf $\varphi$ näher.

Die Transformationsflächen $f_k$ in (9) haben mit der Fläche $\varphi$ die Doppelgerade ($y_3 = y_4 = 0$) gemein, der auf $F$ der Schnitt des Hyperboloides $L_1 M_2 - L_2 M_1 = 0$, eine Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlecht 1, entspricht. Ferner hat jede der 4 Functionen $f_k$ in dem Doppelpunkt von $\varphi$ selbst einen Doppelpunkt. Diesem Doppelpunkt von $\varphi$ muss eine rationale Curve von $F$ entsprechen, und in der That zeigt (5), dass dies die rationale Curve vierter Ordnung ist, welche die Ebene $x_3 = 0$ aus $F$ ausschneidet. Aber bei diesem Uebergange von $F$ zu $\varphi$ giebt es noch weitere Fundamentalpunkte auf $\varphi$. Denn die drei Flächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\varphi = 0$ schneiden sich, nach Salmon's Raumgeometrie (Fiedler's Uebersetzung, Theil II., pag. 123) ausser der Doppelgeraden von $\varphi$ noch in 24 Punkten, von denen indess 8 in den Doppelpunkt ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$) von $\varphi$ fallen. Für die übrigen 16 Punkte, für die $\Sigma f_k \lambda_k = 0$ und $\Sigma f_k \mu_k = 0$ ist, hat man also

$$(\lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4)(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = 0$$
$$(\mu_3 y_3 + \mu_4 y_4)(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = 0:$$

Wenn $\lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0$ und $\mu_3 y_3 + \mu_4 y_4 = 0$, so verschwinden auch $f_1$ und $f_2$, ohne dass $f_3$ und $f_4$ verschwinden. Nun schneiden sich die beiden Hyperboloide

$$\lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0, \qquad \mu_3 y_3 + \mu_4 y_4 = 0$$

und die Fläche $\varphi$ ausser der Doppelgeraden von $\varphi$ in noch 8 Punkten, von denen 2 in den Punkt ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$) fallen. Für die übrigen $16 - (8 - 2) = 10$ Punkte muss $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$, also $f_3$ und $f_4$ verschwinden. *Diese* 10 *Punkte sind somit einfache Fundamentalpunkte der Fläche* $\varphi$.

Diesen 10 Fundamentalpunkten entsprechen, da die $f_k$ einfach verschwinden, *Gerade* der Fläche $F$, welche der Schaar von rationalen Curven vierter Ordnung angehören. Es ist auch geometrisch leicht, ihre Existenz nachzuweisen. Denn die Sehnen der Doppelcurve $A$ von $F$, welche zugleich die Doppelgerade $a$ schneiden, erzeugen eine windschiefe Fläche vierter Ordnung, welche $A$ zur Doppelcurve und $a$ zur einfachen Geraden hat. Der Schnitt dieser Fläche mit $F$ ist, ausser $A$ und $a$, eine Curve zehnter Ordnung, welche hier, da $F$ von den

Erzeugenden der windschiefen Fläche ausser $A$ und $a$ nicht mehr geschnitten wird, in 10 Gerade zerfällt.

Unter der Schaar $\Sigma$ von rationalen Raumcurven vierter Ordnung auf $F$ giebt es ausser den 10 Curven, die je in eine Gerade und eine rationale Curve dritter Ordnung zerfallen, noch weitere zerfallende Curven. Den 6 Ebenen des Ebenenbüschels entsprechend, welche $\varphi$ in Geradenpaaren schneiden, schneiden 6 *Ebenen* des durch $a$ gehenden Ebenenbüschels die Fläche $F$ in *Kegelschnittpaaren.* Den beiden *Geraden* auf $\varphi$, die durch den Doppelpunkt von $\varphi$ gehen, entsprechen auf $F$ *zwei Punkte* auf der den Doppelpunkt abbildenden Curve vierter Ordnung.

Noch ist zu dieser Abbildung von $F$ auf $\varphi$ zu bemerken, dass man, wenn die Fläche $\varphi$ mit Doppelgeraden $b$ und Doppelpunkt $P$ gegeben ist, die 10 einfachen Fundamentalpunkte dieser Fläche durchaus nicht beliebig auf $\varphi$ annehmen darf, wenn sie das Bild einer Fläche $F$ vorstellen soll. Denn den Abbildungsfunctionen dritter Ordnung (9) könnte man nur die Bedingungen auflegen, $b$ einfach zu enthalten, in $P$ einen Doppelpunkt zu besitzen und durch 8 Punkte von $\varphi$ hindurchzugehen, wenn sie nicht linear von einander abhängen sollen. Die 10 Punkte müssen auf der Schnittcurve von $\varphi$ mit einem Kegel $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0$ liegen und dabei noch ein *Schnittpunktsystem* bilden, das ich unten, bei der Abbildung auf der Ebene, näher untersuchen werde.

Wir können schon hier aus der Kenntniss der Geometrie der Fläche $\varphi$ eine Reihe von Eigenschaften der Fläche $F$ angeben.

Die Eigenschaft von $\varphi$, eine Anzahl von 32 Kegelschnitten zu enthalten, die durch den Knotenpunkt gehen und mit der Doppelgeraden je *einen* Punkt gemein haben, hat zur Abbildung dieser Fläche auf der Ebene geführt. Nach den Formeln (5) entsprechen aber den durch den Knotenpunkt gehenden ebenen Schnitten von $\varphi$ auf der Fläche $F$ die Schnitte der zweifach unendlichen Schaar von Hyperboloiden, die man durch die Doppelcurve $A$ von $F$ legen kann, d. h. Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlecht 1, die zwei wirkliche und 7 scheinbare Doppelpunkte besitzen. Diese Curven haben mit jedem Glied der Schaar $\Sigma$ von rationalen Curven vierter Ordnung *zwei* Punkte gemein. Speciell entsprechen aber den 16 zerfallenden ebenen Schnitten von $\varphi$ auf $F$ 16 Curven sechster Ordnung, die in je 2 Raumcurven dritter Ordnung zerfallen müssen, und diese Curven schneiden die Glieder der Schaar $\Sigma$ in je einem Punkte.

*Auf der Fläche F existiren 32 Raumcurven dritter Ordnung C, welche die Glieder der Schaar $\Sigma$ in je einem Punkte schneiden. Je zwei dieser Curven liegen mit der Doppelcurve dritter Ordnung, A, auf einem Hyperboloid und gehen daher durch dieselben beiden Punkte der*

*Doppelgeraden a von F hindurch. Diese Curven dritter Ordnung haben mit A je fünf Punkte gemein; die durch A gehenden Hyperboloide, die sie ausschneiden, berühren F ausser A noch zweipunktig. Die Curven C schneiden die 10 Geraden der Fläche nicht; dagegen trifft jede dieser Curven je einen Kegelschnitt aus jedem der oben erwähnten 6 Kegelschnittpaare einmal und die ergänzende Curve C immer die andern Kegelschnitte der Paare. Und zwar giebt es, bei beliebiger Wahl von 5 der Kegelschnitte, die aus 5 Paaren zu nehmen sind, immer eine Curve C, welche diese 5 trifft, während der Kegelschnitt des sechsten Paares dadurch bestimmt ist.*

Die Analogie dieser Eigenschaften mit denen der Fläche (6) ist auffällig, und auch bei den spätern Entwicklungen wird sie mehr hervortreten, als die durch die 10 weitern Fundamentalpunkte bewirkte Verschiedenheit.

## § 10.

## Abbildung der Fläche $F$ auf der Ebene.

Die Existenz der Curven dritter Ordnung $C$ auf der Fläche $F$ führt zur Abbildung dieser Fläche auf der Ebene. Denn irgend eine dieser Curven schneidet die Curven der Schaar $\Sigma$ in je *einem* Punkte. Man kennt so auf jeder Curve vierter Ordnung der Schaar die drei Doppelpunkte und einen einfachen Punkt eindeutig, und jedes Glied eines Kegelschnittbüschels, der durch diese 4 Punkte hindurchgelegt wird, schneidet die Curve vierter Ordnung in *einem* beweglichen Punkte.

Die hiedurch angezeigte Abbildung ist identisch mit der, auf welche der Durchgang durch die Fläche $\varphi$ und die bekannte Abbildung von $\varphi$ führt. Um den Kegelschnittbüschel zu erhalten, betrachtet man wieder die Hyperboloide durch die Doppelcurve $A$. Irgend eine der Curven dritter Ordnung, $C$, schneidet jedes dieser Hyperboloide noch in *einem* beweglichen Punkte, und jedem solchen Punkte entspricht *eine* Curve der Schaar $\Sigma$. Legt man daher durch einen Punkt der Curve dritter Ordnung, $C$, und durch die Doppelcurve $A$ die einfach unendliche Schaar von Hyperboloiden, von denen dann jedes Glied die durch den betrachteten Punkt von $C$ gehende Curve der Schaar $\Sigma$ in noch *einem* beweglichen Punkte schneidet, so werden die Coordinaten dieser Curve der Schaar rationale Functionen des Parameters des Hyperboloidenbüschels. Auf diese Weise entspricht jedem der durch $A$ gehenden Hyperboloide *ein* Punkt der Fläche $F$, da jedes Hyperboloid auf $C$ *einen* Punkt, dieser Punkt eine der Curven der Schaar $\Sigma$, und das Hyperboloid auf dieser Curve noch *einen* beweglichen

Punkt bestimmt; und umgekehrt entspricht einem Punkte der Fläche nur eines der Hyperboloide; denn zu jedem Punkt gehört in der Ebene der Curve aus $\Sigma$, auf welcher er liegt, *ein* Punkt von $C$, und durch diese beiden Punkte und durch $A$ kann nur *ein* Hyperboloid gelegt werden.

*Die Coordinaten der Fläche $F$ drücken sich daher auch als rationale Functionen der beiden Parameter der doppelt unendlichen Schaar von Hyperboloiden aus, welche man durch die Doppelcurve $A$ von $F$ legen kann.* Denkt man sich noch eine beliebige Ebene im Raume, so entspricht jedem dieser Hyperboloide ihr Schnitt mit dieser Ebene, der durch die drei festen Punkte geht, in welchen $A$ von der Ebene geschnitten wird, und umgekehrt kann man durch einen Kegelschnitt, welcher durch 3 Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung geht, nur ein Hyperboloid legen, das zugleich diese Curve enthält.

Die hier gefundene Abbildung der Fläche $F$ auf der Ebene geschieht daher so, dass jedem *Punkte von $F$* ein *Kegelschnitt der Ebene* entspricht, *der durch 3 feste Punkte geht.* Diese Kegelschnitte bilden, wie die Punkte der Fläche, eine zweifach unendliche Schaar.

Im Speciellen entspricht hiebei jeder der 10 schon betrachteten Geraden der Fläche ein einfacher Fundamentalkegelschnitt der Ebene, da die Hyperboloide eine solche Gerade ganz enthalten müssen, wenn sie noch durch einen Punkt ausser $A$ auf derselben gehen. Ferner entsprechen den 6 Kegelschnitten der Fläche $F$, welche die Curve $C$ trifft, doppelte Fundamentalkegelschnitte der Ebene; denn diese 6 Kegelschnitte schneiden $A$ und $C$ schon in 4 Punkten. Endlich entspricht noch der $C$ ergänzenden Curve dritter Ordnung auf $F$ ein dreifacher Fundamentalkegelschnitt der Ebene, denn alle Punkte dieser Curven führen auf dasselbe Hyperboloid, das durch $A$ und $C$ gehende. *So enthält die Abbildung einen dreifachen,* 6 *doppelte und* 10 *einfache Fundamentalkegelschnitte.* Ich bemerke noch, dass die Kegelschnitte, welche den Punkten einer Curve der Schaar $\Sigma$ entsprechen, einen *Punkt* umhüllen, nämlich den Punkt, in welchem die Ebene von der Sehne von $A$ getroffen wird, die durch den Schnitt von $C$ mit der Curve der Schaar geht.

Um diese Abbildung analytisch durchzuführen, sei zuerst die Fläche $\varphi$ nach § 5. durch die Formeln abgebildet

$$(11)\qquad \left.\begin{aligned} \varrho\, y_1 &= \xi_1\, Q_1 \\ \varrho\, y_2 &= \xi_1\, Q_2 \\ \varrho\, y_3 &= \xi_1\, Q_3 \\ \varrho\, y_4 &= \xi_2\, Q_3 \end{aligned}\right\}.$$

wo die $Q$ Curven dritter Ordnung sind, welche 7 Punkte, darunter den Punkt ($\xi_1 = \xi_2 = 0$), gemein haben. Ausserdem existiren noch zwei Fundamentalpunkte, die dem Schnitt von $\xi_1 = 0$, $Q_3 = 0$ angehören.

Setzt man diese Formeln in (9), (10) des § 9. ein, indem man zugleich die gemeinschaftlichen Factoren in $\sigma$ eingehen lässt, so drücken sich die Coordinaten der Fläche $F$ auf die folgende Weise rational und homogen durch drei Parameter $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ aus:

$$(12) \qquad \sigma x_k = f_k = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_k}$$

$$(13) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & \xi_1 \\ \Sigma l_{1i} Q_i & \Sigma l_{2i} Q_i & \Sigma l_{3i} Q_i & \Sigma l_{4i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i & \Sigma m_{2i} Q_i & \Sigma m_{3i} Q_i & \Sigma m_{4i} Q_i \end{vmatrix} .$$

$$(i = 1, 2, 3; \qquad k = 1, 2, 3, 4) .$$

Die Functionen $f_k$ sind *Functionen siebenter Ordnung* von $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, welche den Punkt ($\xi_1 = \xi_2 = 0$) zum *dreifachen* und die weitern 6 Punkte, welche die $Q_i$ gemeinschaftlich haben, zu *doppelten* Fundamentalpunkten haben. Ausserdem entsprechen den 10 Fundamentalpunkten von $\varphi$ auch hier 10 Punkte der Ebene, so dass die Abbildung von $F$ noch 10 *einfache* Fundamentalpunkte hat. Es können nun keine weitern Fundamentalpunkte in der Abbildung von $F$ vorhanden sein; denn den beiden Punkten, in welchen $\xi_1 = 0$ und $Q_3 = 0$ sich noch schneiden, entsprechen nur auf $\varphi$ Gerade, auf $F$ selbst aber wieder Punkte, und die Abbildung von $F$ auf $\varphi$ hat nach dem Obigen keine weitern Fundamentalpunkte.

Dasselbe kann man auch direct aus (12), (13) ersehen. Denn ausser den 7 Punkten, welche die $Q_i$ gemein haben, schneiden sich $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ noch in $49 - 4 . 6 - 9 . 1 = 16$ Punkten. Für diese 16 Punkte verschwinden auch

$$\begin{vmatrix} \Sigma l_{3i} Q_i & \Sigma l_{4i} Q_i \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Sigma l_{1i} Q_i & \Sigma l_{2i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i & \Sigma m_{2i} Q_i \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \Sigma m_{3i} Q_i & \Sigma m_{4i} Q_i \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Sigma l_{1i} Q_i & \Sigma l_{2i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i & \Sigma m_{2i} Q_i \end{vmatrix} .$$

Wenn die beiden ersten Factoren verschwinden, werden auch $f_1$ und $f_2$ zu Null, ohne dass $f_3$ und $f_4$ verschwinden. Die durch diese beiden ersten Factoren dargestellten Curven schneiden sich nun ausserhalb der 7 Punkte noch in $4 . 4 - 1 . 6 - 4 . 1 = 6$ Punkten. Für die übrigen $16 - 6 = 10$ Punkte verschwinden somit sämmtliche Functionen $f_k$ einfach.

*Die Fläche $F$ bildet sich daher auf der Ebene so ab, dass ihren ebenen Schnitten Curven siebenter Ordnung entsprechen, die einen dreifachen, 6 doppelte und 10 einfache Fundamentalpunkte besitzen.*

Dieses ist genau die oben geometrisch durchgeführte Abbildung, wenn man die dortige Erzeugungsweise der Ebene durch eine zweifach unendliche Schaar von Kegelschnitten auf eine Erzeugungsweise durch Punkte überträgt.

Diese Abbildung ist auch die möglichst niedrige, da eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung nur wieder zu einem ähnlichen ebenen System führt.

Das System der Fundamentalpunkte kann nicht willkürlich angenommen werden, da in diesem Falle nur eine einfach unendliche Schaar von Curven siebenter Ordnung existiren würde, welche den Bedingungen genügten. Denn es giebt eine 35 fach unendliche Schaar von Curven siebenter Ordnung, und die festen Punkte würden 34 lineare Bedingungen abgeben. Das Schnittsystem der Fundamentalpunkte wird im Zusammenhange mit der die Doppelgerade abbildenden Curve unten untersucht werden.

Ich will jetzt nachträglich das geometrische Problem angeben, dessen Lösung direct zu einer eindeutigen Abbildung von $F$ auf der Ebene geführt hätte:

*Wenn eine Gerade $a$, eine Raumcurve dritter Ordnung, $A$, welche $a$ nicht schneidet, und 5 Kegelschnitte, die mit $a$ je zwei Punkte und mit $A$ je drei Punkte gemein haben, gegeben sind, soll die Anzahl der Raumcurven dritter Ordnung bestimmt werden, welche $a$ in zwei Punkten, $A$ in 5 Punkten und die 5 Kegelschnitte in je einem Punkte treffen.*

Denn auf der Fläche $F$ sind die Bedingungen dieses Problems verwirklicht; $a$ tritt als Doppelgerade, $A$ als Doppelcurve, die 5 Kegelschnitte als einfache Curven von $F$ auf, und jede Curve dritter Ordnung, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt, schneidet $F$ in 19 Punkten und liegt somit ganz auf der Fläche. Ferner beträgt die Anzahl der Bedingungen 12, und ebenso giebt es im Raume eine 12 fach unendliche Schaar von Raumcurven dritter Ordnung. Um die Lösung des geometrischen Problems zu finden, kann man daher, nach dem am Schlusse des § 8. Gesagten, die Fläche $F$ betrachten und dieselbe unter Voraussetzung der Existenz einer solchen Curve dritter Ordnung abbilden. Diese Abbildung giebt übrigens schon die Lösung für den allgemeinen Fall, denn die Lagen der Curven $a$, $A$ und der 5 Kegelschnitte sind auf $F$ von einander unabhängig, da eine Doppelgerade $a$ auf $F$ 19 Bedingungen, eine Doppelcurve $A$ 47 Bedingungen, und jeder der Kegelschnitte dann noch 3 Bedingungen abgiebt, so dass $F$ $19 + 47 + 3 \cdot 5 = 81$ Bedingungen zu genügen hat, während eine Fläche sechster Ordnung 83 Constanten enthält.

Die Abbildung der Fläche $F$ auf der Ebene lehrt, dass es *eine* einzige Raumcurve dritter Ordnung giebt, welche die Bedingungen der obigen Aufgabe erfüllt.

Wollte man mittelst einer der 32 Raumcurven dritter Ordnung, die man durch die geometrische Lösung des erwähnten Problems als gefunden voraussetzen kann, die Abbildung von $F$ auf der Ebene direct analytisch durchführen, so würde man die Gleichung der Fläche zuerst in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \alpha_1 x_3 + \beta_1 x_4 \\ L_2 & M_2 & \alpha_2 x_3 + \beta_2 x_4 \\ L_3 & M_3 & \alpha_3 x_3 + \beta_3 x_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \alpha'_1 x_3 + \beta'_1 x_4 \\ L_2 & M_2 & \alpha'_2 x_3 + \beta'_2 x_4 \\ L_3 & M_3 & \alpha'_3 x_3 + \beta'_3 x_4 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & m_1 x_3^2 + 2 n_1 x_3 x_4 + p_1 x_4^2 \\ L_2 & M_2 & m_2 x_3^2 + 2 n_2 x_3 x_4 + p_2 x_4^2 \\ L_3 & M_3 & m_3 x_3^2 + 2 n_3 x_3 x_4 + p_3 x_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Vermöge der Gleichung des Hyperboloids, das durch $A$ und zwei der 32 Raumcurven, $C$ und $C'$, geht, zerfällt nämlich die Gleichung der Fläche $F$ in zwei Factoren, Gleichungen von Flächen dritter Ordnung, welche durch $A$ und je eine der Curven $C$, $C'$ gehen und ausserdem die Doppelgerade von $F$ als einfache Gerade enthalten, da die beiden Punkte, in denen diese das Hyperboloid schneidet, beiden Curven $C$, $C'$, angehören; und diese Flächen dritter Ordnung schneiden das Hyperboloid ausser diesen Curven nicht mehr.

Diese Gleichungsform löst sich nun durch Einführung der Verhältnisse der $\xi$ in die 3 Gleichungen auf:

$$0 = \xi_2 x_3 - \xi_1 x_4$$
$$0 = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 \xi_3 \\ L_2 & M_2 & \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 \xi_3 \\ L_3 & M_3 & \alpha_3 \xi_1 + \beta_3 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 \end{vmatrix}$$
$$0 = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \xi_3 (\alpha_1' \xi_1 + \beta_1' \xi_2) + m_1 \xi_1^2 + 2 n_1 \xi_1 \xi_2 + p_1 \xi_2^2 \\ L_2 & M_2 & \xi_3 (\alpha_2' \xi_1 + \beta_2' \xi_2) + m_2 \xi_1^2 + 2 n_2 \xi_1 \xi_2 + p_2 \xi_2^2 \\ L_3 & M_3 & \xi_3 (\alpha_3' \xi_1 + \beta_3' \xi_2) + m_3 \xi_1^2 + 2 n_3 \xi_1 \xi_2 + p_3 \xi_2^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Abbildung ist die am Anfang dieses § geometrisch gegebene. So stellt die zweite Gleichung die einfach unendliche Schaar von Hyperboloiden vor, welche durch $A$ und den Punkt gehen, in dem $C$ von der Ebene $\xi_2 x_3 - \xi_3 x_4 = 0$ geschnitten wird. Die rationalen Ausdrücke der $x$ in den $\xi$ findet man nun aus den folgenden drei in den $x$ linearen Gleichungen, die aus den vorstehenden unmittelbar folgen:

$$0 = \xi_2 x_3 - \xi_1 x_4$$
$$0 = \begin{vmatrix} L_1, & \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 \xi_3, & \xi_3 (\alpha_1' \xi_1 + \beta_1' \xi_2) + m_1 \xi_1^2 + 2 n_1 \xi_1 \xi_2 + p_1 \xi_2^2 \\ L_2, & \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 \xi_3, & \xi_3 (\alpha_2' \xi_1 + \beta_2' \xi_2) + m_2 \xi_1^2 + 2 n_2 \xi_1 \xi_2 + p_2 \xi_2^2 \\ L_3, & \alpha_3 \xi_1 + \beta_3 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3, & \xi_3 (\alpha_3' \xi_1 + \beta_3' \xi_2) + m_3 \xi_1^2 + 2 n_3 \xi_1 \xi_2 + p_3 \xi_2^2 \end{vmatrix}$$

und aus einer dritten Gleichung, welche aus der letztern durch Vertauschung von $L$ mit $M$ hervorgeht. Die Ausführung der Elimination ergiebt wieder die Formeln (12), (13).

## § 11.

## Die Abbildung der Doppelcurven der Fläche $F$ und das Fundamentalpunktsystem der Abbildung.

Ich gehe jetzt an die Untersuchung der die Doppelgerade abbildenden hyperelliptischen Curve und die damit zusammenhängende Betrachtung des Schnittpunktsystems, welches die Fundamentalpunkte bilden.

Aus (12), (13), § 10. folgt, dass *die Abbildung der Doppelgeraden* $a$ der Fläche $F$ die Curve

$$0 = S = \begin{vmatrix} \Sigma l_{1i} Q_i, & \Sigma l_{2i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i, & \Sigma m_{2i} Q_i \end{vmatrix}, \tag{14}$$

eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung, welche die 7 mehrfachen Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, ist.

Es fragt sich zuerst, ob diese Bedingungen, dass $S$ 7 Doppelpunkte besitzt und eine hyperelliptische Curve, hinreichen, damit sich die Gleichung dieser Curve in die Form (14) setzen lasse, also als quadratische Function der 3 Curven dritter Ordnung $Q_i$, die 7 Punkte gemein haben, mit 5 von einander linear unabhängigen Constanten. Nun ist die Bedingung der Hyperellipticität die, dass ein Curvenbüschel existirt, dessen Glieder die Curve $S$ in einem beweglichen Punktepaar schneiden. Diese Bedingung ist bei der Form (14) erfüllt; denn der Büschel

$$\Sigma l_{1i} Q_i + \lambda \, \Sigma m_{1i} Q_i = 0$$

schneidet $S$ fest in den Punkten, für welche

$$\Sigma l_{1i} Q_i = 0, \qquad \Sigma m_{1i} Q_i = 0,$$

also in 9 Punkten, von denen 7 Doppelpunkte von $S$ sind. Der bewegliche Schnitt besteht daher noch aus $3 \,.\, 6 - 2 \,.\, 7 - 2 = 2$ Punkten. Ueberhaupt schneidet jeder Curvenbüschel dritter Ordnung, welcher durch die 7 Doppelpunkte von $S$ und einen weitern festen Punkt von $S$ geht, die Curve (14) noch in einem neunten festen Punkte. Solche Punktepaare sind hier die Abbildung eines Punktes der Doppelgeraden $a$ von $F$.

Die Existenz solcher Büschel von Curven dritter Ordnung, die ausser den Doppelpunkten in noch zwei festen Punkten schneiden, ist indess für alle hyperelliptischen Curven sechster Ordnung mit 7 Doppelpunkten charakteristisch. Denn eine allgemeine Curve sechster

Ordnung mit 7 Doppelpunkten wird durch eine Transformation dritter Ordnung, bei welcher die Curven dritter Ordnung durch die 7 Punkte gehen, in eine allgemeine Curve vierter Ordnung, die Normalcurve für $p = 3$, übergeführt. Da aber keine hyperelliptische Curve vierter Ordnung mit $p = 3$ existirt, muss diese Transformation in unserm Falle illusorisch, d. h. hier *mehrdeutig* werden; und dies findet nur dann statt, wenn die Curven dritter Ordnung, sobald sie durch einen Punkt von $S$ gelegt werden, noch einen weitern festen Punkt mit $S$ gemein haben. Hieraus folgt aber, dass sich solche Curven $S$ immer in die Form (14) setzen lassen. Die Bedingung der Hyperellipticität absorbirt also hier *eine* Constante.

Um die Coordinaten der Curve $S$ als hyperelliptische Functionen eines Parameters $\lambda$ darzustellen, verbindet man daher mit der Gleichung (14) den Curvenbüschel

$$(15) \qquad \Sigma l_{1i} Q_i + \lambda \Sigma m_{1i} Q_i = 0,$$

oder auch, was dasselbe ist, mit diesem Büschel den mit ihm projectivischen Büschel

$$\Sigma l_{2i} Q_i + \lambda \Sigma m_{2i} Q_i = 0,$$

und erhält dann die Coordinaten $\xi$ der Curve $S$ in der Form*)

$$(16) \quad \left.\begin{aligned} \varrho\, \xi_1 &= w_{11}\gamma_1 + w_{12}\gamma_2 + w_{13}\gamma_3 + (\gamma_2 l_3 - \gamma_3 l_2)\sqrt{Q} \\ \varrho\, \xi_2 &= w_{21}\gamma_1 + w_{22}\gamma_2 + w_{23}\gamma_3 + (\gamma_3 l_1 - \gamma_1 l_3)\sqrt{Q} \\ \varrho\, \xi_3 &= w_{31}\gamma_1 + w_{32}\gamma_2 + w_{33}\gamma_3 + (\gamma_1 l_2 - \gamma_2 l_1)\sqrt{Q}, \end{aligned}\right\}$$

wo die $w_{ik} = w_{ki}$ und ganze Functionen sechsten Grads in $\lambda$ sind, deren Determinante $\Sigma \pm w_{11} w_{22} w_{33}$ verschwindet. Die $\gamma$ sind Constanten, von denen die $\xi$ nur formell abhängen.

Der Grad von $Q$ stimmt überein mit der Anzahl der Curven des Büschels (15), welche die Curve $S = 0$ berühren. Für die Berührungspunkte verschwindet die Functionaldeterminante $D$ von $S = 0$, $\Sigma l_{1i} Q_i = 0$, $\Sigma m_{1i} Q_i = 0$, die vom Grade 9 ist. Da aber in die Doppelpunkte von $S$ je 6 Schnittpunkte, in die beiden einfachen Grundpunkte des Büschels je 2 Schnittpunkte von $D$ mit $S$ fallen, so wird die Anzahl der hier wesentlichen Schnittpunkte von $D$ mit $S$ gleich

$$6 . 9 - 6 . 7 - 2 . 2 = 8.$$

Die Function $Q$ ist daher eine ganze Function achten Grades in $\lambda$, wie auch aus dem Geschlecht $p = 3$ der Curve $S$ folgt. Da die Ausdrücke (16) überhaupt vom Grade 6 in $\lambda$ sind, so werden die $l_i$ Functionen zweiten Grades in $\lambda$. Nun sind die $l_i$ proportional mit den Coordinaten der Verbindungslinie eines Punktepaars, in welchem

*) s. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen pag. 69.

$S$ von einer Curve (15) geschnitten wird. *Die Verbindungslinien der Punktepaare von $S$, welche den Punkten der Doppelgeraden von $F$ entsprechen, umhüllen also einen Kegelschnitt.* Die Doppelgerade von $F$ enthält 8 Punkte, welche *Rückkehrpunkte* der Fläche sind.

Unter den Curven dritter Ordnung, welche durch die 7 Doppelpunkte von $S$ gehen, giebt es acht einfach unendliche Schaaren, welche die Curve $S$ in einem Punkte berühren; $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ Curven, welche $S$ doppelt, je in der Abbildung eines Rückkehrpunktes, berühren. Dieses sind die Bilder der Schnitte von $F$ mit den Hyperboloiden, welche durch $A$ und durch einen, bez. zwei Rückkehrpunkte der Doppelgeraden gehen. Die Schnitte der einfach unendlichen Schaar von Hyperboloiden, welche die Doppelgerade berühren und durch $A$ gehen, bilden sich durch Curven dritter Ordnung ab, die $S$ ebenfalls in zwei Punkten, den zwei Punkten eines Paares, berühren.

Ich wende mich nun zur Betrachtung des *Schnittpunktsystems der Fundamentalpunkte*. Die ebenen Schnitte der Fläche bilden sich als Curven siebenter Ordnung ab, welche 10 Punkte der Ebene, $a_1, a_2, .. a_{10}$, zu einfachen, 6 Punkte $b_1, b_2, .. b_6$ zu doppelten und einen Punkt $c$ zu einem dreifachen Fundamentalpunkte besitzen; und diese Punkte sind so zu wählen, dass sie bei den Curven siebenter Ordnung nur 32 Bedingungen an Stelle von 34 abgeben, damit eine dreifache Schaar solcher Curven übrig bleibt. Nach der früher gegebenen Abbildung müssen die 10 Punkte $a_i$ auf einer hyperelliptischen Curve $S$ liegen, welche $c$ und die $b_i$ zu Doppelpunkten hat und durch diese und 5 der Punkte $a_i$ schon bestimmt ist. Es fragt sich nun, wie die übrigen 5 Punkte $a_i$, nachdem die andern beliebig in der Ebene angenommen sind, auf der Curve $S$ gewählt werden müssen. Ich werde nachweisen, dass man noch zwei dieser Punkte beliebig auf $S$ wählen darf und dass die übrigen 3 Punkte dadurch völlig bestimmt sind.

Wenn eine Curve siebenter Ordnung, $R = 0$, den Bedingungen genügt, in $c$ einen dreifachen, in den 6 Punkten $b_i$ Doppelpunkte zu besitzen, enthält sie noch 11 Constanten linear, von denen man noch, wenn man nur das Schnittpunktsystem von $R = 0$ mit $S = 0$ betrachtet, zwei zerstören kann durch Zufügung eines Gliedes $(\alpha\, \xi_1 + \beta\, \xi_2)\, S$. Das Schnittpunktsystem von $R$ mit $S$ ist daher bestimmt, wenn man $R$ noch durch 9 beliebig auf $S$ gewählte Punkte gehen lässt; diese bestimmen die 3 letzten Schnittpunkte. Lässt man $R$ durch 10 *beliebig* auf $S$ gewählte Punkte gehen, so zerfällt $R = 0$ in $S = 0$ und einen Geradenbüschel $\alpha\, \xi_1 + \beta\, \xi_2 = 0$.

Ich nehme nun an, dass man $R = 0$ durch 7 beliebige Punkte $q$ von $S$ und durch eines der Punktepaare auf $S$, welche den Punkten der Doppelgeraden von $F$ entsprechen, gehen lässt. $R = 0$ schneidet

$S = 0$ dann noch in drei Punkten $q'$. Solche 10 Punkte $q$, $q'$ bilden, wie ich zeigen will, ein System, durch welches man eine dreifach unendliche Schaar von Curven $R$ legen kann, welche im Allgemeinen *nicht* zerfallen, ein System, das also als ein Fundamentalpunktsystem der $a_i$ betrachtet werden kann.

Zu diesem Nachweis werde ich mich des Abel'schen Theorems bedienen. Es existiren in Bezug auf $S = 0$ drei endliche Integrale, die ich ähnlich, wie pag. 190, unterscheide. Der untere Index der Integrale sei $k (k = 1, 2, 3)$. Die Summe der 2 Integrale $u_k$, genommen über die beiden, im Punkte $c$ vereinigt liegenden Punkte, sei mit $\Gamma_k$, die Summe genommen in Bezug auf die zwei in einem Punkte $b_i$ vereinigt liegenden Punkte mit $B_k^{(i)}$, die Integrale $u_k$ in Bezug auf ein Punktepaar $l_x$, $l_x'$ von $S$ mit $l_k$, $l_k'$ etc., bezeichnet. Man habe allgemein für die Integrale $u_k$, ausgedehnt über den Schnitt von $S = 0$ mit einer Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{6r} = r\gamma_k$$
$$(k = 1, 2, 3),$$

wo die $\gamma_k$ Constanten sind. Die Eigenschaft der Hyperellipticität der Curve $S$ lässt sich nun leicht in Gleichungen aussprechen. Man betrachte nämlich die Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung, welche man durch $c$ und die $b_i$ legen kann, und nehme den Büschel heraus, welcher durch das Punktepaar $l$, $l'$ hindurchgeht. Eine Curve dieses Büschels schneidet noch in einem weitern Punktepaar $\lambda$, $\lambda'$, und für diese Curve hat man daher die drei Gleichungen

$$\Gamma_k + \sum_{i=1}^{i=6} B_k^{(i)} + l_k + l_k' + \lambda_k + \lambda_k' = 3\gamma_k.$$

Daraus folgt aber:

$$\lambda_k + \lambda_k' = \text{Const.},$$

also

$$\lambda_k + \lambda_k' = l_k + l_k' \quad , \quad (k = 1, 2, 3) \tag{17}$$

Durch diese Gleichung, welche aussagt, dass die Summe der Integrale $u_k$, ausgedehnt über die verschiedenen Punktepaare von $S = 0$, einander gleich ist, wird die berührte Eigenschaft von $S = 0$ vollständig definirt.

Ich lege jetzt durch das Punktepaar $l$, $l'$ eine Curve $R = 0$, welche in $c$ einen dreifachen, in den $b_i$ Doppelpunkte hat. Diese Curve schneidet $S = 0$ noch in 10 Punkten, deren entsprechende Integrale mit $r_k^{(i)}$ bezeichnet seien. Für eine solche Curve hat man

$$3\Gamma_k + 2\sum_{i=1}^{i=6} B_k^{(i)} + l_k + l_k' + \sum_{i=1}^{i=10} r_k^{(i)} = 7\gamma_k \tag{18}$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen sind aber auch eindeutig umkehrbar und geben, wenn 7 der 10 Punkte $r_i$ beliebig auf $S$ angenommen sind, drei weitere Punkte $r_i$, welche mit den 3 Punkten $r_i$, durch welche $R = 0$ noch geht, identisch sein müssen, da in dem Schnittpunktsystem von $R = 0$ mit $S = 0$ ebenfalls drei Punkte durch die übrigen Annahmen bestimmt sind. Die Gleichungen (18) führen also auch immer auf eine Curve $R = 0$ von den bezeichneten Eigenschaften*).

Die drei Punkte, welche durch die Umkehrung der Gleichungen (18) gefunden werden, sind aber von dem Punktepaare $l$, $l'$ unabhängig, durch welches die Curve $R = 0$ gelegt worden ist, da in (18) nur die Summe $l_k + l_k'$ eingeht, die nach (17) constant ist für irgend ein Punktepaar von $S$. Dies giebt den Satz:

*Es sei $S = 0$ die Gleichung einer hyperelliptischen Curve 6ter Ordnung mit 7 Doppelpunkten. Legt man eine Curve 7ter Ordnung, $R = 0$, welche in einem der 7 Doppelpunkte von $S$ einen dreifachen, in den übrigen Doppelpunkte besitzt, durch ein Paar der auf $S$ existirenden einfach unendlichen Schaar von Punktepaaren und durch 7 beliebige feste Punkte von $S$, so schneidet diese Curve die Curve $S = 0$ in drei weitern festen Punkten, welche unabhängig sind von der Wahl des Punktepaars. Irgend welche 7 Punkte der Curve $S = 0$ bestimmen daher drei weitere eindeutig.*

Ich lege nun weiter eine Curve $R'$ durch 7 beliebige Punkte $r_1, r_2, \ldots r_7$ und durch einen Punkt $r_8$ von den drei durch diese 7 Punkte auf $S$ bestimmten Punkten $r_8$, $r_9$, $r_{10}$. Lässt man $R'$ weiter durch einen beliebigen Punkt $l$ von $S$ gehen, so schneidet $R'$ die Curve $S = 0$ noch in weitern 3 Punkten $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$, für welche die Gleichungen (18) ergeben:

$$s_k^{(1)} + s_k^{(2)} + s_k^{(3)} = l_k' + r_k^{(9)} + r_k^{(10)}$$
$$(k = 1, 2, 3),$$

d. h. $R'$ schneidet noch in denjenigen beiden Punkten, welche mit $r_1, r_2, \ldots r_8$ eines der im vorhergehenden Satze angegebenen Systeme von 10 Punkten ausmachen, und ausserdem in demjenigen Punkte $l'$, welcher den Punkt $l$ zu einem Paar ergänzt. Hieraus folgt:

*Legt man eine Curve $R$ durch irgend 8 Punkte der oben definirten Systeme von 10 Punkten auf $S$, so geht diese Curve auch durch die übrigen beiden Punkte des Systems und schneidet $S$ überdies in einem der auf $S$ liegenden Punktepaare. Die Bedingung, dass $R$ durch die 10 Punkte eines solchen Systems hindurchgeht, giebt also nur 8 lineare*

---

*) Dieser Schluss ist für jede andere Curve $f = 0$, welche einfache oder *vielfache Punkte* in den Doppelpunkten einer Curve $S = 0$ hat, richtig, vorausgesetzt im Allgemeinen, dass der Grad von $f = 0$ nicht kleiner als der von $S = 0$ ist.

*Relationen für die Constanten von $R$, und es giebt eine dreifach unendliche Schaar von Curven 7ter Ordnung, welche in $c$ einen dreifachen, in den $b_i$ Doppelpunkte und in den 10 Punkten eines der betrachteten Systeme von $S$ einfache Punkte haben. Von einem solchen Systeme sind noch 7 Punkte beliebig, die 3 andern Punkte dadurch bestimmt.*

Die hier gefundene dreifach unendliche Schaar von Curven $R$ hat die nämlichen Eigenschaften, wie die die ebenen Schnitte von $F$ abbildende Schaar (12), (13). Wir haben daher das Schnittsystem der Fundamentalpunkte vollständig definirt, indem wir 7 der Punkte $a_i$ willkürlich auf $S$ annehmen, durch diese und irgend eines der Punktepaare von $S$ eine Curve $R$ legen, und die drei weitern Schnittpunkte von $R$ mit $S$ als die drei letzten Fundamentalpunkte $a_i$ nehmen.

Um die geometrische Bedeutung dieses Schnittpunktsystems für die Fläche $F$ zu finden, suchen wir die Curven auf $F$ auf, welchen die allgemeinen Curven $R$, die in $c$ einen dreifachen, in den $b_i$ Doppelpunkte haben, entsprechen. Wir betrachten die Schnittcurven von $F$ und von Flächen 5ter Ordnung, welche die Doppelgerade $a$ von $F$ zur einfachen, und die Doppelcurve 3ter Ordnung $A$ zur Doppelcurve haben. Es giebt eine 11 fach unendliche Schaar solcher Flächen $\psi$, und die Abbildung ihrer beweglichen Schnitte mit $F$, Raumcurven 16ter Ordnung, ist eben die 11 fach unendliche Schaar der Curven $R$, deren Gleichung:

$$R = \xi_1 \Sigma \lambda_{ik} Q_i Q_k + \xi_2 \Sigma \mu_{ik} Q_i Q_k = 0\,.$$

Die Sehnen von $A$, welche zugleich $a$ schneiden, treffen diese Flächen $\psi$ nur in Punkten, welche $a$ und $A$ angehören; sobald daher eine Fläche $\psi$ gezwungen wird, noch durch einen weitern Punkt einer solchen Sehne zu gehen, enthält sie die Sehne ganz. Nun werden die 10 Sehnen, welche auf $F$ liegen, ausgeschnitten von der windschiefen Fläche 4ter Ordnung, $\Omega = 0$, welche $a$ zur einfachen, $A$ zur Doppelcurve hat und durch die durch $a$ gehenden Sehnen von $A$ erzeugt wird. Eine Fläche $\psi$ enthält daher $4 \,.\, 5 - 4 \,.\, 3 - 1 = 7$ dieser Sehnen. Man kann nun $\psi$ zwingen, 7 beliebige der Sehnen $(aA)$ zu enthalten, da dieses nur 7 lineare Bedingungen für die Coefficienten von $\psi$ mit sich bringt; und sobald $\psi$ gezwungen wird, noch durch eine 8te der Sehnen zu gehen, zerfällt $\psi$ in die Fläche $\Omega = 0$ und in eine beliebige Ebene, und enthält dann also alle 10 Geraden der Fläche $F$. Der Schnitt von $\Omega = 0$ mit $F$ wird nur durch die 10 Punkte $a_i$ von $S$ abgebildet. Unsere Betrachtung zeigt also, dass die Curven $R$, sobald sie durch 8 der Punkte $a_i$ gelegt werden, auch durch die beiden übrigen gehen und dann die ebenen Schnitte von $F$ abbilden.

Um auch bei der oben gegebenen Abbildung der Fläche $F$ auf der Fläche $\varphi$ das Fundamentalpunktsystem zu erhalten, bemerke ich noch, dass den Schnitten von $F$ mit den Flächen $\psi$ die Schnitte von $\varphi$ mit Flächen 3[ter] Ordnung entsprechen, welche durch die Doppelgerade von $\varphi$ einfach gehen und den Doppelpunkt von $\varphi$ selbst zum Doppelpunkt haben.

Zur Vervollständigung der Abbildung der Fläche $F$ auf der Ebene ist noch die Untersuchung der *Abbildung der Doppelcurve* 3[ter] *Ordnung A* der Fläche $F$ erforderlich. Man erhält die Gleichung dieser Abbildung, indem man die Schnitte der durch $A$ gehenden Hyperboloide betrachtet, deren Gleichung:

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & k_1 \\ L_2 & M_2 & k_2 \\ L_3 & M_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

wo die $k$ Constanten bedeuten. Da aber nach (2) und (11)

$$\begin{aligned} L_2 M_3 - L_3 M_2 &= T \,.\, Q_1 \\ L_3 M_1 - L_1 M_3 &= T \,.\, Q_2 \\ L_1 M_2 - L_2 M_1 &= T \,.\, Q_3 , \end{aligned}$$

so wird die Gleichung der Abbildung der Schnittcurve der Hyperboloide von der Form:

$$(20) \qquad T \,.\, \{k_1 Q_1 + k_2 Q_2 + k_3 Q_3\} = 0 .$$

Der Factor $T = 0$ repräsentirt die Abbildung der Doppelcurve $A$, und wird erhalten, indem man die beiden Formen (19), (20) wirklich in einander überführt. Indem man dabei genau so verfährt, wie Herr Clebsch in einem analogen Fall, Math. Annalen, Bd. I., pag. 297, findet man als Gleichung der Abbildung der Doppelcurve:

$$(21) \qquad T = \Sigma \pm p_1 q_2 Q_3 = 0 ,$$

wobei $p_1, p_2, p_3$ die Unterdeterminanten, genommen resp. nach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der Determinante:

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & \Sigma m_{1i} Q_i & 0 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & \Sigma m_{2i} Q_i & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \Sigma m_{3i} Q_i & -\xi_2 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \Sigma m_{4i} Q_i & \xi_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und wobei $q_1, q_2, q_3$ aus resp. $p_1, p_2, p_3$ hervorgehen, indem man die $l_{ik}$ und $m_{ik}$ mit einander vertauscht.

Die Abbildung der Doppelcurve $A$, $T = 0$, ist eine Curve 11[ter] Ordnung, welche $c$ zum fünffachen, die 6 Punkte $b_i$ zu dreifachen und die 10 Punkte $a_i$ zu Doppelpunkten hat. Es ist eine hyperelliptische Curve vom Geschlecht $p' = 7$. Die Punktepaare dieser Curve haben eine merkwürdige Lage; denn die Geraden, welche durch den Punkt

$c$ gehen, schneiden die Curve $T$ ausser $c$ noch in je drei Punktepaaren, da diese Geraden die Bilder der Curven der Schaar $\Sigma$ auf $F$ sind. Die Verbindungslinien je zweier Punkte eines Paares umhüllen also einen *Punkt*, den Punkt $c$. Die Punkte der Curve $T$ ergeben sich aber hier nicht als hyperelliptische Functionen des Parameters $\lambda$ des Geradenbüschels, der seinen Scheitel im Punkte $c$ hat, obwohl eine Gerade dieses Büschels die Verbindungslinie eines Punktepaars von $T$ ist, denn eine solche Gerade geht durch drei Punktepaare. Vielmehr betrachtet man, um die Coordinaten von $T$ als hyperelliptische Functionen eines Parameters auszudrücken, auf der Fläche $F$ den Ebenenbüschel, welcher durch eine der 10 Geraden der Fläche gelegt werden kann. Eine Ebene eines solchen Büschels schneidet die Curve $A$ noch in *einem* beweglichen Punkte, die Abbildung eines solchen Schnittes also $T$ in *einem* beweglichen Punktepaar. Man legt somit in der Bildebene den Büschel von Curven $7^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $c$ zum dreifachen, die $b_i$ zu Doppelpunkten, 9 der Punkte $a_i$, $a_1, a_2, \ldots a_9$ zu einfachen, den $10^{\text{ten}}$ Punkt $a_{10}$ zum Doppelpunkt haben. Die Curven des Büschels schneiden $T$ dann noch in zwei weitern festen Punkten, welche den Doppelpunkt $a_{10}$ von $T$ zu Paaren ergänzen, und je in einem beweglichen Punktepaar, so dass die Coordinaten von $T$ hyperelliptische Functionen des Parameters $\mu$ dieses Curvenbüschels werden, der mit $\lambda$ durch eine Gleichung zusammenhängt, die in $\mu$ cubisch, in $\lambda$ linear ist. Die Coordinaten werden Ausdrücke von der Form (16), wobei aber $Q$ eine ganze Function $16^{\text{ten}}$ Grads, die $l_i$ lineare ganze Functionen, die $w_{ik}$ Functionen $9^{\text{ten}}$ Grads von $\mu$ werden. Die Curve $A$ hat daher 16 Punkte, welche *Rückkehrpunkte* der Fläche sind.

In dem Geradenbüschel, der seinen Scheitel in $c$ hat, giebt es 16 Gerade, welche die Curve $T$ einfach berühren; es sind die Bilder der Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung der Schaar $\Sigma$, welche durch die 16 Rückkehrpunkte von $A$ gehen. Ausserdem giebt es in dem Büschel noch 4 Gerade, welche $T$ doppelt berühren; es sind die Bilder der Schnitte der Fläche mit denjenigen 4 Ebenen, welche durch die Doppelgerade gehen und die Curve $A$ berühren. Die Berührungspunkte einer dieser 4 Geraden sind zwei Punkte eines Paars von $T$.

## § 12.

## Die rationalen Curven der fünf ersten Ordnungen, welche die Fläche $F$ enthält.

Nachdem ich in den vorhergehenden §§ die Grundzüge der Abbildung der Fläche $F$ auf der Ebene festgelegt habe, werfe ich noch einen Blick auf die Geometrie auf der Fläche $F$, um mit Hülfe der

Abbildung die Curven der niedrigsten Ordnungen, insbesondere die rationalen Curven der Fläche, zu untersuchen.

Wenn die Bildcurve von der Ordnung $m$ ist und in $c$ einen $\gamma$ fachen, im Punkte $b_i$ einen $\beta_i$ fachen und im Punkte $a_i$ einen $\alpha_i$ fachen Punkt hat, so werden Ordnung $M$ und Geschlecht $p$ der entsprechenden Raumcurve der Fläche:

$$(22) \begin{cases} M = 7m - \Sigma\alpha_i - 2\Sigma\beta_i - 3\gamma \\ p = \frac{m-1 \,.\, m-2}{2} - \Sigma\frac{\alpha_i \,.\, \alpha_i - 1}{2} - \Sigma\frac{\beta_i \,.\, \beta_i - 1}{2} - \frac{\gamma \,.\, \gamma - 1}{2}, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die Bildcurve keine weitern vielfachen Punkte hat, welche übrigens auf $p$ eine gleiche Erniedrigung hervorbringen würden, wie auf das Geschlecht der Bildcurve.

I. *Gerade* der Fläche. Für diese ist $M = 1$, $p = 0$. Man überzeugt sich leicht, dass den Gleichungen (22) nicht zu genügen ist. Ausser den 10 Geraden, welche durch die Punkte $a_i$ dargestellt werden, und welche sich mit ebenen rationalen Curven 3ter Ordnung zu Curven der Schaar $\Sigma$ ergänzen, giebt es keine Gerade auf der Fläche.

II. *Kegelschnitte.* $M = 2$, $p = 0$. Die 6 doppelten Fundamentalpunkte $b_i$ geben Kegelschnitte. Diese ergänzen sich mit 6 weitern Kegelschnitten zu Curven der Schaar $\Sigma$. Die letztern bilden sich als Gerade ab, welche $c$ mit den Punkten $b_i$ verbinden. Ausser diesen 12 Kegelschnitten giebt es keine auf der Fläche.

III. *Raumcurven* 3ter *Ordnung.* $M = 3$, $p = 0$. Wir haben bereits die Existenz von 32 solcher Curven $C$ nachgewiesen. Eine derselben ist bei der Abbildung bevorzugt worden, indem ihr der Punkt $c$ entspricht. Die Bilder der andern Curven $C$ sind:

1. die Geraden, welche durch je zwei der $b_i$ gehen, an der Zahl $\frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} = 15$;

2. die Kegelschnitte der Ebene, welche durch $c$ und 4 der $b_i$ gehen, ebenfalls 15;

3. die Curve 3ter Ordnung, welche $c$ zum Doppelpunkt hat und durch die 6 Punkte $b_i$ geht. Diese stellt eine Curve $C'$ dar, welche die durch $c$ dargestellte $C$ ergänzt, indem sie mit ihr und $A$ auf einem Hyperboloid liegt, wie direct aus der Betrachtung der Abbildungen der Schnitte der durch $A$ gehenden Hyperboloide folgt. Ebenso ergänzen sich die durch 1. und 2. abgebildeten Curven gegenseitig zu zweien. Zwei sich ergänzende Curven $C$ schneiden sich in 2 Punkten ausserhalb der Doppelgeraden $a$ der Fläche $F$. Die zwei andern auf $a$ liegenden Schnittpunkte solcher zwei Curven lösen sich in der Abbildung in getrennte Punkte auf.

Jede dieser 32 Curven $C$ ist 6 Kegelschnitten der Fläche zugeordnet, welche sie trifft. Jede der Curven wird nicht oder einmal getroffen von den 15 Curven, deren zugeordnete Kegelschnittsysteme mit dem ihrigen 4 oder 2 Kegelschnitte gemein haben.

Ausser diesen 32 Curven giebt es, da den Gleichungen (22) nicht mehr zu genügen ist, keine Raumcurven 3^ter Ordnung auf der Fläche.

IV. *Die ebenen Schnitte* der Fläche bilden sich durch Curven 7^ter Ordnung, $R$, ab, welche $c$ zum dreifachen, die $b_i$ zu doppelten, die $a_i$ zu einfachen Punkten haben. Das Geschlecht ist $p = 6$.

Die ebenen Schnitte der Fläche zerfallen in folgenden Fällen:

1. wenn den Curven $R$ der Ebene die Bedingung auferlegt wird, in einem der Punkte $b_i$ einen dreifachen Punkt zu besitzen. Die entsprechende Schnittebene geht dann durch den durch $b_i$ dargestellten Kegelschnitt der Fläche, und schneidet folglich noch in der Doppelgeraden und in einem weitern Kegelschnitt. Sie ist hier eine 5 fach berührende, denn sie berührt die Fläche in den 4 Punkten, in denen die beiden Kegelschnitte die Doppelgerade, und in dem Punkte, in dem dieselben sich selbst ausserhalb $A$ schneiden. $R$ selbst zerfällt in die Curve $S$ und die Gerade $(cb_i)$.

2. Ferner können die Curven $R$ in einem der Punkte $a_i$ einen Doppelpunkt besitzen. Die entsprechenden ebenen Schnittcurven der Fläche werden dann von den durch die 10 Geraden derselben gehenden Ebenenbüscheln ausgeschnitten und sind *Curven* 5^ter *Ordnung*, welche drei feste einfache Punkte haben, in den Punkten, in welchen die Achse des betreffenden Büschels die Doppelgerade $a$ und die Doppelcurve $A$ schneidet, und welche ausserdem in dem dritten Punkt des Schnitts der Ebene mit $A$ einen Doppelpunkt haben, also $p = 5$. Diese Curven 5^ter Ordnung schneiden also die Achse des betreffenden Ebenenbüschels in zwei beweglichen Punkten. Diese Punktepaare auf einer Geraden der Fläche bilden eine *Involution*. Denn jedem Parameter des Ebenenbüschels, dessen Achse diese Gerade ist, entspricht eine Curve 5^ter Ordnung und folglich *ein* Punktepaar auf der Achse, und jedem Punkt dieser Achse entspricht nur *eine* Curve 5^ter Ordnung, die durch ihn geht, also *ein* Parameter des Ebenenbüschels, da die Achse eine einfache Gerade der Fläche ist. Zwei der Curven 5^ter Ordnung einer Schaar berühren also die Achse des Büschels. Die Ebenen, welche eine solche Schaar ausschneiden, sind zweifach berührende, und unter ihnen giebt es eine endliche Anzahl von dreifach berührenden, die man erhält, wenn man die entsprechenden Curven der Bildebene aufsucht, welche einen weitern Doppelpunkt haben.

Durch ein Verfahren, das dem von Herrn Cayley (Crelle's Journal Bd. 63) bei Curven mit gemeinsamen Doppelpunkten angewandten analog ist, findet man nun, dass die Zahl der Curven $m$^ter Ordnung in einem Büschel mit $\lambda_i$ gemeinsamen $i$ fachen Punkten ($i = 1, 2, \ldots$), welche noch einen weitern Doppelpunkt besitzen, gleich

$$3(m-1)^2 - \Sigma(i-1)(3i+1)\lambda_i$$

ist. Man erhält also hier für die Curven $R$, die in einem der Punkte $a_i$ einen Doppelpunkt besitzen, $3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 10 - 7 \cdot 7 = 39$ Curven mit einem weitern Doppelpunkt. Indessen existirt unter diesen Curven eine zerfallende, nämlich in die Curve $S$ und die Gerade $(ca_i)$. $S$ und $(ca_i)$ schneiden sich ausserhalb $c$ und $a_i$ noch in 3 Punkten, die also Doppelpunkte dieser Curve $R$ sind. Zählt man somit diese zerfallende Curve dreifach, so bleiben noch 36 Curven mit weiterm Doppelpunkte; oder es giebt in jedem der 10 Büschel 36 dreifach berührende Ebenen, abgesehen von den durch die Doppelgerade der Fläche gehenden Ebenen.

3. Von weitern zerfallenden ebenen Schnittcurven existiren nur noch die Schnitte durch die Doppelgerade $a$ der Fläche, da man wegen des Schnittpunktsystems der Fundamentalpunkte die Curven $R$ nur in die Curven $S$ und in einen durch $c$ gehenden Geradenbüschel zerfallen lassen kann. Dieser Geradenbüschel bildet die *Schaar* $\Sigma$ *von rationalen Curven* 4ter *Ordnung* ab. 6 dieser Curven zerfallen weiter in *Kegelschnittpaare*, 10 in eine Gerade und eine *ebene Curve* 3ter *Ordnung mit einem Doppelpunkt.*

V. Die Schnitte der Fläche mit *Hyperboloiden*, welche durch die *Doppelcurve* $A$ gehen, haben wir schon in § 11. (20) abgebildet. Diese Hyperboloide schneiden $F$ ausser $A$ noch in *Raumcurven* 6ter *Ordnung vom Geschlecht* 1. Die Bilder dieser Curven sind die Curven 3ter Ordnung, welche durch den Punkt $c$ und die 6 Punkte $b_i$ hindurchgehen. Im Besondern kommt man hier

1. auf die 32 Raumcurven 3ter Ordnung $C$ der Fläche;

2. auf 12 *Raumcurven* 4ter *Ordnung zweiter Species.* 6 dieser Curven bilden sich ab durch Curven 3ter Ordnung, welche in einem der $b_i$ einen Doppelpunkt haben und durch $c$ und die übrigen 5 $b_i$ einfach gehen; die 6 übrigen Curven durch Kegelschnitte, welche durch 5 der $b_i$ gehen. Die Hyperboloide gehen hier noch durch einen der 12 Kegelschnitte der Fläche. Eine solche Raumcurve 4ter Ordnung ist also je einem Kegelschnitt zugeordnet, indem sie mit diesem 4 Punkte, von denen 2 auf der Doppelgeraden liegen, gemein hat, und indem sie den ergänzenden Kegelschnitt gar nicht, die übrigen 10 Kegelschnitte in je einem Punkte trifft. Eine solche Curve wird also von einer der Curven $C$ in keinem oder einem Punkte getroffen, je nachdem diese den der Raumcurve 4ter Ordnung zugeordneten Kegelschnitt trifft oder nicht trifft, also von 16 getroffen, von 16 nicht getroffen. Diese Curven schneiden jede der Curven der Schaar $\Sigma$ in *zwei* Punkten.

3. Auf 10 einfach unendliche *Schaaren von Raumcurven* 5ter *Ordnung* vom Geschlecht 1, indem man die Hyperboloide noch durch je eine der Geraden der Fläche gehen lässt. In der Abbildung gehen

die entsprechenden Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung durch je einen der 10 Punkte $a_i$. In jedem dieser Büschel giebt es $3 \cdot 2^2 = 12$ Curven mit Doppelpunkt, also auf der Fläche $10 \cdot 12$ *rationale Raumcurven* $5^{\text{ter}}$ *Ordnung*, welche von Hyperboloiden ausgeschnitten werden, die durch $A$ und je eine der Geraden von $F$ gehen und die Fläche berühren.

4. Auf 45 *Raumcurven* $4^{\text{ter}}$ *Ordnung erster Species*, indem man die Hyperboloide durch je zwei der 10 Geraden gehen lässt.

VI. Die Schnitte der Fläche $F$ mit *Flächen* $3^{\text{ter}}$ *Ordnung*, welche durch die Doppelcurve $A$ und die Doppelgerade $a$ gehen, werden auf der Bildebene durch die fünffach unendliche Schaar von Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung abgebildet, welche $c$ zum Doppelpunkte, die $b_i$ zu einfachen Punkten haben. Diese Schnitte sind Raumcurven $10^{\text{ter}}$ Ordnung vom Geschlecht 2, und unter dieser Schaar giebt es eine reiche Mannigfaltigkeit von zerfallenden Curven und Curvenschaaren, von denen wir die folgenden erwähnen:

1. *Schaaren rationaler Raumcurven* $5^{\text{ter}}$ *Ordnung* werden dargestellt

a) durch die Geraden, welche durch einen Punkt $b_i$ gehen;

b) durch die Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $c$ zum Doppelpunkt haben und durch 5 der Punkte $b_i$ gehen;

c) durch Kegelschnitte, welche durch den Punkt $c$ und drei der Punkte $b_i$ gehen. Je ein Glied einer Schaar a) ergänzt sich mit einem Glied einer Schaar b), und je zwei Glieder aus zwei Schaaren c) ergänzen sich zu einem vollständigen Schnitt einer der Flächen $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit $F$. a) giebt 6, b) giebt 6, und c) giebt 20 einfach unendliche Schaaren von solchen Raumcurven.

Es giebt also auf der Fläche 32 einfach unendliche Schaaren von rationalen Raumcurven $5^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Curven der Schaar $\Sigma$ in je *einem* Punkte treffen. Irgend eine dieser Schaaren wird von einer zweiten so ergänzt, dass je zwei Curven, aus den beiden Schaaren genommen, mit $A$ und $a$ den vollständigen Schnitt einer Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit $F$ bilden. Jede dieser Schaaren ist 6 Kegelschnitten zugeordnet, welche sie trifft, während sie die ergänzenden Kegelschnitte nicht schneidet; indess ist eine solche Combination $K'$ von 6 Kegelschnitten verschieden von den Combinationen $K$, welche den 32 Raumcurven $3^{\text{ter}}$ Ordnung zugeordnet sind. Zwei Combinationen $K$ und $K'$ haben immer eine ungerade Anzahl von Kegelschnitten gemein, und je nachdem sie 5, 3 oder 1 Kegelschnitt gemein haben, trifft die $K$ zugehörige Raumcurve $3^{\text{ter}}$ Ordnung eine Curve der $K'$ zugehörigen Schaar von rationalen Raumcurven $5^{\text{ter}}$ Ordnung in 0, 1, oder 2 Punkten. Die Curven *einer* Schaar treffen also 6 Raumcurven $C$ nicht, 20 einmal und 6 zweimal. Curven aus einer Schaar schneiden einander nicht, Curven aus verschiedenen Schaaren schneiden sich in 3, 2, 1 Punkten, je nachdem die zugeordneten Combinationen $K'$ 0, 2, 4 Kegelschnitte gemein haben.

In jeder dieser 32 Schaaren giebt es 6 Curven, welche in eine der Curven $C$ und in einen entsprechenden Kegelschnitt zerfallen.

2. *Raumcurven* 4ter *Ordnung zweiter Species.* Die unter 1. behandelten Schaaren zerfallen weiter, wenn man die Bildcurve noch durch einen Punkt $a_i$ gehen lässt. Die Raumcurve zerfällt dann in die entsprechende Gerade der Fläche und in eine Raumcurve 4ter Ordnung zweiter Species, die gänzlich verschieden ist von einer der sub V, 2. erwähnten Curven.

Es liegen somit auf der Fläche 10 . 32 *einzelne* Raumcurven 4ter Ordnung zweiter Species, die je *einen* Punkt mit jeder Curve der Schaar $\Sigma$ gemein haben. Je 32, aus 32 verschiedenen Schaaren von rationalen Curven 5ter Ordnung (VI, 1.), sind einer Geraden der Fläche zugeordnet, indem sie diese in einem Punkte, die übrigen Geraden gar nicht, treffen. Im Uebrigen, besonders in Bezug auf die Kegelschnitte und Curven $C$ der Fläche, verhalten sich diese Curven 4ter Ordnung genau wie die sub VI, 1. erwähnten Schaaren, da je 10 der Curven *einer* Schaar angehören.

3. *Rationale Raumcurven* 5ter *Ordnung.* Wir betrachten noch eine endliche Anzahl solcher Curven, welche die Fläche enthält, die aber keiner der 32 Schaaren angehören und verschieden sind von den sub V, 3. erwähnten Curven.

a) Man kann einmal die Flächen 3ter Ordnung, welche $a$ und $A$ enthalten, noch durch eine der Raumcurven 3ter Ordnung, $C$, gehen lassen und hat dann noch eine zweifach unendliche Schaar solcher Flächen. Unter Anderm findet man hier den Satz:

Die *Geraden der Bildebene* sind die Bilder derjenigen rationalen Raumcurven 7ter Ordnung, welche von Flächen 3ter Ordnung ausgeschnitten werden, die durch $A$ und $a$ und durch diejenige Raumcurve 3ter Ordnung $C'$ der Fläche gehen, welche die durch den Punkt $c$ abgebildete Raumcurve $C$ zum Schnitt eines durch $A$ gehenden Hyperboloids ergänzt.

Die 32 zweifach unendlichen *Schaaren von rationalen Raumcurven* 7ter *Ordnung,* welche so aus der Fläche ausgeschnitten werden, sind daher den 32 Raumcurven 3ter Ordnung, $C$, einzeln zugeordnet, indem eine Curve einer Schaar mit der ihr entsprechenden $C$ drei Punkte, mit der ergänzenden Curve $C$ gar keinen Punkt, mit den übrigen Curven $C$ zwei oder einen Punkt gemein hat, je nachdem diese die zugehörige $C$ nicht oder einmal treffen.

Diese Raumcurven 7ter Ordnung haben je *einen* Punkt mit jeder Curve von $\Sigma$ gemein.

Unter diesen 32 zweifach unendlichen Schaaren giebt es nun, ausser den sub VI, 1. betrachteten Schaaren von rationalen Raumcurven 5ter Ordnung, noch weitere zerfallende Schaaren, nämlich 32 . 10 einfach unendliche Schaaren, welche in eine Gerade der Fläche und in eine *rationale Raumcurve* 6ter *Ordnung* zerfallen. Lässt man aber die Flächen 3ter Ordnung noch durch eine weitere Gerade von $F$ gehen, so gelangt man zu $32 \cdot \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 1440$ *einzelnen rationalen Raumcurven* 5ter *Ordnung*. Sie sind je einer Raumcurve $C$ und je 2 Geraden von $F$ einzeln zugeordnet und schneiden die Curven der Schaar $\Sigma$ in je *einem* Punkte. Ihre Bilder sind

$\alpha$) die Geraden durch je zwei Punkte $a_i$, an Zahl 45;

$\beta$) die Kegelschnitte durch $c$, zwei der Punkte $b_i$ und zwei der Punkte $a_i$, 675;

$\gamma$) die Curven 3ter Ordnung mit Doppelpunkt in $c$, durch 4 der $b_i$ und 2 der $a_i$ gehend, ebenfalls 675;

$\delta$) die Curven 4ter Ordnung mit dreifachem Punkt in $c$, durch die $b_i$ und 2 der $a_i$ gehend, 45.

b) Ferner kann man die Flächen 3ter Ordnung, welche $A$ und $a$ enthalten, auch durch zwei Kegelschnitte aus zwei verschiedenen Paaren hindurchgehen lassen. Dabei entstehen, je zwei Kegelschnitten entsprechend, *Schaaren von rationalen Curven* 6ter *Ordnung*, im Ganzen 60 einfach unendliche Schaaren, deren Bilder sind:

$\alpha$) 15 Schaaren von Kegelschnitten durch 4 der Punkte $b_i$;

$\beta$) 30 Schaaren von Curven 3ter Ordnung, die durch $c$ und 4 der $b_i$ gehen und einen weitern Punkt $b_i$ zum Doppelpunkt haben;

$\gamma$) 15 Schaaren von Curven 4ter Ordnung, mit einem Doppelpunkt in $c$, Doppelpunkten in zweien der $b_i$ und durch die 4 übrigen $b_i$ gehend.

Die Curven einer Schaar schneiden die beiden zugeordneten Kegelschnitte in je zwei Punkten, die ergänzenden Kegelschnitte gar nicht, die übrigen 10 Kegelschnitte in je einem Punkte, wie überhaupt die Curven der Schaar $\Sigma$ in je zwei Punkten. Sie schneiden ferner diejenigen 8 Raumcurven 3ter Ordnung, $C$, welche die zugeordneten beiden Kegelschnitte ebenfalls zugeordnet haben, gar nicht; die 16 Curven $C$, welche einen derselben zugeordnet haben, in einem Punkte, die 8 übrigen Curven $C$ in zwei Punkten.

In jeder dieser Schaaren giebt es insbesondere 10 Curven, welche zerfallen, indem man die Bildcurve noch durch einen der Punkte $a_i$ gehen lässt.

Somit existiren noch auf der Fläche 10 . 60 *einzelne rationale Raumcurven* 5ter *Ordnung*, welche je *zwei* Punkte mit jedem Glied der Schaar $\Sigma$ gemein haben. Sie zerfallen in 60 Gruppen von je 10 Curven.

Die Gruppen sind je 2 Kegelschnitten aus 2 Paaren zugeordnet, die Curven einer Gruppe den 10 Geraden der Fläche, und zwar so, dass eine Curve mit einer Geraden einen Punkt, mit den übrigen Geraden keinen Punkt gemein hat.

Mit dieser Aufzählung sind alle rationalen Curven $1^{ter}$ bis $5^{ter}$ Ordnung auf der Fläche vollständig erschöpft.

---

Die hier behandelte Fläche $F$ ist unter den auf einer Ebene abbildbaren Flächen $6^{ter}$ Ordnung ohne Knotenpunkt diejenige, deren ebene Schnittcurven das höchstmögliche Geschlecht haben, eine Eigenschaft, welche die Flächen $n^{ter}$ Ordnung mit einer $(n-4)$ fachen Geraden und einer diese nicht schneidenden Doppelcurve $3^{ter}$ Ordnung, deren Abbildung sich genau nach der bei $F$ angewandten Methode durchführen lässt, nicht mehr theilen. Vielmehr besitzen die auf einer Ebene abbildbaren Flächen $n^{ter}$ Ordnung, auf welche diese Eigenschaft übergeht, zwei vielfache Gerade.

Ich will zum Schlusse noch bemerken, dass sich zur Durchführung der Abbildungen ausser den hier angegebenen *allgemeinen* Methoden noch andere anwenden lassen, welche bisher, und auch in der vorliegenden Abhandlung, nur in beschränktem Grade zur Benutzung gekommen sind, durch die sich aber z. B. die Entwicklungen des § 4. kürzer hätten darstellen lassen. Auf diesen Punkt gedenke ich in einer weiteren Mittheilung zurückzukommen.

Mannheim, im März 1870.

---