Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Simon, Max** (1844–1918)

Titel: **Cusanus als Mathematiker**

Quelle: Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912
Leipzig [u.a.], 1912.
Seite 298 – 337.
Signatur UB Heidelberg: L 309-15

Der Verfasser stellt die mathematisch-philosophischen Spekulationen Nikolaus von Kues vor: geometrische Grenzwertüberlegungen, Zahlenbegriff u.a., sowie astronomische Vorstellungen. Er behandelt ausführlich Cusanus' Versuch, das Verhältnis zweier Kreisbogen durch das zweier Strecken auszudrücken. Zum Schluss fasst er sein Urteil über Nikolaus von Kues in den Worten zusammen:
„Hätte Cusan die theoretische Durchbildung Regiomontans besessen und wäre seine Zeit nicht durch den Dienst der Kirche und den beklagenswerten Kampf um sein Bistum Brixen so völlig in Anspruch genommen worden, Cusan stände als reiner Mathematiker eben so groß da, wie als Theosoph und mathematischer Philosoph."

Cusanus als Mathematiker.

Von

Max Simon in Straßburg i. E.

Seit Cusan von M. Carrière („Philosophische Weltanschauung der Reformationszeit", 1847) und von H. Ritter („Geschichte der Philosophie", 1850) an die Spitze der Renaissance gestellt worden ist, hat der große Cardinal diesen Ehrenplatz mehr und mehr behauptet. R. Eucken sagt („Geschichte der philosophischen Prinzipien", S. 82): „An den Eingang der neuen Philosophie stellen wir Nikolaus von Cues", und ihm sind u. a. H. Cohen und E. Cassirer gefolgt. Selbst Windelband sagt von ihm: Er zeigt den Januskopf, der ebenso in die Vergangenheit wie in die Zukunft blickt, den echten Typus des Übergangszeitalters vom antiken zum modernen Menschen. Und Ritter (l. c. Bd. 9, S. 141): „Gleich im ersten Jahre des 15. Jahrhunderts ist ein Kind geboren worden, dessen Leben und Wirken, wie es in Wendepunkten der Geschichte zu geschehen pflegt, als die Vorbedeutung alles dessen angesehen werden kann, was die folgenden Jahrhunderte bringen sollten: Philologische Erneuerung alter Philosopheme und Theosophie, Reform der Kirche und Wiederherstellung des Katholizismus[1]), mathematisch-physikalische Bestrebungen; alles

1) Der Sohn des Fischers und Winzers Chrypps aus dem Dorfe Cues gegenüber Berncastel, dem durch seinen Doctor summa cum laude bekannten, hat als alter ego des Papstes Pius II., des berühmten Aeneas Silvius, einen Vorschlag zur Reformation der Kurie an Haupt und Gliedern ausgearbeitet, der ohne den Tod des Papstes die gewaltsame Reformation des 16. Jahrh. wohl entbehrlich gemacht hätte.

das finden wir in ihm vereinigt. Nikolaus Cusanus steht noch auf der Scheide des Mittelalters und der neuen Zeit, aber seine Hoffnungen und seine Wirksamkeit sind der letzteren zugewendet." — Wohl ist auch bei ihm wie bei den großen Scholastikern, Duns Scotus, Thomas von Aquino, die Gotteslehre der Kern seines Denkens, das christliche Dogma der Trinität etwas fest Gegebenes, aber im Gegensatz zu der Aristotelisch-Averroesschen abstrakt-logischen Methode jener, tritt bei Cusan von vornherein die mathematisch-naturwissenschaftliche Richtung seines Denkens in den Vordergrund, die Richtung, die seinen bedeutensten Schüler, Giordano Bruno auf den Scheiterhaufen gebracht hat. Schon in den ersten Kapiteln seines ersten wissenschaftlichen Werkes: De docta ignorantia, in Cues am 12. Februar 1440 vollendet, führt ihn die Erkenntnis der Unendlichkeit Gottes zu Betrachtungen, die man nur als mathematische Infinitesimaltheorie bezeichnen kann. Die Schrift ist seinem Gönner aus der Paduaner Zeit, dem Kardinallegaten Julianus Cesarini gewidmet; die Peroratio am Schlusse zeigt, daß er mit seinem Grundprinzip der Coincidentia oppositorum das Wesen des Grenzbegriffes scharf erfaßt hat, in welchem das Unendlichgroße der Gliederzahl mit dem Unendlichkleinen des Fehlers zusammenfällt. Ich zitiere S. 62[1]): Ad hoc ductus sum ut incompraehensibilia incompraehensibiliter amplecterer, in docta ignorantia, per transcensum veritatum incoruptibilium humaniter scibilium ([als ich zu Schiff von Griechenland zurückkehrte], bin ich dazu geführt worden, das Unbegreifliche auf unbegreifliche Weise zu erfassen, in wissender Unwissenheit durch den Übergang von dem, was menschlich erkennbar, zu dem Ewig-Wahren). Er hat später für den Grenzbegriff den außerordentlich treffenden Ausdruck visus

1) Die Zitate beziehen sich auf die Basler Ausgabe der opera omnia von 1565, sie fehlt der Straßburger Universitätsbibliothek, wurde mir aber aus der des Thomasstiftes (Wilhelmitana) durch die Güte des Bibliothekars, Herrn Dr. Wehrung, geliehen. Der Name des Annotators Omnisanctus ist nichts anderes als eine Übersetzung des sehr verbreiteten französischen Namens Toussaint. Die Basler Ausgabe ist leider stark durch Druckfehler entstellt, und die Interpunktion erschwert das Verständnis noch mehr.

intellectualis oder mentalis visus, intellektuale Anschauung geschaffen, über vier Jahrhunderte früher als ich ohne jede Kenntnis des Cusanus den Satz aussprach (gedruckt: Elemente der Arithm. 1884, S. 30): Wenn die Vernunft die Tatsachen, welche die Anschauung überliefert, nachkonstruieren, d. h. begreifen will, sind wir dazu (scil. zum Grenzabschluß) gezwungen. Daß es sich hier um eine bewußte Ergänzung des Intellekts zur Intelligentia durch den Grenzbegriff handelt, dafür führe ich nur aus De math. perf. p. 1110 Z. 52 an, wo das Differential des Bogens als Sehne dadurch eingeführt wird, obwohl er weiß, daß es für ratio oder intellectus keinen kleinsten Bogen und keine kleinste Sehne gibt.

Im Laufe seiner Entwicklung erfaßt er den Grenzbegriff, der im Keim schon in der docta ignorantia enthalten ist, immer schärfer; schon in der Fortsetzung dieser Schrift, in De conjecturis (Über Vermutungen, gemeint ist über annähernd richtige Schlüsse), ist die wahrhaft neue Auffassung deutlich. In der an sich unabgeschlossenen, infinitiven Reihe der physikalischen Vorgänge wird Gott zum mathematischen Grenzbegriff, der die Reihe asymptotisch abschließt. Der asymptotische Reihencharakter unserer Erkenntnis ist wohl nirgends so scharf zum Ausdruck gebracht, als Idiota III 13, p. 168 etc., wie denn der Idiota wohl das am lebendigsten und klarsten geschriebene Werk des Cusanus ist. Die Natur wird zur sichtbaren Offenbarung Gottes, der aus eben dieser seiner Offenbarung zu ahnen ist. Gott als das Unendliche ist der Welt immanent und sie als Offenbarung oder richtiger Ableitung seines Wesens gehört zum Prozesse seines Lebens. Schon doct. ign. II cap. V heißt es: Deum per omnia esse in omnibus quia quodlibet in quolibet et omnia in Deo quia omnia in omnibus und Compl. theol. p. 1109: Non potest igitur creatura et creator pariter videri nisi infinitum non affirmatur unitrinum. Und in De possest p. 266: Quid ergo est mundus nisi invisibilis Dei apparitio? quid Deus nisi visibilium invisibilis. Mundus ergo revelat suum creatorum etc. — Ähnlich De Beryllo Kap. 3 und sonst vielfach. Der „Mens“ des Menschen „semen divinum“ wird, vgl. Idiota III, 13, zum Phantasiebild (imago) Gottes, er hat geradezu eine unbegrenzte Anpassungsfähigkeit an Gott.

Aber es wäre ein großer Irrtum, Cusanus für einen Pantheisten im Sinne Brunos und Spinozas zu erachten, für die Gott und das Universum identisch sind, wie das so vielfach geschehen. Wohl ist Gott in der Welt und die Welt in Gott, aber der Gottesbegriff des Kardinals ist so transzendent, er ist, um einen seiner Lieblingsausdrücke zu gebrauchen, „quasi“ von der dritten Mächtigkeit, und die Welt ist trotz ihrer „privativen“, d. h. beschränkten Unendlichkeit im Vergleich zu Gott gleichsam ein ionenhaftes Teilchen eines Tropfens im Ozean. Ich verweise auf de dato patris luminum Kap. II, p. 286, wo die Identifizierung von Gott und Welt energisch bekämpft wird. In der von Th. Uebinger 1888, als Anhang zu: Die Gotteslehre des Nik. Cusanus, veröffentlichten Altersschrift: De non aliud, deren Form ganz scholastisch ist, wird der Gottesbegriff fast zu nichts verflüchtigt, wie der des Proklos und der späteren Neuplatoniker, mit denen er sich in jener Periode viel beschäftigt hat. Dem „privativen“ Pantheismus des Kardinals entsprang auch seine einzig dastehende Toleranz und Versöhnlichkeit, die es ihm ermöglichte, trotz der Greuel bei der Einnahme von Konstantinopel De cribratione Alchoran zu schreiben wie De pace fidei, welche Schrift wieder eine auffallende Analogie mit Leibniz Bemühungen um eine Universalreligion bildet.

Das Entscheidende liegt darin, daß Cusan, weil die Mathematik die einzige Wissenschaft ist, die sich ex officio mit dem Unendlichen beschäftigt, und der Unendlichkeitsbegriff oder richtiger die Unendlichkeitsidee der Pol ist, um den sich sein ganzes Denken dreht, die Mathematik als der Erste seit Platon wieder in ihr Recht als Methode der Philosophie eingesetzt hat und damit, wie er selbst sagt, die reine Vernunft als Werkzeug der Naturerkenntnis. Er bedient sich der Mathematik anfangs mehr symbolisch (so besonders de conjecturis I, V et seq.) und exemplifizierend, letzteres ganz besonders hervortretend im complementum theol. von 1453, und in De Beryllo aber auch erkenntnistheoretisch wie l. c. und in dem für seine großartige Gottesidee so wichtigen De possest. Anders ausgedrückt: er stellt sich dem neuplatonischen Aristoteles der Araber und Scholastiker gegenüber und geht auf Platon selbst zurück, und indem er dadurch, daß er die Ideen nicht von Gott trennt, den unfruchtbaren Streit zwischen Nominalisten und Realisten beendet[1]) und an vielen Stellen ausspricht, daß die menschliche Vernunft nichts anderes begreifen kann und begreifen will als ihre eigenen Gesetze, bricht er Galilei und Kepler die Bahn für die Begründung der exakten Wissenschaft der Neuzeit.

Die methodische Verwendung der Mathematik für die Erkenntnislehre und, um mit Cusan zu reden, als „speculum“ und „aenigma“ der Gottesidee, kann niemand entgehen, der sich mit Cusan beschäftigt; sie ist auch Ritter nicht entgangen; energisch hat Paul Schanz, der spätere Tübinger Professor in seinem Rottweiler Programm: Der Kardinal Nik. v. Cusanus als Mathematiker 1872, darauf hingewiesen, unabhängig von ihm R. Eucken und später H. Cohen, der Führer der Marburger Neuplatoniker. Von ihm angeregt hat E. Cassirer in seinem monumentalen Werke: Geschichte des Erkenntnisproblems in der neueren Zeit Bd. 1, 1906 die Bedeutung der Mathematik für die Erkenntnislehre des Kardinals im einzelnen untersucht und damit die etwas später erschienene Dissertation von H. Löb, Freiburg 1907 entbehrlich gemacht. Ein Teil der Ergebnisse Cassirers ist aber schon von Kurt Laßwitz in seiner bekannten Geschichte des Atomismus S. 279—288 (1890) vorweggenommen, insbesondere was die Erfassung des Funktionsbegriffs und des Differentials angeht, überhaupt ist sein Referat klar und zutreffend.

Ich erwähne hier auch die Abhandlungen von J. Uebinger: die mathematischen Schriften des Nikol. Cusanus, Philos. Jahrbuch **8**, **9**, **10** (1895—97), sie sind „genetisch“ nur in bibliographischer Hinsicht; und einem Hauptresultat, daß „De quadratura“

1) Falkenberg, S. 198f. hält die Lehre von den Universalien, die Ideenlehre, für den schwächsten Punkt in der Erkenntnislehre des Kardinals. Dagegen hat schon Cassirer, Erkenntnisprobe. I, p. 66 Front gemacht, aber die Ausführung über den Wert der Vokabel in den compl. theol. p. 1117 unten, scheint mir noch keinen Nominalismus zu begründen. Daß Cusan weit eher denn als „Realist“, als Platoniker, anzusprechen sei, beweist Kap. 9 des 2. Buches der Docta ignorantia.

vor „De transmutationibus" zu stellen sei, stehe ich sehr skeptisch gegenüber.

Vom Unendlichkeitsproblem ist das der Compositio und Decompositio continui nicht zu trennen so wenig wie die Arithmetik von der Geometrie, welche den kategorischen Begriff Stetigkeit schon mit der Strecke und Kurve naturgemäß liefert; Cusan, der die Unterscheidung des Nikomachus (Boetius) zwischen diskreter und kontinuierlicher Größe kannte und wiederholt erwähnt, hat sich also auch mit diesem Problem abfinden müssen, und in einer seiner merkwürdigsten Schriften, in „De Beryllo" findet sich schon das Leibnizsche Prinzip der Kontinuität ausgesprochen, ja, genau betrachtet ist das Grundprinzip der Erkenntnistheorie des Cusanus, die Koinzidenz des Entgegengesetzten, nichts anderes als ein ungefüger, weil vom Grenzbegriff noch nicht geschiedener Ausdruck für das Kontinuitätsprinzip, und selbst das Leibnizsche Beispiel von Ruhe und Bewegung fehlt nicht, weder in docta ignorantia noch in de Beryllo (ibi p. 271: principium naturale est principium motus et quietis; die geistige Brille ist eben die coincidentia oppositorum, das Kontinuitätsgesetz).

Vor allem hat das so ziemlich älteste Grenzproblem, das des Kreises als Grenze der regulären Polygone auf ihn eingewirkt und ihn zeitlebens beschäftigt. Er hat schon 1425 die Schrift: De quadratura et triangulatura circuli des Raimundus Lullus kennen gelernt, des bekannten Alchemisten und Phantasten, der aber als leidenschaftlicher Gegner des Averroismus und durch sein Werk über Mnemotechnik nicht ohne Bedeutung ist. Geometrie, Arithmetik, Statik liefern Cusan die Mittel zur Erkenntnis der Welt, um von da aus zur Erkenntnis Gottes oder, wie es auf Cusanisch richtiger heißen müßte, zur Ahnung Gottes, seinem eigentlichen Ziele, vorzudringen: Maß, Zahl, Gewicht. Aber auch bei ihm zeigt sich schon jene Überschätzung der reinen Mathematik, welche im 16. und 17. Jahrhundert ihren Höhepunkt findet und noch bis Chr. Wolff reicht, und der erst Lambert ein Ende machte, als er hervorhob, daß die Mathematik stets für ihre Folgerungen, nie für ihre Voraus-setzungen haftet, ein Satz, den kein Geringerer als E. E. Kummer aufgenommen hat. Das compl. theol. p. 1107 stellt geradezu an die Spitze den Satz: Nemo ignorat in ipsis mathematicis veritatem certius attingi quam in aliis liberalibus artibus, der noch etwas verschärft bei Spinoza als Motto seiner Ethik wiederkehrt, fast wörtlich übereinstimmend mit De Possest p. 259 § 15. Andererseits möchte ich aber doch hervorheben, daß Cusan wohl der erste ist, der im Gegensatz zu Aristoteles die reine Mathematik nicht als Größenlehre, sondern als Lehre formarum mentis aufgefaßt hat, wenn er auch noch mens (mēnos) von mensurari messen (mēn) ableitet. Er hat dieser Auffassung an den verschiedensten Stellen Ausdruck gegeben.

Was er von der Zahl sagt, welche (de conject. I, 4 p. 77) nihil alius est quam ratio explicata (Gauß!), (de dato patris lum. p. 287, III) ratiocinari seu numerare, stammt zum großen Teil aus den Institutionen des Boëtius oder richtiger aus des Nikomachos von Gerasa Introductio und zwar aus der Einleitung, deren Übersetzung sich in der Festschrift für M. Cantor 1909, S. 163 findet. Man trifft dort so ziemlich die gesamte Lehre der Pythagoreer wieder, die Vergöttlichung und Unendlichkeit der Einheit und zwar mit Gedankenblitzen, die erst bei Galilei wiederkehren und in dessen Lehre von der Einheit und Kontinuität eine bedeutsame Rolle spielen; man vgl. Discorsi, Leyden 1699, I, S. 34.

Es fehlt auch nicht die pythagoreische Auffassung der Zahl als Harmonie des Gegensatzes zwischen Geradem und Ungeradem (de conject. 4) und ebensowenig die Tetractys (de conject. I, 4). Die vier dezimalen Grundstufen 1, 10, 100, 1000, denn das Zahlwort Million kennt Cusanus noch nicht, werden im 6.—10. Kapitel den vier Stufen der Erkenntnis Gott, Intelligenz, Seele, Körper parallel gesetzt. Aber schon in der docta ignorantia von 1440, I, 9 findet sich: numerus qui est ens rationis, fabricatum per comparativam discretionem die Zahl verdankt ihr Dasein der Vernunft (oft wiederholt), sie wird erzeugt durch vergleichende Zuordnung! Daß die Übersetzung von discretio keine Unterschiebung ist, zeigt ibi c. 7, wo die „rohen aber allgemeinen

Zahlbegriffe" mehr, minder, gleich erörtert werden und ganz richtig betont wird, daß die äqualitas die Voraussetzung (mensura) aller Ungleichheit ist, und die Subtraktion als ursprüngliche Zahlenoperation auftritt.

In de ludo globi p. 228 heißt es „numerare discernere est" und in der reizvollen Einleitung zum Idiota p. 138 oben heißt es, daß alles Zählen, Wägen und Messen auf discretionem — Vergleichung — beruht (ibi p. 150, Z. 27 wird discretio durch concordantia et differentia erläutert): in de ludo globi I, p. 209 im Sinne von Verständnis gebraucht. Ja sogar der Begriff des Komplexes, der Grundlage der Kardinalzahl, fehlt nicht; doct. ignor. II, 3, p. 26 heißt es: Und wie aus unserm Geiste dadurch, daß wir vieles Einzelne als zu einem Gemeinsamen gehörig erkennen, die Zahl entsteht usw., und nicht minder merkwürdig ist es, daß wir bei ihm die erste transfinite Zahl finden. In den complem. theol. 68, p. 1113, das der Zeit, und zwar mit deutlicher Anlehnung an den Timaios des Platon gewidmet ist, sagt er: Si quis dixerit non omnes esse (sc. rotationes) numerabiles, sed praecessisse infinitas et dixerit unam futuram revolutionem in futuro anno, essent igitur tunc infinitae et una, quod est impossibile. Er stellt die transfinite Kardinalzahl $\omega + 1$ auf, um sie als Zahl zu verwerfen, auch ω^{ω} ist als Anzahl ω[1]); das Kontinuum läßt sich nicht restlos in arithmetische Begriffe auflösen, es ist, wie Galilei noch deutlicher als Cusan gesagt hat, nicht zählbar, sondern meßbar, gerade weil es von der zweiten Mächtigkeit ist, während eine dritte samt dem Cantorschen Hemmungsprinzip überhaupt nicht fundiert ist. Die zitierte Stelle dient zum Beweis der Geschaffenheit der Welt, im Gegensatz zu Aristoteles, wie denn Cusan an den verschiedensten Stellen mit größter Energie die Aristotelische und arabische Theorie einer ewigen von Gott getrennten Materie bekämpft.

Überhaupt ist seine häufig wiederkehrende klare Erfassung

1) Docta ign. I, 5, p. 7, Z. 19: In idem redit numerum infinitum esse et minime esse; ibi 16, p. 12, Z. 17 ff. hebt er am Beispiel der unendlich oft wiederholten Strecken von 1' und 2' hervor, daß $\omega \cdot 1 = \omega \cdot 2$ ist, und ebenso (imó, ja sogar) $1/\omega = 2/\omega$.

der Kardinalzahl als Vieleinheit hervorzuheben; er spricht dies sehr deutlich schon in conj. I, 4, p. 77 und zwar ganz allgemein aus und exemplifiziert es an der drei: Die Kardinalzahl drei, der Dreier (ternarius) ist unitrinus, ihn als Vielheit aufzufassen wäre so falsch, als wenn Wand, Dach, Fundament jedes für sich (seorsum) betrachtet, den Begriff Haus bildeten; ein Vergleich, der öfters wiederkehrt. Denselben Gedanken findet man in de ludo globi II, p. 225. Omnis enim numerus est unus, binarius, ternarius, denarius et ita de omnibus.

Am eingehendsten und zugleich am tiefsten hat er sich wohl über den Zahlbegriff im dritten Buch, Kap. 6 des Idiota ausgesprochen. Er setzt zunächst auseinander, in welchem Sinne die Pythagoreer die Zahl zum Wesen der Dinge gemacht haben, und ich bedauere nur, daß August Boeckh, der größte Philologe des 19. Jahrhunderts, Cusan nicht gekannt zu haben scheint.[1]) Cusan sagt, sie haben nicht von der Zahl des Mathematikers sprechen wollen, die aus unserer Vernunft hervorgeht, sondern symbolisch von der Zahl, die aus dem Geist Gottes stammt, der wir anthropomorphisch den Namen Zahl geben, wie wir auch von der Vernunft Gottes reden. Es kann nur eine einzige unendliche Ursache geben, und diese ist unendlich einfach; das erste aber, was sie verursacht hat, muß aus sich selbst zusammengesetzt sein, und dies ist die Zahl, sogar als Geschöpf unseres Intellekts. Dies wird, wie schon zitiert, an der Drei und mit dem Beispiel des Hauses erläutert und verallgemeinert. Wenn man also in der Zahl nur die Einheit erblickt, findet sich in ihr die Koinzidenz von Einheit und Vielheit, Einfachheit und Zusammengesetztheit (Einheit und Vielheit sind in uns, nicht in den Dingen, Kant).

Nachdem er so den Einheitscharakter der Kardinalzahl mit größter Schärfe festgestellt hat, geht er zur dritten Bedeutung der Zahl, zur relativen oder Proportionalzahl über durch Exemplifizierung an den musikalisch-harmonischen Zahlen (Oktave,

1) Wie Verf. selbst, als er seine Gesch. d. Math. im Altert. in Verb. mit antik. Kulturgesch. schrieb (Berlin 1909).

Quinte, Quarte), und indem er den Einheitscharakter des Bruches als relativer Setzung betont, berührt er sich mit Justus Günther Graßmann (denn die harmonische Beziehung ist eine Einheit, welche ohne die Zahl nicht begriffen werden kann). Ganz folgerichtig geht er dann zur irrationalen Zahl (halber Ton, Verhältnis von Diagonale und Seite des Quadrates.[1]) Er kennt den von Aristoteles überlieferten Beweis der Pythagoreer von der geraden Zahl, die zugleich eine ungerade sein müßte. Hier ist heranzuziehen Complem. theolog. p. 1117, Z. 28 und die folgenden, in denen noch die Irrationalität der $\sqrt{5}$ erwähnt wird, und dann heißt es: Aber weil die unendliche Zahl sowohl gerade als ungerade ist, deswegen wird durch sie alles gezählt (und alle Verhältnisse wiedergegeben als Quotient zweier transfiniter Zahlen). Cusan bezeichnet dann im Kap. VII des Idiota die Proportion als die Herkunft der Gestaltung (locus formae) und Ausdruck auch der göttlichen Harmonie und bezeichnet die Zahl geradezu als Methode der Erkenntnis (modus intelligendi) sowohl im göttlichen als im menschlichen Geiste, und so wird sie zum Vorbild der Dinge, und hier schließt er sich wie schon in der Auffassung der Zahl als Erstgeschaffenem und aus sich selbst Zusammengefaßtem Boetius (Friedl. 12) oder Nikomachos (Festschr. f. M. Cantor, S. 170) an. Er deutet dann schließlich an, daß im göttlichen Geiste katalogartig jedes Ding seine Zahl habe, und daß in diesem Sinne des Registrierapparates die Zahl der Dinge an Stelle des Dinges selber trete. Übrigens tritt im praktischen Leben noch jetzt häufig die Nummer und die Maßzahl an Stelle des Dinges selbst; z. B. in Akten, Gefängnissen und Theatern usw. Hier wäre auch compl. theol. c. X, p. 1115 heranzuziehen.

Auch das Bildungsgesetz der Zahlen: $n + 1$ ist $(n + 1)$ kommt an derselben Stelle vor, und die anschließende Bemerkung, daß in 4 als $2 \cdot 2$ schon eine Größenbeziehung steckt, daß hier 4 schon als relative Zahl aufgefaßt wird, zeigt wieder den mathematischen Spürsinn des Kardinals. Er war auch hier seiner Zeit um Jahrhunderte voraus, hat er doch in der für das Basler

1) Vgl. dazu auch De Arithm. compl. p. 932.

Konzil entscheidenden Schrift: De concordantia catholica schon einen aus der Volkswahl hervorgehenden Reichstag gefordert.

Die notwendige Folge dieser Inkongruenz war, daß er ähnlich wie Demokrit, Cavalieri, Robert Mayer usw. über keine entwickelte Terminologie verfügte und von seiner Zeit nicht verstanden wurde. Er hat dies selbst empfunden und sagt in doct. ignor. I, 2, p. 2: „Wer meinen Sinn erforschen will, der muß sich über den Wortlaut hinaus zum geistigen Verständnis erheben und nicht an den bloßen Worten hängen bleiben, die zur Bezeichnung solcher Mysterien in ihrer gewöhnlichen Bedeutung nicht ausreichen", und ebenso in De Possest, p. 252 oben: „Non est vocabulis insistendum" usw. und nicht minder im compt. theol. c. 1, p. 1107, Z. 20. Eine weitere Folge der auch noch durch das schlechte Latein schwerverständlichen Darstellung ist es auch, daß Cusan auch noch von neueren Forschern der Inkonsequenz beschuldigt wird, während es im Gegenteil kaum einen Denker gibt, der so folgerichtig sein ganzes Lebenswerk aus einem Grundgedanken entwickelt hat: Das qualvolle Ringen mit dem Kausalitätsgesetz führt ihn vermöge der mathematischen Veranschaulichung dazu, die Reihe nach rückwärts und vorwärts durch den Grenzbegriff Gott abzuschließen, und so fallen Anfang und Ende, und da das Universum nur einen Moment in Gott darstellt, das Jetzt und die Ewigkeit zusammen, und er kommt auch auf diesem Wege wie auf dem geometrischen zu dem Prinzip des Zusammenfallens der Gegensätze.

Indessen haben Faber Stapulensis, der die Pariser Ausgabe seiner Werke veranstaltet hat, und Bouvelles (ars oppositorum; de nihilo) und besonders Bruno seine Gedanken aufgenommen, wie auch Galilei. Starke Anleihen bei Cusan hat Leibniz gemacht. Eine der wichtigsten Grundbedingungen der Analysis des Unendlichen: die Erkenntnis des Unendlichen im Endlichen und vice versa (vgl. E. E. Kummer, Festrede zum Leibniztage, Monatsberichte der Berl. Akad. 4. Juli 1867) trifft man häufig bei Cusan an. Ich mache hier noch ganz besonders aufmerksam auf den für das Verständnis der Paradoxien des Unendlichen so grundlegenden Satz Compl. theol. XII, p. 1117,

Z. 15: Quod infinitum esse est penitus absolutum ab omni illo, quod de finito potest verificari. Im Unendlichen verlieren die fürs Endliche erwiesenen Regeln ihre Gültigkeit, einen Satz, gegen den Leibniz bekanntlich des öftern gefehlt hat. Dem Zusammenhang beider ist der Leibnizforscher Zimmermann nachgegangen (Sitzungsber. der phil.-hist. Klasse der K. Akad. der Wissensch., Wien 1852, S. 306—328) in: Der Kardinal Nik. v. Cusa als Vorläufer Leibniz; er hebt darin hervor, wie der Gottesbegriff, die Monadologie, die prästabilierte Harmonie, das Principium indiscernibilitatis, der Optimismus usw. ihren Ursprung bei Cusan haben. Zimmermann läßt es ungewiß, ob Leibniz diese Lehren direkt oder indirekt zugekommen sind. Heute, wo wir dank der Lebensarbeit Gerhardts Leibniz genau kennen und ganz besonders, wenn wir die Lehre von der Zeit vergleichen, wird das Erstere zur Gewißheit. Die Idealität der Zeit, die gegenseitige Unabhängigkeit von Zeit und Raum, daß die Zeit ein Werkzeug des Intellekts[1]), daß sie die Ordnungsfunktion im Nacheinander, Sukzession sei, das findet sich alles bei Cusan, ganz besonders klar in De ludo globi II, p. 230—232. Es würde sich übrigens auch sehr lohnen, den Zusammenhang Hegels mit Cusa zu untersuchen.

Julius Baumann hätte in dem bekannten, in seiner Art bis jetzt leider einzigen Werke Cusan nicht übergehen dürfen; freilich da er schon Leibniz nicht gerecht geworden, würde er es jenem wohl noch weniger geworden sein. Der Optimismus beider ist eine notwendige Konsequenz der Gottesidee — bei beiden ist „Deus in omnibus et omnia in Deo"; er ist von Cusanus am kräftigsten ausgesprochen in de dato patris luminum p. 285 von Z. 3 an, und auch bei Cusanus, der seinen Platon kannte wie nur einer, ist Gott als die Idee des Guten summum bonum, und die Welt in seiner similitudo geschaffen. (Vgl. auch docta ignor. II, 2.)

Dankbar sei hier des Rottweiler Professors, späteren Domprobstes Fz. A. Scharpff gedacht, der von 1831—1877 sich

1) Verf. hat in einer Vorlesung über die Grundbegriffe Zeit und Raum mit Hammer und Ambos verglichen.

in einer Preisschrift und drei Werken mit Cusa beschäftigt hat, allerdings wie R. Falkenberg sagt, „meist mit milder Umdeutung ins korrekt Katholische und ohne Blick für die eigentliche Größe des Cusanus". Insbesondere ist die Übersetzung (1862) mit Vorsicht zu gebrauchen und der Mathematik gegenüber versagt sie völlig. Das große zweibändige Werk von Düx aus 1847 habe ich gar nicht benutzt, da es mit dem Mathematiker und Philosophen Cusa nichts zu tun hat, und ich das Zitat aus A. G. Kästners Geschichtswerk (Düx II, S. 436) im Original einsehen konnte. Gleichfalls aus 1847 stammt die Schrift von F. J. Clemens, dem bekannten Vorkämpfer des Neu-Thomismus: Giordano Bruno und Nikol. von Cusa; sie wird zwar Bruno nicht gerecht, ist aber dennoch höchst wertvoll. Clemens hat auch zuerst auf Leibniz Abhängigkeit von Cusa hingewiesen. R. Falkenbergs Grundzüge der Philosophie des Nik. Cusanus usw. 1880 ist vermutlich durch die Aufforderung R. Euckens Philos. Monatshefte 1878, p. 460 hervorgerufen, sie ist noch heute von Bedeutung.

Clemens hat 1843 in der Bibliothek des vom Kardinal testamentarisch gestifteten Hospitals von Cues ein Aktenstück gefunden, l. c. 1847 abgedruckt, „in concisester Form das kosmologische Glaubensbekenntnis des Kardinals" (S. Günther, Studien, Halle 1899, S. 20). Schon vor Günther hat Pl. Schanz in seinem zweiten Programm: Die astronomischen Anschauungen des Nik. v. Cusa und seiner Zeit, Rottweil 1873, das Schriftstück nach Clemens abgedruckt. Das Programm von Schanz hat nur den Fehler, daß er sich in seinen historischen Angaben auf Mädler stützt. Schanz und Günther haben Cusan mit vollem Recht als einen sehr bedeutsamen Vorläufer des Copernicus betrachtet, Giordano Bruno hat sogar, was keineswegs unwahrscheinlich ist, eine direkte Beeinflussung angenommen. Rud. Wolf, der fleißige Züricher Astronom hat diese Vorläuferschaft in seiner sehr bekannten Geschichte der Astronomie von 1877 bestritten. Er riß eine Stelle aus dem Zusammenhang und interpretiert sie fehlerhaft. Die Stelle aus de venatione sapientiae steht S. 321, Kap. 28 und hat nur den Zweck, kurz als Beispiel zu dienen für die ordnende und gestaltende Kraft Gottes, und Wolf übersetzt: „terram ad centrum moveri“ mit „daß die Erde sich am Zentrum bewege“, während der Sinn ist, daß sie zum Zentrum der Welt hin (d. h. zu Gott durch Gott) bewegt werde. Wolf erwähnt dabei das Clemenssche Aktenstück, das der Erde sogar eine dreifache Bewegung gibt, kannte aber noch nicht das Programm von Schanz und schwerlich hat er docta ignor. c. 11 und 12 gelesen. In diesen Kapiteln werden die Konsequenzen aus Kap. 10, das die Theorie der Bewegung enthält, für die Bewegung der Himmelskörper gezogen. Ich übersetze aus Kap. 11 zunächst einen Satz, der bei Scharpff gar keinen Sinn gibt. Es muß heißen: „Wir wissen nun hieraus, daß das Universum eine Dreiheit ist und es nichts im Universum gibt, in welchem nicht die Möglichkeit (*δύναμις* — potentia — des Aristoteles), die Wirklichkeit (*ενεργεια*) und die Bewegung als deren Verknüpfung die Einheit schüfe. Von diesen dreien kann keine losgelöst vom anderen bestehen, weil sie notwendigerweise in allem sind in den verschiedensten Abstufungen, so verschieden, daß nicht zwei Dinge im Universum in bezug auf alle drei gleich sein können (principium indiscernibilium), und daher ist es unmöglich, daß die Weltmaschine irgend etwas, sei es diese sinnenfällige Erde oder die Luft oder das Feuer noch sonst etwas, als festes, unbewegliches Zentrum habe, wenn man die verschiedenen Bewegungen der Himmelskörper in Betracht gezogen hat usw.“ Es gibt weder für die Erde noch irgendeine Sphäre ein Zentrum; Gott, das Zentrum der Welt, ist auch das Zentrum der Erde und aller Himmelskörper. Am Himmel sind keine unbeweglichen und festen Pole. Es gibt keinen Stern, — und die Erde ist Stern unter Sternen, — der nicht einen Kreis beschriebe.“ Aus dem Gesagten geht klar hervor (elucet) „terram moveri“.

Kap. 12 beschäftigt sich spezieller mit dem Zustand der Erde. Die Erde bewegt sich; wir merken es nicht, da die Bewegung nur durch Vergleich mit dem Unbeweglichen erkennbar ist. Wer auf der Sonne, dem Mond oder auf dem Mars stände, würde immer andere und andere Pole angeben. Der Bau der Welt ist daher so, als hätte sie ihr Zentrum überall und nirgends eine Peripherie, sie ist unendlich[1]), denn Umkreis und Zentrum ist Gott, der überall und nirgends ist. Diese Erde ist nicht kugelförmig, obwohl sie der Kugelform zuneigt. Die Erde ist nicht der geringste und unterste Stern, wie er überhaupt an den verschiedensten Stellen der scholastischen, noch heute nicht ausgestorbenen, Anschauung entgegentritt, daß die Erde ein Jammertal sei, und seine Weltfreudigkeit klar und deutlich bekennt. Des Raumes wegen muß ich auf Schanz II und S. Günther l. c. verweisen, wo sich die geradezu revolutionären Ansichten des Kardinals gesammelt finden, möchte aber doch auf die merkwürdigen Äußerungen über den Tod hinweisen, die hier wie Idiota I vorkommen. Gott, der Alles geschaffen, will nicht, daß irgendeines seiner Werke untergehe. Man wird mitunter geradezu an Claude Bernards berühmtes: „La vie c'est la mort, la mort c'est la vie“ erinnert, oder auch an Göttes Ansicht, daß der Tod als Benefiz für die Gattung erfunden sei.

Auch ohne den Clemensschen Fund, der die genaue Bekanntschaft Cusas mit dem homozentrischen System des Eudoxos — Kalippos — Aristoteles bewies, hätte er also ein volles Recht als Vorläufer des Copernikus bezeichnet zu werden, ja, in gewissem Sinne sogar als der Keplers, da er wiederholt, nicht nur in docta ignor., sondern sowohl in dem Clemensschen Aktenstück l. c. p. 98, als im Compl. theol. p. 1113 Z. 19 erklärt, daß die Bewegung der Himmelskörper nur quasi circularis sei, und eine vollkommene Kreisbewegung in der Natur, die er als Komplex aller Bewegungserscheinungen definiert, unmöglich.

Und fast noch bedeutsamer ist sein indirektes Wirken, nicht sowohl weil er, angeregt von Toscanelli wie seine Zeitgenossen Peurbach und der jüngere Regiomontanus, die technische Notwendigkeit einer Reform der Astronomie durch Aufdeckung der Fehler der Alphonsinischen Tafeln, damals die verbreitetsten, vorbereitete, sondern weil er durch die Wucht seiner kirchlichen

---

1) Hier liegt der Ursprung zu Brunos Lehre von der Unendlichkeit der Welt, einen der Hauptanklagepunkte.

Autorität die religiösen oder richtiger theologischen Hindernisse mächtig erschütterte, welche sich einer Beseitigung der zentralen Vorzugsstellung des Menschen entgegenstellte. Hat er es doch ausgesprochen, daß es auf allen Sternen Wesen gäbe, die der Sonne durchgeistigter als die der Erde. So nur erklärt es sich, daß Copernikus sein großes Werk de revolutionibus ungeniert dem Papste Paul III. widmete.

Cusan hat sein Lebenlang sich für Astronomie interessiert; noch wird in Cues ein kupfernes Astrolabium gezeigt, mit dem er Positionen bestimmte, und in Rom hatte er in seinem Hause ein Observatorium, und schon dem Basler Konzil hat er seine Schrift De reparatione Calendarii (p. 1155) vorgelegt. Daß der Julianische Kalender mit seinen 365,25 Tagen das Jahr etwas zu lang annehme, war vermutlich schon Beda bekannt, inzwischen war die Verschiebung soweit vorgeschritten, daß die Gefahr vorlag, es könne gegen die Vorschriften des Konzils von Nicaea das christliche Ostern mit dem jüdischen Passahfest zusammenfallen! Cusan schlug daher vor, daß im Jahre 1439 Pfingstmontag nicht als 25. Mai sondern als 1. Juni gezählt werden möge, und von da ab alle 304 Jahre der Schalttag ausfallen solle; er setzte also den Fehler statt auf $^1/_{129}$ auf zirka $^1/_{122}$ herab. In der Schrift selbst befolgte er strikte die an die Spitze gestellte Disposition: Ad laudem omnipotentis Dei, ut intentio correctionis Calendarii clarior fiat, per ordinem de ipsius Calendario ordinatione, deque ipsius insufficientia et erroris causa ac de remediis brevissime tangam.

Die Einleitung findet sich so ziemlich in den Paragraphen 6—19 bei R. Wolf l. c. wieder; sie ist darum für die Beurteilung des Cusan wesentlich, weil sie seine Belesenheit zeigt und insbesondere, daß er mit den ins Lateinische übersetzten Werken der Araber durchaus vertraut war, was bei seinem Studium in Padua, das die Hochburg des Averroismus noch bis zu Galileis Zeit war, ja von vornherein anzunehmen ist. Er mußte also wenigstens mit der Trigonometrie der Araber einigermaßen vertraut sein. Die wunderbare persische Kalenderreform des großen Dichters und Astronomen Omar Alehaijami hat er aber nicht gekannt, da Chaijami nicht ins Lateinische übersetzt war; sie bekundet, wie genau den Arabern um 1080 die Dauer des tropischen Jahres bekannt war und wie geschickt Omar den Tagesbruch durch den gemeinen Bruch $^{8}/_{33}$ ersetzt hat, der von 0,24220 nur um 0,00018 abweicht. Arabisch hat Cusan schwerlich verstanden, dagegen war er mit dem Griechischen schon früh vertraut; war dies doch der Grund, weshalb er der Kirchen-Vereinigungs-Gesandtschaft nach Konstantinopel von Seiten des Baseler Konzils beigegeben wurde. Auch mit den lateinischen Schriften der spanischen Juden, die von so hoher Bedeutung für die Scholastik als Vermittler arabischen Wissens sind, war er bekannt, er erwähnt Rabbi Isaak und den als Dichter und Denker hochbedeutenden Avicebron d. i. Salomon ben Gebirol, der Verfasser des מְקוֹר חַיִּים fons vitae p. 11 u. 12 in der doct. ignor. als Rabbi Salomon und mit Nennung seines Namens und Werkes in de Beryllo 16, p. 271 sowie Idiota p. 139, Z. 19 und insbesondere ist die Lehre vom göttlichen Willen und der Ableitung der sinnlichen Materie aus der unumschränkten Potentia Gottes, bei dem Können und Sein, Posse esse und daher de Possest, eins ist, von Gabirol beeinflußt.

Das Interesse für Astronomie (Astrologie) gehörte in jener Zeit zur allgemeinen Bildung auch des Juristen, im Unterschied zur heutigen allgemeinen Unbildung. Ob Cusanus seine tieferen Kenntnisse den Vorlesungen Prosdecimo di Beldomandis verdankt oder dem Umgang mit dem vier Jahre älteren Paolo di Pozzo Toscanelli, bekannt durch seinen Einfluß auf Columbus, bleibe dahingestellt. Die geographischen bezw. kartographischen Arbeiten des Kardinals gehen jedenfalls auf Toscanelli zurück. Aber einen auffallenden Fehler, den Scharpff und selbst Schanz aus dem Buche von Düx übernommen haben, muß ich hier zur Sprache bringen, da er die tendenziöse Unzuverlässigkeit beweist. Um die Intimität des Kardinals mit Peurbach und Regiomontan und damit seine hohe Wertung als Astronom zu illustrieren, zitiert Düx die Widmung Regiomontans an Bessarion zu der Ptolemäus-Ausgabe. Nun sind zwar die Werke Regiomontans ziemlich selten, aber die Stelle findet sich bei Gassendi, Florent. Ausg. T IV, 1786, p. 464, dessen vita Peurbachii et c. Düx selbst p. 440 zitiert, wörtlich und lautet: Verum paulo antequam e vita discederet, cum in manibus et gremio moribundum tenerem, Vale, inquit, mi Ioannes, Vale, et si quid apud te pii praeceptoris memoria poterit, opus Ptolemaei, quod ego imperfectum relinquo, absolve. Hoc tibi ex testamento lego, ut etiam vita defunctus, parte tamen mei meliore superstes, Bessarionis nostri, optimi ac dignissimi principis desiderio satisfaciam. Bei Düx ist nun der Name Bessarion weggelassen, und zwar nicht durch Cusan ersetzt, aber der Leser kann gar nicht anders als annehmen, daß Cusan gemeint ist. Bessarion ist leichtlich die sympathischste Erscheinung der ganzen Renaissance, er, der obwohl eifriger Platoniker, doch auch dem großen Gegner gerecht geworden ist, und darauf hingewiesen hat, daß Aristoteles und Platon in weit mehr Punkten übereinstimmen als sich widersprechen, der seinen größten Schatz, die 600 Codices 1468 Venedig vermacht hat, wo sie noch heute, obwohl übel genug behandelt, den wertvollsten Bestandteil der Marciana bilden (vgl. u. a. J. Burckhardt 1869, p. 151 und H. Vast: Le cardinal Bess. Paris 1878, p. 424). Bessarion hat Cusa auf der zweiten Mission nach Konstantinopel im Anschluß an das Florentiner Konzil begleitet und war mit ihm befreundet, mit Peurbach, dessen Vertrautheit mit Cusan von Düx (und Schubert) übertrieben ist, persönlich bekannt und stand mit ihm in Schriftenaustausch, ein persönlicher Verkehr mit Regiomontan ist m. W. nicht erwiesen. Die den Triangulis angehängte Kritik einiger Quadraturen des Kardinals ist, wenn auch höflich in der Form, doch sachlich recht ablehnend. Regiomontan bemerkt ironisch, die Beweise seien philosophisch, aber nicht mathematisch.

Durch Herrn Bauschinger sind mir noch zwei neue Arbeiten über die Weltanschauung Cusans zugänglich geworden: eine Dissertation von M. Jacobi, Berlin 1904, und ein Vortrag von Prof. Deichmüller, Niederrhein. Ges. f. Natur und Heilkunde, Bonn 1901. Der kurze, streng sachliche Vortrag berichtigt einen Lapsus S. Günthers l. c.; die doppelte Geschwindigkeit der Fixsternsphäre kann sich nur auf die Ost-West-Richtung beziehen. Auch Deichmüller sieht in Cusan einen „würdigen Vorläufer" des Copernikus.

An die Kosmologie und Astronomie müßte sich die Mechanik anschließen, für welche nächst dem Kap. 10 der docta und de ludo globi und de Beryllo, p. 275 besonders das 4. Buch des Idiota: de staticis experimentis in Betracht kommen. Aber dies Buch mit seinen geradezu genialen Vorschlägen für die Verwertung der Wage, die noch über die Araber (Bêrûnî) hinausgehen, werde ich an anderer Stelle behandeln. Hier will ich nur hinweisen auf die Übereinstimmung dessen, was Cusan über die bewegende Kraft lehrt mit Leibniz und noch mehr mit Newton. Die Bewegung wird Cusan zufolge nicht durch feste Verbindung hervorgerufen; sie liegt im Wesen der Materie (Demokrit); sie ist ein Streben, das Gott in die Natur hineingelegt hat; sie wird nach Analogie des beständig pulsierenden Atems mit „Spiritus" bezeichnet; die Natur selbst ist „quasi complicatio omnium, quae per motum fiunt". In der Trinität Gottes entspricht ihr der „spiritus sanctus", der die absolute Potenz und die absolute Energie verbindet.

Die bewegende Kraft durchdringt den ganzen Kosmos, alle Himmelskörper wirken aufeinander ein, (mechanisch, nicht etwa astrologisch) die Erde wirkt auf alle und alle auf sie, am meisten die Sonne. Ein Stern kann ohne den andern nicht existieren. Das Gesetz von actio und reactio wird ausführlich am Magneten und Eisen besprochen u. a. Idiota, p. 140, es herrscht auch auf geistigem Gebiet zwischen dem Intellekt des Menschen und dem Intellekt Gottes. Auch Newton spricht sich niemals über das Wesen der Schwerkraft aus; in der berühmten Stelle op. IV überläßt er es dem Leser zu entscheiden, ob sie ein immaterielles Agens sei oder nicht. Für Newton, Leibniz und Cusa sind die Atome Kraftpunkte. In de ludo globi p. 213, 330 bis 337, 343 usw. findet sich übrigens schon mehr als eine bloße Ahnung des Trägheitsgesetzes.

Wenn die Verbindung des Cusan mit der heliozentrischen Lehre bezweifelt werden konnte, ist sein Einfluß auf die Wiederaufnahme und Verbreitung von Betrachtungen über infinitäre

Prozesse unanfechtbar und ganz direkt führt der Weg von ihm zu Bruno und Galilei. Diese seine wichtigsten mathematischen Leistungen finden sich in beinahe allen seinen Werken verstreut; in den theosophischen weit stärker als in den spezifisch mathematischen, und es bleibt daher nichts übrig als sie dort aufzusuchen. Da dieselben Gedanken und Beispiele aber oft wiederkehren, so kann man sich auf De docta ignorantia (1440), De conjecturis (1441—44), Idiota (1450), Complem. theol. figuratum in Complem. mathem. (1450) und De Beryllo (1454) beschränken.

Docta ignorantia übersetze ich mit Theorie des Nichtwissens, sie bedeutet keineswegs das Sokratische „Ich weiß, daß ich nichts weiß", noch weniger das verzweifelte Faustische „Und sehe, daß wir Nichts wissen können", sondern er geht den Gründen unseres Nichtwissens nach, und er findet sie darin, daß um die nach vorwärts und rückwärts unendliche Kette der Relationen zu erfassen unser Intellekt (mens) und unser Verstand (ratio) nicht ausreichen, sondern ein transzendentes Prinzip hinzugezogen werden müsse, durch welches attingitur inattingibile inattingibiliter (Id. 1 p. 138, Z. 30), Ingustabile gustatur (ibi 139). Diese Ergänzung ist nichts anderes als der Grenzbegriff, der die Schranke niederreißt, welche das Infinitesimale der logischen Konstruktion setzt (man vergleiche die Paradoxien des Zenon), indem er das Unendliche mit dem Endlichen, bzw. das Maximum mit dem Minimum vereint die coincidentia oppositorum herbeiführt, und so hat Cusa auch sein Prinzip genannt, und es schon im Titel seiner ersten und grundlegenden Schrift angedeutet. Daß dabei die Unendlichkeiten, welche Raum, Zeit und Zahl bieten, sich als „exemplaria" (Beispiele und Vorbilder) darbieten, ist selbstverständlich, wenn sie nicht überhaupt den Ausgangspunkt bilden, und es genügt neben der docta auf die Einleitung zum Idiota hinzuweisen. Die Zahlenreihe strebt allerdings nur einseitig ins Unendliche, aber in ihrem Anfang, der Eins, schlägt der Zahlbegriff um, die Eins ist keine Zahl, sagt er mit den Pythagoreern, und dieselbe Anschauung habe ich noch bei Reuschle (Vater) um die Mitte des 19 Jahrhunderts getroffen. Cusan erkennt in der Eins den schlechthin transzendenten Akt der Setzung und nicht minder, daß es die Bewegung (des Intellekts) ist, welche die Verknüpfungen der Setzungen zur Zahl herbeiführt (docta I 10 und zahllose andere Stellen), und indem er, wie nach ihm Galilei, die Unendlichkeit in der Einheit erfaßt, begreift er wie sie den Pythagoreern zur absolut göttlichen monas, zum Unum wurde. Die gerade Linie aber fließt nach beiden entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche, sein Prinzip des Zusammenfallens der Gegensätze vereinigt die unendlich fernen Punkte, und so wird ihm (docta I 13 usw.) die Gerade zum Kreis mit unendlich großem Radius, und 200 Jahre vor Desargues hat er die Gerade als im Unendlichen geschlossen angesehen. Da wir die Zeit nur unter dem Bilde der geraden Linie vorstellen können, so überträgt sich die Koinzidenz vom Anfang und Ende auf die Zeit; die Zeit berührt die gerade Linie der Ewigkeit stets in einem Punkte „dem Jetzt" und hierbei (compl. theol. 8 p. 1113) kommt er auf die Wälzung eines Kreises auf einer Geraden, und diese Bemerkung kann ganz abgesehen von dem Wallisschen Manuskript (M. Cantor II 202) sehr wohl Galilei, der Cusanus genau kannte, auf die Zykloide geführt haben.

Dasselbe Prinzip hat ihn auch lange vor Fermat die Koinzidenz des Maximums und Minimums (I, 2 p. 3 etc.) gelehrt. Gott ist zugleich das Größte und Kleinste, da er weder Vermehrung noch Verminderung fähig (vgl. Idiot. II p. 1146 33—6). Et hoc tibi clarius fit, si ad quantitatem maximum et minimum contrahis, und dies wird Dir klarer, wenn Du Maximum und Minimum auf Größen beschränkst, denn minima quantitas est maxime parva. Der größte Kreis hat die kleinste Krümmung; es ist nur ein kleiner Schritt zum Newtonschen Krümmungsmaß, wenn Cusanus sagt (Idiot. II p. 146 von Z. 16 an, bes. Z. 25): Ob hoc etiam vides quomodo arcus circuli magni similior est rectae lineae, quam arcus circuli parvi. Das größte Dreieck hat die kleinsten Winkel (Lobatscheffskische Geometrie). Im complem. theol., welche den Höhepunkt der Mathematisierung der Theosophie zugleich auch der Erfassung des Grenzbegriffes bildet, heißt es im Kap. V p. 1110: Circulus enim si ad polygonias attendas, est infinitorum angulorum. Et si ad ipsam circulum tantum respicis, nullum angulum in eo reperies, et est interminatum.

Auf die Koinzidenz von Einheit und Vielheit in der Kardinalzahl habe ich schon hingewiesen, besonders häufig kehrt die Bemerkung wieder, daß die unendlich schnelle Bewegung zugleich die Ruhe ist, am charakteristischsten wohl in De ludo globi p. 226, Z. 20—24: Dreht sich eine kontinuierliche Schar von Kreisen um ihr Zentrum, so ist die Bewegung des Zentrums, da die Kreise sich je näher dem Zentrum um so schneller drehen, zugleich unendlich groß und unendlich klein. Anschaulicher und richtiger in dem hübschen Beispiel des Kreisels De possest, p. 253.

Das ganze Buch I der docta handelt de Deo und damit vom Unendlichen. Wichtig ist hier Kap. XII, in dem absolut deutlich der Grund der Mathematisierung der Theologie ausgesprochen wird. Die Mathematik muß sich endlicher Zeichen und Figuren bedienen, ihre Eigenschaften und Verhältnisse untersuchen und dann den Grenzübergang zum Unendlichen vollziehen, und mit ihrem Beispiel und Gleichnis kommen wir zur Erfassung des absolut Unendlichen. Im 13. Kap. wird dann durch die Figur, der wir uns noch heute im Unterricht bedienen, gezeigt, daß der Kreis mit wachsendem Radius sich der Geraden mehr und mehr anschmiegt. Daher geht der immer größer werdende Kreis in die immer größere Gerade über, und den Grenzübergang vollzieht er kühn durch den Satz: Was in der Potenz der endlichen Linie liegt sc. das unbegrenzte Wachstum, ist „actu" (ἐν ἐντελεχείᾳ) unendlich. Ich möchte hier bemerken, daß der Unterschied zwischen unendlich und unbegrenzt häufig von ihm in der Vergleichung der unendlichen Geraden mit der unbegrenzten (interminatum p. 1110 Z. 53; De ludo globi p. 212; In circulo enim non est principium nec finis) Kreislinie hervorgehoben wird, und er also auch hier Vorgänger von Leibniz.

Es folgt dann, Kap. 14 und 15 noch näher ausgeführt, der Beweis, daß die gerade Linie zugleich unendliches Dreieck, Kreis und Kugel sei, eine Koinzidenz; man sieht zunächst daraus, daß ihm die Eigenschaft der Geraden, bei der Rotation zu beharren, bekannt war, vgl. Atti del IV congr. intern. III p. 390. Man sieht aber auch, daß er nicht wie Desargues die Konsequenzen der Einzigheit des unendlich fernen Punktes der Geraden gezogen hat. Nur für die Lobatscheffskische Gerade ist es richtig, daß eine Gerade die beiden unendlich fernen Punkte der gegebenen verbinden kann und damit mit ihr zusammenfällt, der Beweis des Cusan konnte aber zur Zeit des Cusan und bis zu Desargues und Newton nicht widerlegt werden, wie so viele „Paradoxien des Unendlichen", weil die Gleichheit von $+\infty$ und $-\infty$ noch nicht erkannt war. Im Kap. 16 wird dann „transformativ" von der infiniten Linie auf Gott übergegangen um zu zeigen, daß Gott sich im übertragenen Sinne zu allem verhalte wie die unendliche Gerade zur endlichen.

Kap. 17 ist überschrieben: Ex eodem profundissimae doctrinae, Folgerungen tiefster Weisheit. Die endliche Linie ist teilbar, die unendliche nicht, weil das Unendliche keine Teile hat, da in ihm das Größte und Kleinste zusammenfallen. Jedoch ist die endliche Linie nicht teilbar in etwas, das nicht Linie ist, da man bei einer „magnitudo", d. h. Boëtius zufolge (inst. arith. ed. Friedlein p. 8) bei einer kontinuierlichen Größe nie zu einem Teil kommt, zu dem es nicht noch einen kleineren gäbe. Daher ist auch die endliche Linie hinsichtlich ihrer Linienhaftigkeit unteilbar. Denn eine Strecke von einem Fuß ist nicht weniger Linie als eine Linie von einer Elle. Daraus folgt, daß die unendliche Linie der endlichen begrifflich zugrunde liegt und so ist das Größte schlechthin die Idee von allem und damit das Maß von allem. So ist auch die Idee aller Dinge unteilbar, unveränderlich und ewig. Wenn ich der Reihe nach Strecken von 2′, 3′ usw. betrachte, so ist das Lineare in ihnen dasselbe und die Verschiedenheit bezieht sich nur auf ihr Verhältnis zur Länge eines Fußes. An der unendlichen Linie gemessen fällt diese Verschiedenheit der Strecken oder der Dinge weg, und da sie unteilbar und einzig (principium indiscernibilium), so steckt sie ganz in jeder endlichen, aber nicht soweit es die besondere Erscheinungsform und Verendlichung angeht. Sie ist deshalb ganz in jeder enthalten, weil sie es in keiner ist, und eine Strecke ist von der andern verschieden durch die Verendlichung. Es ist daher die unendliche Linie in jeder Strecke ganz enthalten, weil jede es in ihr ist. Und das gilt ganz allgemein und klar erhellt, in welcher Weise das Größte in jedem Dinge und in Keinem ist.

Die „tiefste Weisheit" des Kap. 17 macht einige Bemerkungen nötig. Es handelt sich hier um eine nicht gerade leicht verständlich ausgedrückte Erfassung des mathematisch Infinitesimalen durch den Grenzbegriff, sowohl des Unendlichgroßen als des Unendlichkleinen; dies wird deutlich, wenn man docta II, 3, p. 26 heranzieht und das li(ber) de non aliud (Uebinger, Die Gotteslehre des Cusan, Pad. 1888, S. 192). Wenn nämlich eine an sich unabgeschlossene Reihe der Art nach zusammenhängender Vorstellungen ein stetig abstufbares Merkmal (Größe) enthält, wie Strecken, Winkel, Massen, Zeiträume, Geschwindigkeiten, so muß der Genuscharakter der Reihe von diesem abstufbaren Merkmal unabhängig sein, z. B. non aliud S. 166: Der kleine Rubin ist nicht weniger Rubin als der große. Das Quale der Strecke, das was sie zur Strecke macht, das Quale des Winkels usw., ist in jedem Gliede der Reihe konstant enthalten. In Idiota III, p. 167, Z. 30: Quaelibet enim pars ejus (magnitudinis, d. h. der kontin. Größe) de toto verificatur. Hinc ejusdem entitatis est, cujus totum. Jede bestimmte kontinuierliche Größe empfängt ihren Inhalt von der Gattung, denn der Teil ist von derselben Wesenheit wie das Ganze.

Das Quale der Strecke, das was sie zur Strecke macht, das Quale des Winkels usw. ist in jedem Gliede der Reihe konstant; die einzelne Strecke bestimmter Länge enthält zwar, aber umschließt nicht die „Quidditas" die „essentia", das Wesen der Linie, das dem Maße entrückt und in diesem Sinne unendlich zu denken ist. Ganz analog sagt er in De Beryllo, ca. 13, p. 170: Omnis dabilis angulus de se ipso dicit, quod non est veritas angularis. Veritas enim non capit nec majus nec minus. Diese Strecken- und Winkelwahrheit steckt aber schon im Differential, als solches unitas (Bruno) bezeichnet, vgl. De Beryllo, cap. 8 und 9, p. 268, 269. In diesem Sinne spricht er sich auch doct. ign., p. 26 von Z. 5 an aus. Ich hebe daraus hervor: Ita quies est motum complicans, qui est quies seriatim ordinata, si subtiliter advertis; ferner: Ita Nunc sive praesentia complicatio temporis, die Zeit ist auch nichts als praesentia ordinata, und zum Schluß: Quoniam non est nisi unum maximum, cum quo coincidit minimum. Die zitierte Stelle De aliud lautet: Ideo principium, medium et finis signati est signum[1]) seu lineae est punctus, seu motus est quies, sive temporis est momentus et universaliter divisibilis indivisibile. Dieselben Gedanken kehren oft wieder, z. B. De dato patris luminum, cap. 4, p. 288; De ludo globi, p. 230, am ausführlichsten wohl in De Beryllo I, 17, p 271. Dies Kapitel sowie das vorhergehende ganz auszuschreiben hindert mich nur der Raummangel. Doch sei angeführt: ... ut ad minima respiciamus quando maxima inquirimus (schon Schanz I, p. 14). Ich erwähne nur noch Id. III, 4, p. 152: Sicut numerus usw. Galilei, Cavalieri, Newton und Leibniz haben so ungefähr dasselbe gesagt, nur mit ein bischen andern Worten, entsprechend der entwickelteren Sprache.

In den Zeilen, welche der zitierten Stelle in de aliud vorangehen, wird die realisierende Bedeutung des Differentials, um mit H. Cohen zu reden, scharf hervorgehoben. Idiot. I, p. 183, Z. 15: Simplex est ante compositum usw., und es wird auch (des öfteren) ausgesprochen, daß das Differential kein wirklicher Teil sei (Galileis partes non quantae), es heißt: Non video indivisibile in divisibili quasi ejus partem, sed ipse indivisibile ante partem, und Idiota III, p. 152, Z. 1: „In vi ejus (sc. mentis) complicatur vis assimilitiva complicationis puncti per quam in se reperit potentiam, in qua se omni magnitudini assimilat.“ Die Stelle weist deutlich auf Proklos (Friedl., S. 88), „aber es liegt in ihm (dem Punkte) verborgen eine unbegrenzte Macht, Längen zu erzeugen“. Was er mit der Einzigheit des Punktes meint, wird klar erläutert in De ludo globi II, p. 230, Z. 11; gemeint

1) signum = σημεῖον, der Euklidische Ausdruck für Punkt, bei Aristoteles στίγμη.

ist, daß die einzelnen Punkte begrifflich nicht verschieden sind. Daß er den Punkt als Differential der Strecke vom Punkt als Ort des Schnittpunktes (Anfangspunkt) trennt, kann vielfach belegt werden. In letzterer Hinsicht ist der Punkt nicht der Einheit, sondern der 0 begriffsverwandt; da heißt es z. B. in De ludo globi, p. 210, Z. 45: Ex punctis ergo nihil componitur, punctum enim puncto addere perinde resultat, ac si nihil nihilo jungas. Dagegen über den Punkt als Differential, als indivisibile der Linie, als Atom heißt es kurz darauf p. 211, Z. 1: „Und nach Deiner Auffassung ist somit die Welt, die maximale Größe, im Punkt, der kleinsten, enthalten, und weder Zentrum noch Umfang derselben können geschaut werden. Und es gibt nicht mehrere verschiedene Punkte, da der Punkt (d. h. der Begriff des Punktes) keine Mehrheit zuläßt, denn in der Vielheit der Atome findet sich der Punkt stets als ein und derselbe. So wie in verschiedenen weißen Gegenständen nur eine Weißheit. Somit ist die Linie die Entwicklung des Punktes; entwickeln aber heißt den Punkt entfalten: Quod nihil aliud est, quam punctum in atomis pluribus ita quod in singulis conjunctis et continuatis esse. Es ist nur eine Ungeschicklichkeit des Ausdrucks, wenn er scheinbar die Linie als Differential der Fläche, die Fläche als den der Körper setzt, wie man aus cap. 17 De Beryllo deutlich entnehmen kann.[1]) Auch lange vor dem Kantianer Fischer hat er erkannt, daß der Größenkeim keine Größe. De Beryllo IX, p. 269. Et ita ante duo et post simplicem lineam esse debet angulus maximus pariter et minimus, sed non est signabilis. Solum igitur principium videtur maximum pariter et minimum. Und im cap. XI derselben Seite heißt es vom Winkeldifferential. Es ist der Trieb zu jedem gestaltbaren Winkel, weder größer noch kleiner vor jeder (Winkel) Größe ... und ihm kommt mit demselben Recht der Namen des einzigen Winkels als aller und keines zu. Er ist weder spitz, noch recht, noch stumpf (Winkel, die größer als zwei Rechte, werden Euklid zu-

1) Er weiß sehr wohl, daß Summen von Punkten als Nullen keine Strecke, Linien als Nullen der Breite keine Flächen, Flächen als Nullen der Linien keine Körper geben (z. B. Beryllo, c. 17).

folge nicht betrachtet), er ist die simplicissima omnium causa. Ein Beispiel, das er mit Vorliebe braucht, ist das des Samenkorns, das nicht nur den Baum, sondern alle Bäume „complicat“ in sich trägt, am frühesten wohl in De conjecturis IV, 7, p. 104.[1]) Die zahlreichen auf das Differential bezüglichen Stellen in den spezifisch geometrischen Schriften findet man bei Schanz l. c.

Wie den Begriff des Differentials hat er auch den des Integrals; er spricht wiederholt aus, daß z. B. die bestimmte endliche Strecke als Summe von unendlich vielen Indivisibilien aufgefaßt werden können, und es genügt eigentlich schon, auf seine Kreisquadraturen zu verweisen. Hand in Hand mit der Auffassung des Differentials als einer zur Konstitution der Erfahrung unentbehrlichen Grundlage geht auch die Erkenntnis des mentalen Charakters der reinen Geometrie. Es ist in neuester Zeit ein wahrer Korybantenlärm über die „Entdeckung“ der idealen oder Präzisionsgeometrie erhoben, als wenn sie sich nicht schon bei Eudoxos, Archytas und namentlich Platon fände. Cusan spricht diese Idealisierung ganz außerordentlich häufig aus, er wird nicht müde (mit Platon), den Unterschied des Kreises im Geiste von dem „in pavimento“, auf dem Estrich, hervorzuheben. Sehr charakteristisch ist die Stelle Idiot. III, p. 159, Z. 3: Post haec mens nostra, non ut immersa corpori, quod animat, sed ut est mens per se, unibilis tamen corpori, dum respicit ad suam immutabilitatem, facit assimilationes formarum, non ut sunt immersae materiae, sed ut sunt in se et per se et immutabiles concipit rerum quidditates, utens se ipso pro instrumento sine spiritu aliquo organico. Sicut dum concipit, circulum esse figuram, a cuius centro omnes lineae ad circumferentiam ductae, sunt aequales: quo modo essendi, circulus extra mentem in materia esse nequit. Impossibile est enim, duas dari lineas in

---

1) Deutlich wird der Punkt als Differential aufgefaßt und vom Nichts unterschieden in dem so überaus merkwürdigen Kap. 9 des Compl. theol., p. 1114, wo es heißt: Creator igitur duo fecisse videtur scilicet prope nihil punctum usw. Kurz darauf cap. XI, p. 1116, Z. 24 kommt sogar das Wort vor, das Newton akzeptiert hat: „fluxus puncti“ ist es, der die Linie erzeugt.

materia aequales et minus est possibile, talem circulum posse figurari. Unde circulus in mente, est exemplar et mensura veritatis circuli in pavimento. (Unser Geist rein als Geist, ohne Beziehung zum Körper, vollzieht die Anpassung an die Gestaltungen nicht wie sie sich verquickt mit der Materie darstellen, sondern wie sie an und für sich sind, und erfaßt die unveränderliche Wesenheit der Dinge: der Geist ist sein eignes Werkzeug und bedient sich keiner spezifischen Sinnesenergie. Er hat den Begriff des Kreises erfaßt als Ort der Punkte gleichen Abstandes vom Zentrum, aber diesem Begriff kann kein materieller Kreis genügen. Denn es ist unmöglich, daß zwei materielle Linien absolut gleich seien, und noch weniger möglich, daß ein solcher Kreis gestaltet werden könne. Es folgt, daß der Kreis im Geiste das Vorbild und das Maß der Richtigkeit des Kreises auf dem Fußboden ist). Und fast ebenso deutlich spricht Kap. V der venat. sap. p. 301, vgl. auch de possest, p. 263 und 264 und De ludo globi, p. 210 von Z. 31 an. Ausführlich wird auch die Idealisierung in De Beryllo, c. 32, p. 279 und 280 oben besprochen, er polemisiert hier gegen die Ansicht, die er Plato fälschlich zuschreibt, daß die „Mathematischen" Vorstellungen Ideen (im Sinne Platons) seien. Platon hat bekanntlich die Mathematik als ein Bindeglied τῶν ὄντων und τῶν ὄντως ὄντων aufgefaßt, auch hier figuriert Z. 22 der Kreis auf dem Fußboden. In de possest p. 264, Z. 8 heißt es ganz ausdrücklich: Estque media speculatio usw.

Am allerschärfsten aber ist die Idealisierung, welche die Geometrie erst zur Wissenschaft erhebt im complem. theol. ausgesprochen, so z. B. im Kap. V, p. 1111, zugleich mit der schematischen Bedeutung der Figur: Schau', wie wunderbar der Mathematiker, indem er die Figur, z. B. ein Polygon hinzeichnet, im Beispiel das Unendliche erfaßt. Denn, indem er ein Dreieck von bestimmter Größe hinzeichnet, schaut er nicht auf das bestimmte Dreieck, sondern auf das Dreieck schlechthin, losgelöst von aller Größe und Eigentümlichkeit kontinuierlicher oder diskontinuierlicher Größenwerte. Er muß die Größe nur hinzufügen, um das Vorbild des Dreiecks, das er im Geiste hat, sinnlich wahrnehmbar zu machen. Das Dreieck im Geiste ist nicht groß noch klein, hat nicht Größe, nicht Zahl, ist folglich unendlich (als Komplex aller Dreiecke).

Nicht minder deutlich spricht Kap. II, p. 1107; da es zugleich den Gipfelpunkt der Erkenntnislehre des Kardinals bezeichnet, die man in das Schlagwort zusammenfassen könnte: Das Erkennen ist die Erkenntnis, scheint es mir lohnend, es wörtlich wiederzugeben:

„Jedermann weiß, daß in den mathematischen Wissenschaften (Quadrivium) die Wahrheit genauer erfaßt wird als in den andern freien Künsten und daher sehen wir, daß die, welche von der Geometrie kosten, an dieser Wissenschaft mit bewunderungswerter Liebe hängen, gleich als wenn in ihr die Speise des geistigen Lebens reiner und einfacher enthalten wäre. Denn nicht kümmert sich der Geometer um Linie oder Figuren aus Erz, Gold oder Holz, wohl aber so wie sie an sich sind, obschon sie ohne Materie nicht angetroffen werden. Er faßt, heißt dies, die sinnenfälligen Figuren mit dem Sinnesorgan des Auges auf, damit er mit dem Auge des Geistes die geistigen beschauen könne. Und diese geistige Schau ist nicht minder wahr als die sinnliche, und um so wichtiger, je mehr gerade der Geist die Gestalten an und für sich betrachtet, losgelöst von jeder Veränderungsmöglichkeit der Materie. Der äußere Sinn dagegen erfaßt sie nie ohne diese, denn die Figur erhält ihre Veränderlichkeit aus der Verbindung mit der Materie, welche notwendigerweise bald diese bald jene sein kann, weshalb das Dreieck auf diesem Estrich ein anderes ist als das an der Wand, und die Figur im einen richtiger ist als im andern. Und daher ist sie aus keinem Stoff so richtig und genau, daß sie nicht richtiger und genauer sein könnte. Der allem Veränderlichen entzogene Geist wird sie daher frei von Vieldeutigkeit erblicken, denn sich selbst findet der Geist ohne die von den Sinnen stammende Veränderlichkeit. Der Geist ist also von sinnlicher Materie frei und verhält sich zu den mathematischen Figuren gleichsam wie die gestaltgebende Kraft [εἶδος]. Würde man jene Figuren Ideen nennen, so wäre der Geist die Idee der Ideen und folglich die Figuren im Geiste wie in ihrer Idee und deswegen eindeutig. Was also auch der Geist betrachten möge, das betrachtet er an und für sich. Was aber von aller Veränderbarkeit losgelöst ist, das ist nichts anderes als die Wahrheit. Denn die Wahrheit ist nichts anderes als das Fehlen jeder Veränderungsmöglichkeit. Unser Geist nun, obwohl er frei von jeder Vieldeutigkeit ist, die von den Sinnen stammt, ist doch nicht frei von jeder andern. Es sieht also der Geist, obwohl er nicht jeder mentalen Schwankung ermangelt, die Figuren frei von jeder Verschiedenheit, er erblickt sie, heißt dies, in ihrer Wahrheit, aber nicht in der Außenwelt, denn im Geiste erschaut er sie, und das kann nicht außerhalb desselben geschehen. Denn ein geistiges Schauen gibt es nicht außerhalb des Geistes, so wie die Sinne bei sinnlichem Wahrnehmen nicht außerhalb der Sinne, sondern innerhalb derselben wahrnehmen. Der Geist aber, der das an und für sich Unveränderliche schaut, schaut, obwohl er Änderungen unterliegt, das Unveränderliche nicht in seinem [des Geistes] veränderten Zustand — es heißt ja, der Zorn hindert das Wahre zu sichten — sondern erschaut es in seinem eigentlichen Zustande. Dieses ist die Wahrheit; wo also der Geist erschaut, was er schaut, da ist seine eigene Wahrheit, und die von Allem, was er schaut. Somit findet sich im Menschengeist das Licht der Wahrheit, durch das er ist und in dem er sich und Alles sieht. So wie der Gesichtssinn des Wolfes auf dem Licht beruht, in dem der Wolf Alles sieht, was er sieht. Wenn Gott dem Wolfe, damit er zur Erhaltung seines Lebens jagen könne, mit den Augen zugleich solche Sehkraft schuf, ohne die er nicht in der Nacht seinen Lebensunterhalt hätte suchen können, so läßt auch Gott den Menschengeist nicht in Stich, der aus der Jagd nach Wahrheit seine Nahrung zieht, sondern hat dem Geiste das nötige Licht mitgeschaffen. Aber der Geist erschaut die Wahrheit, durch welche er sich erkennt, nur weil sie vorhanden ist und nicht in ihrem Wesen. So sieht der Gesichtssinn nicht die Klarheit des Sonnenlichts, er weiß jedoch aus Erfahrung, daß er ohne diese nicht sehen kann, und so begreift er, daß sie existiere, aber nicht ihr Wesen. Und zu einer Vorstellung von der Größe dieses Lichtes gelangt er auch nicht, er weiß nur, daß sie über seine Kraft geht, und das nämliche gilt vom Geiste. So ist die Wahrheit im Menschengeist gleichsam ein unsichtbarer Spiegel, in dem er Alles für ihn Sichtbare sieht. Jene mit dem Spiegel verglichene Ursprünglichkeit ist aber so groß, daß sie die Kraft und Schärfe unseres Geistes übersteigt. Doch je mehr sich nach und nach die Kraft des Geistes steigert und geschärft wird, um so sicherer und heller erschauen wir Alles im Spiegel der Wahrheit. Es wächst aber jene Kraft durch Nachdenken, so wie der Funke beim Brennen aufglüht. Und weil sie den Zuwachs ihrer Leistungsfähigkeit von dem Licht der Wahrheit selbst erhält, wird sie mehr und mehr in Tätigkeit versetzt. Von hier aus, sag' ich, wird jene Kraft fort und fort entwickelt, denn sie erlangt nie eine solche Stufe, auf der das Licht der Wahrheit nicht die Leuchte des Geistes noch höher hinauf nach sich ziehen könnte. So ist das beschauliche Nachdenken des Geistes erquicklichste und unerschöpfliche Nahrung, durch die er mehr und mehr eingeht in sein freudenreichstes Leben.

Diese beschauende Tätigkeit ist eine Bewegung des Geistes vom Sein zum Wesen, aber weil Sein und Wesen durch einen unendlichen Abstand getrennt sind, so kann diese Bewegung des Geistes nie aufhören, und sie ist die erfreulichste Bewegung, weil sie zum [dauernden] Leben des Geistes hinführt. Und in diesem Sinne enthält jene Bewegung die Ruhe, denn diese Bewegung macht nicht müde, sondern erweckt feurige Begeisterung. Und je schneller der Geist bewegt wird, um so erfreulicher wird er durch das Licht des Lebens zu seinem eigenen Leben geführt. Es vollzieht sich die Bewegung des Geistes gleichsam auf der Linie, die zugleich gerade und kreisförmig ist. Denn sie geht aus von der Überzeugung, daß die Wahrheit sei oder vom Glauben und führt zum Wissen oder dem Wesen der Wahrheit. Und ob sie gleichsam durch eine unendlich große Linie getrennt sind, so sucht jene Bewegung sie auszufüllen und im Anfang das Ende zu finden, im Sein das Wesen. — Denn sie sucht jene Koinzidenz, wo Anfang und Ende der Bewegung zusammenfallen, und das ist die Kreisbewegung. So sucht der spekulative Geist auf direktestem Wege zur Koinzidenz des am weitesten Getrennten zu gelangen. Daher wird die Bewegung des denkenden und Gott ähnlichen Geistes abgebildet durch die Linie, in der Gerade und Kreis zusammenfallen. Dies erfordert, daß es ein einfaches gemeinsames Maß des Kreises und der Geraden gibt. Wie sie aber in der Einheit eines solchen Maßes zusammenfallen könnten, und wie die Gerade und der Kreis, hat nicht nur für die Theologie, sondern auch für die Mathematik das Büchlein de mathematicis complementis gezeigt, das uns überzeugte, man könne ohne Bedenken dasselbe, was man in der Theologie theologisch bekräftige, in der Mathematik mathematisch beweisen."

Ich hebe die große Bedeutung hervor, die hier wie so oft von Cusan der Bewegung für die Entwicklung beigelegt wird, ferner die Auffassung des Wissens als Grenze des Glaubens, die eminent mathematische Färbung der Erkenntnislehre, und wie hier ein transzendenter Grund für das gemeinsame Maß der Geraden und des Kreises gegeben wird, vergleichbar dem arithmetischen Beweise aus der Statik dafür, daß die Dreiecks-Medianen zusammentreffen. Und die Annäherung des „Dei formis" Menschengeistes an Gott ist hier fast bis zur Plotin-Augustinischen „Háptē" getrieben und wird kaum von Idiota III, 13, p. 163, Z. 24 übertroffen: Mens est creata, ab arte creatice, quasi ars illa, se ipsam creare vellet.

Die biologisch-physiologischen Anschauungen Cusas finden sich kompakter in de conjecturis II c. 14—16 und weit klarer im achten Kapitel von Idiota III: De mente; er legt sie dort dem Philosophen in den Mund, der sie als „angelernte" bezeichnet, und sie dürften wohl auf Rasi und Ibn Sina (Avicenna) zurückgehen. Der Seele ist ein ganz zartes Fluidum (spiritus tennissimus) „beigemischt", daß durch alle Adern verbreitet der Seele als Laufbahn dient, wie das Blut dem Fluidum. In de ludo globi I, p. 215, Z. 2, heißt es: In corpore igitur est tota anima in qualibet parte animae, sicut, ejus creator in qualibet parte mundi: Das ist also der Grundgedanke von Ernst Mach. In groben Zügen wird in Idiota III, 8, die Lehre von den spezifischen Sinnesenergien entwickelt, welche soviel später

Joh. Müller ausgebaut hat. Die Sinne geben keine deutliche Raumvorstellung, dazu dient die Phantasie, die einen noch zarteren spiritus besitzt, der im vorderen Teil des Kopfes in der Zelle des Phantasie lokalisiert ist, und zur logischen Unterscheidung bedient sich die Seele des allerfeinsten spiritus, der in der Mitte des Kopfes in der Zelle des Verstandes seinen Ort hat. Man sieht, es fehlt bei Cusan nicht einmal die allerdings von Golz und Loeb so ziemlich völlig widerlegte H. Munksche Lokalisationstheorie. Lange vor Lord Bacon und Schopenhauer hat er den Anteil des Verstandes am Sehen hervorgehoben, hierfür kommt besonders De quaerendo Deo in Betracht.

Über die im engeren Sinne mathematischen Schriften des Kardinals kann ich mich kurz fassen und das erste Programm von Schanz als bekannt voraussetzen; diese Schriften beziehen sich sämtlich auf die Verwandlung von Geradem in Krummes und umgekehrt; Cusan muß z. Z. als Erfinder der isoperimetrischen Methode gelten (vgl. Entwickl. der Elem.-Geom. im 18. Jahrh., p. 72) und sie entspringt auch natürlich genug aus seinem Grundgedanken der Koinzidenz, der selber höchst wahrscheinlich auf der geometrischen Grundlage der Koinzidenz der geraden Linie mit dem Kreise beruht, bei der ebenso natürlich die Gerade den Ausgangspunkt bildet. Der Mann, der Compl. theol. cap. 4, p. 1110, Z. 29, den Satz aussprach: „Quod nihil est scibile quin actu sciatur per scientiam infinitam et quod scientia infinita est veritas, aequalitas et mensura omnis scientiae.“ (Was wir wissen, wissen wir durch die Wissenschaft vom Unendlichen) hat sofort bemerkt und wiederholt ausgesprochen, daß, da jede der beiden Kurven in sich völlig homogen, die Koinzidenz im Unendlichgroßen identisch ist mit der Koinzidenz im Unendlichkleinen, der Koinzidenz des Bogen- und Streckenelementes und hat damit eine der Riemannschen Hypothesen antizipiert, auch bemerkt, daß sich diese Koinzidenz auf beliebige Kurven anwenden läßt.

Auffällig ist die Selbstverständlichkeit, mit der er in der ersten geometrischen Schrift De geom. transmut. von 1450 die isoperimetrische Methode einführt; an anderen Stellen, z. B. im compl. theol., Kap. XI, nimmt er die Autorschaft ausdrücklich in Anspruch. Wenn er dann sofort den Satz benutzt, die Flächeninhalte regelmäßiger isoperimetrischer Polygone wachsen mit der Seitenzahl, und hinzusetzt: „ut antea notum est", so braucht sich dieser Zusatz keineswegs, was ich Uebinger gegenüber bemerke, auf eine frühere Schrift, wie etwa „de quadratura", zu beziehen, sondern mit sehr viel größerem Rechte auf Zenodoros, dessen Schrift auch den Arabern bekannt war.

Eine andere Frage, die Schanz nicht entscheiden will, ist die, ob Cusa wenigstens einige seiner Konstruktionen für streng richtig gehalten habe. Abgesehen davon, daß er nie müde wird, den asymptotischen Charakter unseres Wissens hervorzuheben, sagt er wiederholt, daß π irrational sei, wenn er auch ab und zu seine Konstruktionen für genau erklärt. Der Widerspruch erklärt sich dadurch, daß er die Genauigkeit für die Praxis meint, für den Kreis auf dem Estrich, und die Irrationalität für den Kreis in mente, man vergleiche das Kapitel VI des Complementum theologicum, daß sich, was die Idealisierung der Mathematik betrifft, neben, ja über de Beryllo, cap. 32, stellt.

Ich gehe nun an der Hand der spezifisch mathematischen Schriften zu einer möglichst kurzen Ergänzung des Schanzschen ersten Programmes über, und insbesondere der ersten Schrift des Cusan:

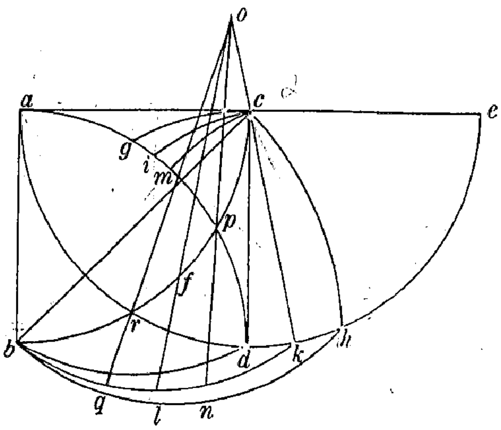
De transmutationibus Geometricis.

Die isoperimetrische Methode wird ohne weiteres eingeführt. Aber schon der erste, als selbstverständlich hingestellte, an sich richtige Satz erweckt schwere Bedenken. Der Satz lautet: Die Radien der Umkreise (r) nehmen mit abnehmender Seitenzahl (n) beständig zu, die der Imkreise (ϱ) beständig ab. Da ihm die Formeln $2\varrho' = \varrho + r$; $r'^2 = r\varrho'$ unbekannt waren, so war dies ihm auf dreierlei Art zu wissen möglich. Zunächst aus Tafeln der Kotangente und des Sinus, die ihm aus arabischen Quellen zugänglich sein konnten. Er hat zweifelsohne Kenntnis der Trigonometrie besessen, in welchem Umfange könnte nur aus der genauen Durchsicht der in Cues befindlichen Papiere festgestellt werden. Da Regiomontan seinen Albatani genau kannte, so wäre das an sich für Cusan auch möglich; ich halte die Kenntnis des Verlaufs der Kotangente für unwahrscheinlich. Zweitens konnte er sich mit dem folgenden oberflächlichen Raisonnement begnügen: Der Pythagoras zeigt, daß ϱ und r sich mit wachsendem n fortwährend nähern, also bilden die r für wachsende n eine fallende, die ϱ eine steigende Reihe. Und drittens, und dies ist wohl das Wahrscheinlichste, verließ er sich auf die Zeichnung, er muß sehr viel zeichnend probiert haben. Die Zeichnung in De arithm. compl., p. 992, zeigt, daß er weiß, daß $4(r' - \varrho') < (r - \varrho)$ ist. Ich bemerke beiläufig, daß es kein Wunder ist, daß diese hübsche Konstruktion mit der von Schanz p. 24 ausführlich wiedergegebenen noch hübscheren aus De math. compl. (Fig. p. 1014) mit in der Grenze der Genauigkeit vollkommen übereinstimmt", denn beide führen genau zu derselben Formel für R, nämlich $R = (r\varrho' - r'\varrho) : (d - d')$, wo $d = r - \varrho$ und die Seitenzahlen der beiden Polygone beliebig sind. Auch dies ist an sich nicht weiter „bemerkenswert", sondern folgt aus der Konstanz des Umfangs. Uebinger hat, wie es scheint, den Text nicht richtig gelesen. Merkwürdig sind nur die beiden Konstruktionen an sich.

Es folgt dann als erste Prämisse die bekannte an das gleichseitige Dreieck anknüpfende Konstruktion; die Figur bitte ich aus p. 946, oder Schanz, Fig. 1, oder Uebinger, Phil. Jahrb. 9 S. 55 zu entnehmen. Ich habe vgl. Schanz, Note 2, p. 23, die Konstruktion in dem hiesigen Exemplar der Schwenterschen Delicia nicht gefunden. Lösung $R = 1{,}25\, p \sqrt{21} : 36$, ergibt π, s. Schanz, p. 23, „etwas genauer als das [nicht] Archimedische $3^1/_7$". Sie ist keine reine „Zufallslösung", sie beruht auf experimenteller Grundlage und einem gewissen Verständnis des Begriffs der stetigen Funktion einer reellen Variablen. Daß dies Verständnis nicht allzutief geht, vielleicht nicht einmal so weit wie bei Oresmus, zeigt die „tertia habitudo", die Verlängerung von ai im Verhältnis $bi : bc$, er sieht nicht, daß, wenn die halbe Dreiecksseite $fb = 1$ und $fi = x$ gesetzt wird, die Funktion $an = (^1/_3 + x^2)(3 - x)^2 : 4$ nicht monoton von $x = 0$ bis $x = 1$ wächst, sondern für x etwa gleich 0,12, genauer $^1/_{12}(9 - \sqrt{57})$ ein

Minimum hat. Der Schluß des Cusan ist also falsch. (Ein ähnlicher falscher Schluß findet sich in de umbra et chordis).

Hochinteressant ist das „secundum praemissum", und da es bei Schanz und Uebinger fehlt, gehe ich ausführlich darauf ein. Der Doppelsatz ist im besonderen und allgemeinen falsch, und dennoch bekundet er wie kein anderer die hohe mathematische Veranlagung Cusans. Der Zweck ist das Verhältnis zweier krummen Linien — und das sind für ihn beinahe ausschließlich Kreisbogen — gleich dem zweier Strecken zu machen. Er geht vom ersten Ähnlichkeitssatz[1]) aus und zeigt zunächst, daß die Konstanz der Seitenverhältnisse nur bestehen kann, wenn zwei Seiten des Dreiecks Bogen sind, und zwar der eine konkav und der andere konvex (von der geradlinigen Seite aus betrachtet) und zwar der konvexe nicht kleiner als der konkave (versehentlich hat er es vertaucht). So gelangt er zu seiner Figur. „Ich habe also den Quadranten *bc* von Zentrum *a* aus beschrieben, und mit der Spitze des Zirkels in *c* den Halbkreis *ade*. Ich habe nun von der besprochenen Art Dreiecke das kleinste gesucht und sah, daß die Linie *cd* den Kontingenzwinkel[2]) mit dem Quadranten beschreibt" Er schlägt dann von *b* aus den „geheimnisvollen" (occultum) Quadranten *ad*. [Er meint mit Recht, daß in diesem Quadranten, auf dem die Zentren aller der veränderlichen zweiten Bogenseiten der Dreiecksschar liegen, deren erste stets der Quadrant *bc* ist, das Geheimnis der Konstruktion stecke]. Um *d* schlägt er den Kreis mit *dc* der geraden Seite des Dreiecks, welche den Bogen *ad* in *g* schneidet, um *g* den Bogen *bd*, so ist das Dreieck aus den Bogen *bc*, *bd*,



1) Die Auffassung der Parallelen als Abstandslinie lange vor Clavius weist wieder auf arabische Quellen (Ptolemaios).

2) Über den Kontingenzwinkel vgl. M. Simon, Euclid. S. 81—90.

und der Strecke dc das kleinste der „besprochenen“ Dreiecke. Dann wird das größte erhalten, indem man mit der Quadrantensehne bc um b den Kreis beschreibt. Er beweist sowohl das Eine wie das Andere; bh ist Quadrant, weil das Dreieck bmh mit bac in den drei Seiten übereinstimmt. Die „Koinzidenz“ des Kleinsten und Größten — die stets bei Cusan ihre Rolle spielt — findet nun in dem ausgezeichneten Punkt k, der Mitte des Bogens dh statt, und der Bogen bk ist dann die gesuchte zweite Seite des Dreiecks, für die sein Satz gilt:

„Verbindet man auf dem Bogen bc und bk entsprechende Teilpunkte, so schneiden die Verbindungslinien die gerade Seite kc im selben Punkt o, und die Verbindungsstrecken, wie lf, qr usw. haben zu ck das entsprechende Verhältnis.“

Er gibt zwar außer der Berufung auf die Koinzidenz auch nicht den Schatten eines Beweises für diesen Satz, es liegt aber zugrunde der so häufig bestätigte, auf der lex parsimoniae naturae beruhende Gedanke, daß ausgezeichnete Eigenschaften gehäuft werden, und somit ausgezeichnete Punkte auch ausgezeichnete Eigenschaften besitzen. Obwohl der Satz falsch ist, so ist er doch eine geradezu geniale Leistung, da er ihn ersonnen hat, um das Verhältnis eines beliebigen Bogens zum Quadrant in ein Streckenverhältnis umzusetzen.

Die Prüfung des Satzes liefert dem Lehrer der analytischen Geometrie eine hübsche Übungsaufgabe. Die Rechnung wurde mir dadurch erleichtert, daß mir Herr Bauschinger die „Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10″ zu 10″ herausgegeben von Dr. W. Jordan“ lieh (Opus Palatinum 1897). Ich erhebe auch an dieser Stelle, wie Hoüel schon vor 50 Jahren getan, die Forderung, in die für die Schule bestimmten Tafeln eine Tabelle der trigonometrischen Funktionen selbst, mit Tangens und Kotangens, von Minute zu Minute einzufügen. Bei der „größeren Hälfte“ der Schulaufgaben sind die Logarithmen entbehrlich.

Es sei der Radius gleich 1, und die Punkte: $a\{0, 0$; $b\{0,1$; $c\{1,0$; $d\{1,1$; $h\{\alpha, \beta$, wo $4\alpha = 3 + \sqrt{7}$, $\beta = 1 + \sqrt{7}$; $\measuredangle\, dch = 24^0\,17'\,42{,}8''$; $\measuredangle\, dck = \varphi = 12^0\,8'\,51{,}5''$. Es ist Punkt $k\{a, b$, wo $a = 1 + \sin\varphi$; $b = \cos\varphi$, $a^2 + b^2 = 2a$, Punkt $i\{\lambda, \mu$, wobei

$\lambda^2 + \mu^2 = 2\mu$ und μ die (zweite) Wurzel der quadratischen Gleichung:

$\mu^2(a^2 + \delta^2) - 2\mu(a^2 - \delta\gamma) + \gamma^2 = 0$, wo $\delta = 1 - b$, $\gamma = a - 0{,}5$ und $\lambda a = \mu\delta + \gamma$ ist; es ergibt sich $\lambda = 0{,}5904931$; $\mu = 0{,}1929572$. Es werde ein beliebiger Punkt auf Quadrant bc mit p bezeichnet und der entsprechende Punkt auf bk mit τ, dann ist, wenn $\sphericalangle bap$ kurz p heißt, $p \{ \sin p, \cos p$ oder s, c, und $\tau \{ x_\tau, y_\tau$, wo $x_\tau = \lambda + \cos t$, und $y_\tau = \mu + \sin t$, wo t der Richtungswinkel der Geraden τi ist. Wird $bik = j$ gesetzt, wo $j = 74^0 30' 12{,}3''$, so ist, da der Richtungswinkel $bi = 126^0 11' 31{,}2''$ ist, wenn das variable Teilungsverhältnis des Quadranten Θ genannt wird:

$$t = 126^0 11' 31{,}2'' - \Theta j.$$

Es ergibt sich für $p\tau = d$ die einfache Gleichung

$$d^2 = 2(1 - \mu + x_\tau(\lambda - s) + y_\tau(\mu - c)).$$

Für die Koordinaten des Schnittpunktes O_t von kc und $p\tau$ erhält man

$y_t[(x_\tau - s) + \nu(c - y_\tau)] = c(x_\tau - 1) + y_\tau(1 - s)$; $x_t = 1 + \nu y_\tau$, wo ν eine Abkürzung für $\mathrm{tg}\varphi$ und $\lg \nu = 0{,}3329446$ ist.

Θ	d	$\Theta - d$	x_t	y_t
0,01	0,0093059	+ 0,0006941	+ 0,9228045	— 0,3586307
0,1	0,0944754	0,0055246	0,9232010	0,3567887
0,2	0,1916573	0,0083427	0,9234059	0,3558370
0,3	0,2916074	0,0083926	0,9233678	0,3560137
$^1/_3$	0,3252580	0,0080753	0,9233046	0,3563080
0,4	0,3930288	0,0069712	0,9230975	0,3572694
0,5	0,4954418	0,0045082	0,9226010	0,3595759
0,6	0,5983348	0,0016652	0,9218847	0,3629038
$^2/_3$	0,6667754	— 0,0001087	0,9212874	0,3656787
0,7	0,7008840	0,0008840	0,9209508	0,3672426
0,8	0,8024622	0,0024622	0,9198018	0,3725803
0,9	0,9023920	0,0023920	0,9184366	0,3789227
0,99	0,9903627	0,0003627	0,9170209	0,3854998

Der Sprache der Zahlen in der vorstehenden Tabelle auch nur ein Wort hinzuzufügen, ist überflüssig. Die Rechnung hat

Herr Dr. B. Cohn gütigst kontrolliert und bei den geringen Abweichungen habe ich seine Zahlen als des berufsmäßigen Rechners eingesetzt.

Die Tabelle zeigt, daß die Differenz $d - \Theta$, welche in b und k verschwinden muß, wenn τ von b sich nach k bewegt, zunächst unter 0 sinkt. Sie erreicht etwa bei 0,3 ihr Minimum, wächst dann stetig und geht etwa bei $^2/_3$ durch 0, und hat etwa bei 0,8 ihr Maximum, um dann sich bis k der 0 stetig zu nähern. Der absolute Betrag erreicht nirgends ein Hundertstel. Daß die Schnittpunkte auf kc z. B. für $^1/_3$ und $^2/_3$ nicht genau zusammenfallen, zeigt jede Zeichnung in größerem Maßstab deutlich, aber man ersieht, daß die Schnitte zwischen 0,01 und 0,9 sehr nahe beisammen liegen. Von 0,99 bis 1 müssen die Unterschiede rapide zunehmen. Daß die Schnittpunkte ungefähr zusammenfallen, lehrte den Kardinal der Augenschein. Von dem Satz über das Verhältnis, dem Analogon zum ersten Ähnlichkeitssatz ist er ausgegangen, aber daß er das dazu passende Drei- cbk gefunden hat, ist „stupend".

Das „tertium praemissum" (p. 962) gibt die Konstruktion der beiden mittleren Proportionalen, welche er für die Körperverwandlung braucht. Daß er die von Eutokios fälschlich Platon zugeschriebene Lösung (Gesch. d. Math. im Altertum, S. 201) wählt, beweist, daß er nicht nur den Archimedes — man lese die Widmung der Math. complementa an den Papst Nikolaus V., p. 1104 — kannte, sondern auch den Kommentar des Eutokios zu Kugel und Zylinder. Diese Erkenntnis erklärt auch seine letzte und sachlich bedeutendste Leistung, die Aufstellung der allerdings erst von Huygens wirklich bewiesenen Näherungsformel $x = 3 \sin x : (2 + \cos x)$. Der Text des Kardinals ist bei Schanz im Anschluß an G. A. Kästner völlig befriedigend behandelt, aber schon der Annotator Toussaint hat (Text und Fig. p. 1138), die, wie ich vermute, wirkliche Quelle aufgedeckt, die Verlängerung des Durchmessers um den Radius, welche auch die beträchtliche Aufrundung bei Cusan sofort erklärt, der die Klarheit seinem Prinzip der Koinzidenz geopfert hat. Er kannte den Eutokios, er kannte daher auch die Dreiteilung des Winkels von Archimedes durch Neusis (l. c. S. 302) und es lag ihm nahe, den Durchmesser um den Radius zu verlängern, wo dann das Auge die Übereinstimmung des Bogens mit der Tangente zeigt, die er ziehen mußte, weil er wußte, daß der Bogen zwischen Sinus und trigonometrischer Tangente liegt. Zur Aufstellung der Formel genügte dann der Hauptähnlichkeitssatz.

Die Rücksicht auf den Raum zwingt zum Schluß. Ich fasse mein Urteil über Cusan als Mathematiker dahin zusammen: Hätte Cusan die theoretische Durchbildung Regiomontans besessen und wäre seine Zeit nicht durch den Dienst der Kirche und den beklagenswerten Kampf um sein Bistum Brixen so völlig in Anspruch genommen worden, Cusan stände als reiner Mathematiker eben so groß da, wie als Theosoph und mathematischer Philosoph.

Straßburg i. E., 13. Sept. 1911.

FESTSCHRIFT

HEINRICH WEBER

ZU SEINEM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAG

AM 5. MÄRZ 1912

GEWIDMET VON

FREUNDEN UND SCHÜLERN

MIT DEM BILDNIS VON H. WEBER IN HELIOGRAVÜRE
UND FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912