



Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Uebinger, Johannes** (1854–1912)

Titel: **Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus**

Quelle: Philosophisches Jahrbuch.
Band 8 (1895), S. 301–317, 403–422.
Band 9 (1896), S. 54–66, 391–410.
Band 10 (1897), S. 144–159.

Inhalt:

- I.** Die mathematischen Studien bis 1450
 - 1. Auf der Universität Padua
 - 2. Im Elternhaus zu Cues
 - 3. Deren erste Verwertung 1440
- II.** Die Verwandlungen 1450
 - 1. De quadratura circuli
 - 2. De geometricis transmutationibus
 - 3. De arithmetici complementis
- III.** Die Ergänzungen
 - 1. De mathematicis complementis
 - 2. Dialogus de quadratura circuli 1457
 - 3. De una recti curvique mensura
- IV.** Die Vollendung 1458
 - 1. De beryllo
 - 2. De mathematica perfectione

Schlusswort

1932, 1527

Philosophisches Jahrbuch.

Auf Veranlassung und mit Unterstützung

der

Görres-Gesellschaft

unter Mitwirkung von

Dr. Jos. Pohle,

o. ö. Prof. an der Königl. Akademie
zu Münster i. W.

und

Dr. Jos. Dam. Schmitt,

Prof. an der philos.-theol. Lehranstalt
zu Fulda

herausgegeben von

Dr. Const. Gutberlet,

Professor an der philos.-theologischen Lehranstalt in Fulda.



VIII. Band. Jahrgang 1895.

Fulda 1895.

Druck und Commissions-Verlag der Fuldaer Actien-Druckerei.

M
29 6/5

Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus.

Von Dr. Joh. Uebinger, Prof. der Philosophie in Posen.

„In den Wissenszweigen der Mathematik war seiner Zeit niemand besser als Nikolaus unterrichtet“, schreibt 1469 der Bischof von Aleria.¹⁾ Zu diesem vielsagenden Lobspruche nehme man die steigende Beachtung, welche die mathematischen Schriften des Cusanus seit den letzten hundert Jahren gefunden. In dieser Hinsicht sei, um der zeitlichen Aufeinanderfolge die ihr gebührende Rechnung zu tragen, zuerst Kästner²⁾, dann Klügel³⁾, Scharpff⁴⁾, Schanz⁵⁾ und zuletzt, aber nicht zum wenigsten, Cantor⁶⁾ erwähnt. Darnach legt sich einem von vornherein die Annahme nahe, derjenige, dem diese allseitige Beachtung und jenes hohe Lob gilt, habe für seine Zeit in der That etwas Bedeutsames geleistet.

Auf den Schriften jener verdienten Forscher aber soll sich die unserige aufbauen; manche Aufschlüsse wird sie diesen entnehmen können; manches Neue muss sie, soll sie ein Recht zum Erscheinen haben, ihrerseits hinzufügen. Dieses Neue aber soll hauptsächlich in der bisher noch nicht versuchten genetischen Betrachtungsweise des Gegenstandes bestehen und durch diese zugleich gewonnen werden. Demzufolge wird in erster Linie die Entwicklung zu berücksichtigen sein, welche der Denker in seinen mathematischen Ansichten nachweislich durchmachte, die Personen sind namhaft zu

¹⁾ „In disciplinis mathematicis suo tempore Nicolao doctior fuit nemo“, Ioannes Andreas ep. Aleriensis, Epistola dedicatoria zum Apulejus, gerichtet an Papst Paul II., abgedruckt bei Botfield, Praefationes et epistolae editionibus principibus auctorum veterum praepositae p. 68—77. — ²⁾ Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften. 1796 ff. Bd. I, 298 ff., 477 ff. bzw. 572 ff. — ³⁾ Mathematisches Wörterbuch. 1803 ff. Bd. IV, 80 ff. — ⁴⁾ Der Cardinal und Bischof Nikolaus von Cusa als Reformator in Kirche, Reich und Philosophie des fünfzehnten Jahrhunderts. 1871. S. 294 ff. — ⁵⁾ Der Cardinal Nikolaus von Cusa als Mathematiker. Gymnasial-Programm Rottweil 1872. — ⁶⁾ Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1880 ff. Bd. II. (1892) S. 170 ff. Philosophisches Jahrbuch 1895.

machen, mit welchen er dessenthalb in besonderen Gedankenaustausch trat, die Phasen, welche er durchmachte, sind in ihren hervorstechenden Zügen möglichst genau zu zeichnen. Zwar lückenlos wird, wie leicht zu erwarten, die in Aussicht gestellte Zeichnung nicht ausfallen, wer unter allen Umständen auf einer solchen bestehen wollte, müsste meist darauf verzichten, überhaupt etwas zu bieten; aber an dem guten Willen soll es nicht fehlen, ein möglichst vollständiges und zuverlässiges Bild von der Entwicklung zu liefern, welche Cusanus in der Mathematik erlebte, und von den Schriften, in welchen jene Entwicklung zum äusseren Ausdruck kam.

Aus der angegebenen Methode sodann ergibt sich die weitere Zergliederung der gestellten Aufgabe von selbst. Ihr zufolge nämlich kommen naturgemäss zur Sprache

I.

Die mathematischen Studien bis 1450.

In jungen Jahren verliess der Knabe das Elternhaus. Nachdem „er von seinen Eltern von Cues abgewichen“, ward er „im gräflichen Hause zu Keyl am ersten aufgenommen . . , allwo er, der gemeinen Aussage nach, anfänglich in der Kuch gedient, nachgehends aber wegen seines Verstandes und Geschicklichkeit, so man an Ihm schon in seiner Jugend verspürte, denen damalen studierenden jungen Herrn theils zur Zeitvertreib theils auch zur Aufwartung und Büchertragen beygesellet wurde.“¹⁾ Auch ist er „nachgehends mit den jungen Herrn in fremde Länder auf Universitäten verreiset und endlich bis in Rom, allwo er dann durch seine Scienz und Wissenschaften sein Glück und Fortun gemacht.“²⁾

¹⁾ Repertorium aller nothwendigen Nachrichten über Renten und Gefälle, auch sonstiger im Hospital Cues eingeführten Observanzen und Statuten S. 82. Dies „Repertorium“ ward 1762 durch den umsichtigen Rector des Hospitals Stephan Schönes (1754-83; † 1785) angelegt und befindet sich noch heute unversehrt an Ort und Stelle. Das hier angezogene Schriftstück wird der Rector unter den Urkunden des Hospitals vorgefunden und darnach wie in so vielen anderen noch nachweisbaren Fällen in seine Sammlung aufgenommen haben; heutzutage findet sich ein derartiges einzelnes Schriftstück nicht mehr unter den Urkunden daselbst. Eben auf dieses Schriftstück aber nimmt auch Harzheim, Vita Nicolai de Cusa Trev. 1730 augenscheinlich Bezug, wenn er cap. 3 derselben von Cusanus zu erzählen weiss, er habe im Hause des Grafen von Manderscheid-Kayl die Dienste eines *famulus* versehen. — ²⁾ A. a. O.

Die letzten, sehr allgemein gehaltenen Angaben über die Lehr- und Wanderjahre lassen sich auf Grund anderweitiger zuverlässiger Nachrichten dahin näher bestimmen, dass der lernbegierige, talentvolle Jüngling zuerst die Stadtschule zu Deventer¹⁾, dann 1416 die Universität Heidelberg²⁾, darauf mehrere Jahre hindurch, wahrscheinlich 1418—1423, die Universität Padua³⁾, sodann 1424 die ewige Stadt⁴⁾ und endlich, in die deutsche Heimath zurückgekehrt, 1425 die Universität Köln⁵⁾ besuchte. Von den Studien an den genannten Orten kommt hier nur ein Theil derjenigen in Betracht, welche er

1. Auf der Universität Padua

machte. Nur hier nämlich bot sich neben den fachwissenschaftlichen, juristischen, für die aus Liebhaberei betriebenen mathematischen eine günstige Gelegenheit. Seit 1422 las daselbst Prosdocimo de' Beldomandi über Arithmetik, Geometrie und Astronomie.⁶⁾ Unter den sonstigen Lehrern der Hochschule interessirte sich der bekannte Humanist und Pädagoge Vittorino von Feltre ausser den lateinischen und griechischen Klassikern auch für die Elemente des Euklid.⁷⁾ Darüber, ob Cusanus während seiner Paduaner Studienzeit zu jenen in nähere Beziehung getreten, ist, soweit ich weiss, nichts bekannt.

Dagegen wurde höchstwahrscheinlich während eben derselben jene Freundschaft erstmals angeknüpft, welche ihn zeitlebens mit dem später so berühmten Florentiner Arzte und Astronomen Paolo dell Pozzo Toscanelli (1397—1482)⁸⁾ verband. „Mein theuerster

1) Dumber, *Analecta* I, 173. — 2) Unter dem dritten Rectorate des Nikolaus von Bettenberg, welches vom 20. Decbr. 1415 bis 23. Juni 1416 währte, ward „Nycolaus Cancer de Coesze cler. Trever. dyoc.“ immatriculirt; vgl. Töpke, *Die Matrikel der Universität Heidelberg* I, 128. — 3) „... parum post 22. annum aetatis (d. i. 1423) doctor studii Paduani...“ vgl. Uebinger, *Zur Lebensgeschichte d. Nik. Cusanus*. *Hist. Jahrb.* 1893. S. 549. — 4) Vgl.: „Vidi papam Martinum Romae populum non persuadere potuisse...“ in den sog. *Excitationen* lib. IX. fol. 163^a der Pariser Ausgabe und mit dieser Stelle Raynald ad annum 1424 Nr. 18; Gregorovius, *Gesch. der Stadt Rom* VII³, 9; Waddingus, *Annales* X, 80; Pastor, *Geschichte der Päpste*. I, 180. — 5) „Nicolaus de Cusa Doctor in Iure Canon., Trevir. Dioeces., nihil solvit ob reverentiam personae“, vergl. v. Bianco, *Die alte Universität Köln*. I, 841. „Nunc Cardinalis s. Petri ad Vincula et Episcopus Brixienensis (lies: Brixinensis)“, schrieb eine spätere Hand an die Seite. — 6) Facciolati, *Fasti* II, 116. — 7) Voigt, *Wiederbelebung des klassischen Alterthums*. I, 537. — 8) Vgl. *Nouvelle biographie générale*. Paris 1866 tom. 45 pag. 517 f.; Tiraboschi, *Storia della lett. ital.* tom. 6 p. 1.

Freund!“ schrieb er diesem 1450, „wenn Du auch mit höheren Dingen Dich beschäftigst, so wirf dennoch die hiermit übersandte Schrift nicht als unreif und ungeordnet beiseite.¹⁾ . . . Hältst Du mich ja doch seit unserem 20. beziehentlich 17. Lebensjahre durch ein ziemlich enges Freundschaftsband und ein gewisses herzliches Wohlwollen ohne Unterbrechung fest.“²⁾ Sieben Jahre später sodann lässt er denselben gesprächsweise äussern: „Bester Vater! Du weisst, dass ich von Kindheit an nach der Wahrheit forschte, welche in der Mathematik ziemlich klar wiederzustrahlen scheint.“³⁾ Von Kindheit an: auf Grund dieses Beisatzes war man geneigt, „fast auf gemeinsame Studien schon in Deventer“ zu schliessen. Allein daran ist, nachdem man weiss, wer denn der „gewisse Paulus“⁴⁾ eigentlich ist, kein Gedanke mehr. Auch nöthigt, genau genommen, jene Zeitangabe gar nicht zu einem solchen Schlusse; dass der eine von Kindheit an geforscht, braucht der andere nicht auch schon von Kindheit an gewusst, sondern kann dies ganz gut erst später erfahren haben. Und so wird es im vorliegenden Falle wirklich gewesen sein. Cusanus kam nach Padua, um kanonisches Recht, der Florentiner Toscanelli eben dahin, um Medicin zu studiren; die Vorliebe beider für Mathematik brachte sie

¹⁾ „Noli igitur, amice dilectissime, ista, etiamsi in maioribus versaris, quasi cruda indigestaque abicere“. De geometricis transmutationibus fol. 33^a. —
²⁾ „Sed quanto me ab annis iuventutis atque adolescentiae nostrae strictiori amicitiae nodo atque cordiali quodam amplexu indesinenter constrinxisti, . . .“, l. c. Die so wichtige Zeitbestimmung in dieser Stelle hat man theils im engsten Anschlusse an die Vorlage, theils etwas freier übertragen, demnach „von den Jahren unserer Jugend und des angehenden Mannesalters an“ (Scharpff a. a. O. 299) beziehungsweise „von Jugend und angehendem Mannesalter an“ (Schanz a. a. O. 2) geschrieben. Auf vielen Anklang darf eine solche Uebertragung, weil sie einen klaren Sinn nicht enthält, wohl schwerlich rechnen. Will man, wie in beiden Uebertragungen geschieht, *iuventus* und *adolescentia* auf ein und dieselbe Person beziehen, so müsste man, soll anders ein irgend ansprechender Sinn herauskommen, in die Conjunction *atque* eine Selbstverbesserung hineinlegen; etwas Derartiges aber erwartet man hier gar nicht. Viel näher liegt es, in dem Pronomen *nostrae* ein *tuae* und ein *meae* zu finden, *iuventus* auf Toscanelli und *adolescentia* auf Cusanus zu beziehen, was dem Alter, welches die beiden 1418 hatten, ganz vortrefflich entspricht. — ³⁾ Paulus. „Pater optime (d. i. Cardinal Cusanus), quia me nosti a puero veritatem quaesivisse, quae in mathematicis clarius videtur relucere“, Anfang des „Dialogus inter cardinalem sancti Petri . . . et Paulum physicum Florentinum“, welcher 1533 zum ersten Mal im Anhange der Werke des Regiomontanus, pag. 10—12 und darnach 1565 in der Baseler Ausgabe des Cusanus pag. 1095—1098 gedruckt ward. — ⁴⁾ Scharpff a. a. O. S. 103; Anm. 1.

einander näher und verband sie zu inniger Freundschaft für ihre ganze Lebenszeit.¹⁾

2. Im Elternhause zu Cues

finden wir 1428 unseren Doctor des kanonischen Rechtes, der, als er 1425 die heimische Universität bezog, aus Hochachtung vor seiner Person bereits keine Immatriculationsgebühren mehr zu bezahlen brauchte²⁾, damit beschäftigt, Schriften anderer für sich abzuschreiben. Von dieser Thatsache gibt uns zuverlässige Kunde eine Miscellenhandschrift, welche später in seine kostbare Handschriftensammlung überging und heutzutage in der Bibliothek des St. Nikolaus-Hospitals zu Cues unter D 26 sorgfältig aufbewahrt wird.

Was er abschrieb, waren, nach dem zu urtheilen, was sich erhalten hat, vorwiegend lullische Sachen, an erster Stelle „Das grosse Lehrbuch für das Erinnern, Nachforschen, Beweisen und Entdecken“. Indessen nicht dies grosse, ganz allgemein gehaltene, sondern ein an späterer Stelle sich findendes³⁾ besonderes und an jenes sich anschliessendes Buch ist es, über welches an dieser Stelle wenigstens einige Angaben zu machen sind, nämlich über das Buch „De quadratura et triangulatura circuli.“

Weder eine Ueberschrift, noch der Name des Verfassers findet sich dabei angegeben. Von vornherein ist daher, da sich unser Autor nachweislich frühzeitig mit geometrischen Studien beschäftigt hat, die Möglichkeit nicht auszuschliessen, dass er selbst die besagte geometrische Abhandlung geschrieben. Zwar bezeichnet Kraus⁴⁾ durch ein „Eiusdem“ den Raymundus Lullus als den Verfasser, jedoch erschien mir hierdurch die Sache nicht abgethan. Anders freilich gestaltete sich für mich die Sachlage, als ich in der einzigen Gesamtausgabe der Werke des Lullus⁵⁾ jene Schrift so aufgeführt fand⁶⁾,

¹⁾ Der um etwa vier Jahre ältere Freund, welcher den jüngeren um achtzehn Jahre überlebte, weilte im August 1464 an dessen Sterbelager im Bischöflichen Palaste zu Todi in Umbrien. Vgl. Uebinger, Zur Lebensgeschichte des Cusanus a. a. O. 558. — ²⁾ Vgl. oben S. 303 Anm. 5. — ³⁾ In der Handschrift selbst sind bisher weder die Blätter, noch die einzelnen Schriften mit Nummern versehen. Kraus, Die Handschriftensammlung des Cardinals Nik. von Cusa im Serapeum XXVI, 24 dagegen numerirt sehr zweckmässig die letztgenannten und gibt der hier in Frage kommenden die Nummer 23⁰, müsste mit ihr allerdings zu einem einzigen Ganzen auch noch das verbinden, was er eigens unter 24⁰ auführt. — ⁴⁾ A. a. O. — ⁵⁾ Mainz 1721—42. — ⁶⁾ Vol. I. Praefatio unter Nummer 173⁰.

dass sich an der Identität beider, somit auch an der Autorschaft des letztgenannten vernünftiger Weise nicht mehr zweifeln lässt.

Mit diesem Ergebnisse verliert allerdings, wie leicht ersichtlich, die Abhandlung in dem Zusammenhange hier gar sehr an Bedeutung. Genügen dürfte es daher, wenn ich es dabei bewenden lasse, daraus einige Sätze von solcher Art hervorzuheben, welche für die weitere Entwicklung, welche unser Autor durchmachte, bedeutsam werden sollten. Dahin gehört gleich zu Anfang der viele Jahrhunderte als Axiom geltende Satz, dass die Maasstäbe der geraden und die Maasstäbe der kreisförmigen Linien nicht ein und derselben Art sind, namentlich aber der Nachweis der Möglichkeit, dass sich der Kreis quadriren lässt, und ganz besonders die angeblich thatsächliche Verwandlung desselben in ein Quadrat bzw. ein Dreieck.

Auf der anderen Seite aber liefert schon die bloße Existenz der Abhandlung in der besagten Miscellenhandschrift einen vollgültigen Beleg dafür, dass sich unser Autor bereits in den zwanziger Jahren eingehend mit geometrischen Studien beschäftigte. Ueber ein ganzes Jahrzehnt später, soweit sich bislang nachweisen lässt, erfolgte sodann

3. Deren erste Verwerthung 1440.

Aehnlich wie das Mittelalter unterscheidet Cusanus Sinn, Verstand und Vernunft, geht über dasselbe aber dadurch hinaus, dass er unter anderem dem Verstande ein ganz besonderes Gebiet des Erkennens zueignet, die Mathematik.

Genau zu achten bittet uns der Autor 1440 auf die unergründliche Grundlage für alle zu erforschenden Wissenschaften.¹⁾ Ein jeder Satz, welcher sich nach dem Beweisverfahren des Verstandes als genau erweist, ist dies darum, weil er zum Bereiche des Verstandes gehört.²⁾ Das Gleiche gilt vom Sinne und auch von der Vernunft. Das Zusammentreffen der Gegensätze beispielsweise richtig zu erfassen, ist Sache der letztgenannten, der Verstand dagegen behauptet, dergleichen sei gar nicht möglich, verneint daher deren Zusammenfassen.³⁾ In ähnlicher Weise hält es ja auch der Sinn für ausgeschlossen, dass zahlreiche Gegenstände der äusseren Wahrnehmung für den Verstand

¹⁾ „Adverte quaeso ad profundam omnium inquirendarum scientiarum radicem“, De coniecturis II,1. — ²⁾ „Quoniam omne id quod rationis via prae-
cisum ostenditur ex eo tale est, quia de rationis coelo existit“, l. c. — ³⁾ „Negat
igitur ratio complicationem oppositorum et eorum inattingibilitatem coincidentiae
affirmat“, l. c.

eine einzige Gattung ausmachen.¹⁾ Der Gesichtssinn nämlich vermag nicht zu behaupten, dass zu der Welt des Wahrnehmbaren auch das Tönende und Süsse gehört. Darnach ist Grundlage für alle Behauptungen des Verstandes der Satz, das Zusammentreffen der Gegensätze lasse sich durch ihn nicht erfassen²⁾; daher eine jede Zahl gerade oder ungerade, daher die Ordnung, daher die Progression, daher die Proportion der Zahl.³⁾ Darum eben ist irrational das Verhältniss des Durchmessers zur Seite (eines Quadrates); sonst nämlich müsste sich ein Zusammenfallen von Geradem und Ungeradem ergeben.⁴⁾ Demzufolge steht auch der Durchmesser zur Peripherie in keinem rationalen Verhältnisse; das Zusammenfallen so verschiedener Linien erfasst nämlich der Verstand nicht.⁵⁾ Und um kurz und bündig viel zu sagen: Nichts wird man in der Mathematik wissen können, falls die Grundlage eine andere ist.⁶⁾ Ein jeder Satz, welcher nachweislich wahr, ist dies deshalb, weil sich, wäre das Gegentheil der Fall, unter der Hand ein Zusammentreffen von Gegensätzen ergäbe. Ebenso ist eine jede Wahrheit, welche sich durch den Verstand augenscheinlich nicht erfassen lässt, für diesen einzig deshalb unfassbar, weil das Wissen um dieselbe ein Grund dafür wäre, ein Zusammentreffen von Gegensätzen zu folgern. Und weil in der Mathematik jenes Princip klar hervortritt, darum sind deren Beweise so verständlich und dem Verstande zufolge so sehr wahr.⁷⁾ An ihnen findet der Verstand auch sein Wohlgefallen; sie bilden gewissermaassen die Entfaltung der ihm eigenen Kraft; in ihr schaut er sich selbst, wie er als eine zweite Vernunft an der reinen, eigentlichen theil nimmt.⁸⁾

Demnach beachte man, dass für sämtliche Verstandeswissenschaften einzig der Verstand sich selbst hinlängliche Ursache ist, und

¹⁾ „... sicut sensus negat genericam multorum sensibilibus unitatem rationalem“, l. c. — ²⁾ „Quapropter haec est radix omnium rationalium assertionum, scilicet non esse oppositorum coincidentiam attingibilem“, l. c. — ³⁾ „Hinc omnis numerus par aut impar, hinc ordo numeri, hinc progressio, hinc proportio“, l. c. — ⁴⁾ „Hinc irrationalis est proportio diametri ad costam, quia par et impar coincidentiam esse oporteret“, l. c. — ⁵⁾ „Hinc etiam diameter circuli ad circumferentiam improporionalis, quia ita differentium coincidentiam ratio non attingit“, l. c. — ⁶⁾ „Et ut brevissime multa dicam: nihil in mathematicis sciri poterit alia radice“, l. c. — ⁷⁾ „Et quoniam in mathematicis relucet istud principium, rationalissimae atque secundum rationem verissimae sunt eius ostensiones“, l. c. — ⁸⁾ „In ipsis quoque ratio delectatur quasi in explicatione virtutis propriae, ubi se ipsam intuetur in alteritate intelligentiam participare“, l. c.

man erkennt, dass letzte Ursache aller Kenntnisse, welche man durch ihn erlangt, eben er allein ist.¹⁾ Wenn man daher gefragt wird, warum in allen Dreiecken die Summe zweier Seiten grösser als die dritte, oder warum das Quadrat über der Diagonale eines Quadrates doppelt so gross wie das über einer Seite, oder warum das Quadrat über der einem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite gleich den beiden Quadraten über den anderen Seiten ist und dergleichen mehr, so wird man antworten, derlei sei nach dem Verfahren des Verstandes deswegen nothwendig so, weil im anderen Falle ein Zusammentreffen widersprechender Begriffe folgte.²⁾ Dergleichen wird man, wenn einer sagte, weshalb der Theil eines Kreises, welchen eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist, und der zugehörige Bogen umschliesst, zu dem Kreise in einem irrationalen Verhältnisse steht, antworten, weil sonst ein Zusammentreffen widersprechender Begriffe folgte.³⁾ Daher also genügt es für sämtliche Wissenschaften, welche der Verstand zu erforschen vermag, dies Eine zu wissen, nämlich wie man auf das Princip, ein Zusammentreffen widersprechender Begriffe zu vermeiden, alle Sätze zurückführt.⁴⁾

Die soeben in den Vordergrund gerückten Sätze besagen schnurstracks das Gegentheil von dem, was man sonstwo den Cusanus als Princip der Mathematik hinstellen lässt. Nicht zwar, als ob man anderswo jene Sätze gänzlich übersehen hätte; vielmehr wird unter Hinweis auf dieselben ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, wie man „sich sehr täuschen würde, wollte man annehmen, dass unser Autor die streng mathematische Methode ganz verschmäht habe.“⁵⁾ Trotzdem aber räumt man jenen Sätzen nicht die ihnen meines Erachtens unbedingt gebührende Stelle ein; man gesteht denselben nur eine einschränkende Bedeutung zu. Das Princip einer jeden Erkenntniss sei für unseren Denker die Coincidenz (das Zusammentreffen) der Gegensätze. Sie müsse also auch der Leitstern in der Mathe-

¹⁾ „Quapropter considera, quod omnium rationalium artium ratio sola se ipsa causa est, et omnium radicalem causam, quae per eam attinguntur, hanc solam esse conspicis“, l. c. cap. 2. — ²⁾ „... respondebis hoc propterea rationis via esse necessarium, quia si non sequeretur coincidentia contradictionis“, l. c. — ³⁾ „Pariter, si diceretur, cur portio circuli ex chorda minori diametro et arcu est ad circulum impropotionalis, respondebis, quia aliter contradictionis coincidentia sequeretur“, l. c. — ⁴⁾ „Scire igitur ad hoc principium vitandae coincidentiae contradictionis omnia reducere est sufficientia omnium artium ratione investigabilium“, l. c. — ⁵⁾ Schanz S. 17.

matik sein.¹⁾ Hinwiederum dürfe man, wenn er sich diesem Principe gemäss nun auch in bewussten Gegensatz zu den Alten gestellt, jedoch nicht annehmen, dass er die streng mathematische Methode (eines Euklid) ganz verschmäht habe. Im Gegentheil sei sie ihm stets ein Hilfsmittel zum Beweise seiner Sätze.²⁾

Der Auffassung gegenüber, als ob der Euklid'schen Methode im Denken des Cusanus nur eine beschränkte, untergeordnete Rolle zufalle, ist nämlich mit Nachdruck hervorzuheben, dass er dieselbe zu der Zeit, um welche es sich hier handelt, nicht neben etwas anderem für ein Hilfsmittel, sondern mit Ausschluss eines jeden anderen für die einzige Grundlage zum Beweise mathematischer Sätze ansah. Zur Bestätigung dessen sei an die bereits oben ausgehobenen bündigen Erklärungen noch einmal erinnert und ausserdem die folgende hier neuerdings angefügt: Wer das methodische Princip, ein Zusammentreffen zu vermeiden, stets im Auge behält, sieht auch augenblicklich, was er in der Geometrie behaupten darf, beziehungsweise was er verneinen muss.³⁾ In den selbständigen Begriffsbildungen eines denkenden Geistes und namentlich in den sämtlichen Beweisen eines Euklid oder wessen sonst immer, findet man nämlich bei aller Verschiedenheit der Figuren einzig und allein dieses als Grund angegeben.⁴⁾

Wer sieht z. B. nicht ein, dass sich, falls die Summe zweier Seiten eines Dreieckes der dritten gleich sein könnte, das Verhältniss zwischen dem Durchmesser und der Peripherie eines Kreises genau angeben liesse?⁵⁾ Ist nämlich jede Sehne kleiner als der Bogen, an welchem sie sich ausdehnt, und die Sehne eines kleineren Bogens dem zu ihr gehörigen Bogen ähnlicher als die Sehne eines grösseren dem ihrigen, so würde sich, falls man zugäbe, die zwei Sehnen halber Bogen seien der Sehne des ganzens Bogens gleich, offenbar unter der Hand ein Zusammentreffen von Sehne und Bogen ergeben.⁶⁾

¹⁾ Schanz S. 8. — ²⁾ Schanz S. 17. — ³⁾ Vgl.: „... propter iam dictam coincidentiam vitandam et statim, quid geometricè affirmandum quidve negandum, vidi“, De coniecturis II, 2. — ⁴⁾ „Nam in ipsis animorum conceptionibus atque in cunctis demonstrationibus Euclidis aut quorumcunque unicum hanc causam reperi in varietate figurarum“, l. c. — ⁵⁾ „Quis non videt, si duo latera trianguli simul iuncta possent esse tertio aequalia, quod haec (sc. diametri et circumferentiae circuli) proportio attingeretur?“, l. c. — ⁶⁾ „Si enim omnis chorda minor est quam arcus, cui subtenditur, et chorda minoris arcus similior est arcui sui quam chorda maioris: manifestum est, si admitteretur duas chordas mediorum arcuum aequales esse chordae integri arcus, chordae et arcus coincidentiam subinferri“, l. c.

Desgleichen müsste man, liesse sich nicht jeder beliebige Bogen in der Mitte theilen, nothwendig zu dem nämlichen Ergebniss gelangen.¹⁾ Wie demnach die Summe zweier Seiten eines jeden Dreieckes unbedingt grösser als die dritte, und jede ausgedehnte Grösse stets durch proportionale Stücke theilbar ist, soll andererseits das öfters erwähnte Zusammentreffen vermieden werden: ebenso beherrscht, wie man leicht in Erfahrung bringen wird, der gleiche methodische Grundsatz sämtliche geometrische Beweise.²⁾

Aus diesen und ähnlichen Aeusserungen muss man meines Erachtens unbedingt folgern, dass um die Zeit, in welcher dieselben niedergeschrieben wurden, in den Augen ihres Urhebers der Euklid'sche Standpunkt für die Geometrie als der einzig zulässige galt. Aber wohlgemerkt, nicht immer galt für ihn derselbe, nicht einmal immer, wie man allerdings behauptet, in der Zeit, welche voranging. Versichert er doch selbst, es habe einmal eine Zeit gegeben, wo er, zwischen dem Durchmesser und der Peripherie des Kreises eine Proportion behauptend, allerhand Versuche gemacht habe.³⁾ Die hier so unbestimmt gelassene Zeitangabe erhält für uns durch frühere Darlegungen einen ganz bestimmten Inhalt. Ohne den geringsten Zweifel hegen zu müssen, darf man nämlich dabei an das Frühjahr 1428 denken, woselbst sich unser Autor, wie bekannt, zu Cues in seiner Heimath eifrig mit der Quadratur des Kreises beschäftigte.

Augenblicklich, d. i. zwölf Jahre später, ungefähr um die selbige Jahreszeit und an demselben Orte dagegen hält er eine derartige Proportion deshalb für nicht zutreffend und nicht zulässig, weil eben das öfters erwähnte Zusammentreffen zu vermeiden sei.⁴⁾ Je grösser die Anzahl der Winkel ist, die ein eingeschriebenes Vieleck besitzt, desto ähnlicher freilich ist dasselbe dem Kreise; niemals indessen wird es demselben völlig gleich, auch wenn man die Winkel bis ins endlose verdoppelte, es sei denn, dass es sich in die Identität mit

¹⁾ „Pariformiter si non omnis dabilis arcus per medium divisibilis esset, ad idem necessario deveniri oporteret“, l. c. — ²⁾ „Sicut igitur necessarium est omnis trianguli duo latera simul iuncta tertio maiora esse et omne quantum esse semper divisibile per proportionales partes, si coincidentia saepe dicta vitari debet: ita de omnibus geometricis demonstrationibus facile comperies“, l. c. fol 52a. — ³⁾ Vgl.: „Tentavi ego aliquando affirmans diametri et circumferentiae circuli proportionem...“, l. c. fol. 51b. — ⁴⁾ Vgl.: „Tentavi ego aliquando... proportionem inattingibilem atque inadmissibilem propter iam dictam coincidentiam vitandam“, l. c.

dem Kreise auflöst.¹⁾ Bei dem also gewonnenen und scharf umgrenzten methodischen Standpunkte, keinem anderen, wie deutlich aus dem Gesagten erhellt, als dem allbewährten des alten Euklid, soll es denn nun auch für alle Zukunft sein Bewenden haben. Unser Autor will dermaleinst, wenn er länger am Leben bleibt, jenen Grundgedanken der Mathematik weiter entwickeln, um diese Wissenschaft auf dem besagten Wege einem gewissen Ausbau entgegenzuführen.²⁾ Dies Vorhaben ist später, freilich nicht nach dem hier dargelegten, sondern nach einem ganz andern Verfahren zur Ausführung gekommen.³⁾ Doch davon später.

Ueber den Verstand stellt unser Autor die Vernunft. Wie jener die Mathematik, so macht diese die übersinnlichen Dinge zum Gegenstande des Nachdenkens; freilich nicht mit dem gleichen Erfolge. Keinen übersinnlichen Gegenstand erkennt sie genau so, wie derselbe an sich selbst beschaffen ist.⁴⁾ Ein jedes Ding nämlich ist in dem ihm eigenthümlichen Sein so, wie es wirklich an sich ist, in einem anderen dagegen anders.⁵⁾ Diese Wahrheit wird man leicht, falls man aufmerkt, begreifen. Einen Kreis z. B. erfasst man als Verstandesding in dem ihm eigenthümlichen Verstandessein so, wie er an sich ist.⁶⁾ Indem man nämlich deutlich eine Figur gewahr wird, an welcher alle vom Mittelpunkte zur Peripherie gehenden Linien einander gleich sind, so fasst man eben in diesem Verstandesbegriffe den Kreis als ein Verstandesding.⁷⁾ Sobald er dagegen ausserhalb des ihm eigenthümlichen Verstandesseins existirt, ist er ein sinnlich wahrnehmbarer Gegenstand und in demselben Grade, wie er auf eine andere Weise existirt, auch anders.⁸⁾ Es ist daher nicht möglich,

1) „Quae (sc. polygonia) quanto inscripta plurium angulorum fuerit, tanto similior circulo: nunquam tamen efficitur aequalis, etiamsi angulos usque in infinitum multiplicaverit, nisi in identitatem cum circulo se resolvat“, De docta ignorantia (eine Schrift, die am 12. Februar 1440 zu Cues vollendet ward) I, 3.

— 2) „Tentabo hanc mathematicae radicem aliquando vita comite explicare, ut ipsam scientiam hac via ad sufficientiam quandam reducam“, De coniecturis II, 2 fol. 52a. — 3) Schanz S. 18 ist der Ansicht, das bezügliche „Versprechen . . . habe Cusa nicht erfüllt.“ — 4) „Nullum intelligibile uti est intelligi“, lautet De coniecturis I, 13 die Ueberschrift. — 5) Vgl.: „Sicut enim omne ens in propria sua entitate est, uti est: ita in alia aliter“, I. c. — 6) „Circulus enim, ut ens rationis est, in sua propria rationali entitate, uti est, attingitur“, I. c.

— 7) „Dum enim conspicias figuram, a cuius centro ad circumferentiam omnes lineae sunt aequales, in hac quidem ratione circulum uti ens rationis attingis“, I. c.

— 8) „Sed extra ipsam rationem propriam uti est, sensibilis est et, sicut in alio est, ita et aliter est“, I. c.

dass der Kreis genau so, wie er im Verstande, auch ausserhalb desselben existire.¹⁾ Man beachte dieses Verhältniss zwischen jedem beliebigen sinnlich wahrnehmbaren Kreise und dem einen unveränderlichen Begriffe des Verstandes vom Kreise ganz genau, und man wird zu der mannigfaltigen Verschiedenheit unserer Vernunftannahmen vorzudringen imstande sein.²⁾ Alsdann nämlich wird man inne, dass man keinen übersinnlichen Gegenstand genau so, wie er an sich selber ist, erkennt, vorausgesetzt, dass man einräumt, unsere Vernunft sei ein gewisses anderes Etwas als der übersinnliche Gegenstand selbst.³⁾

Demnach lässt sich im Gebiete der Vernunft die Wahrheit nicht genau so, wie sie an sich ist, begreifen.⁴⁾ Die endliche Vernunft vermag nämlich das wahre Sein der Dinge durch Gleichniss sich nicht genau vorzustellen.⁵⁾ Da sie nicht die Wahrheit selbst, so begreift sie auch niemals dieselbe in dem Maasse genau, dass sie dies nicht bis ins endlose genauer thun könnte, verhält sich vielmehr zu der Wahrheit wie ein Vieleck zum Kreise⁶⁾, welches diesem zwar stets ähnlicher, aber niemals völlig gleich werden kann.⁷⁾

Unter den Gegenständen aber, mit denen sich die Vernunft zu beschäftigen hat, steht an oberster Stelle Gott, das absolut Grösste, mit welchem das Kleinste einheitlich zusammentrifft⁸⁾, das Eine und zugleich Dreifaltige.⁹⁾ Ohne das absolut Grösste zu begreifen, stellen wir uns dasselbe vor.¹⁰⁾ Die klare Einsicht in sein Wesen übersteigt nämlich alle unsere Vorstellungen.¹¹⁾ Wenn indessen noch etwas uns hier einigermaassen zu helfen vermag, so ist dies die Mathematik.¹²⁾

All unsere weisen, gotterleuchteten und heiligen Lehrer stimmen darin überein, dass die sichtbaren Dinge in Wahrheit Sinnbilder für

¹⁾ „Non est igitur possibile circulum, uti est in ratione, extra rationem esse“, l. c. — ²⁾ Vgl.: „Adsis hic totus, ut ad coniecturarum varietatem subintres“, l. c. — ³⁾ „Nullum enim intelligibile uti est te intelligere conspicis, si intellectum tuum aliam quandam rem esse admittis quam intelligibile ipsum“, l. c. — ⁴⁾ Vgl.: „Quod praecisa veritas sit incomprehensibilis“, Ueberschrift zu De docta ignorantia I,3. — ⁵⁾ „Non potest . . . finitus intellectus rerum veritatem per similitudinem praecise intelligere“, l. c. — ⁶⁾ Vgl.: „Intellectus . . . qui non est veritas, nunquam veritatem adeo praecise comprehendit, quin per infinitum praecisius comprehendi possit, habens se ad veritatem sicut polygonia ad circulum“, l. c. — ⁷⁾ Vgl. oben S. 311 Anm. 1. — ⁸⁾ „Maximum absolutum . . . cum quo minimum coincidit“, Ueberschrift zu l. c. cap. 4. — ⁹⁾ l. c. cap. 5—9. — ¹⁰⁾ Vgl.: „Maximum absolutum incomprehensibiliter intelligitur“, cap. 4. — ¹¹⁾ Vgl.: „Quomodo intellectus trinitatis in unitate supergreditur omnia“, cap. 10. — ¹²⁾ Vgl.: „Quod mathematica nos iuvat plurimum in diversorum divinatorum apprehensione“, cap. 11.

die unsichtbaren sind, und dass wir Geschöpfe auf diese Weise unseren Schöpfer gewissermaassen in Spiegel und Gleichniss schauen können. Nun aber befinden sich alle wahrnehmbaren Dinge wegen der veränderlichen Materie, die in ihnen vorherrscht, in einer beständigen Unbeständigkeit. Sie taugen daher weit weniger zu dem genannten Zwecke als die mathematischen Begriffe, welche durchaus unwandelbar und uns nicht im geringsten zweifelhaft erscheinen.¹⁾ Daher haben in ihnen die Weisen: ein Pythagoras, Platon und Aristoteles, ein Augustinus und Boethius emsig nach Sinnbildern für die Dinge gesucht, welche durch die Vernunft zu erforschen waren.²⁾ Dieses Verfahren der Alten will nun auch unser Autor einschlagen, mit jenen wetteifern und stellt den Satz auf: Wenn uns ein Weg zu den göttlichen Dingen nur durch Symbole offen steht, so werden wir die Figuren der Mathematik wegen deren unverfänglichen Gewissheit noch am zweckmässigsten verwerthen können.³⁾

Jedoch so ohne weiteres geht dies nicht. Das Grösste schlechthin kann nämlich offenkundig nichts von dem sein, was wir Menschen wissen oder uns denken.⁴⁾ Entschliessen wir uns demnach, dasselbe durch Symbole zu erforschen, so müssen wir über den schlichten Vergleich hinausgehen. Alle mathematischen Figuren nämlich sind endlicher Art und lassen sich anders auch gar nicht vorstellen.⁵⁾ Falls wir daher solche endliche Vorstellungen als Abbild ausnützen wollen, um zu dem schlechthin Grössten emporzusteigen, so müssen wir uns zuerst die endlichen mathematischen Figuren mit ihren wechselnden und wesentlichen Eigenschaften genau beschen⁶⁾ und die wesentlichen entsprechend auf derartige unendliche Figuren übertragen⁷⁾, darauf drittens noch höher hinauf die wesentlichen Eigenschaften der unendlichen Figuren auf das einzigartige Unendliche

¹⁾ Vgl.: „Abstractiora autem istis . . . firmissima videmus atque nobis certissima, ut sunt ipsa mathematicalia“, l. c. — ²⁾ „Quare in illis sapientes exempla indagandarum rerum per intellectum solerter quaesiverunt“, l. c. — ³⁾ „Cum ad divina non nisi per symbola accedendi nobis via pateat, quod tunc mathematicis signis propter ipsorum incorruptibilem certitudinem convenientius uti poterimus“, l. c. — ⁴⁾ „Constat maximum simpliciter nihil horum esse posse, quae per nos sciuntur aut concipiuntur“, l. c. cap. 12. — ⁵⁾ „Nam cum omnia mathematicalia sint finita et aliter etiam imaginari nequeant, . . .“ l. c. — ⁶⁾ „Si finitis uti pro exemplo voluerimus ad maximum simpliciter ascendendi, primo necesse est figuras mathematicas finitas considerare cum suis passionibus et rationibus“, l. c. — ⁷⁾ „Et ipsas rationes correspondentem ad infinitas tales figuras transferre“, l. c.

übernehmen, welches sogar von jeder Gestalt völlig frei ist.¹⁾ Als-
dann wird unser Nichtwissen darüber aufgeklärt werden, wie man
sich von dem höchsten Sein, solange man im Gleichniss sich abmüht,
eine ziemlich richtige und zutreffende Vorstellung zu bilden hat.²⁾

In dieser Richtung aber gingen heilige und hochbegabte Denker
schon voran und bedienten sich dabei mannigfach verschiedener Aus-
drucksweisen.³⁾ Der gottergebene Anselm verglich die absolut höchste
Wahrheit mit der unendlichen Gerade⁴⁾; ihm folgend, eilt unser
Autor auf die Figur der Gerade zu, die er sich als gerade
Linie vorstellt.⁵⁾ Einige sehr Sachverständige stellten der hoch-
gebedeneten Dreieinigkeit ein Dreieck mit drei gleichen, rechten
Winkeln an die Seite⁶⁾; und weil ein derartiges Dreieck, wie sich
zeigen lässt, unbedingt von unendlichen Seiten begrenzt ist, so wird
man dasselbe wohl unendliches Dreieck nennen können⁷⁾; auch diesen
will sich unser Schriftsteller anschliessen.⁸⁾ Andere, welche es sich
angelegen sein liessen, die unendliche Einheit zu versinnbilden, sagten,
Gott sei unendlicher Kreis.⁹⁾ Jene aber, welche vornehmlich die
völlig wirkliche Existenz Gottes in's Auge fassten, versicherten, Gott
sei sozusagen unendliche Kugel.¹⁰⁾ All diese Forscher, so schliesst
der kurze geschichtliche Rückblick, hätten sich gleichzeitig von dem
absolut Grössten eine zutreffende Vorstellung gebildet, und auf eins
hinaus laufe aller Ansicht.¹¹⁾

Der bündige Nachweis für die Richtigkeit der zuletzt ausge-
sprochenen Behauptung ist in folgendem Satze zu suchen: Wäre eine
Linie unendlich, so wäre selbige gerade, wäre Dreieck, wäre Kreis

¹⁾ „Post haec tertio adhuc altius ipsas rationes infinitarum figurarum trans-
sumere ad infinitum simplex, absolutissimum etiam ab omni figura“, l. c. —
²⁾ Et tunc nostra ignorantia . . docebitur, quo modo de altissimo rectius et
verius sit nobis in aenigmate laborantibus sentiendum“, l. c. — ³⁾ Vgl.: „Sancti
viri et elevatissimi ingenii, qui se figuris applicarunt, varie locuti sunt“, l. c.
— ⁴⁾ „Anselmus devotissimus veritatem maximam rectitudini infinitae compara-
vit“, l. c. Vgl. Anselmus, De veritate cap. 10, 18. — ⁵⁾ „Quem nos sequentes
ad figuram rectitudinis, quam lineam rectam imaginor, convolemus“, l. c. —
⁶⁾ „Alii peritissimi trinitati superbenedictae triangulum trium aequalium et rec-
torum angulorum compararunt“, l. c. — ⁷⁾ „Et quoniam talis triangulus necessario
est ex infinitis lateribus, ut ostendetur, dici poterit triangulus infinitus“, l. c. —
⁸⁾ „Et hos etiam sequimur“, l. c. — ⁹⁾ „Alii, qui unitatem infinitam figurare nisi
sunt, deum circulum dixerunt infinitum“, l. c. — ¹⁰⁾ „Illi vero, qui actualissimam
dei existentiam considerarunt, deum quasi sphaeram infinitam affirmarunt“, l. c.
— ¹¹⁾ Vgl.: „Nos autem istos omnes simul de maximo recte concepisse et unam
omnium sententiam ostendemus“ l. c.

und wäre Kugel¹⁾; wäre umgekehrt eine Kugel unendlich, so wäre selbige auf gleiche Weise Dreieck, Kreis und Linie²⁾; ebenso ist von einem unendlichen Dreiecke und einem unendlichen Kreise genau dasselbe auszusagen.³⁾ Die Richtigkeit dieses Satzes aber leuchtet ein, wenn wir die Veränderungen beachten, welche an einer grössten und unendlichen Linie vor sich gehen.⁴⁾

Zunächst nämlich ist eine unendliche Linie offenbar gerade. Den Durchmesser eines (endlichen) Kreises bildet eine gerade und die Peripherie eine krumme Linie. Wenn nun diese krumme Linie in ihrer Krümmung eine Minderung erfährt, insoweit sie Peripherie eines grösseren Kreises sein wird, so ist die Peripherie eines grössten Kreises, welche nicht (mehr) grösser sein kann, am wenigsten (unter allen) krumm, demnach am meisten gerade.⁵⁾ Es trifft also mit dem Grössten das Kleinste zusammen, so dass augenscheinlich eine grösste Linie nothwendig am meisten gerade und am wenigsten krumm ist.⁶⁾

Zweitens ward behauptet, eine unendliche Linie sei grösstes Dreieck, grösster Kreis und grösste Kugel.⁷⁾ Um diesen Satz zu beweisen, muss man an endlichen Linien bemerken, was alles in der Möglichkeit einer endlichen Linie liegt⁸⁾; und weil all dasjenige, was eine endliche der Möglichkeit nach, eine unendliche wirklich ist, so wird uns das Ergebniss, wonach wir forschen, ziemlich einleuchtend sein.⁹⁾ Erstlich wissen wir, dass eine endliche Linie in der Längsrichtung stets länger und gerader sein kann, und ist bereits nachgewiesen, dass eine grösste am längsten und geradesten wäre. Wenn man zweitens eine Linie ab , während der Punkt a unbeweglich verbleibt, sich so lange bewegen lässt, bis b in c ankommt, so ist

¹⁾ „Dico igitur: Si esset linea infinita, illa esset recta, illa esset triangulus, illa esset circulus et esset sphaera“, cap. 13. — ²⁾ „Et pariformiter si esset sphaera infinita, illa esset triangulus, circulus et linea“, l. c. — ³⁾ „Et ita de triangulo infinito atque circulo infinito idem dicendum est“, l. c. — ⁴⁾ Vgl.: „De passionibus lineae maximae et infinitae“, Aufschrift zu l. c. cap. 13. — ⁵⁾ „Si igitur curva linea in sua curvitate recipit minus, quanto circumferentia fuerit maioris circuli: igitur circumferentia maximi circuli, quae maior esse non potest, est minime curva, quare maxime recta“, l. c. — ⁶⁾ „Coincidit igitur cum maximo minimum, ita ut ad oculum videatur necessarium esse, quod maxima linea sit recta maxime et minime curva“, l. c. — ⁷⁾ Secundo dictum est lineam infinitam esse triangulum maximum, circulum et sphaeram“, l. c. — ⁸⁾ „Et ad hoc ostendendum oportet ut in lineis finitis videamus, quid sit in potentia finitae lineae“, l. c. — ⁹⁾ „Et quia quidquid finita est in potentia, hoc infinita est actu, erit nobis clarius id quod inquirimus“, l. c.

ein Dreieck entstanden.¹⁾ Lässt man die Umdrehung sich vollenden, so dass b zu dem Punkte zurückkehrt, vonwo es ausging, so entsteht ein Kreis.²⁾ Verbleibt abermals a unbeweglich und lässt b sich so lange drehen, bis es zu dem seinem Anfange entgegengesetzten Punkte d gelangt, so ist aus der Linie ab und ad eine einzige fortlaufende Linie geworden und ein Halbkreis beschrieben³⁾; wenn nunmehr der Durchmesser bd unbeweglich verbleibt, der Halbkreis sich um seinen Durchmesser herumdreht, so entsteht eine Kugel⁴⁾, das letzte Glied der Entwicklungsreihe aus der Möglichkeit einer Linie.⁵⁾ Liegen demnach in der Möglichkeit einer endlichen Linie jene Figuren, und ist eine unendliche Linie all dasjenige wirklich, wozu sich eine endliche in der Möglichkeit befindet, so folgt daraus, dass eine unendliche zugleich Dreieck, Kreis und Kugel ist.⁶⁾

Bei Aeusserungen aus den vierziger Jahren, wie die zuletzt erwähnten, darf man meines Erachtens niemals ausser Acht lassen, dass hierselbst der mathematische Faden nicht erst, wie man wohl glaubt⁷⁾, in das theologisch-philosophische Gebiet überzugehen beginnt und schliesslich abreisst, sondern bereits übergegangen und abgerissen ist. Ausschliesslich behufs Verwendung zu Symbolen ist von einer unendlichen Linie, welche gleichzeitig Dreieck, Kreis und Kugel, die Rede. Alles Nähere darüber aber gehört — da man Symbole nicht dort, woher sie, sondern nur dort, wohin sie hinübergangen wurden, wird ausführlicher zu besprechen haben⁸⁾, — augenscheinlich nicht hieher. In der Weise aber, wie es geschehen, glaubte ich jene mathematischen Symbole erwähnen zu sollen, um eben den klaren Nachweis zu liefern, dass sie nicht hierher gehören.⁹⁾

¹⁾ „Secundo si linea ab remanente puncto a immobili circumduceretur, quousque b veniret in c , ortus est triangulus“, l. c. — ²⁾ „Si perficitur circumductio, quousque b redeat ad initium, ubi incepit, fit circulus“, l. c. — ³⁾ „Si iterum a remanente immobili b circumducitur, quousque perveniat ad locum oppositum, ubi incepit, qui sit d : est ex linea ab et ad effecta una continua linea et semicirculus descriptus“, l. c. — ⁴⁾ „Et si remanente bd diametro immobili circumducatur semicirculus, exoritur sphaera“, l. c. — ⁵⁾ Vgl.: „Et ipsa sphaera est ultimum de potentia lineae totaliter existens in actu“, l. c. — ⁶⁾ „Si igitur in potentia lineae finitae sunt istae figurae et linea infinita est omnia actu, ad quae finita est in potentia, sequitur infinitum (lies: infinitam) esse triangulum, circulum et sphaeram“, l. c. — ⁷⁾ Cantor II, 174; ähnlich Schanz S. 10. — ⁸⁾ Solche Symbole immer und immer wieder aus der Mathematik herbeizuschaffen, wird der Autor anscheinend nie müde; neben den Figuren aus der Geometrie spielt in den „Annahmen“ die Zahlenlehre mit ihren vier Einheiten 1, 10, 100 und 1000 eine sehr bedeutsame Rolle; vgl. De coniecturis I, 5–10. — ⁹⁾ Nicht die soeben

Dagegen verdienen Sätze wie folgende schon eine wiederholte Erwähnung: Ein Zusammentreffen von Gegensätzen hat der Verstand in der Mathematik zu vermeiden; alle mathematischen Figuren sind endlicher Art und lassen sich anders gar nicht vorstellen; jede Zahl gerade oder ungerade; irrational das Verhältniss der Diagonale zur Seite eines Quadrates, irrational auch das Verhältniss des Durchmessers eines Kreises zur Peripherie. Solche und ähnliche Sätze nämlich charakterisiren zur Genüge den mathematischen Standpunkt, welchen Cusanus um 1440 für den allein zulässigen ansah. Es ist genau derselbe, den schon im Alterthume Euklid vertrat. Wesentlich Neues bietet uns jener daher gegenwärtig nicht, wesentlich Neues verspricht er uns ebensowenig für die Zukunft; das Einzige, was er uns glaubt in Aussicht stellen zu dürfen, ist ein gewisser Ausbau der Euklid'schen Geometrie. Es kam späterhin freilich anders.

(Fortsetzung folgt.)

erwähnten, wohl aber andere Forscher glauben, ohne zu wissen, um was es sich eigentlich handelt, über die unendlichen Figuren spötteln zu dürfen. Namentlich diesen gegenüber sei nochmals betont, dass es sich in dem „gelehrten Nichtwissen“ nur um geometrische Symbole und nicht um reine Geometrie handelt.

Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus.

Von Dr. Joh. Uebinger, Prof. der Philosophie in Posen.

(Fortsetzung.)

Wie bekannt¹⁾, wird uns 1440 ein weiterer Ausbau der Euklid'schen Geometrie in Aussicht gestellt. Indessen nicht einen solchen brachte die Folgezeit, sondern, streng genommen, etwas ganz Anderes. Dies zeigen allsogleich

II.

Die Verwandlungen 1450.

Unter diesem Titel möchte ich die drei Schriften zusammenstellen, welche höchstwahrscheinlich sammt und sonders dem genannten Jahre angehören. Das Letztere freilich soll nach bisheriger Annahme nicht für die kleine Abhandlung gelten, welche zunächst zu nennen ist, für

1. *De quadratura circuli.*

Dieselbe findet sich nicht in dem so hochwichtigen einstigen Hand-exemplare des Autors, den heutigen Handschriften E_2 und E_3 zu Cues, infolgedessen auch nicht in der jene Handschriften einfach abdruckenden Incunabel, auch noch nicht in der weit umfassenderen Ausgabe der Werke Paris 1514, sondern erst in dem Drucke Basel 1565.²⁾ Der letzte Druck ist in der Hauptsache nur ein Nachdruck des vorhergehenden; für unsere Abhandlung allerdings musste eine andere Vorlage zur Verfügung stehen; und als solche diente der erste Abdruck derselben, welchen gleichzeitig mit anderen Schriften Johannes Schoner aus Karlstadt 1533 zu Nürnberg besorgte.³⁾ Irgend welchen

¹⁾ Vgl. oben S. 317. — ²⁾ Pag. 1091—1094. — ³⁾ „Ioannis de Regio monte de triangulis omnimodis libri quinque. . . Accesserunt huc in calce ple-raque D. Nicolai Cusani de quadratura circuli deque recti ac curvi commensuratione itemque Io. de monte Regio eadem de re *ἐλεγκτικά* hactenus a nemine publicata.“ Die erwähnte „calx“, der Anhang, druckt unsere Abhandlung auf pag. 5—8 ab.

Fingerzeig hinsichtlich der Frage, die uns hier beschäftigt, bietet ebenso wenig dieser erste Druck, wie jener Nachdruck.¹⁾

Glücklicherweise lässt sich indessen doch wenigstens noch eine Handschrift namhaft machen, welche die mehrfach genannte Abhandlung enthält und zugleich einen ziemlich deutlichen Fingerzeig hinsichtlich deren Abfassungszeit gibt. Es ist dies cod. lat. Monac. 18711 (Teg. 711). Diese einst dem Kloster Tegernsee gehörige Handschrift ist, nach mancherlei Anzeichen zu schliessen, nicht vor 1451 und nicht nach 1453 geschrieben, lässt fol. 242 „de circuli quadratura“ auf den „liber de geometricis transmutationibus“ fol. 234 folgen. Eine solche Zusammenstellung berechtigt nach den Wahrnehmungen, welche sich in anderen Handschriften aus Tegernsee, beispielsweise in dem cod. Teg. 570 (Monac. 18570) und Teg. 621 (Monac. 18621) machen lassen, einigermaassen zu dem Schlusse, dass jene Schriften auch zeitlich zusammengehören.

Durch den angegebenen Handschriftenbefund wird einem demnach die Annahme nahe gelegt, dass jene Abhandlung spätestens bis zum Jahre 1453, vielleicht schon in dem Jahre 1450, in dem nämlichen, wie „de geometricis transmutationibus“, geschrieben ward. Eine weitere Gewähr für die gleiche Annahme dürfte sodann der Eingang der Abhandlung selbst darbieten. Darnach ging deren Abfassung bereits eine Beschäftigung mit der Geometrie voran, aber schon geraume Zeit ist dies her.²⁾ Ganz gewiss nun ist „geraume Zeit“ im allgemeinen eine sehr relative Vorstellung, deren Bemessung je nach dem dabei zu Grunde gelegten Maasstabe sehr verschieden, und darum mit dieser bloßen Angabe an und für sich wenig anzufangen. Wenn aber, wie es im vorliegenden Falle geschieht, die Behinderungsgründe angegeben werden, und dies tiefsinnigere Forschung und öffentliche Wohlfahrt³⁾ sind, dann ist jene „geraume Zeit“ sicherlich nicht nach Tagen, auch nicht nach Monaten, sondern

¹⁾ Anderer Ansicht ist freilich Schanz; er macht S. 6 Anm. 3 nämlich für die Abfassung der Abhandlung im Jahre 1457 unter anderem auch den Umstand geltend, „dass ihr in allen Ausgaben, auch in der genannten Nürnberger, die Stelle unmittelbar vor dem Dialog (wovon später) angewiesen ist.“ Dies ist nicht ganz richtig; dem Dialog geht unmittelbar vielmehr „de sinibus et chordis“ vorher, und dann lässt sich von dem bloßen Vorhergehen mit Sicherheit wohl schwerlich auf zeitliches Zusammengehören schliessen. — ²⁾ Vgl.: „Quamvis iam dudum a studio geometrico nos . . . retraxerit utilitas, . . .“ l. c. pag. 5. — ³⁾ Vgl.: „Quamvis . . . nos altior speculatio ac publica retraxerit utilitas, . . .“ l. c.

nach Jahren zu bemessen. Rückt man nun mit Schanz ¹⁾ die Abhandlung aufwärts in das Jahr 1457, so bleibt, für den Augenblick einmal von deren Existenz in dem cod. lat. Monac. 18711 gänzlich abgesehen, denn doch noch der Umstand zu bedenken, dass in dem nämlichen Jahre ausserdem noch vier weitere Abhandlungen ähnlichen Inhaltes entstanden sein sollen. Gibt man freilich hinzu, was hiermit für einen Augenblick geschehen soll, dass alle vier später entstanden, so wird das hier zunächst geltend gemachte Bedenken hinfällig. Bestehen dagegen bleibt immerhin ein anderes, das sich nicht so leicht beseitigen lässt: dieses nämlich, dass man nicht „geraume Zeit“ in dem hier erforderlichen Sinne, sondern bloß ein paar Jahre früher eine grössere mathematische Schrift, „de mathematicis complementis“ 1453 auf 54, ansetzt. Geht man angesichts dessen mit Scharpff ²⁾ auf die Zeit von 1451 auf 52 zurück, so widerstreitet dem die That- sache, dass ein einziges, höchstens zwei Jahre vorher „de geometricis transmutationibus“ geschrieben ward. Aber ward denn dieses Buch nicht früher geschrieben? Etwas Derartiges wurde im Obigen weder bejaht noch verneint. Zu einem Bejahen könnte einen allerdings der cod. 18711 verleiten, diese Art zeitlicher Aufeinanderfolge zu ver- neinen aber gebietet uns ohne Zweifel die in obigem Eingange er- wähnte „geraume Zeit“.

Demzufolge wäre die Abhandlung vor dem 12. Juli 1450, dem Tage, an welchem das Buch „de geometricis transmutationibus“ vollendet ward, allem Anscheine nach geschrieben.³⁾ Unter dieser Voraussetzung nämlich gewinnen wir zunächst für die bereits „ge- raume Zeit“ den unbedingt erforderlichen Spielraum. Das ganze Jahrzehnt 1450—1440 rückwärts steht uns jetzt zu deren Ausfüllung ohne jegliches Bedenken zu freier Verfügung. Jedoch würden wir nicht einmal gut thun, uns mit diesem Zeitraume zu begnügen; denn von einer Beschäftigung mit der Geometrie im Jahre 1440 kann, wie man nach früheren Ausführungen wohl allgemein zugeben wird, im eigentlichen Sinne nicht die Rede sein; die Geometrie nebst der Arithmetik wird vielmehr dortselbst in den Dienst einer „tiefsinnigeren Forschung“ gestellt. Noch zwölf Jahre weiter rückwärts, bis zu dem Jahre 1428, dürfen wir daher gehen. Angesichts dieses Zeitpunktes kann man wirklich von einer Beschäftigung mit der Geometrie im

¹⁾ A. a. O., S. 6. — ²⁾ S. 307 Anm. 2. — ³⁾ Anders Scharpff S. 307 Anm. 2: „Vor das Jahr 1451“ soll nach ihm „die Abfassungszeit unserer Schrift keinen- falls“ zu setzen sein.

engeren Sinne sprechen¹⁾, und diesen Zeitpunkt höchstwahrscheinlich hatte der Verfasser selbst im Auge, als er jene Worte niederschrieb.

Und während der also festgelegten zweiundzwanzig Lebensjahre zog ihn von der Geometrie nachweislich „tiefsinnigere Forschung und die öffentliche Wohlfahrt“ ab. Bald nach 1428 nämlich sehen wir ihn 1430—32 in die Wirren um die Neubesetzung des Erzbischofsstuhles zu Trier verwickelt, 1432—36 auf dem Concil zu Basel die Wiedergewinnung der Husiten und die allgemeine Einigung in Kirche und Staat betreiben, 1437—38 auf der Gesandtschaftsreise nach Konstantinopel an der Wiedervereinigung des Morgen- und Abendlandes arbeiten, 1439—46 auf den deutschen Reichstagen den hartbedrängten Papst Eugen IV. vertheidigen, zwischendurch 1436 eine gelehrte Abhandlung über die Verbesserung des Kalenders schreiben, Sommer 1437 zu Füßen der Bologneser Juristen sitzen, 1440 zu Cues mit der „tiefsinnigeren Forschung“ beschäftigt und dieselbe in der „docta ignorantia“ nebst den „coniecturis“ darlegen. Dies alles zog ihn begreiflicherweise gar sehr von der Geometrie ab.

Nicht einmal im Augenblicke, spätestens also Juli 1450, ist er für diese völlig frei. Es lasten auf ihm die zahllosen ernststen Sorgen, welche eine apostolische Sendung verursacht.²⁾ Es fragt sich, welche hierselbst gemeint sein kann. Wie schon Scharpff³⁾, so scheint auch mir die Deutung auf „die apostolische Sendung nach Deutschland“⁴⁾ am nächsten zu liegen. Nur verbietet uns alsdann das früher Gesagte anzunehmen, als ob der Cardinal jene Sendung augenblicklich schon angetreten habe; dieses geschah nämlich erst am 31. December 1450. Aber kann denn unter diesen Umständen die fragliche Sendung hier überhaupt in Betracht kommen? Ich glaube, trotzdem ganz wohl. Der Anlass zu der Sendung nämlich lag schon um die Mitte des Jahres, zu der Zeit also schon vor, welche wir brauchen. Wir stehen nämlich mitten in einem Jubeljahre. Um des Jubelablasses theilhaftig zu werden, besuchen zahlreiche Pilgerschaaren die ewige Stadt. Damit desselben nun auch diejenigen theilhaft

¹⁾ Scharpff a. a. O. schreibt: „Es müsste . . . unter »studium geometricum« das anhaltende, zusammenhängende Studium in früheren Jahren noch vor Abfassung der philosophischen Schriften zu verstehen sein.“ Das ist gewiss zutreffend und nach Obigem auch thatsächlich der Fall. — ²⁾ Vgl.: „ . . . inter innumeras seriosas curas, quas habet apostolica legatio, . . .“ l. c. — ³⁾ A. a. O. ⁴⁾ „Apostolica legatio in Germania“ nennt der Autor selbst die fragliche Sendung *De aequalitate*, geschrieben um 1462 und enthalten in den sog. *Excitationes lib. I.*

werden können, welchen es nicht möglich ist, in Rom zu erscheinen, beschliesst der Papst, in die wichtigsten Länder der Christenheit besondere Gesandte, nach Deutschland den Cardinal von S. Pietro in Vincoli, unseren Cusanus, zu senden. Zwar erfolgte die Ausfertigung der nothwendigen Vollmachten für die Sendung erst am 24. bezw. 29. December, aber nichts hindert uns anzunehmen, der Plan zu der Sendung sei schon um die Mitte des Jahres gefasst worden, und so habe dem Erkorenen um diese Zeit die freilich erst geplante Sendung doch schon „zahlreiche ernste Sorgen“ bereitet.

Unter diese Sorgen aber mischten sich zur Aufheiterung Gespräche mit eifrigen Forschern, darunter bezüglich der Quadratur des Kreises die Versicherung, dass man sie zwar kennen könne und doch nicht kenne.¹⁾

Soweit bekannt, sei dieser Kenntniss bislang niemand näher als Archimedes gekommen.²⁾ Er in erster Linie habe gezeigt, dass einem Kreise das Viereck gleich komme, in welchem die eine Seite dem Halbmesser des Kreises, die andere dem halben Kreisumfange an Länge gleich ist.³⁾ Dies allerdings müsse sich so verhalten, wenn man das für gleich zu erachten habe, was nachweislich weder grösser noch kleiner ist.⁴⁾ Dass sich nun aber zwischen dem Halbmesser und der halben Peripherie die mittlere Proportionale leicht bestimmen lasse, zeige Euklid. Und da sie die Seite des gleichwerthigen Quadrates bilde, so brauche man nur zu wissen, welche gerade Linie der Peripherie eines Kreises gleich kommt, und kenne mit eins auch dessen Quadratur.⁵⁾ Dies sei allerdings ein ziemlich zuverlässiges Beweisverfahren.⁶⁾ Nichtsdestoweniger werde Archimedes, indem er glaube, diesen letzten Theil durch die Spirallinie gefunden zu haben, der Wahrheit untreu.⁷⁾ Eine solche Linie nämlich lasse sich nur beschreiben, sofern sich ein Punkt von dem Centrum her auf dem

¹⁾ „Quamvis . . . retraxerit utilitas, tamen inter innumeras seriosas curas . . . se inter colloquia studiosorum delectabiliter immiscuit de quadratura circuli scibili et non scita assertio“, l. c. — ²⁾ Vgl.: „Non legimus quemquam propinquius accessisse ad huius notitiam quam Archimedes“, l. c. ³⁾ „Qui primo quadrangulum circulo aequari ostendit, in quo semidiameter circuli ducta est in mediam periferiam“, l. c. — ⁴⁾ „Hoc quidem sic esse necesse est, si hoc censendum est esse aequale, quod nec maius nec minus esse convincitur“, l. c. — ⁵⁾ „Quare tale, cum sit latus quadrati aequivalentis, conscito quae linea recta aequetur periferiae circuli, scitur et eius quadratura“, l. c. — ⁶⁾ „Et haec est certior ostensio“, l. c. — ⁷⁾ „Sed dum per elicam hanc ultimam partem se reperisse crederet Archimedes a vero defecit“, l. c.

Halbmesser (genau) so lange (gleichmässig) fortbewege, als sich der Halbmesser (ebenfalls gleichmässig) zur Beschreibung eines Kreises umdrehe.¹⁾ Die Beschreibung einer Spirale setze diese Bewegungen voraus, solche demnach, welche sich zu einander genau so verhalten, wie der Halbmesser zur Peripherie.²⁾ Sie setze also das als bekannt voraus, was sie suche.³⁾ Schneller nämlich lasse sich eine Gerade, welche einer Kreislinie gleich ist, angeben als eine wirkliche Spirale zeichnen.⁴⁾

Wer eigentlich jene Behauptung über die mögliche, aber noch nicht gefundene Quadratur des Kreises aufstellte, und ferner wer diesen historischen Ausweis dazu lieferte, ob unser Autor oder aber sonst einer der bei den Gesprächen Betheiligten, erfahren wir nicht; ebensowenig weiterhin, wer denn ausser jenem die sonst noch daran theilnehmenden „eifrigen Forscher“ waren. Und doch wäre es wünschenswerth, dies zu wissen.

Scharpff denkt dabei an Peurbach, welcher sich um 1451—52 zu Wien, das der Legat März 1451 berührte, aufgehalten habe.⁵⁾ Allerdings berührte der Legat in diesem Monate die österreichische Hauptstadt, aber sein Aufenthalt daselbst war nachweislich sehr kurz bemessen; Anfang März ist er noch in Wiener-Neustadt, Mitte März schon wieder in Salzburg, und der so kurz bemessene Aufenthalt um den 3. März ward, nach den in jenen Tagen erlassenen Rundschreiben zu schliessen, anderweitig höchstwahrscheinlich so vollständig ausgefüllt, dass zu einem rein wissenschaftlichen Gespräche bezeichneter Art wohl kaum ein Augenblick verblieb. Ueberdies darf das hier in Rede stehende aus inneren Gründen, wie wir soeben sahen, gar nicht in den März 1451, sondern muss vielmehr, nahezu ein Jahr früher, in das zweite Vierteljahr 1450 verlegt werden. Endlich ist es mindestens fraglich, ob um jene Zeit, wo der päpstliche Gesandte Wien berührte, Peurbach daselbst weilte. Zwar berichtet Gassendi, der Cardinal von Cues habe diesen auf seiner Gesandtschaftsreise durch Deutschland sehr ausgezeichnet⁶⁾, und dies könnte, wenn es

¹⁾ „Elica enim describi nequit, nisi signum a centro per semidiametrum in tanto tempore moveatur, in quanto semidiameter pro circuli descriptione circumvolvitur“, l. c. — ²⁾ „Descriptio igitur elicae hos motus supponit, quorum habitudo est ut semidiametri ad circumferentiam“, l. c. — ³⁾ „Praesupponit igitur id, quod quaerit“, l. c. — ⁴⁾ „Citius enim recta dari potest circulari lineae aequalis quam elica vera figurari“, l. c. — ⁵⁾ A. a. O., S. 307 Anm. 2. — ⁶⁾ „Scilicet ipsum (d. i. Peurbachium) cardinalis (sc. Cusanus) non modo per Germaniam legatus versans plurimi fecit, verum Romae quoque . . .“ Peurbachii vita in der Ausgabe Hagae-Comitum 1655, pag. 338.

richtig sein sollte, nur in Wien geschehen sein; allein auf der anderen Seite lässt derselbe Gassendi zunächst es ganz unbestimmt, wann Peurbach in den fünfziger Jahren nach Wien zurückkam¹⁾, und lässt auch später die Frage offen, ob es 1451 oder 1452 war, wo ihn Regiomontan in Wien begrüßte²⁾; ja, wir brauchen nach dem, was an zuverlässigen Nachrichten vorliegt, vorläufig nur anzunehmen, dass der erstere 1453 nach Wien zurückkehrte.³⁾ Sein Zusammentreffen daselbst mit dem päpstlichen Gesandten im März 1451 bleibt darnach sehr zweifelhaft.

Dabei bleibt indessen die andere Nachricht Gassendi's sehr wohl bestehen, wonach Peurbach unter den Männern, welche er am meisten verehrt, und deren ganz besonderes Wohlwollen er erfahren habe, an erster Stelle den Nikolaus Cusanus erwähnte, den Cardinal von S. Pietro in Vincoli, durch allerhand Werke, insbesondere durch das „gelehrte Nichtwissen“ gar sehr berühmt.⁴⁾ Dieser habe ihn zu Rom in sein Haus aufgenommen und mit nicht wenigen Versprechungen zu bewegen gesucht, dass er doch dauernd bei ihm verbleiben möge.⁵⁾ Die letzte, so bestimmt lautende Nachricht bestätigt, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, uns nämlich jemand, der in dieser Hinsicht sehr genau Bescheid wusste, nämlich der schon genannte Regiomontan, wenn er in seiner feierlichen Antrittsrede zu Padua kurz erwähnt, dass der so gelehrte Cardinal von S. Pietro in Vincoli gar oft dich (d. i. den Peurbach) seinen Hausgenossen zuzählen wollte.⁶⁾ Da nun der Cardinal die erste Hälfte des Jahres 1450 in Rom verbrachte, Peurbach um jene Zeit Italien besuchte, so darf man ein Zusammentreffen der beiden, vielleicht das allererste, wohl in jene Zeit und an diesen Ort verlegen. Peurbach kann demnach an dem fraglichen Gespräche sehr wohl theilgenommen haben.

Ausser Peurbach aber müssen wir mindestens noch einen Theil-

¹⁾ „Reversus itaque diu non fuit . . .“, pag. 339. — ²⁾ „ . . . vix ephebus (d. i. Regiomontanus) adhuc sub annum puta saeculi quinquagesimum primum aut quinquagesimum secundum. Appulsus Viennam salutavit Peurbachium . . .“, pag. 346. — ³⁾ Vgl. Cantor, Bd. 2. S. 165. — ⁴⁾ Vgl.: „ . . . et cum viros commemoraret, quos suspexisset maxime quorumque expertus summam benevolentiam fuisset, censebat in ipsis tum Nicolaum Cusanum, sancti Petri ad vincula cardinalem, operibus variis inscriptisque praesertim De docta ignorantia valde celebrem . . .“, pag. 338. — ⁵⁾ „ . . . verum Romae quoque et domo exceperit et nullis non votis, ut penes se vellet consistere, optavit“, pag. 338 sq. — ⁶⁾ Vgl.: „Omitto, quod doctissimus cardinalis s. Petri ad vincula saepenumero te domesticis suis adnumerare voluit“, l. c. pag. 351.

nehmer ausfindig machen, und dabei dürfte nach bereits früher Gesagtem in erster Linie wohl, zumal wir uns in Italien befinden, an Toscanelli zu erinnern sein. Handelte es sich dann weiter lediglich darum, namhafte Männer gleicher Geistesrichtung zu erwähnen, so wäre vor allem Bianchini in Ferrara zu erwähnen; wollte man noch einen Schritt weiter gehen, so käme man auf den berühmten Bessarion, welcher sich nachweislich für dergleichen Dinge lebhaft interessirte. Doch genug davon, Toscanelli und Peurbach genügen uns hier völlig.

Wahrscheinlich stellte auch einer von diesen und nicht Cusanus die früher schon mitgetheilte Behauptung über die Quadratur des Kreises auf. Der letztere nämlich konnte, wenn anders er seine Ansichten seit 1440 nicht abermals wesentlich geändert, an der möglichen Quadratur kein besonders erhebliches Interesse nehmen. Lag ihm doch vor allem daran, den Unterschied der Figuren zu betonen, das Zusammentreffen begrifflich verschiedener Gebilde gänzlich auszuschliessen, und erklärte er dementsprechend, dass beispielsweise ein eingeschriebenes Vieleck, mag man dessen Winkel auch in's endlose vervielfältigen, doch niemals einem Kreise gleich werde. Darnach könnte leicht einer der Mitunterredner gerade mit Rücksicht auf dergleichen ihnen durch die „docta ignorantia“ und die „coniecturae“ hinlänglich bekannte Ansichten ihres Freundes bzw. Gönners die Rede auf die Quadratur des Kreises durch Archimedes gebracht haben. Dass uns dieser grösste Mathematiker des klassischen Alterthumes hier meines Wissens zum ersten Mal in den Schriften des Cusanus begegnet, dürfte in diesem Zusammenhange zu bemerken nicht ganz gleichgültig erscheinen. Ergebniss der Gespräche aber muss dann dies gewesen sein: Mit der Quadratur des Kreises durch Archimedes hat es vollkommen seine Richtigkeit — bis auf den einen Punkt, wie man eine gerade Linie dem Kreisumfange gleich macht.

Ueber diesen Punkt dachte dann unser Autor noch einmal auf einem Ritte gründlich nach und schrieb bald darauf das Ergebniss davon nieder.¹⁾ Eine Angabe über die Zeit, welche zwischen jenem Gespräche und diesem neuerlichen Nachdenken verstrich, vermisst man. Wahrscheinlich hat man sich den Sachverhalt also zu denken. Zu Rom fanden in der ersten Hälfte des Jubeljahres die öfters genannten Gespräche statt; um die Mitte des Jahres verliess Cusanus,

¹⁾ „Quam (sc. assertionem) dum nuper equitando revolveremus, quod attigimus conscripsimus“, l. c. pag. 5.

wie der Papst und die meisten Cardinäle, die mit Menschen aus allen Ländern überfüllte Stadt, hatte auf dem Wege in seine Sommerfrische Zeit und Musse genug, über die Quadratur des Kreises noch einmal nachzudenken, legte dann, in dieser angelangt, nicht lange nachher das Ergebniss in der kleinen Abhandlung nieder; und dies Letztere geschah, wenn nicht alles trügt, zu Rieti in den ersten Julitagen 1450.¹⁾

In diesen Tagen handelte es sich für ihn anscheinend nur um eine Kleinigkeit. Die Quadratur des Kreises durch Archimedes galt bis auf einen einzigen Punkt für unanfechtbar. Nur müsste noch an die Stelle der Spirallinie zu dem Ende etwas Besseres gesetzt, nur noch ein leichteres Verfahren gefunden werden, eine gerade Linie der Peripherie gleich zu machen.

Ein solches aber finde man thatsächlich, wenn man zunächst einmal beachte, dass Dreieck und Kreis in Hinsicht des Inhaltes die äussersten Plätze einnehmen²⁾, dass bei dem Dreiecke sich die Halbmesser der Kreise, des ein- und umgeschriebenen, ganz anders wie bei dem Kreise verhalten, dass bei diesem die Kreise, der ein- und umgeschriebene, zusammentreffen, während sie bei dem Dreiecke so sehr verschieden sind³⁾, dass bei letzterem der Halbmesser des umgeschriebenen sehr gross, der des eingeschriebenen sehr klein, und beide verbunden zusammen sehr geringfügig⁴⁾, dass dies ganz anders bei dem Kreise sei, wo beide verbunden zusammen den sehr grossen Durchmesser des Kreises ausmachen.⁵⁾ Deswegen wissen wir, dass in allen mittleren regelmässigen Vielecken von gleichem Umfange sich je nach dem Inhalte in ihnen deren Apothemen der Gleichheit mit dem Halbmesser des Kreises nähern.⁶⁾ Man merke sich also die Grösse, um welche der Kreishalbmesser den Halbmesser des dem

¹⁾ Angenommen wird hierbei, dass die Abhandlung vor, aber nur kurze Zeit vor den „geometricis transmutationibus“ erschien. — ²⁾ Vgl.: „Nos autem considerantes trigonum et circulum in capacitate extrema loca tenere“, l. c. —

³⁾ „... in trigono semidiametros circulorum et inscripti et circumscripti contrario modo se habere cum semidiametro circuli, in quo circuli inscriptus et circumscriptus coincidunt, qui differunt in trigono maxime“, l. c. — ⁴⁾ „... esseque ibi semidiametrum circumscripti maximam et inscripti minimam et simul iunctas brevissimas“, l. c. — ⁵⁾ „... contrario modo in circulo, ubi simul iunctae sunt diameter circuli maxima“, l. c. — ⁶⁾ „Ob hoc scimus omnes medias polygonias isoperimétras et isopleúras secundum capacitatem in illis ad aequalitatem semidiametri circuli accedere“, l. c. Die Fassung dieses lateinischen Satzes ist zum mindesten ungenau; im Obigen ward eine grössere Genauigkeit erstrebt.

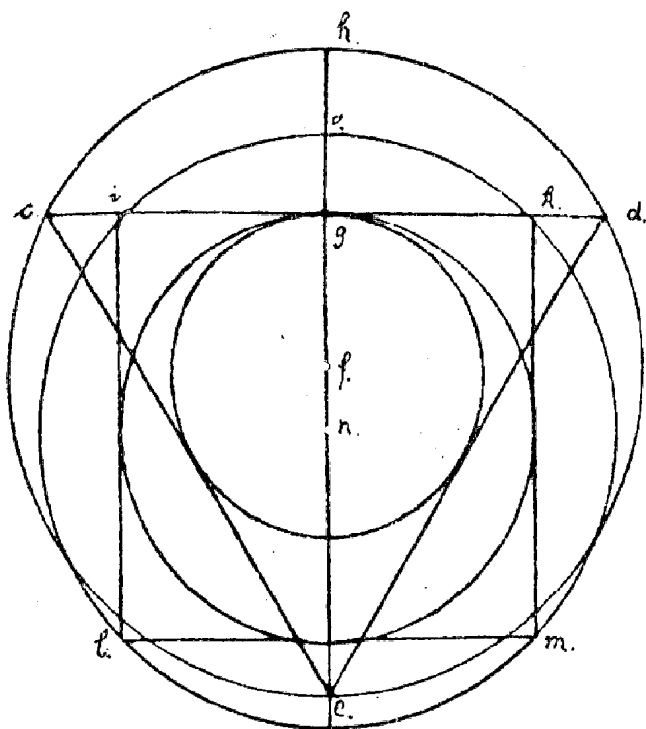
Dreiecke einbeschriebenen Kreises überragt¹⁾, sowie die Grösse, um welche der nämliche Kreishalbmesser kleiner als der Halbmesser des dem Dreiecke umschriebenen Kreises sein dürfte²⁾: dann wird sich jedes mittlere Vieleck je nach seinem Inhalte in Rücksicht auf den Ueberschuss des Halbmessers des ihm eingeschriebenen über den Halbmesser des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises und in Rücksicht auf die Minderung des Halbmessers des ihm umschriebenen in Vergleich zu dem Halbmesser des dem Dreiecke umschriebenen Kreises proportional verhalten.³⁾ Da sich jene nämlich infolge verschiedenen Inhaltes mannigfaltig gestalten, so kann das Verhalten der Halbmesser nicht von dem ihres Inhaltes verschieden sein.⁴⁾ Somit muss sich stets, wie sich Ueberschuss zu Ueberschuss, so auch Minderung zu Minderung verhalten.⁵⁾ Es werden demnach in allen Vielecken solche Ueberschüsse und Minderungen unter einander in ein und demselben Verhältnisse stehen⁶⁾; ist daher ein einziges gegeben, indem man dieselben an irgend einem bekannten Vielecke kennt, so weiss man deren Verhältniss auch am Kreise.⁷⁾ Nun kommen aber, wie sofort erhellt, Ueberschuss und Minderung am Kreise zusammen verbunden dem Halbmesser des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises gleich.⁸⁾ Würde sich daher, nachdem man dieses Verhältniss gefunden, gemäss demselben der Halbmesser des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises theilen, und der grössere Theil zu eben dem Halbmesser des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises hinzufügen lassen, so erhielte man den Halbmesser des Kreises von gleichem Umfange und somit das Ganze, wonach man sucht.⁹⁾

¹⁾ „Si igitur signata fuerit quantitas excessus semidiametri circuli super semidiametrum (gedruckt steht „diametrum“) inscripti trigono“, l. c. — ²⁾ „... et quantitas, qua (gedruckt „quo“) ipsa semidiameter circuli fuerit minor semidiametro circumscripti trigono“, l. c. — ³⁾ „... tunc omnis polygonia media secundum suam capacitatem in excessu semidiametri sibi inscripti super semidiametrum inscripti trigono et diminutione semidiametri sibi circumscripti a semidiametro circumscripti trigono proportionaliter se habebit“, l. c. — ⁴⁾ „Nam cum illae (gedruckt „illa“) ex diversa capacitate varientur, non potest diversa esse habitudo illorum ab habitudine capacitatum“, l. c. — ⁵⁾ „Sic semper necesse est, quod sicut se habet excessus ad excessum, etiam sic se habeat diminutio ad diminutionem“, l. c. — ⁶⁾ „Erunt igitur in omnibus polygoniis excessus et diminutio tales se ad invicem habentes in proportionem una“, l. c. — ⁷⁾ „Quare data una habitudine per illorum scientiam in nota aliqua polygonia tunc scitur et in circulo“, l. c. — ⁸⁾ „Et quia excessus et diminutio in circulo simul iuncti aequantur semidiametro inscripti trigono, ut de se patet, ...“, l. c. — ⁹⁾ „... igitur si reperta habitudine divideretur (gedruckt steht „dividentur“) secundum

Zugegeben für einen Augenblick, die soeben mitgetheilte Analysis sei in allen ihren Gliedern und Folgerungen richtig, so wäre darnach die Quadratur des Kreises mit dem Radius r gefunden, wenn es gelänge, den Radius ϱ des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises nach dem als gefunden vorausgesetzten Verhältnisse $2\varrho - r$ und $r - \varrho$ zu theilen, $r - \varrho$ zu ϱ hinzuzufügen und so den Radius (r) des Kreises von gleichem Umfange, somit alles Gesuchte zu erlangen. Ohne Zweifel ist darunter am wichtigsten und am schwierigsten, das als gefunden vorausgesetzte Verhältniss der Radiustheilung wirklich zu finden. Ihr widmet demzufolge der Autor in dem weiteren Verlaufe der kleinen Abhandlung¹⁾ seine besondere Aufmerksamkeit.

Diesen letzten Theil der Analysis nämlich ist er zunächst bestrebt dem Leser auf folgende Art noch klarer zu machen. Man denke sich (Fig. 1) eine Linie ab in drei gleiche Theile getheilt und

Figur 1.



daraus das Dreieck cde gebildet, grenze auf der Seite cd gleich weit von deren Endpunkten ein Stück ik ab, welches gleich einem Viertel ab , errichte über ik das Quadrat $iklm$, beschreibe in und um diese Figuren Kreise, der Halbmesser des dem Dreiecke einbeschriebenen sei fg , des umgeschriebenen fh , der Halbmesser des dem Viereck eingeschriebenen ng und der des umbeschriebenen Kreises no .

— Man zeichne alsdann

für sich gesondert die Linie fh , setze in deren Mitte g , ziehe von den Punkten f, g, h Linien, beliebig lang, senkrecht und parallel, mache auf der von f aus gezogenen Linie fn gleich fg , ziehe von n zu fh eine Parallele, welche die Gerade von g aus in a^1 und die

eam semidiameter inscripti trigono et maior portio adderetur ad ipsam semidiametrum circuli inscripti trigono, haberetur semidiameter circuli isoperimetri et ita omne quaesitum", l. c.

¹⁾ Pag. 6—8.

von h aus in t schneide, bezeichne auf dieser Parallele den Halbmesser des irgend einem Vielecke von gleichem Umfange einbeschriebenen Kreises, etwa den des zum Vierecke gehörigen, welcher np , und ebenso den des umgeschriebenen, welcher no sei¹⁾, ziehe von g durch p in's unbestimmte, ähnlich von h durch o eine gerade Linie und setze, wo die zwei zusammentreffen, den Punkt q , ziehe durch q eine Parallele zu fh , welche die verlängerten Linien ht in s , fn in r und ga^1 in b^1 schneide. Alsdann kann man behaupten, rq sei der Halbmesser des gesuchten Kreises, dessen Peripherie der Geraden ab gleich ist.

Dass diese Behauptung nun auch wirklich das Richtige treffe, sucht er alsdann auf mehrfache Art, direct und auch indirect, zu erweisen, hält persönlich den Nachweis für erbracht und leicht fasslich.²⁾ Allein genau besehen, wird keineswegs ein überzeugender Beweis geliefert, noch auch ein Verfahren, das auf irgend welche Genauigkeit Anspruch zu erheben berechtigt wäre, angegeben; höchstens gewinnen wir eine ungefähr richtige Vorstellung von den fraglichen Verhältnissen.

Das Ergebniss der Abhandlung wird ihn selbst daher nur wenig befriedigt haben. Ausserdem musste er sich sagen, dass die Quadratur des Kreises doch nicht die einzige, sondern nur eine von den vielen Aufgaben ist, wo es sich um Verwandlung geometrischer Figuren handelt. Um daher nachzuholen, was er hier noch nicht geleistet, liess er alsbald, wie ich glaube, eine andere grössere Schrift folgen, nämlich

2. *De geometricis transmutationibus.*

Ebensowenig wie die zuvor besprochene Abhandlung findet sich auch diese grössere Schrift in den Cueser Handschriften E_2 bzw. E_3 , fehlt infolgedessen auch in der Incunabel, findet sich dagegen, während dies für „die Quadratur des Kreises“ nicht gilt, schon in der Pariser Ausgabe, selbstverständlich schliesslich auch in dem Baseler Druck. Mit Rücksicht auf jenen ersten Abdruck fühlt sich dessen Herausgeber, Jacob Faber aus Etaples, seinem sehr gelehrten Freunde Jacob Faber aus Deventer, der ihm die Schrift schenkte, zu besonderem Danke verpflichtet.³⁾ Abgesehen von diesen beiden Drucken, ist uns

¹⁾ „... signetur semidiameter inscripti alicuius (lies „alicui“) polygoniae isoperimetrae, puta tetragonae, quae sit np , et semidiameter circumscripti, quae sit no ...“, l. c. — ²⁾ Vgl.: „Multipliciter probatur et facilliter“, pag. 6. — ³⁾ „... de geometricis transmutationibus, ...: hos tres dono accepi a Jacobo Fabro Daventriensi, viro amico et doctissimo“ Praefatio fol. *aa* 3^b.

das Werk noch durch wenigstens drei Handschriften überliefert: cod. lat. Monoc. 14908 (Em. r 7) fol. 407, cod. 14213 (Em. C. 32) fol. 96^a und cod. 18711 (Teg. 711) fol. 234.

Nach den beiden zuletzt erwähnten Handschriften ward das Werk zu Rieti am 12. Juli 1450 vollendet.¹⁾

Gleich eine Stelle im Eingang desselben setzt ziemlich deutlich, wie mir scheint, die Existenz der „Quadratur des Kreises“ voraus. Es heisst daselbst nämlich: „Wie bereits vordem bemerkt ward, entspricht der Unterschied des Inhaltes der Figuren gleichen Umfanges dem Unterschiede der eben denselben eingeschriebenen Kreise.“²⁾ Weil eine solche Aeusserung vorher nicht in der nämlichen Schrift gethan ist, so kann sich jener Hinweis auch nicht auf diese, sondern muss sich auf eine andere und wird sich höchstwahrscheinlich auf keine andere als auf die „Quadratur des Kreises“ beziehen. Man erinnere sich nur an die Stellen, welche aus dieser oben³⁾ ausgehoben wurden, beachte weiterhin, was in den „geometrischen Verwandlungen“ unmittelbar folgt: „Die Halbmesser des ein- und des umgeschriebenen Kreises sind einander bei einem Dreiecke am meisten, bei den anderen Figuren sodann stufenweise immer weniger ungleich; bei dem Kreise von gleichem Umfange aber treffen beide zusammen, hier nämlich treffen der eingeschriebene, der umgeschriebene Kreis und die Peripherie jenes zusammen“, sämmtlich Sätze, welche für uns nichts Neues enthalten, sondern aus der „Quadratur“ bereits bekannt sind. Angesichts derselben wird man jeden Zweifel an dem nahen sachlichen Zusammenhang zwischen den beiden Schriften wohl aufgeben dürfen. Steht eine derartige Beziehung aber einmal ausser Zweifel, dann wird auch noch ein anderer Hinweis ebenfalls auf die „Quadratur“ zu deuten sein. Anderswo, so lautet derselbe, werde gelehrt, ein Zusammentreffen der äussersten Gegensätze sei in dem Grössten der Fall, und dies Grösste der Kreis.⁴⁾ Da hier vom Zusammentreffen der Gegensätze die Rede ist, so denkt man unwillkürlich zunächst an „das gelehrte Nichtwissen“, muss sich

¹⁾ „In civitate Reatina 1450 die 12. Iulii Nicolaus de Cusa, cardinalis seti Petri ad vincula, complevi“, heisst es cod. 18711 fol. 249^b; dem fügt cod. 14213 fol. 104^b noch bei: „hunc tractatum de transmutationibus geometricis.“ — ²⁾ „Quia vero differentia capacitatis isoperimetrarum figurarum correspondet differentiae circulorum infra scriptorum eisdem, ut iam ante hoc notatum est, ...“ De geometricis transmutationibus in der Pariser Ausgabe fol. 33^b. — ³⁾ S. 411 Anm. 6 ff. — ⁴⁾ „Quae (sc. coincidentia extremorum) cum in maximo sit, ut alibi traditur, et maximum sit circulus, qui ignoratur, ...“ fol. 33^b.

freilich zugleich sagen, dass hierselbst dem Kreise nicht die Ausnahme-stellung eingeräumt wird, welche er nach jenem Verweise besitzen soll; denn nach dem „gelehrten Nichtwissen“ findet ein Zusammen-treffen der Gegensätze, wie bekannt¹⁾, bei der unendlichen Linie, dem unendlichen Dreiecke und der unendlichen Kugel ebenso sehr statt, wie bei dem unendlichen Kreise. Wohlgemerkt, der fragliche Kreis muss hier unbedingt unendlich sein. Die Haupteigenschaft scheint darnach vorhin aus Versehen unerwähnt geblieben sein; indessen doch wohl nur scheinbar, das vermuthete Versehen dürfte man vielleicht zutreffender als bewusste Absicht zu deuten, den umstrittenen Hinweis gar nicht auf „das gelehrte Nichtwissen“, sondern eben auf „die Quadratur des Kreises“ zu beziehen haben; denn eben nach dieser bilden be-kanntlich²⁾ der ein- und umgeschriebene Kreis bei einem Dreiecke äusserste Gegensätze und treffen bei einem jeden endlichen oder eigentlich mathematischen Kreise mit diesem und somit auch unter sich zusammen.

Endlich verdient hier noch eine dritte Stelle des in Rede stehenden Einganges, die da besagt, was unter gewissen, dem Griechischen ent-nommenen Ausdrücken zu verstehen sei, eine besondere Hervorhebung. Die fraglichen Ausdrücke: „polygonia“, „isoperimeter“, „isopleurus“ kommen, wie bekannt³⁾, schon in der „Quadratur“ vor, aber ohne dass sie näher erklärt werden. Wie eine nachträgliche nähere Er-klärung liest es sich daher, wenn es nun jetzt heisst: Figuren mit vielen Winkeln nennt man „polygoniae“, solche mit Seiten, welche unter einander gleich sind, „isopleurae“, solche endlich, welche Seiten von ein und derselben Längenausdehnung und somit ein und den-selben Umfang besitzen, „isoperimetrae.“⁴⁾ Von einer nachträglichen Erklärung freilich kann nur dann die Rede sein, wenn die „Quadratur“, wie hier angenommen ist, und nicht „die Verwandlungen“ vorauf-gehen. Hält man dem entgegen, dass Erklärungen für gewöhnlich vorangestellt werden, so gebe ich dies ohne weiteres zu; folgert man hieraus aber weiterhin, dass also anzunehmen, „die Verwandlungen“ gehen vorauf, und „die Quadratur“ folgt nach, so gebe ich zu be-denken, dass bei einer solchen Annahme die oben erwähnten, nicht undeutlichen Hinweise in „den Verwandlungen“ auf eine bereits früher

¹⁾ Vgl. ob. S. 315 Anm. 1. — ²⁾ Vgl. S. 412 Anm. 5. — ³⁾ Vgl. S. 412 Anm. 9. — ⁴⁾ Vgl.: „Omnium autem figurarum multorum angulorum, quae polygoniae, et aequilaterarum, quae isopleurae, et eiusdem longitudinis laterum, quae eandem habentes peripheriam isoperimetrae dicuntur, ...“ l. c.

verfasste Schrift sich gar nicht, wenigstens nicht ungezwungen erklären lassen. Wohl weiss ich, dass man anderwärts eine ganz anders geartete Beziehung in der „Quadratur“ findet. Darnach würde sich auf sie nicht, wie hier geltend gemacht wird, eine spätere Schrift zurückbeziehen, sondern sie selber sich inhaltlich mit einer früheren, den „mathematischen Ergänzungen“ nämlich, wovon später, berühren und wahrscheinlich ein Auszug daraus sein.¹⁾ Allein der für diese Behauptung unbedingt erforderliche Nachweis wird nicht versucht, und eine Bestätigung derselben fand ich selber nicht. Gewiss berühren sich die beiden zuletzt genannten Schriften inhaltlich insofern, als in beiden von der Quadratur des Kreises die Rede ist; aber dies ist nicht bloß in den beiden, sondern, wie Schanz²⁾ gelegentlich gegen Scharpff ganz richtig bemerkt, in allen der Fall. Genauere sachliche Berührungspunkte müssen daher, um auf sie bauen zu können, nachweisbar sein, Berührungspunkte etwa, wie die zuvor thatsächlich nachgewiesenen. Diese setzen in der That die Existenz der „Quadratur“ voraus, bestätigen hierdurch mittelbar das früher aus dieser Abhandlung selbst³⁾ gewonnene Ergebniss.

Noch eins bleibt in diesem Zusammenhange beachtenswerth, die Widmung. Wie zutreffenden Ortes⁴⁾ bemerkt ward, gehörte zu den eifrigen Forschern, mit welchen sich unser Autor über die Quadratur des Kreises gelegentlich unterhielt, unter anderen höchstwahrscheinlich auch Toscanelli. Und gerade diesem, dem Theilnehmer also an jenen Gesprächen, dem die infolge derselben geschriebene „Quadratur des Kreises“ sicherlich zugeht, dem ebenso sicher das gänzlich Unzulängliche der hierselbst versuchten Lösung des so schwierigen Problems nicht entging, der den Verfasser derselben wahrscheinlich auf diesen Mangel aufmerksam machte, gerade ihm sind „die geometrischen Verwandlungen“ gewidmet.⁵⁾

Die fragliche Widmung verdient in mehr als einer Beziehung unsere eingehende Beachtung. Zunächst berührt einen die Art und Weise wohlthuend, wie unser Autor über seine

¹⁾ Schanz S. 6 Anm. 3. — ²⁾ A. a. O., S. 6 Anm. 7. — ³⁾ Vgl. oben S. 404 Anm. 2. — ⁴⁾ Oben S. 410. — ⁵⁾ „Nicolai de Cusa card. ad Paulum magistri Dominici physicum Florentinum, optimum atque doctissimum virum, de geometricis transmutationibus libellus“, lautet fol. 33^a die Aufschrift. Statt „magistri“ will Scharpff S. 298 Anm. 2 „magisterii“ lesen, ein Vorschlag, der deshalb nicht anzunehmen ist, weil die Lesart „magistri“ einen sehr guten Sinn gibt; vgl. alles Nähere darüber oben S. 304.

Vorgänger urtheilt. Darnach waren die hochbegabten Alten in geschäftigem Forschen allerdings bemüht, sich selbst und die Nachkommen mit vielen Dingen bekannt zu machen, welche bis dahin verborgen geblieben waren, und erzielten thatsächlich in den meisten Wissenschaften brauchbare Ergebnisse.¹⁾ Indessen nicht ganz erreichten sie das erstrebte Ziel in beliebigen höheren Erkenntnisgebieten.²⁾ Dies ordnete zum voraus die gütige Vorsehung des All so an, damit in uns jenes göttliche Erkenntnisvermögen nicht erlahme, sondern sich durch eine um so nachhaltigere Verwunderung eben zu den Gegenständen hingetrieben fühle, welche verborgen und doch zu wissen möglich sind.³⁾ Unter den Problemen aber, welche denen, die sich mit geometrischen Forschungen plagten, bis auf diese Stunde hinderlich im Wege standen, verblieb eines für alle, deren geistige Leistungen die zu unserer Kenntniss gelangten Schriften recht sorgfältig aufbewahren, ungelöst und unerkannt⁴⁾, nämlich das Verfahren, wie man die Gleichheit des Geraden und Krümmen oder deren wechselseitiges Verwandeln feststellt.⁵⁾ Infolgedessen glaubten nicht wenige, nein vielmehr fast alle, die sich mit der Forschung darnach abgegeben, nach unermesslichen vergeblichen Bemühungen, dass der Weg, befriedigende Kenntnisse von diesem Gegenstande zu erwerben, uns benommen sei.⁶⁾ Dies bringe so die Unmöglichkeit der Aufgabe und deren natürliche Beschaffenheit mit sich, welche eben dem Zusammenreffen eines so grossen Gegensatzes, wie er zwischen Gerade und Krümm thatsächlich existirt, widerstrebe.⁷⁾

Dieser Ansicht war, wie bekannt⁸⁾, Cusanus zehn Jahre früher selbst; seitdem hat er dieselbe geändert. Nach seiner nunmehrigen

¹⁾ „Etsi veteres magno ingenio praediti sedula indagatione conati sunt multa tunc abscondita sibi et posteris nota facere perfeceruntque utiliter in plerisque maximis atque optimis artibus, non tamen . . .“ fol. 33a. — ²⁾ „ . . . non tamen omne desideratum in quibusque altioribus theoriis attigerunt“, l. c. — ³⁾ „ . . . praeordinante hoc universorum optimo provisoro, ut in nobis vis illa divina intelligentiae non torpeat, sed admiratione vehementiori ad ipsa latentia et scitu possibilia feratur“, l. c. — ⁴⁾ Inter ea autem, quae geometricis speculationibus insudantibus hucusque impedimento fuere, unum omnibus, quorum vires ingenii libri qui ad nostram notitiam deducti sunt curiosius observant, incognitum remansit“, l. c. — ⁵⁾ „ . . . de recti scilicet atque curvi aequalitate aut invicem mutatione statuenda“, l. c. — ⁶⁾ „ . . . ita ut non paucis, immo pene omnibus huic inquisitioni deditis post immensos labores visum sit viam ad huiusce rei notitiam acquirendam a nobis sublatam“, l. c. — ⁷⁾ „ . . . hoc rei impossibilitate agente et natura ipsam tantae oppositionis coincidentiam repellente“, l. c. — ⁸⁾ Vgl. oben S. 307 Anm. 6 und S. 308 Anm. 4.

Ansicht nämlich liegt die Schwierigkeit der Aufgabe nicht an jenem Widerstreben, sondern vielmehr an kleinstmüthigem Zufassen und nachlassender Umsicht derer, welche nicht mit höchster Geistesschärfe, wie es das Dunkle der Aufgabe eigentlich fordert, unermüdlich thätig waren.¹⁾ Sobald ihm daher im Juli 1450 zu Rieti ein bisschen Musse gegönnt war, wandte er seine Aufmerksamkeit einem neuen Verfahren zu, um so endlich einmal zu der fraglichen Lösung zu gelangen²⁾, und arbeitete an demselben mit hinlänglicher Umsicht um höherer Zwecke willen so lange herum, bis er für seine sämtlichen Nachforschungen in der weiter unten noch näher zu besprechenden Formel eine leicht fassliche Zergliederung erzielte.³⁾ Angesichts eines so weitreichenden und bisher nicht gekannten Verfahrens aber, von welchem nicht blos die vollendete Befähigung abhängt, in der Geometrie Figuren zu verwandeln, sondern auch die Anleitung sogar versinnbildet wird, wie man zu höheren Dingen emporsteigt, glaubte er, sich nicht auf das Dunkle und Winzige seines bisschen Geistes verlassen zu dürfen⁴⁾, und beschloss daher, zu einem sehr erfahrenen Gutachter und Eiferer für die Wahrheit seine Zuflucht zu nehmen und einem schon seit langem durchaus bewährten Freunde seine Entdeckung zu dem Ende auseinander zu setzen, damit sie auf der Waage des so billig denkenden Richters gewogen werde.⁵⁾ „Wirf also, theuerster Freund, auch wenn du mit höheren Dingen beschäftigt bist, die nachfolgenden Zeilen nicht als unreif und unverarbeitet beiseite⁶⁾; sie nachzusehen ist nämlich eine Kleinigkeit, sie zu verstehen aber die grösste Leichtigkeit.⁷⁾ Je enger das Freundschafts-

¹⁾ Vgl.: „Ego vero huius rei difficultatem in parvitate apprehensionis et intermissione diligentiae non summo acumine vigilantium, ut obscuritas negotii deposcit, potius existimans . . .“, l. c. — ²⁾ „ . . . dato qualicunque otio ad artem novam, qua ad quaesitum pertingerem, me contuli“, l. c. — ³⁾ Vgl.: „ . . . ei diligenter satis ob altiores fines insudando, quousque cunctarum meditationum mearum subscripta formula facilem resolutionem efficerem“, l. c. — ⁴⁾ „Quoniam autem in tanta et hactenus ignota arte, a qua non tantum perfectio geometricae transmutationis dependet, sed et etiam introductio ad altiora ascendendi figuratur, non erat in obscuritate et parvitate ingenioli mei confidendum, . . .“ l. c. — ⁵⁾ „ . . . recte statui ad arbitrum peritissimum atque veritatis zelatorem confugere et iam dudum probatissimo amico inventionem pandere, ut in statera aequissimi iudicis aestimeretur“, l. c. — ⁶⁾ „Noli igitur, amice dilectissime, ista, etiamsi in maioribus versaris, quasi cruda indigestaque abiicere“, l. c.; vgl. oben S. 304 Anm. 1. — ⁷⁾ „Lectu enim parva, intellectu vero facillima sunt“, eine kleine Freiheit in der oben stehenden Uebersetzung ermöglicht das offenbar mit Absicht gewählte Wortspiel auch im Deutschen.

band und je herzlicher das Wohlwollen ist, mit dem du mich seit jungen Jahren umfasst hältst, desto sorgfältiger nimm augenblicklich auf das Feilen Bedacht und lass das Ganze nicht in andere Hände gelangen, ohne es verbessert zu haben.“¹⁾ In der That eine gedankenreiche und ansprechende Widmung! Wie zuvor das von hoher Achtung früherer Leistungen eingegebene Urtheil über die Vorgänger, so thut einem hier die Bescheidenheit wohl, mit welcher er sich und sein neu entdecktes Verfahren einführt. Und worin besteht dasselbe?

Schier zahllose Versuche, zu dem geplanten Verfahren zu gelangen, waren, jedoch stets vergeblich, gemacht²⁾, da dachte er auf einmal an das Princip zurück, dessen er sich in den Büchern „über das gelehrte Nichtwissen“ bedient, und der Weg stand ihm offen.³⁾ Jenes Princip kennen wir bereits von früher; es ist das Zusammentreffen der Gegensätze, genau dasselbe also, was er 1440 so ängstlich von dem Gebiete der Mathematik fern gehalten und nur in dem darüber hinausliegenden Gebiete der Vernunftforschung über göttliche Dinge angewandt wissen wollte. Jetzt (1450) gestattet er demselben auch den Eingang in das Gebiet des Verstandes, in die Mathematik, damit es ihm den Weg zu dem geplanten Verfahren bahne. Das letztere nämlich verlangt über diejenigen Kenntnisse hinaus, welche man uns in der Geometrie bereits lehrt, die Verwandlung des Krummen in Gerades und des Geraden in Krummes.⁴⁾ Da nun aber zwischen diesen ein rationales Verhältniss nicht besteht, so muss in einer Art von Zusammentreffen der äussersten Glieder dies Geheimniss stecken.⁵⁾ Dass dem in dem Grössten wirklich so ist, steht anderswo, nämlich in der „Quadratur des Kreises“⁶⁾, aufgezeichnet, und dies Grösste ist der Kreis.⁷⁾ Indessen ihn kennt man

¹⁾ „Sed quanto me . . . strictiori amicitiae nodo atque cordiali quodam amplexu indesinenter constrinxisti (vgl. oben S. 304 Anm. 2), tanto nunc accuratius emendationi animum adhibe et in communionem aliorum nisi correctum prodire non sinas“, l. c. — ²⁾ Vgl.: „Post innumeros pene modos, quibus semper tamen deficiens ad institutam artem pervenire contendi, . . .“ l. c. — ³⁾ „... tandem ad principium, quo in libris de docta ignorantia usus sum, respiciens (lies „respicienti“) via mihi (d. i. dem „respiciens“) patefacta existit“, l. c. — ⁴⁾ „Exigit . . . ars quam inquiri praeter ea iam tradita in geometricis versionem curvi in rectum ac recti in curvum“ fol. 33b. — ⁵⁾ „Inter quae cum nulla rationalis proportio cadat, oportet in quadam coincidentia extremorum hoc latere secretum“, l. c. — ⁶⁾ Vgl. oben S. 415, Anm. 4. — ⁷⁾ „Quae cum in maximo sit, ut alibi traditur, et maximum sit circulus, . . .“, l. c.

nicht, und darum wird jetzt hier gezeigt, man müsse nach dem Zusammentreffen bei dem Kleinsten, welches das Dreieck ist, forschen.¹⁾

Darnach ist trotz des Zurückgehens auf das Verfahren, welches „das gelehrte Nichtwissen“ einschlägt, doch keineswegs eine volle Uebereinstimmung, sondern nur eine gewisse Annäherung geplant. Das methodische Princip dort im Jahre 1440 soll jetzt zwar auch im Gebiete der Mathematik zur Geltung kommen, aber innerhalb desselben nicht an dem nämlichen Gegenstande, nicht, wie in dem „gelehrten Nichtwissen“, an unendlichen Grössen, sondern nur an endlichen und innerhalb dieses Bereiches auch nicht mehr, wie in der „Quadratur“, an dem Kreise, sondern an dem Dreiecke, d. h. nicht an der grössten, sondern an der kleinsten geometrischen Figur. Unter allen Figuren mit vielen Winkeln, gleichlangen Seiten und der nämlichen Länge der Seiten d. i. mit ein und demselben Umfange, kürzer: unter allen regulären Figuren von gleichem Umfange besitzt nämlich offenbar das Dreieck den kleinsten Inhalt²⁾ und der Kreis den grössten, da bei gleichem Umfange eine Figur um so reicher an Inhalt, je mehr Winkel sie haben wird.³⁾ Darnach sind jene beiden Superlative durchaus nicht, wie man bisher annahm⁴⁾, in absolutem, sondern lediglich in relativem Sinne zu verstehen: am grössten bzw. am kleinsten bei gleichem Umfange. Die geometrische Forschung bleibt demnach, was andererseits wiederum wohl zu beachten ist, im Jahre 1450 ebenso wie 1440 auf das Gebiet des Endlichen beschränkt. Sogar daran wird 1450 neuerdings erinnert⁵⁾, dass man zu der inhaltreichsten Figur, zu dem Kreise nicht durch Verdoppeln der Winkel gelange, ebensowenig wie bei einer Zahl zu dem schlechthin Grössten.⁶⁾ Kein Vieleck könne daher zu dem Kreise

¹⁾ „... qui ignoratur: in minimo, qui est triangulus, inquiri ipsam deberi ibi (im Gegensatze zu dem gerade vorhergehenden „alibi“) ostenditur“, l. c. „Da diese Coincidenz im (absolut) Grössten liegt, wie anderswo gezeigt ist, und das Grösste der Kreis ist, den man nicht kennt, so ergibt sich, dass dieselbe im Kleinsten, dem Dreiecke, zu suchen ist“, übersetzt Scharpff S. 300 die hochwichtige Stelle, aber schwerlich richtig. — ²⁾ „Omnium autem figurarum multorum angulorum . . . et aequilaterarum . . . et eiusdem longitudinis laterum (vgl. oben S. 416, Anm. 4) triangularem minimae capacitatis esse constat“, l. c. — ³⁾ „Et cum tanto quaelibet isoperimetra sit capacior, quanto plures angulos habuerit, erit circulus isoperimetrarum figurarum omnium capacissima“, l. c. — ⁴⁾ Schanz I, 8 Anm. 3. „Seinem Begriffe nach ist das Grösste das Unendliche.“ — ⁵⁾ Vgl. oben S. 311, Anm. 1. — ⁶⁾ „Ad quam (sc. isoperimetram

von gleichem Umfange in einem rationalen Verhältnisse stehen.¹⁾ Trotzdem soll nun doch, im Unterschiede zu dem 1440er Standpunkte, nach dem Verfahren geforscht werden, wodurch wir zu einem Zusammentreffen der Gegensätze und so zu dem vorgesetzten Ziel zu gelangen vermögen.²⁾

Augenscheinlich aber gehört zu der Grundlage des gesuchten Verfahrens, dass man 1. zu einer gegebenen Gerade eine ihr gleiche Kurve³⁾, 2. nach dem Verhältnisse einer Kurve zu einer Kurve eine Gerade zu einer Geraden angebe⁴⁾, 3. dass man zwischen zwei geraden Linien die zwei stetigen Proportionalen zeichne⁵⁾ und 4. nach dem Verhältnisse zweier gegebenen Linien zu einer dritten gegebenen die vierte anzugeben wisse.⁶⁾ Das erste Problem habe man bis dahin nicht durchschaut, das zweite nicht weiter beachtet, das dritte vereinzelt und dunkel berührt, und das vierte, klar von vielen entwickelt, sei eben in jenen enthalten.⁷⁾ Die hierzu nothwendigen näheren Erläuterungen versucht der Autor alsdann in musterhaften Subsumtionsschlüssen zu geben.⁸⁾

(Fortsetzung folgt.)

capacissimam) per angulorum multiplicationem deveniri nequit, sicut nec in numero ad maximum“, l. c.; ein „numerus“ zu dem „maximum“ zu ergänzen liegt zwar näher, ein „simpliciter“ aber dürfte zutreffender sein; vgl. den Grundsatz: „Ubi est reperire excedens et excessum, non deveniri ad maximum simpliciter“, De docta ignorantia I,3.

¹⁾ „Nulla igitur polygonia ad circularem isoperimetram proportionem rationalem habere potest“, fol. 33b. — ²⁾ „Inquirendum . . . qua arte ad coincidentiam ipsam atque propositum pertingere valeamus“, l. c. — ³⁾ „Videtur autem ad artis quaesitae sufficientiam pertinere primum, ut datae rectae detur aequalis curva“, l. c. — ⁴⁾ „... secundo ut secundum habitudinem curvae ad curvam detur recta ad rectam“, l. c. — ⁵⁾ „... tertio ut inter duas lineas rectas duae proportionales continuae assignentur“, l. c. — ⁶⁾ „... quarto ut secundum habitudinem duarum datarum sciatur ad tertiam datam dari quarta“, l. c. — ⁷⁾ „Primum hactenus ignotum, secundum non consideratum, tertium a paucis et obscure tactum, quartum clare a multis explicatum complicatur in his istis“, l. c. — ⁸⁾ „Quae circa haec necessaria sunt, in exemplaribus subsumptionibus ostendere conabor“, l. c.

1432, 1527

Philosophisches Jahrbuch.

Auf Veranlassung und mit Unterstützung

der

Görres-Gesellschaft

unter Mitwirkung von

Dr. Jos. Pohle,

o. ö. Prof. an der Königl. Akademie
zu Münster i. W.

Dr. Jos. Dam. Schmitt,

und Prof. an der philos.-theol. Lehranstalt
zu Fulda

herausgegeben von

Dr. Const. Gutberlet,

Professor an der philos.-theologischen Lehranstalt in Fulda.



IX. Band: Jahrgang 1896.

Fulda 1896.

Druck und Commissions-Verlag der Fuldaer Actien-Druckerei.

M
29 6/5

Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus.

Von Dr. Joh. Uebinger, Prof. der Philosophie in Posen.

(Fortsetzung.)¹⁾

Dieses mustergültige Subsumtionsverfahren behufs Lösung der ersten Aufgabe aber erinnert einen sofort an das, was oben zuletzt²⁾ aus der „Quadratur des Kreises“ mitgeteilt ward, so zwar, dass sich zum so und so vielen Male, bedürfte es dessen noch, ein sachlicher Zusammenhang zwischen den in Rede stehenden Schriften nachweisen liesse. Nicht eine beliebige Gerade, sondern die Peripherie eines Vieleckes wird nämlich gleich von vornherein als gegeben angenommen und die Peripherie eines Kreises gesucht, welche weder grösser noch kleiner, sondern ihr völlig gleich ist.³⁾ Manche freilich zweifelten daran, eine solche angeben zu können, doch bestreite niemand die Möglichkeit einer solchen Curve von gleichem Umfange, darum solle ein neuer Versuch, sie zu finden, gemacht werden.

Der einem regulären Vielecke umschriebene Kreis sei, womit für uns lediglich an bereits aus der „Quadratur“ Bekanntes erinnert wird, grösser und der ihm eingeschriebene stets kleiner als das Vieleck. Daher könne auch niemand leugnen, dass ein jeder einem regulären Vielecke eingeschriebene Kreis kleiner, und jeder umbeschriebene grösser als der Kreis, der gleichen Umfang mit dem Vielecke hat. Der letztere besitze demnach einen Halbmesser, welcher grösser als jeder Halbmesser eines eingeschriebenen und kleiner als der eines umbeschriebenen Kreises sei. So weit waren wir, wie bekannt, bereits in dem ersten Theile der „Quadratur des Kreises“ fortgeschritten, und im zweiten handelte es sich für den Verfasser vor allem darum, die wirkliche Länge des gesuchten Radius innerhalb der angegebenen Grenzen zu bestimmen. Eine sinnreiche aber umständliche, eine an-

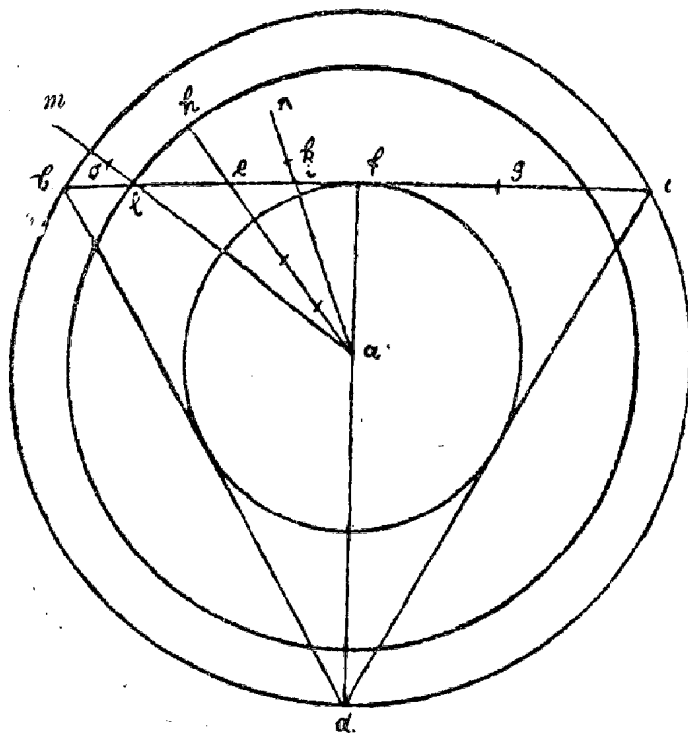
¹⁾ Vgl. „Phil. Jahrb.“ 8. Bd. (1895) S. 301 ff. u. 403 ff. — ²⁾ Jahrg. 1895, S. 413. —

³⁾ Vgl.: „Potest . . periphēria datae polygoniae circuli alicuius periphēria nec maior nec minor esse, ut sit isoperimeter“, fol. 36^a (gedruckt steht durch Versehen XXXI anstatt XXXVI).

schauliche aber schwerlich überzeugende Construction musste damals dazu verhelfen. Jetzt ist dieselbe über Bord geworfen, sie gehörte sicherlich mit zu den vielen ziemlich schwierigen Versuchen, welche bislang gemacht, aber nunmehr überflüssig geworden sind. Ein Satz nämlich ist jetzt glücklich entdeckt, aus welchem sich das, wonach wir suchen, ohne jede Schwierigkeit als Folgerung ergibt.¹⁾ Der fragliche Satz aber lautet dahin, der Halbmesser eines Kreises, welcher mit einem gleichseitigen Dreiecke gleichen Umfang besitzt, verhalte sich zu der vom Mittelpunkte nach einem Viertel der Dreiecksseite gezogenen Linie wie 5:4.²⁾

Beispielsweise sei (Fig. 2) ein Kreis um a als Mittelpunkt beschrieben, diesem das Dreieck bcd eingeschrieben, die Seite bc durch

Figur 2.



die Punkte e , f und g in vier gleiche Theile getheilt. Zieht man alsdann von a nach e eine gerade Linie, verlängert diese um ein Viertel ihrer selbst bis h , so wird diese der Halbmesser des Kreises sein, dessen Peripherie den drei Seiten des Dreieckes gleich kommt. Dieser Satz lasse sich sehr leicht als richtig nachweisen. Die von a nach f gezogene Linie werde offenbar der Halbmesser des dem Drei-

ecke eingeschriebenen Kreises, welcher unter all den Radien derjenigen

¹⁾ Vgl.: „Manifestabitur autem id, quod quaerimus, post multos difficiliores modos facili consequentia ex hac propositione“, fol. 36b. — ²⁾ Etwas umständlicher besagt das Original: „Semidiameter circuli isoperimetri trigono inscripto se habet ad lineam a centro circuli, cui trigonus inscribitur, ad quartam lateris ductam in proportionem sesquiquarta“; mit Absicht, um keine Verwirrung zu veranlassen, ward im Obigen das Adjectiv „inscripto“ und der Relativsatz „cui trigonus inscribitur“ nicht weiter beachtet; den fraglichen Mittelpunkt kann man sich ebenso zutreffend auch als Mittelpunkt des regulären Dreieckes sowie des Kreises von gleichem Umfange denken.

Kreise am kleinsten ist, welche Vielecken von gleichem Umfange eingeschrieben sind; auf gleiche Weise sei die von a nach b gezogene Linie der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, welcher unter all den Radien von Kreisen am grössten ist, die Vielecken gleichen Umfanges umschrieben sind. Zieht man nun von a beispielsweise nach i nahe bei f eine gerade Linie, welche man nach dem Verhältnisse $if:bc$, d. i. des abgegrenzten Theiles zu dem Ganzen der Seite, zu verlängern hat, und die verlängert ak sei, so ist ak offenbar kleiner als der Halbmesser des Kreises gleichen Umfanges; denn der Halbmesser des letzteren ist unter allen Radien der Kreise, die Vielecken gleichen Umfanges eingeschrieben sind, am grössten. Zieht man auf gleiche Weise von a etwa nach l nahe bei b eine gerade Linie, verlängert diese nach dem Verhältnisse $lf:bc$, d. i. ebenfalls des abgegrenzten Theiles zu dem Ganzen der Dreiecksseite, und sei diese verlängerte Linie am , so ist klar, dass diese grösser als die gesuchte ist; denn die gesuchte ist unter allen Radien der Kreise, die Vielecken gleichen Umfanges umgeschrieben sind, am kleinsten. Man kann demnach zu irgend einem Punkte x zwischen l und i eine Linie von a aus ziehen, welche, nach dem Verhältnisse $xf:bc$, d. i. des abgegrenzten Theiles zu dem Ganzen der Dreiecksseite, verlängert, der gesuchten Linie gleich kommen wird. Auf gleiche Weise wird, falls man die Linie ai nach dem Verhältnisse $ib:bc$ bis n verlängert, diese Linie an handgreiflich kleiner als die gesuchte sein; und ähnlich ist, wenn man al nach dem Verhältnisse $lb:bc$ bis o verlängert, ao sicherlich grösser als die gesuchte. Es wird demnach zwischen l und i ein Punkt x fallen, an den man von a aus eine Linie so wird ziehen und nach dem Verhältnisse $xb:bc$ verlängern können, dass sie der gesuchten gleich kommt. Somit findet sich also ein Punkt z. B. i , an welchen man von a eine Linie ziehen, nach dem Verhältnisse der beiden abgegrenzten Theile ib oder if zu dem Ganzen der Seite bc verlängern kann, doch bleibt die fragliche Linie zu klein; und ein anderer Punkt findet sich z. B. l , an welchen man von a eine Linie ziehen, nach dem Verhältnisse des einen oder anderen abgegrenzten Theiles d. i. lb oder lf zu dem Ganzen der Seite bc verlängern kann, stets wird die fragliche Linie gegen die gesuchte zu gross: so wird es denn wohl auch einen dritten Punkt x geben, an welchen man von a eine Linie ziehen, nach dem Verhältnisse einer jeden der Theilstrecken zu der ganzen Dreiecksseite verlängern kann, und die fragliche Linie wird weder

grösser noch kleiner als die gesuchte. Und dies kann offenbar kein anderer als der Punkt e sein; nur bei ihm kann, gleichviel ob man nach dem einen oder anderen Verhältnisse verlängert, das nämliche Ergebniss herauskommen.

Man wird auf gleiche Weise sagen können: Verlängert man die Linie ai nach dem Verhältnisse $if : bc$, so ist sie kleiner, und verlängert man sie nach dem Verhältnisse $if^2 : bf^2$, so ist sie kleiner, verlängert man $al^1)$ nach dem Verhältnisse $lf : bc$, so ist sie grösser, und verlängert man sie nach dem Verhältnisse $lf^2 : bf^2$, so ist sie ebenfalls grösser. Es wird also zwischen l und i einen Punkt geben, an welchen man vom Mittelpunkte eine Linie ziehen und nach den bereits genannten Verhältnissen verlängern kann, die alsdann weder grösser noch kleiner als die gesuchte sein wird. Und dieser Punkt ist nothwendig e .

Auch noch ein drittes Verhalten wird man heranziehen können: Verlängert man ai nach dem Verhältnisse $if^2 : bf^2$, $if : bc$ und $ib : bc$, so ist die Linie stets kleiner; verlängert man al nach jenen Verhältnissen, so ist sie grösser. Es wird demnach einen Punkt geben, an welchen man von dem Mittelpunkte a eine Linie ziehen und so verlängern kann, dass sie weder grösser noch kleiner als die gesuchte ist, und das ist der Punkt e , welcher von dem Punkt b und f gleich weit absteht.

Beweisen aber lässt sich eben dieser Satz auf folgendem Wege. Offenbar ist in jedem Vielecke von gleichem Umfange die vom Mittelpunkte nach der Mitte einer Seite gezogene²⁾ Linie Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und nähert sich in dem Verhältnisse, wie der Inhalt oder die Fläche des Vieleckes grösser ist, mehr und mehr der Gleichheit mit dem Halbmesser des Kreises von gleichem Umfange. Auf gleiche Weise ist die vom Mittelpunkte nach der Ecke einer Seite gezogene Linie Halbmesser des umbeschriebenen Kreises und wird stetig um so kleiner, als das Vieleck inhaltreicher sein wird. Daher wird zwischen jene beiden Punkte, den End- und den Mittelpunkt der Seite, ein Punkt x fallen, an welchen sich vom Mittelpunkt eine Linie ziehen und nach dem Verhältnisse $xf^2 : bf^2$ oder $xf : bc$ verlängern lässt, die dann ihrerseits dem Halbmesser des Kreises, von gleichem Umfange wird gleich sein. Darüber wenigstens herrsche kein Zweifel. Es treffe sich aber, dass dieser Punkt in allen Viel-

¹⁾ Gedruckt steht „ ab .“ — ²⁾ Anstatt „ $auctam$ “ lies „ $ductam$ “.

ecken von den zwei anderen Punkten, dem End- und dem Mittelpunkte der Seite, verschiedenen Abstand hat, sich mehr dem Mittelpunkte derselben nähert und von dem Endpunkte entfernt, wenn das Vieleck inhaltreicher wird. Wie demnach der fragliche Punkt sich stetig dem Mittelpunkte in den inhaltreicheren nähert, bis es in dem inhaltreichsten (dem Kreise) zu einem Zusammentreffen jener drei Punkte kommt: ebenso entfernt sich naturnothwendig in minder inhaltreichen jener Punkt von der Mitte, bis er in dem inhaltärmsten von jenen zwei Punkten den grössten Abstand hat.¹⁾ Daher liegt e auf der Mitte gleich weit von den äussersten Enden entfernt; hiermit hat man in dem, wie bekannt, inhaltärmsten Dreiecke das Gesuchte.²⁾ Deswegen läuft jeder Halbmesser eines umgeschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte a zu irgend einem Punkte x der Strecke be und bildet so eine Gerade, welche man noch über be hinaus nach den vorbesagten Verhältnissen von xb zu verlängern hat³⁾; ae also verlängert, ist unter all jenen

¹⁾ „Sicut igitur hic punctus continue accedit ad medialem in capacionibus, quousque in capacissima (gedruckt steht „capacissimam“, was indessen sinnlos ist) cum illis duobus coincidat, ita necessario in minus capacibus recedit punctus ille a mediali, quousque in minime capaci ab illis duobus punctis maxime distet“, fol. 36^b. Nach diesem Satze zu schliessen, hat Cusanus wohl nicht, wie Schanz S. 23 annimmt, geglaubt, „dass das Verhältniss $ae : eh = bc : ef$ für alle Mittelwerthe constant bleibt.“ — ²⁾ „Quare e est medius punctus aequaliter maxime ab extremis distans, in quo in incapacissimo trigono habetur quaesitum“, l. c. Gedruckt steht nicht „in incapacissimo“, sondern das Gegentheil „in capacissimo“; dass diese Lesart aber nicht richtig, das ist klar; ein „incapacissimo“ ist unbedingt erforderlich und könnte, wenn man die beiden Ablative absolut fasst, genügen. Allein eine solche Deutung erscheint etwas gesucht, entspricht nicht der vorangehenden Ausdrucksweise und erklärt nicht so einfach den Druckfehler. — ³⁾ „Ob hoc omnis semidiameter circuli circumscripti cadit de a centro ad aliquem punctum lineae be secundum praefatas habitudines portionis versus b extensae“, steht fol. 36^b gedruckt. Was die Stelle besagen will, das ergibt sich zwar ganz klar aus dem Zusammenhange; aber deren Wortlaut ist nicht klar. Die letzte Wortform verursacht die Unklarheit; „extensae“ darf man weder mit „portionis“ noch weniger mit „lineae“ verbinden; zu „portionis“ könnte man sich nach der sonst üblichen Ausdrucksweise der Deutlichkeit halber einen Genitiv „cadentis“ hinzudenken; der Begriff „extensa“ aber ist auf ein fehlendes „recta ax “ zu beziehen; stände dort „... cadit ... lineae be itaque efficit rectam ... extensam“, noch besser „extendendam“, so wäre nichts unklar. So wie die Stelle jetzt lautet, muss man „extensa“ lesen und diesen Nominativ auf „semidiameter“ beziehen; das ist freilich eine so nachlässige und logisch so wenig zu rechtfertigende Ausdrucksweise, dass ich sie ohne weiteres dem Autor gar nicht zutraue.

am kleinsten.¹⁾ Darum ist sie Halbmesser des Kreises von gleichem Umfange; eben dessen Halbmesser ist ja unter allen Halbmessern umschreibbarer Kreise solcher Art am kleinsten, und mit ihm trifft der grösste Halbmesser einschreibbarer zusammen. Daher findet in dem Punkte e ein Zusammentreffen der Zunahmen von f bis e der Halbmesser umschreibbarer Kreise und der Abnahmen von b bis e der Halbmesser umschreibbarer Kreise statt, Verlängerungen natürlich vorausgesetzt, welche man nach den Verhältnissen der Theilstrecken gegen b in dem einen und gegen f in dem anderen Falle gemacht hat.

Diese Lösung der ersten Aufgabe glaubte ich in ihrer ganzen Ausführlichkeit, nur hie und da ein wenig modernisirt, zu dem Ende hierselbst wiedergeben zu müssen, um an einem lehrreichen Beispiele zu zeigen, wie sich der Autor das neue Verfahren und namentlich das Zusammentreffen der Gegensätze, welches demselben zur Unterlage dient, gedacht, wie er dasselbe verwerthet hat. Verglichen mit dem gleichnamigen Verfahren und Princip in dem „gelehrten Nichtwissen“, ist zwischen beiden ein himmelweiter Unterschied wohl nicht zu leugnen. Gewiss, ein Zusammentreffen von Gegensätzen findet hier wie dort statt; aber die Bedingungen, unter denen dasselbe erfolgt, sind sehr verschieden. Dort erfolgt das Zusammentreffen erst in dem nebelhaft Unendlichen, hier dagegen in dem greifbar Endlichen; symbolisch-mathematische Phantasiegebilde dort, nüchterne Verstandesgebilde hier. Und das Verfahren selbst, fraglos so nüchtern, so verstandesmässig wie nur möglich gestaltet, soll dem Verfahren der Alten in dieser Hinsicht augenscheinlich in nichts nachstehen. Ihrem Verfahren entsprechend wird, da ein directer Beweis, wie es scheint, sich nicht erbringen lässt, der indirecte versucht. Die von a nach e gezogene und entsprechend verlängerte Gerade ist weder grösser noch kleiner als die gesuchte, mithin dieser gleich. Neu ist nur, was nun weiter folgt. Weil die gesuchte Gerade ihrerseits dem kleinsten Radius der umschreibbaren und dem grössten der einschreibbaren Kreise gleich ist, so sind die letzteren auch unter sich gleich, oder der kleinste Radius trifft mit dem grössten zusammen. Aehnlich wie in dem „gelehrten Nichtwissen“ liegt also auch hier ein Zusammentreffen der Gegensätze vor. Doch übersehe man über der vom Autor betonten Aehnlichkeit der Erscheinung deren Unterschied

¹⁾ „Et ae sic extensa est omnium illarum (sc. semidiametrorum; gedruckt steht „illarum“) minima“, l c.

hier und dort nicht! Genau so sehr, wie das Endliche vom Unendlichen, das Relative vom Absoluten verschieden ist, unterscheidet sich das Zusammentreffen hier von der gleichnamigen Erscheinung dort. Dies also wäre das 1450 von unserem Autor in die Mathematik eingeführte Zusammentreffprincip und das auf demselben beruhende Zusammentreffverfahren.¹⁾

Auf Grund des nämlichen Principes und Verfahrens löst er dann, während die dritte und vierte Aufgabe naturgemäss keine besondere Schwierigkeit bereiten, auch die zweite sehr schwierige. Nachdem er aber auch dies geleistet, hat er „die Vollendung des Verwandlungsverfahrens“²⁾, wonach er so eifrig und so lange vergeblich forschte, endlich glücklich zuwege gebracht. Nunmehr macht es ihm keine Schwierigkeiten mehr, alle möglichen geometrischen Dinge, nicht etwa blos Kreise, zu verwandeln. Ganz methodisch geht er dabei zu Werke. Das gesammte Verwandeln in Hinsicht auf geometrische Figuren ist nämlich das einer Linie in eine Linie oder einer Fläche in eine Fläche oder endlich eines Körpers in einen Körper.³⁾ Drei Kapitel sind es demzufolge, welche wir der Reihe nach behufs mustergültiger Anleitung schicklicherweise berühren.⁴⁾

Demgemäss gibt das erste der drei Kapitel Fingerzeige, aber auch nicht mehr, darüber, wie man eine gerade Linie in eine krumme Kreislinie⁵⁾, eine gerade in den aliquoten Theil einer solchen, eine gerade in den vierten Theil einer solchen, eine gerade in einen Theil einer gegebenen Kreislinie und endlich umgekehrt eine krumme in eine gerade verwandelt. Bei dem letztgenannten Verfahren hätten sich fast alle geirrt, findet der Autor⁶⁾ und gibt darum hier ausnahmsweise eingehendere Anweisungen.⁷⁾

Das zweite Kapitel übergeht, um überflüssige, weil sattsam

¹⁾ Die oben gewählte Uebertragung der lateinischen Bezeichnung „coincidentia“ mag vielleicht manchem nicht gefallen; auch mir gefällt dieselbe, weil noch nicht kurz genug, nicht ganz; allein ich fand keine bessere. Was ich dagegen bereits vorfand, das war das beibehaltene Wort „Coincidenz“, und doch erheischt dieses dringend, schon um des leichteren Verständnisses willen, eine Verdeutschung. — ²⁾ Vgl. zu Anfang der Erörterung über das „secundum praemissum“, fol. 38^b, die Worte: „Ut sequentia ostendent, perfectio transmutatoriae artis, quam inquirimus, non poterit hoc ignorato adipisci.“ — ³⁾ „Omnis... transmutatio in geometricis figuris est vel lineae in lineam vel superficiei in superficiem aut corporis in corpus“, fol. 43^a. — ⁴⁾ „Tria igitur sunt capita, quae seriatim pro exemplari manuuctione tangi convenit“, l. c. — ⁵⁾ „Si lineam rectam in circumferentialem curvam vertere cupis...“, l. c. — ⁶⁾ „... in qua re pene omnes errasse comperio“, l. c. — ⁷⁾ fol. 43^a—43^b.

bekannte, Dinge auszuschneiden, gänzlich die Verwandlung geradliniger Flächen unter einander¹⁾; denn es beabsichtigt nicht etwa, längst breitgetretene Dinge zu wiederholen, sondern den gewussten neue hinzuzufügen.²⁾ Demgemäss beschäftigt sich dasselbe, gleichfalls bloß andeutungsweise, lediglich mit den Fragen, wie man eine Kreisfläche in eine geradlinige, umgekehrt eine geradlinige in eine Kreisfläche, ferner einen Kreisausschnitt³⁾ und einen Kreisabschnitt⁴⁾ in eine geradlinige Fläche, endlich eine beliebige Fläche in beliebig mehrere andere verwandelt.

Endlich das dritte Kapitel enthält Anweisungen darüber, wie man ein vierseitiges Prisma in einen Würfel, einen Cylinder in einen Würfel, einen Würfel in eine Kugel, mehrere Würfel in einen einzigen, ein hohes Prisma in ein niedriges oder ein niedriges in ein hohes, mehrere gleiche oder ungleiche Prismen in ein einziges von gegebener Höhe, eine Kugel in eine Pyramide, zwei Kugeln, von denen die grössere doppelt so gross wie die kleinere, in einen Cylinder verwandelt.

3. *De arithmeticiis complementis.*

„Bester Paul, ein paar Worte der Ergänzung über arithmetische Verhältnisse!“⁵⁾ Gleich dieser Anfang der neuen Abhandlung deutet auf eine nahe Beziehung zwischen ihr und den vorangegangenen „geometrischen Verwandlungen“ und, was unmittelbar darauf folgt, das vermag uns nur in dieser Deutung zu bestärken. Streng genommen ist die Ergänzung nicht einmal nöthig. Für den Angeredeten und überhaupt für alle Sachverständige ergebe sich dieselbe mit voller Deutlichkeit eigentlich schon aus den Aufschlüssen, welche in der Abhandlung „über die geometrischen Verwandlungen“ enthalten seien.⁶⁾ Trotzdem sei dieselbe ungesäumt beigelegt worden.⁷⁾

Aus diesen Worten lässt sich in erster Reihe eine nahe zeitliche Beziehung folgern. Ergibt sich die fragliche Ergänzung

¹⁾ „... ut ... superflua resecantur, rectilinealium superficierum versionem uti notam praetergredior“, fol. 45a. — ²⁾ „... cum intendam adiacere scitis, non replicare trita“, l. c. — ³⁾ „Si vero quaeris quamcunque portionem superficiei circularis inter sectores cadentem ...“, fol. 45b; „sector“ ist darnach nicht, wie heute, mit Kreisausschnitt, sondern mit Radius gleichbedeutend. — ⁴⁾ „Si abscissionem ex chorda et arcu in rectam superficiem redigere conaris ...“, l. c. — ⁵⁾ „Paule optime, pauca quaedam complementa de arithmeticiis habitudinibus ...“, fol. 54a. — ⁶⁾ „... quamvis tibi atque omnibus nota esse possint ex iis, quae in tractatu geometricarum transmutationum enodavi ...“, l. c. — ⁷⁾ „... impigre tamen ea subieci“, l. c.

eigentlich von selbst, so bedurfte es dazu offenbar nicht eines viel Zeit beanspruchenden Nachdenkens, und ward diese ungesäumt beigefügt, so verstrich zwischen beiden auch nicht viel Zeit unbenützt, sondern die zweite folgte der ersten auf dem Fusse. Dahin dürfte weiterhin wohl auch ein sonst nicht leicht zu erklärendes Futurum zu deuten sein, welches vorhin, obgleich es in dem dort angezogenen Satze steht, für's erste unberücksichtigt blieb. Darnach hat Toscanelli bisher noch keine Zeit gefunden, die „geometrischen Verwandlungen“ zu verbessern, sondern muss dies erst noch künftighin thun.¹⁾ Für die nämliche Ansicht lassen sich endlich ganz wohl einige anderweitig festgestellte Thatsachen aus dem Leben des Autors geltend machen. Gar bald, nachdem „Die geometrischen Verwandlungen“ am 12. Juli 1450 zum Abschlusse gekommen waren, wandte sich derselbe einem zwar verwandten, aber doch wesentlich anders gearteten Wissenschaftsgebiete zu, vollendete zu Rieti am 15. Juli 1450 das erste, zu Fabriano am 8. August das zweite Gespräch „Ueber die Weisheit“, im Camaldulenserklöster bei Fabriano am 23. August dasjenige „Ueber den Geist“, und endlich ebendort am 13. September das Gespräch „Ueber die statischen Beobachtungen“, um dann binnen kurzem bis in das Jahr 1452 hinein die deutschen Gaue reformirend von einem Ende zu dem andern ohne Ruhe und ohne Rast zu durchziehen. Angesichts dieser Thatsachen bleibt bei reiflichem Ueberlegen für „Die arithmetischen Ergänzungen“ füglich nur mehr ein Spielraum von zwei Tagen. Dieselben genügen uns für die Abfassung derselben angesichts der hohen geistigen Spannkraft, welche deren Verfasser gerade in jenen Tagen bekundete, vollkommen. Doch, was sage ich? Ein einziger derselben genügt völlig. Wenn er am 7. und 8. August fünf, an dem einen 15. Juli sogar sieben Folioseiten schrieb, dann brachte er in jener Zeit an einem einzigen Tage sicherlich auch zwei zustande, zumal wenn es sich dabei um Dinge handelte, welche sich, wie „Die arithmetischen Ergänzungen“, auf Grund anderweitig bereits angestellter Untersuchungen von selbst verstanden. Bleibt uns so die Wahl zwischen dem 13. und dem 14., so möchte ich mich darum am ehesten für den 13. Juli 1450 entscheiden²⁾, weil dieser Tag dem „Ungesäumt“ am meisten entspricht. Ueberdies ist, rein psychologisch betrachtet, die Ruhepause, welche den Uebergang

¹⁾ „... enodavi a te corrigenda, impigre...“, l. c. — ²⁾ Bisher liess man für die Abfassung die Jahre 1450–51 oder gar 1450 bis 53 offen; vgl. Schanz S. 6 bez. Scharpff S. 300.

aus dem mathematischen in das philosophische Gebiet vermittelt, eher am 14. als am 13. Juli anzunehmen.

In zweiter Reihe aber lassen die oben eben erwähnten Eingangsworte auch auf eine nahe sachliche Beziehung schliessen. Es sollen ja nur allgemein verständliche Folgerungen zu ziehen sein, und zwar werden diese ausdrücklich an die oben so ausführlich wiedergegebene Lösung der ersten Aufgabe oder an die erste Grundlage der „geometrischen Verwandlungen“ angeknüpft.¹⁾ Diese erbringe den Nachweis, wieso das Zusammentreffen von Winkel und Linie in den verschiedenen Vielecken gleichen Umfanges uns zu dem Kreise von gleichem Umfange führe.²⁾ Von hier aus stehe uns der Weg offen, diejenigen Sachen, welche auf Ergänzung der Arithmetik hinielen, zu berechnen.³⁾

Dies sind die einleitenden Sätze der kleinen Abhandlung, welche uns über deren Widmung, Ort und Zeit der Abfassung und deren nahe sachliche Beziehung zu den „geometrischen Verwandlungen“ wünschenswerthen Aufschluss ertheilen. Der auf diese ebenso lehrreiche als kurze Einleitung folgende Haupttheil klärt uns zunächst über das Verhältniss auf, in welchem man sich dieselbe zu den Leistungen früherer Mathematiker zu denken hat. Der Punkt, um den es sich hier handle, sei vornehmlich bisheran unbekannt geblieben, das Verhältniss nämlich der Sehne zu dem Bogen.⁴⁾ In der Kenntniss desselben bestehe jene Ergänzung; kenne man dasselbe, so werde nichts arithmetisch zu berechnen schwierig bleiben.⁵⁾ Es habe sehr umsichtige Denker, an deren Spitze Archimedes stehe, in früheren Zeiten gegeben, welche nachgewiesen, der Kreisumfang betrage im Verhältnisse zu dem Durchmesser das Dreifache nebst einem nur annähernd zu bestimmenden Bruche, welcher mehr als $\frac{10}{70}$ des Durchmessers und weniger als $\frac{10}{70}$ desselben ausmache⁶⁾, und diese An-

¹⁾ „ut ostendimus in primo geometricarum transmutationum supposito“, fol. 54a. — ²⁾ „Dico autem quod coincidentia anguli et lineae in diversis polygonis isoperimetris nos ducit ad circulum isoperimetrum, ut ostendimus in primo geometricarum transmutationum supposito“, l. c. — ³⁾ „Hinc via nobis patet ea, quae ad complementum arithmeticae spectant, omni attingibili modo numerandi“, l. c. — ⁴⁾ „Id autem quod dico principaliter hactenus ignoratum fuit, habitudo scilicet chordae ad arcum“, l. c. — ⁵⁾ „... in cuius notitia complementum illud consistit, qua scita nihil difficile manebit arithmetice numerandi“, l. c. — ⁶⁾ „Fuerunt viri diligentissimi, quorum princeps videtur Archimedes, qui ostenderunt circumferentiam circuli triplam in habitudine ad diametrum additis plus decem septuagesimis primis ipsius diametri et minus decem septuagesimis ...“, l. c. „Die Peripherie sei das Dreifache des Durchmessers, mit Hinzufügung

näherung, so hätten sie weiterhin nachgewiesen, könne beständig genauer werden. Indessen den Punkt, wo etwa die durch eine Zahl nicht erreichbare Genauigkeit verborgen liege, gäben sie nicht an.¹⁾ Obgleich man nämlich die Seite, nachdem man die Diagonale eines Quadrates berechnete, nicht berechnen kann, so gelangt man doch auf eine Quadratwurzel; könnte man diese ausziehen, so könnten wir ohne weiteres die nicht berechenbare Seite.²⁾ Dass eine derartige Sachlage die alten Mathematiker uns mitgetheilt oder wenigstens gekannt, darüber fand unser Autor nichts.³⁾

Falls man wirklich dieselbe wird kennen können, so dürfe man, wie er vermuthet, diese Kenntniss aus den bereits früher gemachten Angaben zu gewinnen vermögen. Die nunmehr zunächst folgenden Zeilen sind durchaus nicht ohne weiteres verständlich. Der Autor erklärt, die Figur, welche er in den geometrischen Verwandlungen zuletzt gezeichnet, der Kürze halber übergangen zu wollen, stellt darauf fest, das Verhältniss der Sechseckseite zum Halbmesser des Kreises, welcher einem Dreiecke von gleichem Umfange umgeschrieben, sei in Quadratwurzeln bekannt⁴⁾, und erläutert endlich diesen Hauptsatz der „arithmetischen Ergänzungen“, freilich ohne uns zuvor über die ihm vorschwebende Figur irgendwie Aufschluss zu geben, an den Verhältnissen eben dieser Figur. Unter diesen Umständen läge es zwar am nächsten, anzunehmen, im ersten Satze sei ein Druckfehler mituntergelaufen, anstatt „übergangen“ müsse man „vorausschicken“, anstatt „praetermitto“ ein „praemitto“ lesen; allein bei genauerem Zusehen erweist sich diese Annahme nicht durchführbar. Wir stehen augenblicklich vor einem Räthsel. Erst in einem späteren Absatze erhalten wir nebenbei einen Wink zu dessen Lösung.⁵⁾ Nach diesem haben wir uns (Fig. 3) zwei Quadraten zu denken; *ed*, der Halb-
der ersten $\frac{10}{70}$ des Durchmessers minus $\frac{10}{70}$ “, übersetzt Scharpff S. 301 die entscheidenden Worte, will freilich deren richtige Uebersetzung den Sachverständigen überlassen.

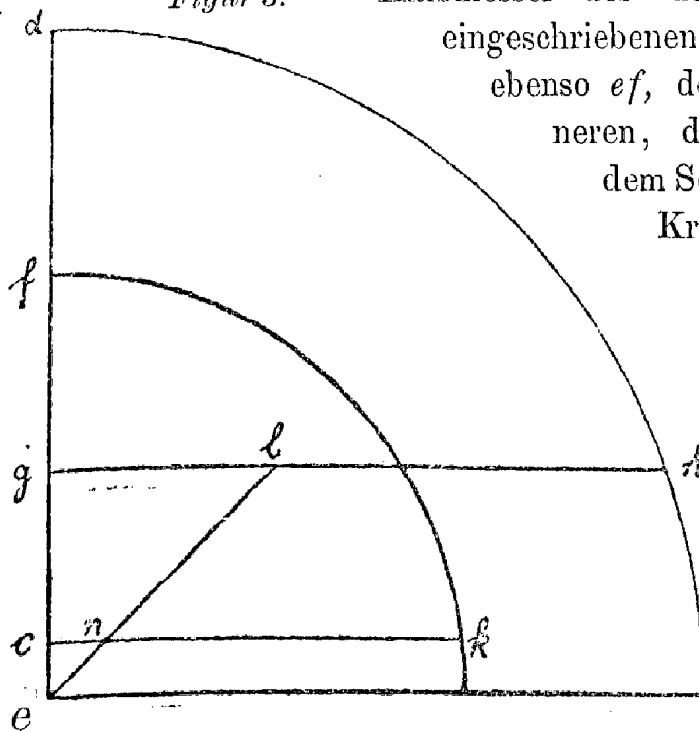
¹⁾ „Non tamen tradiderunt, ubi numero inattingibilis praecisio latitaret“, l. c.

— ²⁾ „Nam etsi non possit numerari costa numerato diametro quadrati, pertingitur tamen ad numerum, cuius radicem si numerari posset, scimus innumerabilem costam“, l. c. — ³⁾ „Tale quid non repperi veteres aut scivisse aut saltem nobis tradidisse“, steht zwar gedruckt, die Logik indessen verlangt die Umstellung der beiden Infinitive. Eine Handschrift lässt sich in diesem Falle deshalb nicht zu Rathe ziehen, weil keine bekannt ist, welche die Abhandlung enthielte. —

⁴⁾ „Constat autem, quoniam habitudo lateris hexagoni ad semidiametrum circuli circumscripti trigono isoperimetro in quadratis nota est ...“, l. c. — ⁵⁾ „Post haec describe quadrantes duos, ut statim praemisi“, heisst es fol. 54^b.

messer des grösseren, sei dem Halbmesser gd des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises und seinem Ueberschusse eg über den

Figur 3.



Halbmesser des dem nämlichen Dreiecke eingeschriebenen Kreises genau gleich; ebenso ef , der Halbmesser des kleineren, dem Halbmesser cf des dem Sechsecke umbeschriebenen

Kreises und seinem Ueberschusse ec über den Halbmesser des dem nämlichen Dreiecke eingeschriebenen Kreises; man ziehe darauf senkrecht zu ed die Halbsehn gh und ck sowie endlich eine Linie von e nach den Peripherien, welche ck in

n , gh in l , die Peripherie des kleinen Quadranten in o und diejenige des grossen in m so treffe, dass no gleich lm ist. Alsdann verhalte sich $dg^2 : fc^2 = 4 : 3$; $dg : ge = 2 : 1$; $ed : ef = 3 : 2$; und weil die Dreiecke egl und ecn einander ähnlich, so verhalte sich $eg : el = ec : en$. Darnach brauche man nur zwei Grössen zu finden, deren grössere zu eg wie deren kleinere zu ec sich so verhält, dass, wenn man die grössere von ed und die kleinere von ef abzieht, die alsdann übrigbleibenden Strecken gleich sind.¹⁾ Eben diese übrig bleibende Strecke sei der Halbmesser des Kreises von gleichem Umfange mit dem Sechs- oder Dreiecke, welche gleichen Umfang besässen.²⁾ Weil aber das Verhältniss des Sechs- bzw. Dreiecksumfanges und ebenso das Verhältniss des Kreishalbmessers zu ed bekannt ist, so wird das Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie auf jede denkbare Weise bekannt sein.³⁾ Auf diese Weise denn wisse man, wie das Ergebniss beschaffen sein dürfte, wonach man suche, und welches man durch die Zahl nicht

¹⁾ „Inveniantur igitur duae quantitates, quarum maior se habeat ad eg sicut minor ad ec sic, quod subtracta maiori de ed et minori de ef remanentia sint aequalia“, l. c. — ²⁾ „Remanens illud est semidiameter circuli isoperimetri polygoniae hexagonae vel trigonae, quae sunt isoperimetrae“, l. c. — ³⁾ „Et quia habitudo peripheriae polygoniae ad de est nota, et habitudo semidiametri circuli isoperimetri ad de est nota, erit habitudo diametri ad circumferentiam omni scibili modo nota“, l. c.

erreiche, so dass die Vernunft deutlich das Nichtwissen und unzulängliche Vermögen des berechnenden Verstandes erkennt.¹⁾

Aus den Darlegungen des vorstehenden Einzelfalles ergebe sich dann offenkundig, dass man jedes Verhältniss beliebiger Sehnen zum Bogen und Durchmesser erforschen könne.²⁾ Auf dem angegebenen Wege würden alle Sehnen bekannt, eine Kenntniss, welche die Alten zwar mit höchstem Eifer erstrebt, aber nicht hätten erreichen können. Alle bis auf diese Stunde geständen, wie bekannt, dass sie Sehnen von einem, zwei, vier, acht Graden und sofort nicht genau kännten.

Ebenso werde man auch das Verhalten eines unbekannten Dreieckes, seiner Seiten und Winkel aus der Kenntniss des Verhältnisses der Bogen und Sehnen, überhaupt werde man jede Kenntniss der Art mit hinlänglicher Sicherheit aus den besagten „Ergänzungen“ entnehmen können.³⁾

Diese „Ergänzungen“ aber hat man sich nach der vorstehenden Analyse, wenn anders dieselbe das Richtige trifft, was nicht ganz leicht zu sein scheint, in vier kleinere Absätze zerlegt zu denken. Deren erster ist geschichtlicher, der zweite inductiver, der dritte und vierte allgemeiner Natur. In verständigem, klarem Gedankenfortschritte erfahren wir näheres über die gar beachtenswerthen Leistungen der Vorgänger, über das, was sie wohl gesucht, aber nicht gefunden, und was nunmehr glücklich gefunden ist. In diesem Funde bestehen „Die arithmetischen Ergänzungen“, Ergänzungen nicht blos fremder sondern vornehmlich der eigenen Leistungen, der tags zuvor vollendeten „Geometrischen Verwandlungen“, welche ihrerseits der kleinen Abhandlung „Ueber die Kreisquadratur“ Anfang Juli ihre Entstehung verdanken.

So gehören denn die genannten drei Schriften zeitlich und nachweisbar auch sachlich auf's engste zusammen. In letzterer Hinsicht könnte man „Die Kreisquadratur“ füglich das Vorwort, „Die arithmetischen Ergänzungen“ das Nachwort zu den „Geometrischen Verwandlungen“ nennen; alle drei aber wird man nach einem bekannten Satze der Logik mit Fug und Recht unter dem Titel „Verwandlungen“ zusammenfassen dürfen. (Fortsetzung folgt.)

¹⁾ „... ut scias, quid sit id quod quaeris, quod numerus non attingit, ut ignorantiam ac defectus rationis numerantis videat intellectus“, fol. 54^b. —

²⁾ „Palam ex his est posse omnem habitudinem quaruncunque chordarum ad arcum atque diametrum inquiri“, l. c. — ³⁾ „Poterit etiam ignoti trianguli, laterum et angulorum habitudo ex scientia habitudinis arcuum et chordarum et omne tale scibile sufficienter venari ex dictis complementis“, l. c.

Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus.

Von Prof. Dr. Joh. Uebinger in Posen.

(Fortsetzung.)¹⁾

III.

Die Ergänzungen.

Ebenso wie die vorige, wird auch die jetzige Nummer eine Anzahl Schriften vereinigen, welche zeitlich und sachlich in ziemlich naher Beziehung stehen. Den Reigen eröffnet aber dieses Mal die Hauptschrift

1. *De mathematicis complementis.*

Den Anstoss zu „den mathematischen Ergänzungen“ gab kein Geringerer als der Freund auf dem päpstlichen Throne, Nikolaus V. † 1455. Dieser hohe Gönner der Wissenschaften nämlich sorgte, wie ihm „die Ergänzungen“ nachrühmen²⁾, auf's hochherzigste dafür, dass die Schriften sowohl der Griechen wie der Lateiner, welche man auf-treiben konnte, zur allgemeinen Kenntniss gelangten; so entgingen ihm auch die geometrischen Schriften, welche die Vorfahren allerdings in hohen Ehren hielten, nicht.³⁾ Beispielsweise liess er durch Johannes von Cremona die Werke des Archimedes übersetzen⁴⁾ und etwa Mitte 1453 an seinen Freund in Tyrol schicken.⁵⁾ Auf diesen aber machten dieselben einen gewaltigen Eindruck und erschienen ihm so wunderbar, dass er trotz des Oberhirtenamtes nicht umhin konnte, mit grossem

¹⁾ Vgl. 8. Bd. S. 301 ff. u. 403 ff., 9. Bd. S. 54 ff. — ²⁾ Das Gleiche thut Philelphus in einem Brief an den Papst Calixtus III. bei Raynald, Ann. 1455 n. 15.

— ³⁾ Vgl.: „... ita ut etiam geometrica non neglexeris, quae sane omni honore digna a maioribus nostris habita fuerunt“, De math. compl. fol. 59a. — ⁴⁾ Regiomontanus, Oratio introductoria in omnes scientias mathematicas, bei Cantor II, 238. — ⁵⁾ Vgl.: „Tradidisti enim mihi proximis diebus magni Archimedis geometrica graece tibi praesentata et tuo studio in latinum conversa“, De math. compl. l. c. Die obige Deutung der unbestimmten Zeitangabe „proximis diebus“ hier wird später ihre Rechtfertigung erhalten.

Fleisse dabei zu verweilen.¹⁾ Hieraus ergab sich, dass er auf Grund seines eifrigen Studiums jenen eine Ergänzung hinzufügte.²⁾

Diese Ergänzung beschloss er Sr. Heiligkeit zu widmen.³⁾ Einzig den Papst nämlich hält er für die geeignete Persönlichkeit, dass durch sie Dinge, welche dem Menschengeschlechte bisher unbekannt geblieben sind, nunmehr allen offenbar werden.⁴⁾ Nicht nur die Kenntnisse, welche sich stets auf die gesuchte Quadratur des Kreises zu beziehen pflegten, sondern auch solche, welche trotz aller Vollendung der Mathematik eine Ergänzung derselben liefern, dürften sich daraus nach der Ueberzeugung ihres Autors ergeben.⁵⁾

Die viel verheissende Ergänzung beginnt ganz ähnlich wie die schon besprochenen Schriften mit einem Rückblick auf die Leistungen der Vorgänger, findet ebenso wie die Abhandlung „über die Kreisquadratur“, dass die Spirale des Archimedes dieses Problem ungelöst lasse⁶⁾, empfiehlt darum gleich den „geometrischen Verwandlungen“ behufs Beseitigung der obwaltenden Schwierigkeit das Zusammenreffen der Gegensätze, ein Auskunftsmittel, dessen Tragweite, wie sich gezeigt habe, in anderen Wissenschaften sehr gross sei, und erklärt, dass man mit Leichtigkeit einen praktischen Einblick in die Sachlage erlangen könne.⁷⁾

Der in Aussicht gestellte praktische Einblick aber fusst, inductiv vom gleichseitigen Dreieck zum regulären Viereck fortschreitend, auf dem bereits hinlänglich bekannten Satze, wonach sich bei allen regulären Vielecken an dem Ueberschusse der ersten Linie

¹⁾ „... quae mihi tam admiranda visa sunt, ut cura ipsa non nisi magna cum diligentia versari potuerim“, l. c. Die Deutung der „cura“ auf das Oberhirtenamt des Bischofs von Brixen liegt an sich nahe und erhält durch ungedruckte Briefe aus jener Zeit eine thatsächliche Bestätigung. Anderwärts hat man den etwas seltsamen Ablativus absolutus gar nicht übertragen; durch solche Weglassung geht augenscheinlich die Pointe des Gedankens völlig verloren. Möglicherweise freilich könnte an der Stelle des „cura ipsa“ ursprünglich ein sehr leicht verständliches „circa ipsa“ gestanden haben. — ²⁾ „Ex quo effectum est, ut meo studio et labore complementum aliquod illis addiderim“, l. c. — ³⁾ „... quod tuae sanctitati offerre decrevi“, l. c. — ⁴⁾ „Solum enim te dignum scio, ut, quae a saeculo incognita remanserunt, per te cunctis patefiant“, l. c. — ⁵⁾ „Et non tantum scibilia, quae semper circa quaesitam circuli quadraturam versari consueverunt, sed et quae in omni mathematica perfectione praestant complementum, ex his ipsis meo iudicio perfecte consequi possint“, l. c. — ⁶⁾ Vgl.: „Remanet igitur ex iis quae Archimedes reliquit haec ars adhuc penitus incognita“, l. c., fol. 59a. — ⁷⁾ „Et visum est mihi quod ... facile possit huius scientia pariter et praxis modo qui sequitur adipisci“, l. c.

eines jeden über die erste des Dreieckes gleichen Umfanges der Ueberschuss des Inhaltes eines Vieleckes über den des Dreieckes erkennen lasse.¹⁾ Unter der ersten Linie sei jedesmal der Radius des dem betreffenden Vielecke einbeschriebenen und unter der zweiten Linie dementsprechend der Radius des umbeschriebenen Kreises zu verstehen. Je kleiner nun der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Linie, desto grösser sei der Ueberschuss der ersten Linie des Vieleckes über die erste des Dreieckes. Weil in einem Kreise die erste und die zweite gar zusammenfallen, so ist der Ueberschuss des Halbmessers eines Kreises gleichen Umfanges über die erste Linie des Dreieckes am grössten, und daher auch der Inhalt jenes Kreises gegen den des Dreieckes am grössten. Wenn demnach das Dreieck, wo die erste und die zweite Linie am meisten verschieden sind, den geringsten Inhalt, und der Kreis, wo beide Linien zusammentreffen, den grössten Inhalt aufweist, so wird es offenbar in den mittleren Vielecken verhältnissmässig ebenso der Fall sein.²⁾ Gesetzt daher, der Ueberschuss des Kreisinhaltes über den des Dreieckes verhalte sich wie der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Linie im Dreiecke, so wird sich der Ueberschuss des Kreisinhaltes über den des Viereckes wie der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Linie im Vierecke verhalten und so fort.³⁾ Darnach lässt sich mit Leichtigkeit, ist der Ueberschuss der ersten Linie in irgend einem Vielecke über die erste des Dreieckes, ferner der Unterschied zwischen den Unterschieden der ersten und zweiten jenes inhaltreicheren und der ersten und zweiten Linie des Dreieckes gegeben, der Halbmesser des Kreises gleichen Umfanges ermitteln.⁴⁾ Kennt man aber diesen, so liegt die Quadratur des Kreises klar vor unseren Augen.⁵⁾

¹⁾ „Et sic quidem in cunctis polygoniis excessu primae lineae cuiuslibet super primam trigoni isoperimetri deprehenditur excessus capacitatis ipsius polygoniae super capacitatem trigoni“, fol. 59^b. — ²⁾ „Ex his patet quod, si trigonus est minimae capacitatis, ubi prima et secunda lineae maxime differunt, et circulus maximae capacitatis, ubi prima et secunda lineae coincidunt, erit sic proportionabiliter in medijs polygoniis“, l. c. — ³⁾ „Quare si ponitur excessus capacitatis ipsius circuli super trigonum, ut est differentia primae et secundae lineae in trigono, erit excessus capacitatis circuli super tetragonum ut differentia primae et secundae lineae in tetragono et ita consequenter“, l. c. — ⁴⁾ „Ex quo facile dato excessu primae in una aliqua super primam trigoni et differentia differentiarum primae et secundae illius capacioris et primae et secundae trigoni potest haberi semidiameter circuli isoperimetri“, l. c. — ⁵⁾ „Quo scito patet circuli quadratura“, fol. 60^a.

Wiewohl nun all' diese Sätze handgreiflich, so seien dieselben doch auch solchen, welche sich nicht der Mathematik widmeten, ganz klar zu machen.¹⁾ Zu dem Zwecke werden zu allererst nach dem Vorbilde eines Euklides vierzehn Sätze aufgestellt. Darunter sind die zehn ersten elementar, anders dagegen der elfte. Derselbe wird ausdrücklich für den Hauptsatz erklärt, soll man wirklich das glücklich finden, wonach man forsche²⁾, und lautet dahin: In einem inhaltsreicheren Vielecke ist nothwendig die erste Linie länger, die zweite kürzer. Und wie für diesen die zehn ersten die nöthige Grundlage liefern, so ziehen daraus die drei letzten Sätze weitere Folgerungen.

An der Hand dieser Lehrsätze soll man alsdann Aufgaben wie folgende lösen: zu einer gegebenen Geraden eine Kreislinie³⁾, umgekehrt zu einer gegebenen Kreislinie eine Gerade, ferner zu einem gegebenen Kreise ein Quadrat⁴⁾ und endlich zu einem gegebenen Quadrate einen Kreis zeichnen, welche einander gleich sind. Um die Lösung dieser vier Aufgaben noch zu erleichtern, werden allenthalben, entsprechend der gleich eingangs eröffneten Aussicht, allerhand praktische Winke und Rathschläge ertheilt.

Aus den vorher erzielten Ergebnissen, heisst es dann weiter, werde man über all die Dinge, welche bisher in der Geometrie unbekannt blieben, die nöthigen Aufschlüsse gewinnen können.⁵⁾ Unbekannt geblieben aber sei bislang die vollständige Kenntniss der Sinus und Sehnen.⁶⁾ Niemals habe jemand über die Sehne von einem, zweien, vier Graden und so fort Aufschluss geben können. Solchen erhalte man nunmehr auf folgendem Wege.⁷⁾ Offenbar füge jedes regelmässige Vieleck, um den Halbmesser des Kreises gleichen Umfanges zu erhalten, je nach dem Unterschiede der ersten und zweiten Linie einen entsprechenden Theil zu der ersten hinzu⁸⁾, und ähnlich halte jeder Ueberschuss, wodurch die erste Linie eines be-

¹⁾ „Omnia haec quamvis manifesta sint, volo tamen illa etiam illis, qui mathematicis operam non impenderunt, clarissima facere“, l. c. — ²⁾ „Et haec est principalis propositio ad inveniendum id quod quaerimus“, fol. 62^a. — ³⁾ „Datae rectae curvam circularem aequalem assignare“, fol. 67^a. — ⁴⁾ „Dato circulo quadratum aequale assignare“, l. c. — ⁵⁾ „Ex ante habitis quicquid hactenus in geometricis ignotum fuit, inquiri poterit“, fol. 68^b. — ⁶⁾ „Fuit autem incognita perfectio artis de sinibus et chordis“, l. c. — ⁷⁾ „Nemo unquam scire potuit chordam arcus gradus unius et duorum et quatuor, quae nunc sic habetur“, l. c. — ⁸⁾ „Manifestum est omnem multiangulam similium laterum ex differentia primae et secundae linearum ad habendam semidiametrum circuli isoperimetri aequalis portionis partem addere super primam . . .“, l. c.

liebigen Dreieckes die erste eines anderen Vieleckes übertrifft, und der Ueberschuss, wodurch die zweite des Dreieckes die zweite des andern übertrifft, in allen stets ein und dasselbe Verhältniss inne.¹⁾ Aus diesen Sätzen ergebe sich die allgemeine Kenntniss der Sinus und Sehnen, eine Kenntniss, ohne welche die Geometrie bislang unvollständig geblieben.²⁾

Die Art und Weise aber, wie man thatsächlich zu dieser Kenntniss gelangen könne, lasse sich in nahezu richtigen Zahlen also angeben; in völlig richtigen dies zu leisten sei freilich unmöglich.³⁾ Gesetzt also, der Halbmesser des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises sei 14, so wird der Halbmesser des eingeschriebenen 7, dessen Quadrat 49, das Quadrat der halben Dreiecksseite dreimal so viel d. i. 147, und das Quadrat des Halbmessers des umgeschriebenen viermal so viel d. i. 196, demnach die halbe Vierecksseite Wurzel aus $\frac{9}{16}$ des Quadrates der halben Dreiecksseite d. i. $\sqrt{82\frac{11}{16}}$ und gleich dem Halbmesser des eingeschriebenen, der Halbmesser aber des umgeschriebenen $\sqrt{2 \cdot 82\frac{11}{16}}$ d. i. $\sqrt{165\frac{6}{16}}$ sein. Zieht man nun $\sqrt{49}$ von $\sqrt{82\frac{11}{16}}$ ab, so ist der Unterschied die Zugabe des dem Vierecke eingeschriebenen Halbmessers über den dem Dreiecke eingeschriebenen, eine Zugabe, welche etwas mehr als 2 sein wird⁴⁾; zieht man ebenso $\sqrt{165\frac{6}{16}}$ von $\sqrt{196}$ ab, so ist der Unterschied die Zugabe des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreishalbmessers über den dem Vierecke umgeschriebenen, eine Zugabe, welche wenig mehr als 1 sein wird. Somit habe man die Zugaben, und deren Verhältniss ist jenes, mittelst dessen man alles erforscht⁵⁾; mittelst desselben wisse man auch den zu einer Sehne gehörigen Bogen zu berechnen⁶⁾, und dies sei die höchste Vollendung der Geometrie, eine Vollendung, zu welcher die Alten, soweit bislang bekannt, nicht gelangt seien.⁷⁾ Auch

¹⁾ „... et similiter omnem excessum, quo prima linea cuiuscunque trigoni primam excedit, et excessum, quo secunda trigoni secundam alterius excedit, eandem semper in omnibus tenere proportionem“, l. c. — ²⁾ „... ex quibus ars generalis de sinibus et chordis elicitur, sine qua geometria hactenus mansit incompleta“, l. c. — ³⁾ „Quomodo autem ad praxim huius accedere queas, in propinquis numeris sic investigabis, in veris enim est impossibile“, l. c. — ⁴⁾ „Subtracta igitur radice de 49 a radice de 82 cum 11 decimis sextis differentia est additio semidiametri inscripti tetragono super semidiametrum inscripti trigono, quae erit aliquid plus quam duo“, l. c. — ⁵⁾ „Habes additiones, et earum habitudo est illa, per quam omnia investigantur“, l. c. — ⁶⁾ „Et sic scitur arcus chordae“, l. c. — ⁷⁾ „Et haec est perfectio ultima geometricae artis, ad quam hactenus veteres non legi pervenisse“, fol. 69a.

sei nunmehr, fügt der Autor noch hinzu, die Kenntniss der geometrischen Verwandlungen vollendet, eine Kenntniss, welche er früher, jedoch weniger befriedigend, bezüglich der Quadratur des Kreises beschrieben.¹⁾

Und um dessentwillen erhalte diese Entdeckung mit Recht den Namen Ergänzung²⁾ und sei werth, durch das bewunderungswürdige Ansehen des hl. Vaters zu aller Kenntniss zu gelangen.³⁾ Der zuletzt hier ausgehobene Satz hat wegen seines Inhaltes, namentlich wegen seines Hinweises auf den Eingang nur dann Sinn und Bedeutung, wenn wir ihn für den Schlusssatz der Abhandlung ansehen, welche der Autor Anfang September 1453 dem Papste Nikolaus V. widmete.

Freilich Schlusssatz der mathematischen Ergänzungen blieb jener Satz nicht; dem ersten folgte in weiterem Verlaufe ein zweites Buch. Eine Randbemerkung der Handschrift *E₃* zu Cues, welche indessen dem ersten Drucke einverleibt ward, ist es, welche uns davon zunächst Kunde gibt. Dieselbe lautet dahin, jene Entdeckung treffe dann das Richtige, wenn es wahr sei, dass die gerade Linie, welche von der ersten des Dreieckes zur ersten Linie des Kreises von gleichem Umfange gezogen ward, die ersten Linien sämtlicher Vielecke berühre.⁴⁾ Wenn dieser Fall dagegen nicht zutreffe, wenn es nicht eine gerade sondern vielleicht eine krumme Linie irgend welcher Art sei, welche sich von der ersten des Dreieckes an den Enden der ersten Linien sämtlicher Vielecke bis zur ersten des Kreises hinziehe, so sei die vorbesagte Entdeckung nicht zulänglich.⁵⁾ Weil dies zweifelhaft bleibe, darum habe er andere Entdeckungen, wo dieser Zweifel schwinde, in einem zweiten Büchlein niedergelegt.⁶⁾

Ueber die Thatsache des Zweifels gibt uns sonach jene Randbemerkung recht dankenswerthen Aufschluss, nicht aber darüber, wie

¹⁾ „Est etiam nunc ars completa geometricarum transmutationum, quam ante, minus tamen sufficienter, quoad quadraturam circuli descripsi“, l. c. — ²⁾ „Et ob hoc haec inventio merito nomen complementi sortitur“, l. c. — ³⁾ „Et digna est, ut per admirandam potentiam tuam, beatissime pater, ... in omnium notitiam deducatur“, l. c. — ⁴⁾ „Procedit autem haec inventio, si verum est, quod linea recta de prima linea trigoni ad primam circuli isoperimetri tracta transit per primas lineas omnium polygoniarum mediarum“, l. c. — ⁵⁾ „Sed si hoc non est verum, quod recta sic transeat, sed forte curva aliqua curvitate transeat de prima trigoni per primas omnium polygoniarum ad primam circuli, tunc haec inventio non est sufficiens“, l. c. — ⁶⁾ „Et quia hoc est dubium, ideo alias adinventiones meas, ubi hoc dubium cessat, in secundo libello conscripsi“, l. c.

der Zweifel entstand; sie sagt uns nicht, ob der Autor durch eigenes Nachdenken darauf kam, oder aber ob Freunde, etwa einer der uns von früher bekannten Mitunterredner, ihn darauf mündlich oder brieflich aufmerksam machte. Doch mag diese Frage für den Augenblick unerörtert bleiben, wenden wir uns vorerst den infolge jenes Zweifels im zweiten Buche niedergelegten neuen Entdeckungen zu!

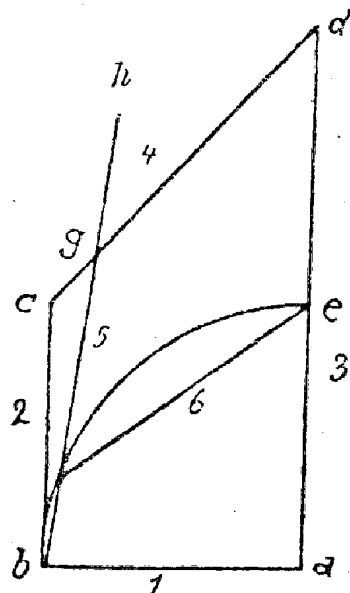
Um für dieselben die nöthige Unterlage zu gewinnen, geht das zweite Büchlein noch tiefer als das erste auf die Grundlagen der Geometrie ein; Grundsätze stellt das erste, Grundbegriffe, durch welche jene bedingt sind, das zweite an die Spitze. Man zeichne eine Linie, lerne die Bewegungen eines Punktes erfassen.¹⁾ Ist dieselbe gerade, so wird, wenn sie sich bewegt, während einer ihrer Endpunkte unbeweglich fest bleibt, diese Art Bewegung der Geraden durch das rechtwinklige Dreieck dargestellt.²⁾ Wenn sich die Gerade, etwa ab , aber gleichmässig in a wie in b bewegt, so wird die Bewegung durch ein doppelrechtwinkliges Dreieck oder ein Viereck $abcd$ dargestellt.³⁾ Wenn sich aber a und gleichfalls auch b , aber nicht auf gleiche Weise, bewegt, so kann dies auf unendliche Arten geschehen und wird sich durch eine einzige Figur nicht darstellen lassen.⁴⁾ Die zuerst erwähnte Art der Bewegung einer geraden Linie führe in ihrem weiteren Verlaufe zum Kreise, rücksichtlich dieses zu den unumstösslichen Wahrheiten, dass jeder Halbmesser zu seinem Kreise in ein und demselben Maasverhältnisse stehe⁵⁾, dass die Kreisflächen sich wie die (zweiten) Potenzen der Halbmesser⁶⁾, endlich hinsichtlich der Kegel zu dem Satze, dass sich deren Flächen wie die Linien verhalten, durch deren Bewegung sie entstehen.⁷⁾ Aus der zweiten Art der Bewegung sodann erlange man jeden wünschenswerthen Aufschluss über die Verhältnisse der Cylinder oder runder, säulenartiger (Seiten-)Flächen und ihrer Grundflächen, über die Verhältnisse cylindrischer, kegelartiger, krummer und ebener kreisförmiger Flächen.⁸⁾

1) Vgl.: „Lineam figuravi, motus puncti concipio“, fol. 70b. — 2) „Quae si recta fuerit, tunc si uno eius termino fixo manente movetur hic motus rectae per triangulum orthogonium figuratur“, l. c. — 3) „Si vero ab recta movetur aequaliter in a sicut in b , motus configuratur per duplicem orthogonium sive quadrangulum $abcd$ “, l. c. — 4) „Si vero a movetur similiter et b sed inaequaliter, hoc fieri potest infinitis modis et unica figura non poterit configurari“, l. c. — 5) Vgl.: „Unde necesse erit omnem semidiametrum ad circumferentiam eandem tenere mensuram“, fol. 70b. — 6) „... illa erit habitudo superficierum quae potentiarum semidiametrorum“, fol. 71a. — 7) „... illa erit superficierum habitudo, quae linearum, ex quarum motu ipsae superficies constituuntur“, l. c. — 8) „Ex hocque

Zur Veranschaulichung der dritten Bewegungsart endlich denke man sich eine zirkelartig verbundene Linie¹⁾, und was immer man bezüglich eines Kegelmantels zu wissen wünsche, werde man leicht ermitteln.²⁾

Diese Aufschlüsse über die Entstehung der geometrischen Gebilde vorausgeschickt, wird nunmehr das Verfahren gelehrt, wie man eine krumme Linie ohne weiteres in eine gerade verwandelt³⁾; also nicht, wie es in dem ersten Büchlein geschah, mittelst der Verwandlung einer geraden in eine krumme, sondern unmittelbar und zwar durch ein scharfsinnig ausgedachtes Zusammentreffen.⁴⁾ Hierfür lautet der Hauptsatz also: Man beschreibe (Fig. 4) den Quadranten eines Kreises a^5); ziehe eine Linie ab vom Mittelpunkte zum Anfange des Kreisbogens⁶⁾; eine zweite bc von der nämlichen Grösse errichte man in dem Berührungspunkte senkrecht zu der ersten⁷⁾; eine dritte ad , vom Mittelpunkte durch den Endpunkt e des Bogens gezogen, sei der Seite des dem Kreise einbeschriebenen Dreieckes gleich⁸⁾; eine vierte cd verbinde die Endpunkte der zweiten und dritten.⁹⁾ Wenn man alsdann vom Anfange des Quadranten eine fünfte Linie bg nach der vierten dergestalt wird gezogen haben, dass die Sehne fe , die sechste Linie, welche man vom Durchschnittspunkte der fünften mit der Peripherie des Quadranten bis zu dessen Ende zog, gleich der fünften ist, so wird ihrerseits die fünfte um soviel gegen den Quadranten kleiner sein, als

Fig. 4.



circa habitudines cylindrorum seu (sic!) rotundarum columnalium superficierum et suarum basium et cylindralium, conicarum, curvarum atque planarum circularium omnis scientia elicitur“, l. c.

¹⁾ „... concipito lineam ab duplicem et divisibilem usque ad b punctum, qui indivisibilis utriusque divisae terminus maneat“, fol. 71b. — ²⁾ „Et quaecunque circa hoc scire optas, ex hoc facile elicies“, fol. 72a. — ³⁾ Vgl.: „Propono nunc modum tradere, quomodo curva linea in rectam vertitur... immediate („in medietate“ steht gedruckt)“, fol. 76b. — ⁴⁾ „... vertitur non ut in primo libello per medium versionis rectae in curvam sed immediate, et hoc per subtilem coincidentiam“, l. c. — ⁵⁾ „Descripta quarta circuli...“, l. c. — ⁶⁾ „... et linea prima a centro ad principium arcus tracta...“, l. c. — ⁷⁾ „... et secunda linea de contactu primae cum arcu orthogonaliter eiusdem quantitatis cum prima...“, l. c. — ⁸⁾ „... et tertia a centro per finem, quae sit ut latus trigoni inscripti circulo...“, l. c. — ⁹⁾ „... et quarta de fine secundae ad finem tertiae si...“, l. c.

die Hälfte des Stückes beträgt, welches zwischen die Peripherie und die vierte Linie fällt.¹⁾ Ist demnach fe gleich bg , dann ist bg um die Hälfte von fg kleiner als be , die Peripherie des Quadranten²⁾; man verlängere daher bg um gh d. i. $\frac{1}{2}fg$, und bh wird der Curve be gleichkommen.³⁾

Zum besseren Verständnisse dieses wichtigen Lehrsatzes werden sodann noch die Voraussetzungen hervorgehoben, welche derselbe mache. Er setze erstens voraus⁴⁾, dass die fünfte und sechste nebst der Theilstrecke zwischen der krummen und vierten sich ebenso unterscheiden, wie das Stück der fünften, welches Sehne nämlich bf ist, und die sechste, nämlich fe , welche die Sehne zu dem übrigen Bogen des Quadranten bildet⁵⁾; und ferner, dass der Unterschied, welcher zwischen der fünften, die kleiner, und der sechsten nebst der Theilstrecke besteht, die zusammen grösser als der Quadrant sind, eine Doppelgrösse ausmacht; nämlich so gross, als die fünfte kleiner wie die krumme d. i. der Quadrant, und als die sechste nebst der Theilstrecke grösser wie der Quadrant sein wird⁶⁾; dass daher, je grösser ihr Unterschied, desto grösser auch die Linie zwischen der fünften und der Theilstrecke, desto grösser, kurz gesagt, die Mittellinie; und je kleiner jener Unterschied, desto kleiner auch die letztere.⁷⁾ Jener Lehrsatz setze sodann zweitens voraus⁸⁾, dass die sechste nebst der Theilstrecke den Quadranten um die halbe Theilstrecke übertrage⁹⁾, denn sie könne dies um einen kleineren und ebenso um einen

¹⁾ „Si tunc de principio quadrantis lineam quintam duxeris ad quartam taliter, quod chorda quae a contactu illius quintae, ubi curvam secuerit, ad finem totius quadrantis ducta, quae sit sexta linea, quintae fuerit aequalis: erit quinta minor quadrante, quanta est medietas portionis eius cadentis inter curvam et quartam“, l. c. — ²⁾ „Dico: si fe est ut bg , tunc bg est minor quadrante be in medietate fg “, l. c. — ³⁾ „Adde igitur medietatem fg super bg , et sit gh medietas fg , dico bh aequari curvae be “, l. c. — ⁴⁾ „Ostensio. Praesuppono primo . . .“, fol. 76b. — ⁵⁾ „ . . . quod quinta et sexta cum portione quae cadit inter curvam et quartam, quam semper portionem voco, non differunt, nisi ut pars quintae, quae est chorda scilicet bf , et sexta scilicet fe , quae est chorda residui arcus quadrantis, differunt . . .“, l. c. — ⁶⁾ „ . . . et quod illa differentia, qua quinta minor quadrante et sexta cum portione maior differunt, est duplex quantitas, scilicet quantum quinta erit minor curva quae est quadrans et sexta cum portione maior quadrante“, l. c. — ⁷⁾ „ . . . et quod ideo quanto plus differunt, tanto linea maior, quae mediat inter quintam et sextam cum portione, quam lineam voco medium, et quanto minus differunt, tanto medium minus“, l. c. — ⁸⁾ „Secundo praesuppono quod . . .“, fol. 76b. — ⁹⁾ „ . . . quod sexta cum portione potest excedere quadrantem in medietate portionis“, l. c.

grösseren, folglich auch um einen Theil, welcher weder grösser noch kleiner.¹⁾ Hieraus folge, dass eine derartige sechste nebst der Theilstrecke den Quadranten genau so, wie der Quadrant die fünfte, überrage, und dass die Theilstrecke gleich dem Unterschiede der Sehnen und die sechste gleich der fünften ist.²⁾ Diese zwei Verhältnisse folgten aus der Voraussetzung.³⁾ Wenn die sechste nebst der Theilstrecke den Quadranten um die halbe Strecke überrage, dann werde diese Theilstrecke dem Unterschiede der Sehnen und des weiteren die sechste der fünften gleichkommen müssen.⁴⁾

Aus dem so ausführlich erläuterten Satze ergibt sich für den Autor ein leichtes Verfahren, den Kreis zu quadriren.⁵⁾

Jedoch hiermit noch nicht zufrieden, untersucht er weiterhin, wie man das gleiche Ziel auch durch die bekannten Mündchen erreiche, ein Verfahren, welches die Alten vergebens versucht hätten.⁶⁾

Im Vorbeigehen berührt er sodann noch gewisse andere denkbare Methoden, wie man jeden Kreis unmittelbar, ohne die Kreis-peripherie zuvor in eine gerade Linie verwandeln zu müssen, in ein beliebiges Vieleck auflöst⁷⁾; doch diese möchte er lieber zur Uebung für die, welche mehr Musse haben, zurückstellen⁸⁾, begnügt sich deshalb damit, einige Andeutungen zu geben.⁹⁾ Man bezeichne an einem Kreisquadranten die Seiten des um- und eingeschriebenen Viereckes, ziehe vom Kreismittelpunkte zu dem Berührungspunkte der umgeschriebenen Seite mit der Peripherie eine Linie, und eine zweite, indem man das Dreieck schliesst, zu dem Endpunkte der Seite, ziehe darauf vom Mittelpunkte durch einen Punkt des Bogens nach der umgeschriebenen Seite eine Linie auf solche Weise, dass eine andere,

¹⁾ „Nam in minore parte et in maiori potest excedere, ideo etiam nec in minori nec maiori quam medietate“, l. c. — ²⁾ „Ex his infero talem sextam cum portione ita excedere quadrantem, sicut quadrans quintam, et quod portio est differentia chordarum et sexta est ut quinta“, l. c. — ³⁾ „Illa enim se habent consequenter“, l. c. — ⁴⁾ „Quare patet si sexta cum portione excedit quadrantem in medietate portionis, necesse erit portionem aequari differentiae chordarum et per consequens sextam aequari quintae“, l. c. — ⁵⁾ Vgl.: „Ex his sequitur circuli facilis quadratura“, fol. 77a. — ⁶⁾ Vgl.: „Volo nunc investigare, quomodo per lunulas quadratura circuli investigetur, quam viam veteres frustra attentaverunt“, fol. 80a. — ⁷⁾ Vgl.: „Volo autem adhuc alios quosdam possibiles modos tangere, quomodo scilicet omnis circulus immediate in quam volueris resolvitur polygoniam, absque eo quod peripheriam circuli curvam prius in rectam lineam resolvi oporteat“, fol. 82b. — ⁸⁾ „... quos pro exercitio ad magis otiosos remitto“, l. c. — ⁹⁾ Fol. 82b—83a.

von den Vielecksseiten¹⁾ gleich weit abstehende und von Dreiecks- zu Dreiecksseite durch eben denselben Punkt des Bogens gehende Linie den zwei Theilstrecken gleich sei, welche die vorhin vom Mittelpunkt durch den nämlichen Punkt gezogene Linie von den Seiten besagter Vielecke zwischen der Linie selbst und der zuerst gezogenen Dreiecksseite abschnitt: so wird die gleich weit abstehende Linie die Hälfte der Seite eben des Vieleckes (Viereckes) sein, welches dem Kreise gleich ist.

Nunmehr zuguterletzt wird auseinandergesetzt, wie man alsofort die beliebigen Seiten von Vielecken findet, welche dem Kreise gleich sind.²⁾ Auch hier ist, was uns geboten wird³⁾, bloße Andeutung eher als ausführliche Darlegung zu nennen.

Das soeben gebrauchte Zuguterletzt (ultimo) aber nöthigt uns anzunehmen, dass hiermit „die Ergänzungen“ — abermals — zu einem Abschlusse gekommen sind. Diese Annahme erhält durch den mehrfach erwähnten cod. *E₃* vollgiltige Bestätigung. Dasselbst nämlich schliesst sich jetzt unmittelbar ein meines Wissens bislang noch nicht gedruckter Rückblick auf die ganze Schrift an, der also lautet: Es steht nunmehr die Quadratur des Kreises, welche man stets gesucht, bisher aber, wie man glaubt, nicht gefunden, hinlänglich erklärt zu Diensten⁴⁾; denn man kann sie kennen lernen entweder durch Zurückführen einer geraden Linie auf eine krumme Peripherie — und auf diese Weise geschah sie in dem ersten Büchlein⁵⁾, oder umgekehrt durch Zurückführen einer krummen Peripherie auf eine gerade Linie — und so wird man auf doppelte Art sie in diesem zweiten Büchlein gelehrt finden⁶⁾; entweder zugleich mit dem Zurückführen einer Curve auf eine Gerade, indem man die Seite des dem Kreise gleichen Quadrates ermittelt⁷⁾, oder ohne jedes Zurückführen einer Geraden auf eine Curve bezw. umgekehrt, sondern einfach durch Ermitteln der Quadratseite — und diese Methoden finden sich gleichfalls oben

¹⁾ „... lateribus polygoniarum ...“ d. i. „tetragonorum“, wie es vorher heisst. — ²⁾ „Pandam nunc ultimo, quomodo simul reperiuntur quae volueris latera polygoniarum aequalium circulo“, fol. 85a. — ³⁾ Fol. 85a—85b. — ⁴⁾ „Patet nunc circuli quadraturam semper quaesitam, haecenus ut creditur non inventam, sufficienter explicatam“, cod. *E₃* zu Cues. — ⁵⁾ „Nam aut ipsa sciri potest per reductionem rectae lineae in curvam peripheriam — et eo modo tracta est in primo libello“, l. c. — ⁶⁾ „... aut econverso per reductionem curvae peripheriae in rectam lineam — et ita duplici modo eam reperies in hoc secundo libello traditam“, l. c. — ⁷⁾ „... aut simul cum reductione curvae in rectam reperiendo costam quadrati aequalis circulo“, l. c.

angemerkt.¹⁾ Somit ist denn diese bislang unbemerkt gebliebene Kenntniss hinreichend klar auseinander gesetzt.²⁾ Aus ihr folgen anderweitige Sätze, welche man ohne sie nicht wissen konnte³⁾; das eben sind die mathematischen Ergänzungen. Amen.⁴⁾

Die hier dem cod. E_3 entnommenen Sätze strich man freilich, wie sich noch aus der Handschrift ersehen lässt, später durch, fügte zum Zeichen, dass sie nicht mehr gelten, ein „Vacat“ hinzu und liess noch ein neues Verfahren folgen, welches vor dem zuletzt angegebenen augenscheinlich den Vorzug der leichten Ausführbarkeit haben sollte.

Man beschreibe (Fig. 5) um a als Mittelpunkt einen Kreis, ziehe den Durchmesser bac und die grösste, ins unbestimmte verlängerte Sehne dae , welche bac senkrecht schneide. Wenn man alsdann um den Punkt f auf ac , welcher von b soweit entfernt ist, als die Sehne eines Drittels der Peripherie beträgt, einen Kreis, dessen Halbmesser fb , beschreibt, so wird dieser von der grössten Sehne eine Gerade gh abschneiden, welche der halben Peripherie völlig oder nahezu gleich ist.⁵⁾ Zieht man nun noch von b und c Geraden nach gh , so wird die Fläche $bgch$ völlig oder nahezu der Kreisfläche $bcde$ gleich sein.⁶⁾ Drei Erläuterungen und ebenso viele Folgerungen schliessen sich unmittelbar an diese leicht verständliche, wenn auch vielleicht nicht vollkommen richtige Lösung an, und mit ihnen erhalten nunmehr die

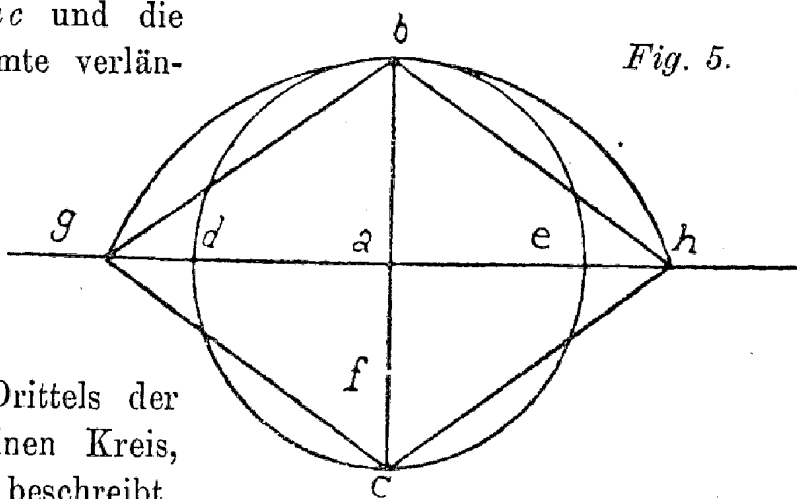


Fig. 5.

¹⁾ „... aut sine omni reductione rectae in curvam vel econverso, sed simpliciter reperiendo costam quadrati — et hi modi similiter reperiuntur supra annotati“, l. c. — ²⁾ „Sic constat hanc artem hactenus ignoratam abunde sufficienterque explicatam“, l. c. — ³⁾ „... ex qua alia sequuntur, quae sine ista scire non poterant“, l. c. — ⁴⁾ „... quae sunt mathematica complementa. Amen“, l. c. — ⁵⁾ „Si tunc super aliquo puncto in ac , qui de b distet secundum longitudinem chordae arcus tertiae partis circuli, qui sit f , circulum, cuius semidiameter sit fb , descriperis, ille de maxima chorda abscindet rectam gh medietati circuli aequalem vel propinquam“, fol. 88^b. — ⁶⁾ „Quodsi de b et c rectas ad gh traxeris, erit superficies $bgch$ aequalis vel propinqua superficiei circuli $bcde$ “, l. c.

Ergänzungen ihren endgiltigen und wohl auch befriedigenden Abschluss.¹⁾

Soviel in Kürze über den mannigfaltigen Inhalt der umfangreichen Schrift; über die Zeit ihrer Abfassung enthält ein nicht gedruckter Brief²⁾ eine beachtenswerthe Angabe. Darnach fällt jene Abfassung und dieser Brief ungefähr in die nämliche Zeit; mit der Schrift ist der Verfasser eben in den Tagen gerade fertig geworden, wo er den besagten Brief schrieb³⁾; der Brief aber ist vom 14. Sept. 1453 datirt⁴⁾; und da auch der Ort⁵⁾ angegeben ist, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die mathematischen Ergänzungen zu Branzoll (Tyrol) in der ersten Hälfte des September 1453 geschrieben wurden. Freilich ist diëse letzte Schlussfolgerung nicht so allgemein giltig, wie man auf den ersten Blick wohl geneigt ist anzunehmen. Nur von einem einzigen Büchlein nämlich ist in jenem Briefe⁶⁾ und ebenso in einer gleich zu besprechenden, ebenfalls in jenen Tagen entstandenen Schrift⁷⁾ die Rede, nur für ein einziges Büchlein, das erste naturgemäss, gelten demnach obige Angaben. Hinsichtlich des zweiten dagegen ergibt sich daraus zunächst nur soviel, dass es nach dem 14. September 1453 geschrieben ward. Nach diesem Zeitpunkte erst tauchten nämlich die Zweifel hinsichtlich des im ersten Buche gegebenen Lösungsversuches auf, welche, wie bekannt, den Anlass zu dem zweiten boten. Wann dies geschah, wird zwar nicht ausdrücklich gesagt; jedoch lassen verschiedene Umstände, worüber später, darauf schliessen, dass inzwischen mehrere Monate vergingen, und das neue Jahr 1454 wenigstens schon angebrochen war. Jedoch ist hier abermals eine Einschränkung zu machen. Das zuletzt Gesagte gilt nämlich nur von dem Theile des zweiten Buches, welcher bis zu dessen vorläufigem und, wie bekannt, späterhin unterdrücktem erstem Abschlusse reicht, also blos von der Hauptmasse, aber nicht von dem letzten Abschnitte. Wann dieser hinzukam, ist mit einiger Sicherheit kaum nach dem bisher vorliegenden Material zu bestimmen; möglicherweise geschah es schon 1454, vielleicht aber auch erst 1455. Immerhin aber bliebe

¹⁾ „Et haec sufficiant“, Schlussworte fol. 89a. — ²⁾ Im cod. lat. Monac. 18711 fol. 250 und 19114 fol. 155b—159a. — ³⁾ „Scripsi his diebus de mathematicis complementis libellum“, l. c. — ⁴⁾ „... die exaltationis sanctae crucis 1453“, nach cod. 18711; im cod. 19114 freilich fehlt diese wie auch die nächstfolgende Angabe. — ⁵⁾ „Ex Branzoll...“, l. c. — ⁶⁾ „Scripsi ... de mathematicis complementis libellum“, vgl. die drittletzte Anmerkung. — ⁷⁾ „... libellus ostendit de mathematicis complementis“, Complementum theologicum cap. 2. „Traditur in libello de mathematicis complementis ars...“, l. c. cap. 3.

darum doch die Angabe im grossen und ganzen zurecht bestehen, dass „die mathematischen Ergänzungen“ 1453 bzw. 1454 geschrieben wurden.

Anhang. *Complementum theologicum*. An das erste Büchlein „der mathematischen Ergänzungen“ fügte der Autor sofort ein anderes über theologische Ergänzungen an.¹⁾ Nach seiner Anschauung nämlich schickte sich für seinen Stand (den Cardinal) und sein Alter (den Dreiundfünfziger) die Veröffentlichung jenes Werkchens nur in dem Falle, dass er ausserdem auch den Nutzen desselben in transscendentem Verfahren an theologischen Figuren deutlich mache.²⁾ Zu dem Ende übertrug er in dem zweiten Schriftchen die mathematischen Figuren auf die theologische Unendlichkeit.³⁾ Er will also versuchen, die Figuren jenes Büchleins zu theologischen umzugestalten, auf dass wir, insoweit Gott es gestattete, mit dem Auge des Geistes schauen, wie in dem mathematischen Spiegel jenes Wahre, wonach man allenthalben in dem, was erkennbar ist, forscht, nicht etwa blos in einer entfernten Erscheinung, sondern in glanzvoller Nähe widerstrahlt.⁴⁾ Nach diesen bündigen Erklärungen im Eingange der neuen Abhandlung kann es keinem Zweifel unterliegen, dass dieselbe für die Ermittlung der rein mathematischen Anschauungen ihres Verfassers von ganz untergeordneter Bedeutung ist, ja dass sie in dieser Hinsicht ähnlich wie „das gelehrte Nichtwissen“ einen leicht irre zu führen vermag. Um dem, wenigstens für die Zukunft, vorzubeugen, sei noch einmal der Satz hervorgehoben: Unser Autor kennt in der eigentlichen Mathematik keine unendliche, sondern nur endliche Grössen.

— Zwei angebliche Abhandlungen.

Nicht die Handschrift zu Cues, auch nicht die erste, noch auch die zweite, sondern erst die dritte Ausgabe der gesammelten Werke enthält die zwei Abhandlungen, welche hier gemeint sind. Freilich jenes Fehlen derselben an den genannten Stellen ist noch längst kein

¹⁾ „Cui libello (sc. de mathematicis complementis) adiunxi alium de theologicis complementis“, cod. lat. Monac. 18711 fol. 250^b bzw. 19114 fol. 159^a. —

²⁾ Vgl.: „Perfeceram proxime de mathematicis complementis. . . Visum autem est mihi non decere opusculum illud promulgari quasi de mathematicis in meo ordine ac tanta aetate mihi licuerit . . . scribere, nisi adiiciam illius utilitatem transscender in theologicis figuris“, Compl. theol. cap. 1. Anfang. — ³⁾ „ . . . in quo (sc. libello de theologicis complementis) transtuli mathematicas figuras ad theologicalem infinitatem“, cod. 18711 l. c. — ⁴⁾ „Conabor igitur libelli illius figuras theologicales efficere . . .“, Compl. theol. cap. 1.

durchschlagender Beweis gegen deren Echtheit. Hierzu ist offenbar mehr erforderlich, vor allem, dass wir dieselben einzeln für sich untersuchen. Darum zunächst *De sinibus et chordis*.

Diese winzige Abhandlung von 33 Zeilen in Folio erhielt sich im Nachlasse des Regiomontanus, ward 1533 zu Nürnberg zum ersten Mal gedruckt¹⁾ und 32 Jahre später in die dritte, die Basler Gesamtausgabe aufgenommen.²⁾ Dass man von Anfang an dieselbe ausdrücklich dem Cusanus zuschrieb, steht deshalb ausser Zweifel, weil dem eigentlichen Titel ein „Eiusdem“ vorangeht, welches sich nach dem ganzen Zusammenhange nur auf den Genannten beziehen kann. Dementsprechend führte man sie bis zur Stunde unter seinen mathematischen Arbeiten als eine besondere, selbständige Schrift auf und suchte nach bestem Vermögen deren sachliche Beziehung zu den übrigen, sowie die Zeit ihrer Abfassung zu bestimmen.³⁾

Allein eine selbständige Schrift liegt hier nie und nimmer vor. Dies lässt meines Erachtens genugsam gleich der erste Satz erkennen. „Hieraus“, so lautet nämlich derselbe, „wird man jetzt betreffs der Sehnen und Bogen ein vollständiges Wissen entwickeln können.“⁴⁾ Woraus? fragt angesichts dieses Einganges alle Welt, ohne dass man auf diese Frage eine auch nur halbwegs befriedigende Antwort geben könnte; kurz, es liegt keine selbständige Schrift, sondern höchstens das Bruchstück einer solchen vor. Auf den gleichen Gedanken bringt einen auch der so sehr geringe Umfang; dreiunddreissig Zeilen, wenn schon in Folio, pflegen nicht eine Schrift für sich zu bilden.

Haben wir somit lediglich ein Bruchstück vor uns, dann wäre es des weiteren wünschenswerth, die Schrift namhaft machen zu können, welcher es entnommen ist. Nicht immer vermögen wir dies so unstreitig, wie gegenwärtig. Entnommen nämlich ist dasselbe den mathematischen Ergänzungen, von denen soeben die Rede war. Wie bekannt, eröffnen das erste Buch derselben vierzehn Lehrsätze; dann folgen vier Aufgaben über die Verwandlung gerader bezw. krummer Linien und Flächen, und an deren Lösung gerade schliesst sich unmittelbar der Abschnitt, welcher hauptsächlich den Stoff zu der angeblichen Abhandlung abgeben musste. Die ersten neun Zeilen der letzteren entsprechen freilich, weil sie ihre Vorlage ziemlich stark verkürzen, dieser nur dem Hauptgedanken nach; zum Belege hierfür

¹⁾ Auf Seite 9 des in dieser Zeitschrift 8. Bd. S. 403 Anm. 3 erwähnten Werkes. — ²⁾ Auf S. 1095. — ³⁾ Vgl. Scharpff S. 307 und Schanz S. 6. — ⁴⁾ „Ex his nunc circa chordas et arcus scientia perfecta elici poterit“, l. c. pag. 9.

sei hier wenigstens an die schon bekannten beiderseitigen Eingangsworte erinnert; „aus den vorher erzielten Ergebnissen“¹⁾, wie es in der Vorlage heisst, macht die angebliche Abhandlung ein einfaches „Hieraus:“ Weit treuer als diese neun stimmen dagegen die nächsten achtzehn Zeilen überein; denn die ganze Aenderung besteht in einem ausgelassenen „igitur“ zu Anfang und zum Schlusse im Gebrauche des Plurals „descripsimus“ anstatt des entsprechenden Singulars.²⁾ Die letzten sechs Zeilen endlich sind verschiedenen Stellen der Vorlage abermals nur dem Gedanken nach entnommen; anderthalb Zeilen zunächst dem zweitfolgenden Absatze³⁾, sodann abermals anderthalb dem geschichtlichen Eingange „der mathematischen Ergänzungen“⁴⁾, und die allerletzten drei erinnern gar an eine Stelle im Eingange „der geometrischen Verwandlungen“⁵⁾

Nach dem Ergebnisse dieses Quellennachweises zu schliessen, verdankt die angebliche Abhandlung nicht etwa einem bloßen Zufall, sondern vielmehr einem planmässigen Vorgehen sein Dasein. Ein solches aber setzt seinerseits einen Sachverständigen voraus. Sachverständig nun freilich war in erster Linie wohl der Autor selbst, allein dieser kann hier deshalb nicht in Betracht kommen, weil er an einem Schriftstücke, wie das fragliche, kein ersichtliches Interesse haben konnte; anders dagegen seine mathematischen Freunde. In ihrem Kreise dürfte daher der Urheber der angeblichen Abhandlung noch am ehesten zu suchen und am sichersten zu finden sein.

Die zweite hierher zu ziehende Schrift ist *De quadratura circuli* überschrieben.⁶⁾ Eine solche Ueberschrift begegnete uns schon früher⁷⁾;

¹⁾ „Ex ante habitis“, vgl. oben S. 394 Anm. 5. — ²⁾ Vgl. oben S. 396 Anm. 1.
³⁾ Vgl.: „... ita quod si quid scibile unquam fuit in geometricis et non scitum, amplius volenti ingenium applicare clare patefiat“, De mathematicis complementis fol. 68^a und das Sätzchen: „Et putamus nihil scibilis in geometricis nunc volenti diligenter in hoc medio inquirere remanere occultum“, De sinibus et chordis, Z. 28 f. — ⁴⁾ Vgl.: „... tentare coepi, si forte haec difficultas possit medio coincidentiarum finem capere, uti in aliis scientiis vim illam maximam esse comperi“, fol. 59^a und: „Haec sic maxime scripserim, ut videatur potentia artis coincidentiarum, per quam in omni facultate occulta penetrantur“, De sin. et chord., Z. 29 f. — ⁵⁾ Vgl.: „Semi-diametri autem illorum iam dictorum circulorum maxime inaequales in trigono existunt, in aliis autem successive minus inaequales, in circulo vero isoperimetro coincidentes, cum ibi inscriptus, circumscriptus et peripheria coincidant“, fol. 33^b und: „Ex sola enim coincidentia semidiametrorum inscripti et circumscripti circulorum in omnibus poligoniis differentium et in circulo tantum coincidentium inquisitio nos ad praemissa perduxit“, De sin. et chord., Z. 30 ff. — ⁶⁾ und auf p. 13—15 der Nürnbn. bezw. p. 1099—1101 der Basler Ausgabe gedruckt. — ⁷⁾ Vgl. 8. Bd. S. 403.

unter dem nämlichen Titel sind uns demnach zwei ganz verschiedene Schriften ein und desselben Autors überliefert. Dies ist, da hierdurch leicht Verwechslungen veranlasst werden, an und für sich recht misslich, und da ein jeder Schriftsteller, um solche nicht leichtfertig heraufzubeschwören, nicht leicht zweimal den gleichen Titel für seine verschiedenen Arbeiten wählen wird, so weckt die soeben festgestellte Uebereinstimmung schon gelinden Zweifel, ob denn die Sache ihre Richtigkeit hat.

In dem also erregten Zweifel bestärkt uns ein näheres Eingehen auf den Inhalt. Nach dem Titel sollte man ein neues Verfahren erwarten, wie man leichter und zuverlässiger als bisher den Kreis in ein Quadrat verwandelt. Anstatt dessen erhalten wir eine Erklärung des elften unter den vierzehn Sätzen, welche das erste Buch der „mathematischen Ergänzungen“ eröffnen¹⁾, d. i. des Satzes, auf welchem, wie es weiter heisst, der ganze Nachweis für die Richtigkeit der fraglichen Quadratur beruht.²⁾ Viel zutreffender würde demnach die Ueberschrift sein, wenn sie der angeführten Stelle gemäss etwa „demonstratio undecimae conclusionis mathematicis complementis antepositae“ lautete.

Eine solche Ueberschrift wäre, wie gesagt, zwar sachlich, aber nicht formell berechtigt. Dies letztere hängt mit dem Charakter des zu untersuchenden Schriftstückes zusammen; nicht eine wissenschaftliche Abhandlung, wofür man es bisher genommen, sondern ein Brief ist es. Zwar fehlt, wie leicht zu ahnen, der bekannte umständliche Eingang des lateinischen Briefes, jedoch nicht am Schlusse ein letztes „Vale“; und fehlte auch dieses, so wäre der Briefcharakter doch noch zu erkennen. Ein „vestrae“ nämlich ist dem schon erwähnten Genetiv „undecimae conclusionis“ noch beigefügt.

Die Beifügung dieses einen Wörtchens „vestrae“, in welchem nach dem Zusammenhange nicht etwa ein Druckfehler zu befürchten steht, beweist weit mehr als den bloßen Briefcharakter, beweist nämlich gleichfalls, dass die angebliche Abhandlung d. h. der in Rede stehende Brief erstens nicht, wie man bisher annahm, von Cusanus herkommen kann, sondern zweitens vielmehr an ihn gerichtet sein muss.

Dem zuletzt gezogenen doppelten Schlusse widerstreitet jedoch, wie es scheint, schnurstracks die Weisung am Ende des Briefes:

¹⁾ Vgl.: „Haec videtur declaratio undecimae conclusionis . . .“, pag. 14. —

²⁾ „ . . . in qua pendet tota demonstratio quadraturae“, l. c.

„Man gebe ihn unserem verehrlichen, treuen und lieben Lehrer, dem Astronomen Georg Peurbach“¹⁾ In diesen Worten hat man eine Widmung finden wollen. Wenn nun dabei auch an eine solche nicht zu denken ist, so enthalten dieselben doch unstreitig eine Adresse und zwar eine ganz andere, als soeben aus dem „vestrae“ erschlossen ward. Die angesichts dieses anscheinend unlösbaren Widerspruches so nahe gelegte Aenderung des Fürwortes in „nostrae“ würde mit einem Schlage diesen Widerspruch hinwegräumen, den Cusanus zum Urheber und den Wiener Professor zum Empfänger des Briefes machen. Allein ein solches Auskunftsmittel erscheint durch die sieben letzten Zeilen desselben vollständig ausgeschlossen. Darnach sieht der Briefschreiber unter anderem nicht, warum zwei näher gekennzeichnete Linien nicht sollten krumm sein können, und alsdann würde das Beweisverfahren nicht von der Stelle kommen²⁾; es werde dann nämlich jener Fall eintreten, welchen der Empfänger in seiner zehnten Folgerung besprochen habe.³⁾ An dieser zweiten Stelle, ganz abgesehen von der zweiten Person in der Zeitform „dixisti“, das besitzanzeigende Fürwort „tua“ in „mea“ umzuändern wäre dem ganzen Zusammenhange nach geradezu widersinnig; solches Unterfangen ist daher auch an der ersten Stelle unzulässig, und es bleibt dabei, dass unser Cusanus den Brief nicht schrieb, sondern empfing; denn auf niemand sonst lassen sich die beiden Fürwörter „vestrae“ und „tua“ nach Lage der Verhältnisse beziehen. „Zuerst empfing“ möchte ich indessen mit Rücksicht auf die schier unerklärliche Adressenangabe der Deutlichkeit halber hinzusetzen. Da nämlich an dem Inhalte derselben sich nicht rütteln lässt, so hat man, soweit ich sehe, nur den einen Ausweg anzunehmen, dass Cusanus der erste, eigentliche Empfänger des Briefes ist, dass dieser dann aber denselben weiter an Peurbach gab, wodurch letzterer der zweite Empfänger ward. Nur die zweite Adresse zu dem Briefe entstammt demnach der Feder des Cardinals, nicht dagegen der Brief selbst. Dieser hat vielmehr augenscheinlich wiederum einen seiner mathematischen Freunde zum Verfasser.

Der soeben besprochene Brief indessen bildet nicht an und für sich schon die vollständige angebliche Abhandlung, sondern nur deren

¹⁾ „Detur venerabili nostra fidei dilecto magistro, Georgio Peurbachio astronomo“, pag. 14. — ²⁾ „Sed non video, cur duae lineae . . . non possent esse curvae . . . et tunc non procederet demonstratio“, pag. 14. — ³⁾ „Erit enim illud, quod in decima tua conclusione dixisti . . .“, l. c.

ersten Bestandtheil. Zu dieser nämlich rechnen ausser demselben die beiden Drucke auch noch eine zweite Erklärung; die Erklärung des Verfahrens, eine krumme Linie zu strecken, nämlich, wie es an erster Stelle im zweiten Büchlein „über die mathematischen Ergänzungen“ angegeben wird.¹⁾ Diese nachträgliche Erklärung unterscheidet zwei Grundlagen für das Verfahren. Deren erste lautet dahin: Die sechste (Linie) nebst der Hälfte des Theiles der fünften, welcher zwischen die krumme (Peripherie des Quadranten) und die vierte fällt, lässt sich der krummen *be* gleichmachen.²⁾ Diese Grundlage sei, wie sie in der Schrift vorhanden, nicht zweifelhaft.³⁾ Die zweite Grundlage sodann bildet der Satz: Die sechste nebst der Theilhälfte und die fünfte nebst dem halben Unterschied zwischen der Sehne, welche eben die sechste, und dem Theil der fünften, welche ebenfalls Sehne ist, lassen sich der zweifachen krummen *be* gleich machen.⁴⁾ Diese zweite Grundlage lasse sich ebenso beweisen, wie die vorausgeschickte im Texte bewiesen werde.⁵⁾ Und eben um diesen Nachweis ausschliesslich dreht sich die ganze „Erklärung“.

Nach Feststellung dieses Thatbestandes liegt denn auch kein Anlass vor, weshalb wir die zweite „Erklärung“ dem Cusanus absprechen sollten; denn man übersehe den grossen Unterschied, welcher in dieser Frage zwischen der ersten und der zweiten „Erklärung“ besteht. Allerdings sechs Siebentel könnte der genannte ganz gut, nimmermehr dagegen kann er das letzte Siebentel der ersten „Erklärung“ geschrieben haben; nun fehlt aber an der zweiten „Erklärung“

¹⁾ „Declaratio rectilineationis curvae, quae ponitur in primo modo secundi libelli de mathematicis complementis“, pag. 14 bzw. pag. 1100. — ²⁾ „Prima suppositio: Sexta cum medietate portionis quintae, quae cadit inter curvam et quadratam potest aequari *be* curvae“, liest man pag. 14 zwar, allein „quadratam“ ist sicher falsch; „quadratum“ und ebenso „quadrantem“, weil an unserer Stelle von „curvam“ sachlich nicht verschieden, geben keinen Sinn; unbedingt erforderlich ist „quartam“; „inter curvam et quartam“ würde genügen; „inter curvam quadrantis et quartam“ wäre deutlicher und würde das Versehen des Druckes am leichtesten erklärlich machen. — ³⁾ „Haec suppositio certa est ut in littera“, l. c. Zu dem Hauptworte „littera“ tritt im weiteren Verlaufe (vgl. die zweitfolgende Anmerkung) „textus“ in Parallele; darum glaubte ich „littera“ durch „Schrift“ übersetzen und auf „die mathematischen Ergänzungen“ beziehen zu sollen. — ⁴⁾ „Secunda suppositio. Sexta cum medietate portionis et quinta cum medietate differentiae chordae, quae est sexta, et partis quintae, quae etiam est chorda, possunt aequari *be* curvae bis“, l. c. — ⁵⁾ „Illa suppositio probatur, uti praemissa in textu probantur (lies: probatur)“, l. c.

eben gerade ein das Ganze über den Haufen stürzender Absatz wie jenes Schlusssiebentel, und darum hindert uns bis auf weiteres gar nichts, anzunehmen, der genannte habe die zweite „Erklärung“ verfasst. Diese Annahme passt überdies am besten zu der oben bereits geäußerten Ansicht, dass er die zweite Briefadresse beigefügt, und vermag gleichzeitig die auffallende Thatsache am befriedigendsten zu erklären, wie die beiden „Erklärungen“, der Brief und die Nachschrift zu demselben, unter die Schriften des genannten im Nachlasse des Regiomontanus gerathen konnten.

Demzufolge bleibt also das Ergebniss dieser Nummer der Hauptsache nach lediglich negativ, daher der bloße Strich vor der Ueberschrift; die besprochenen Abhandlungen stammen, die später beigefügte zweite Adresse und die Nachschrift zu dem an den Autor gerichteten Briefe ausgenommen, nur angeblich von Cusanus.

(Schluss folgt.)

1832, 1527.

Philosophisches Jahrbuch.

Auf Veranlassung und mit Unterstützung

der

Görres-Gesellschaft

unter Mitwirkung von

Dr. Jos. Pohle,

o. ö. Prof. an der Universität
zu Breslau

und

Dr. Jos. Dam. Schmitt,

Prof. an der philos.-theol. Lehranstalt
zu Fulda

herausgegeben von

Dr. Const. Gutberlet,

Professor an der philos.-theologischen Lehranstalt in Fulda.



X. Band. ~~4. Heft.~~

Fulda 1897.

Druck und Commissions-Verlag der Fuldaer Actiendruckerei.

M
29 6/5

Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus.

Von Prof. Dr. Joh. Uebinger in Posen.

(Schluss.)¹⁾

Der zuletzt erwähnten zweiten „Erklärung“, wie sie die Nachschrift enthält, hätte ein Dritter ein sachlich ebenso vernichtendes Urtheil wie der ersten anfügen können; denn es genügt keineswegs der bloße Nachweis, wie ihn der Text der „Ergänzungen“ und die zweite „Erklärung“ lediglich versucht, dass man die fraglichen Linien gleich machen kann, sondern verlangt wird zu einer befriedigenden Lösung des vielgenannten Problems die klare und bündige Angabe, wie man dieselben leicht und sicher wirklich gleich macht. Dieser augenscheinliche Mangel hat mit der Zeit allem Anscheine nach zu dem gänzlichen Aufgeben des also behafteten Verfahrens geführt und das Suchen nach einem ganz anders gearteten veranlasst. Auf diese Weise wohl entstand

2. *Dialogus de quadratura circuli* 1457.

„Bester Vater“, so beginnt Paolo das 1457 zu Brixen niedergeschriebene Gespräch²⁾ mit dem Cardinal, „Du weißt, dass ich von Jugend auf nach der Wahrheit forschte, welche in der Mathematik allem Anscheine nach ziemlich klar wiederstrahlt, und wie sehr ich nach der Quadratur des Kreises verlange, welche bisheran unbekannt blieb.“³⁾ Wenn Dir daher nach Absendung der Büchlein »über die

¹⁾ Vgl. diese Zeitschr. 8. Bd. S. 301 ff. u. 403 ff., 9. Bd. S. 54 ff. u. 391 ff.
— ²⁾ „Finis. Brixinae, 1457“, lauten die Schlussworte desselben pag. 12; aus der angegebenen Jahreszahl ward in dem Basler Nachdruck pag. 1098 durch Umstellen der beiden inneren Ziffern 1547, und trotz des ausdrücklichen „finis“ auf Seite 12 rechnen Gassendi, Vita pag. 348 und Scharpff S. 309 auch die zwei folgenden Seiten, die angebliche Abhandlung „De quadratura circuli“, noch mit zu dem Gespräche hier. — ³⁾ Paulus. „Pater optime, quia me nosti a puero veritatem quaesivisse, quae in mathematicis clarius videtur relucere (vgl. 8. Bd. S. 304 Anm 3), atque quantum cupiam hactenus ignotam circuli quadraturam . . .“, pag. 10.

mathematischen Ergänzungen« an mich ein anderes Verfahren, welches minder zweifelhaft, in den Sinn kam, so theile mir, bitte, dieses mit¹⁾; die genannten Büchlein von 1453 bew. 1454 nämlich blieben für ihn in ihren Ausführungen dunkel und in ihren Ergebnissen zweifelhaft.²⁾

Jetzt aber, im Jahre 1457, glaubt der Ersuchte ein Verfahren mittheilen zu können, welches leicht auszuführen und zum Schlusse keinen Zweifel zurücklasse.³⁾ Alle Glieder, welche dazu gehören, seien bekannt, bloß das eine ausgenommen, wie man zu einer gegebenen Kreislinie eine gerade zeichne, welche ihr gleich ist⁴⁾; und dieses bisher unbekannte Schlussglied enthalte der Satz⁵⁾: Fügt man die Quadrantensehne eines gegebenen Kreises zum Halbmesser desselben, so entsteht der Durchmesser des Kreises, welcher dem Dreiecke von dem gleichen Umfange wie der gegebene Kreis umgeschrieben ist.⁶⁾ „Leicht fasslich“, so erwidert Paolo, „sei dieses Verfahren, überdies, falls sich dessen Richtigkeit nachweisen lasse, sehr lieb und werth.“⁷⁾ Sofort löst darauf der Cardinal diese Aufgabe durch den von alters her und so auch bei ihm in solchen Fällen üblichen Nachweis des „nec plus nec minus“ in einer den Mitunterredner völlig befriedigenden Weise; derselbe nämlich erklärt schliesslich nicht leugnen zu können, dass, wie klar nachgewiesen, es damit seine Richtigkeit habe.⁸⁾ Auf Grund dieses Nachweises ausserdem liessen sich, wie in „den mathematischen Ergänzungen“ sei berührt worden, allerhand Folgerungen ziehen, welche man bisheran in der Mathematik nicht kannte.⁹⁾

¹⁾ „... si igitur post mihi missos tuos de mathematicis complementis ... libellos alius certior modus incidit, rogo communices“, l. c. — ²⁾ „... utique mihi obscuros atque incertos libellos ...“, l. c. — ³⁾ Nicolaus card. „Imo facilis et ut puto certus“, l. c. — ⁴⁾ Vgl.: Nic. „Omnia tibi nota scio quae ad rem pertinent solum hoc unico dempto, scilicet ut datae circumferentiae circuli scias rectam lineam ei aequalem assignare“, l. c. — ⁵⁾ Vgl.: Nic. „Ut igitur tibi pandam conceptum circa id quod restat, accipe propositionem ...“, l. c. — ⁶⁾ „Si chorda quadrantis dati circuli fuerit addita semidiametro [das Komma des Druckes hier tilgen!] eiusdem [hier ein Komma setzen!], oritur diameter circuli circumscripti trigono isoperimetro circumferentiae dati circuli“, l. c. — ⁷⁾ Vgl.: Paulus. „Facilis est haec praxis atque carissima, si hoc verum ostenderis“, l. c. — ⁸⁾ Vgl.: Paulus. „Non possum negare, quin ita sit, ut clare ostendisti ...“, pag. 12. — ⁹⁾ Vgl.: Paulus. „Satis est scire modum curvam circumferentiam in rectam lineam transmutandi et econverso rectam in curvam, ex quo omnia quae hactenus in mathematicis ignorabantur possunt elici, prout in mathematicis tuis tetigisti complementis“, l. c.

An dieses Gespräch über die Kreisquadratur aber schliesst sich allem Anscheine nach

3. *De una recti curvique mensura.*

Die praktische Meisterschaft, wie man die gemeinsame, gleiche Grösse des Krummen und des Geraden feststelle, fehle, so heisst es im Eingange, den Geometriebeflissenen¹⁾, darum seien selbige nicht vollauf tüchtig und könnten mancherlei Aufgaben, die, wie sie sähen, zu machen wohl möglich sei, nicht zu einem endgiltigen Abschlusse bringen.²⁾ Weil solches also unser Autor sah, so wandte er einen Eifer, der nicht gering war, an, um eben diese Befähigung zu erlangen.³⁾

Diese Befähigung aber besteht in der Kenntniss dreier Sätze. Es sind dies die drei Aufgaben: 1. wenn ein Bogen gegeben ist, zu ihm eine Gerade von gleicher Grösse⁴⁾, 2. umgekehrt zu einer gegebenen Geraden einen gleichgrossen Bogen an einem gegebenen Kreise⁵⁾ und endlich 3. zu dem Bogen eines Halbkreises eine Gerade und zu seiner krummlinigen (gemischtlinigen) eine geradlinige Fläche von gleicher Grösse zu zeichnen.⁶⁾ Die Beweise zu diesen Sätzen fussen auf dem Gedanken des „nec plus nec minus“, bewegen sich demnach in ähnlichen Geleisen wie das Gespräch über die Quadratur.

Von diesem freilich unterscheidet sich andererseits unsere Schrift nicht wenig durch die äussere Fassung. Eine Form nämlich, in welche man für gewöhnlich nicht wissenschaftliche Untersuchungen, sondern persönliche Nachrichten kleidet, ward hier gewählt, d. i. die Briefform. Deutlich allerdings tritt diese in dem Nürnberger Drucke nicht mehr hervor, nach ihm glaubt man weit eher eine wissenschaftliche Abhandlung vor sich zu haben; indessen fehlen selbst hier nicht alle Spuren von der ursprünglichen Form. Unter der oben bereits erwähnten Ueberschrift nämlich stehen ganz unvermittelt die Worte

¹⁾ „... vidi practicum magisterium commensurationis curvi et recti deesse geometricis...“, pag. 16. — ²⁾ „... ideo ipsos imperfectos et plura, quae possibilia fieri vident, ad actum deducere non posse...“, l. c. — ³⁾ „Quia vidi..., conatum igitur non parvum adhibui, ut ipsam artem assequer“, l. c. — ⁴⁾ „Propositio prima. Dato arcu rectam ei commensurabilem assignare“, pag. 16. — ⁵⁾ „Propositio secunda. Datae rectae arcum dati circuli commensurabilem assignare“, pag. 18. — ⁶⁾ „Propositio tertia. Arcui semicirculi rectam et areae eius curvae rectilinealem commensurabiles designare“, pag. 20. In diesen Sätzen ist das Eigenschaftswort „commensurabilis“ wegen seiner eigenthümlichen Bedeutung, welche von der heute üblichen nicht unerheblich abweicht, darum besonders zu beachten.

„Nicolaus cardinalis sc̃ti. Petri“, welche, an und für sich recht auffällig, dadurch am ehesten verständlich werden dürften, dass man sich ein „s. d.“ hinzudenkt. Gerade auf diese Art Ergänzung aber bringt einen die Zusicherung gegen Schluss, welche, gänzlich individuell zugespitzt, wörtlich übersetzt also lautet: „Zu vielen verborgenen Eigenschaften, die sich kaum aufzählen lassen, wirst Du auf Grund dieser Befähigung gelangen¹⁾ . . . und Werkzeuge wirst Du zusammensetzen können, mit Hilfe derer Du die vorausgeschickten Lösungen sehr leicht und rasch verständlich machen wirst, Aufgaben, welche wir für Deinen regen Fleiss übrig lassen.“²⁾ Diese Sätze, zumal der letzte Relativsatz lassen sich nimmer auf jeden beliebigen Leser unter der Voraussetzung beziehen, es läge eine allgemein gehaltene Abhandlung vor; denn es ist durchaus nicht jedermanns Sache, diesen regen Fleiss zu besitzen und so jene Ergebnisse zu erzielen. Der gleichen vermag unter tausend und abertausend Menschen im Laufe der Jahrhunderte vielleicht einer. An einen solchen Glücklichen wendet sich allem Anscheine nach unser Schreiben; ein Brief also liegt vor, an welchem man bis auf zwei Spuren, die wohl ihrer sachlichen Bedeutung halber bestehen blieben, alle Kennzeichen eines solchen in der Folgezeit als nebensächliches Beiwerk tilgte, welchem man alsdann anstatt dessen, wie wir in Handschriften öfters bemerken können, eine sachliche Ueberschrift gab, als ob eine wissenschaftliche Abhandlung vorläge. Diese somit später hinzugekommene Ueberschrift passt zu dem Inhalte freilich etwas besser als jene früher besprochene, mit der es eine ähnliche Bewandniss hat, aber keineswegs vollkommen; statt „una . . . mensura“ nämlich müsste, wie aus dem Texte selbst deutlich erhellt³⁾, „commensuratione“ stehen, ein Hauptwort, welches erst dem Inhalte völlig entspräche, allerdings dann nicht so leicht verständlich und geläufig wie das gewählte, aber irreführende „una . . .

¹⁾ „ . . . et ad multa occulta, quae vix enarrari possunt, hac arte pervenies“, pag. 20. — ²⁾ „ . . . et instrumenta componere poteris, cum quibus praemissa facillime et subito facies, quae tuae industriae relinquimus“, l. c. — ³⁾ „ . . . magisterium commensurationis curvi et recti deesse . . .“, heisst es, wie bekannt, gleich zu Anfang; „commensurari autem curvum et rectum dico, quando una mensura mensurantur, puta quando recta linea tot pedes habet rectos quot arcus curvos“, pag. 16; darnach bedeutet „commensurare“ soviel wie „una mensura mensurare“ und „commensuratio“ entsprechend „una mensura mensuratio“; das Eigenschaftswort „commensurabilis“ endlich geht, wie schon angedeutet, auf gleiche Grössen und nicht auf Grössen mit gleichem Maas.

mensura“ wäre.¹⁾ Die Wahl des letzteren sodann dürfte auf Rechnung des Adressaten zu setzen sein, und dies ist niemand anders als Georg Peurbach. Von ihm aus nämlich, so müssen wir nach Lage der Verhältnisse annehmen, kam der Brief 1461 in den Besitz, 1476 in den Nachlass seines Schülers Regiomontanus und 1533 zu Nürnberg in den Druck. Jener erste Empfänger aber erhielt denselben vermuthlich 1457 gleichzeitig mit dem „Gespräch über die Quadratur.“

Diese Vermuthung stützt sich auf folgende zwei Erwägungen. Einmal steht unser Brief in dem Nürnberger Drucke, der bis auf eine einzige Ausnahme die zeitliche Reihenfolge einhält, nach dem Gespräche, an letzter Stelle. Will man auf diesen Umstand etwa keinen sonderlichen Werth legen, so bleibt alsdann noch immer die früher nachgewiesene inhaltliche Uebereinstimmung mit dem „Gespräche“ einerseits und die formelle Verschiedenheit von ihm andererseits zu beachten. Sowohl jene Uebereinstimmung als auch diese Verschiedenheit scheinen für die Zusammengehörigkeit und gleichzeitige Uebersendung zu sprechen: Nach vielen nicht auf die Dauer befriedigenden Versuchen war abermals ein neues Verfahren gefunden, den Kreis zu quadriren. Ein Gespräch mit einem der mathematischen Freunde, mit Paolo Toscanelli, machte dies bekannt. Natürlich musste es vor allem dem andern mathematischen Freunde, dem Georg Peurbach, bekannt gegeben werden. Ehe aber dies geschah, überzeugte sich unser Verfasser, dass den Geometriebeflissenen die praktische Meisterschaft fehle, ganz allgemein das Krumme und Gerade wechselseitig zu vertauschen. So entstand im Anschlusse an „das Gespräch“ unser Brief und ward jenem als Begleitschreiben gleich mit auf den Weg zu Georg Peurbach gegeben.

Nach alldem zu schliessen, bilden hierselbst die beiden letzten Nummern und die zweite, soweit sie echt, Ergänzungen zu der ersten. Darnach erstreckten sich „die mathematischen Ergänzungen“, dieses Wort im weiteren Sinne genommen, über einen Zeitraum von fünf Jahren. Anfang September 1453 ward dazu der Grund gelegt in dem Theil, welcher von vornherein das Ganze, alsbald jedoch nur mehr deren erstes Büchlein bildete; durch Zweifel an der Richtigkeit seiner Ausführung veranlasst, kam sodann höchstwahrscheinlich 1454 das zweite Büchlein, zunächst ohne, dann mit Nachtrag, hinzu;

¹⁾ Pietät gegenüber dem überlieferten Text und zugleich Einsicht von dem wahren Sachverhalt bekundet 1533 der Herausgeber, wenn er pag. 16 die Ueberschrift unverändert lässt, auf dem Titelblatte aber „commensuratio“ wählt.

in dasselbe Jahr dürfte weiterhin die bekannte Nachschrift zu setzen sein; endlich 1457 brachten „das Gespräch über die Kreisquadratur“ und der Brief an Peurbach „über die gleiche Grösse des Geraden und Krummen“ den endgiltigen Abschluss der „mathematischen Ergänzungen“.

Auf die grundlegenden „Verwandlungen“ 1450 folgten also „die Ergänzungen“ 1453—57, auf diese endlich

IV. Die Vollendung 1458.

Während die erste Gruppe drei, die zweite auch drei, zählt diese dritte nur zwei Nummern; und während in der ersten Gruppe die Hauptschrift in der Mitte, in der zweiten am Anfange, steht dieselbe in der dritten am Schlusse. Es geht ihr nämlich voran

1. *De beryllo.*

Nahezu fünf Jahre trug sich der Verfasser nachweislich mit dem Plane zu dieser Schrift. Schon in einem Briefe nämlich, der in den Januar 1454 zu setzen ist, begegnet uns der „Beryll“, aber erst am 18. August 1458 ward er vollendet.¹⁾

Von den vier an die Spitze dieses „Beryll“ gestellten Sätzen geht uns hier im Grunde genommen nur der vierte etwas an. Der erste derselben nämlich behauptet die Einheit des obersten Principes, der zweite die individuelle Verschiedenheit der einzelnen Dinge, der dritte eine die geschaffenen Dinge nachmessende²⁾ und erst der vierte eine schöpferische Thätigkeit des Menschen.³⁾ An der Hand dieser vier Sätze schreitet sodann die Schrift vorwärts; auf den ersten kommen einundzwanzig, auf den zweiten acht, auf den dritten drei Capitel⁴⁾, und der vierte — geht gänzlich leer aus. Darnach scheint die Schrift für unsere Zwecke belanglos zu sein.

Doch dies scheint nur so. Thatsächlich kommen in der Ausführung der drei ersten Sätze genug Stellen vor, welche hier Beachtung verdienen. Namentlich dort, wo es sich darum handelt, das erste Princip zu veranschaulichen, spielen, ähnlich wie früher in „dem gelehrten Nichtwissen“, Vergleiche aus der Mathematik eine hervorragende Rolle. Um zu begreifen, wie dasselbe auch nur das untheilbare Princip von gross und klein, gleich und ungleich, eins

¹⁾ Vgl. Uebinger, Die philosophischen Schriften des Nik. Cusanus. Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik (1894). Bd. 105. S. 42—50. — ²⁾ Vgl. cap. 3, 4 bezw. 5. — ³⁾ „Quarto adverte Hermetem Trismegistum dicere hominem esse secundum deum“, cap. 6. — ⁴⁾ Cap. 7—27; cap. 28 35; cap. 36—38.

und theilbar und dergleichen mehr sein könne¹⁾, nehme man einen Halm ab zur Hand²⁾, der einer Linie ähnlich erscheine, knicke ihn in der Mitte c , lasse den Schenkel cb , welcher beweglich sei, gegen ca sich bewegen, so verursacht derselbe in einer solchen Bewegung zusammen mit ca alle möglichen Winkel.³⁾ Niemals aber wird einer spitz in dem Maasse sein, dass er nicht spitzer sein kann, bevor cb mit ca zusammentrifft; ebensowenig einer stumpf in dem Maasse, dass er nicht stumpfer sein könnte, bevor cb mit ca eine einzige fortlaufende Linie bilden wird. Wenn man demnach durch den Beryll den grössten und zugleich kleinsten möglichen Winkel sieht, so wird der Blick nicht bei einem Winkel, sondern bei der einfachen Linie Halt machen⁴⁾; sie eben ist das Princip der Winkel, sie das untheilbare Princip für ebene Winkel jeder Art von Theilung, wodurch sich Winkel theilen lassen.⁵⁾

Noch einen anderen, auch hier höchst beachtenswerthen Vergleich muss im weiteren Verlaufe die Mathematik liefern.⁶⁾ Es handelt sich dabei um einen Vergleich, welcher klarer und anschaulicher als das bisher Vorgebrachte ein Bild von der absoluten Wahrheit und dem All vermittelt; zu dem Ende solle man sich das Verhältniss zwischen Punkt und Körper genau ansehen.⁷⁾ Gesetzt nämlich den Fall, der Punkt sei auf die Weise mitgetheilt, wie er mittheilbar ist, und man hat den Körper.⁸⁾ Der Punkt ist an und für sich auf alle Art des stetigen Seins und der Ausdehnung untheilbar. Die Arten des stetigen Seins aber sind Linie, Fläche und Körper, die Arten der Ausdehnung aber lang, breit und tief. Die Linie also nimmt an der Untheilbarkeit des Punktes theil, weil sie nicht in das Gegentheil einer Linie, auch nicht nach Breite und Tiefe sich theilen lässt. Die

¹⁾ Vgl. cap. 7. — ²⁾ Vgl.: „Huius vide nostrae artis aenigma et recipe calamum ad manus . . .“, cap. 8. — ³⁾ Vgl. einige Zeilen später: „Esto igitur quod calamus sit ut linea et plicetur super c puncto cb mobili et moveatur versus ca , in eo motu cb cum ca causat omnes formabiles angulos.“ — ⁴⁾ „Quando igitur tu vides per beryllum maximum pariter et minimum formabilem angulum, visus non terminabitur in angulo aliquo, sed in simplici linea“, l. c. — ⁵⁾ „... quae est principium angulorum, quae est indivisibile principium superficibilium angulorum omni modo divisionis, quo anguli sunt divisibiles“, l. c. Die folgenden Capitel 9–16 enthalten die Anwendung auf das „indivisibile“ schlechthin. — ⁶⁾ „Adhuc alio aenigmate per doctrinam . . .“, Anfang zu cap. 17. — ⁷⁾ Vgl.: „De hac consideratione puncti et corporis te eleva ad similitudinem veritatis et universi et in clariore aenigmate facies dictorum coniecturam“, Schluss des cap. 17. — ⁸⁾ „Sit igitur punctum communicatum modo, quo communicabile est, et habetur corpus“, cap. 17.

Fläche nimmt an der Untheilbarkeit des Punktes theil, weil sie nicht in das Gegentheil einer Fläche, auch nicht nach Tiefe theilbar ist. Ebenso nimmt auch noch der Körper an des Punktes Untheilbarkeit Antheil, weil er in das Gegentheil eines Körpers sich nicht auftheilen lässt, wenngleich er nach Tiefe theilbar ist. In der Untheilbarkeit des Punktes sind all diese Arten der Untheilbarkeit enthalten; nichts also findet sich in diesen, ausgenommen die Entfaltung der Untheilbarkeit des Punktes. Alles daher, was sich in einem Körper findet, ist nichts als Punkt oder Bild der Eins.¹⁾ Einfacher nämlich als der Punkt ist die Eins oder die Monade.²⁾ Des Punktes Untheilbarkeit ist daher ein Bild der Untheilbarkeit der Eins. Gesetzt also, dass die Eins gleichsam die untheilbare und unmittheilbare Wahrheit sei, welche sich offenbaren und mittheilen will durch ihr Bild, und die Eins zeichnet oder versinnbildet sich, und es entsteht der Punkt.³⁾

Darnach erscheint es dem Autor höchst zweckmässig, auf die kleinsten Dinge achtzuhaben, wann man die grössten erforscht.⁴⁾ Nicht immer, z. B. nicht im Jahre 1440, wie wir früher gesehen, dachte derselbe so günstig über die analoge Verwerthung des Kleinsten wie jetzt 1458. Ebenso macht er dasselbe erst jetzt, veranlasst höchstwahrscheinlich durch diese Verwerthung, zum Ausgangspunkte seiner Mathematik in der Schrift

2. *De mathematica perfectione.*

Wie bereits früher in einem anderen Zusammenhange bemerkt ward, geht der letzte der vier an die Spitze des „Beryll“ gestellten Sätze in der Ausführung der bezüglichen Schrift gänzlich leer aus, und bei tieferem Eindringen in das Verhältniss der beiden Schriften dieser IV. Nummer gewinnt man schier den Eindruck, als ob dieses mit Absicht so geschehe. Der vierte jener Sätze nämlich erklärt, wie bekannt, den Menschen für einen zweiten Gott; denn ebenso wie Gott der Schöpfer der wirklichen Dinge und der Naturformen, sei dies der Mensch für die Verstandesdinge und die Kunstformen. Zu diesen nun aber gehören offenbar in erster Linie die mathematischen Begriffe und Formen; sie wären daher im „Beryll“

¹⁾ „Omne igitur quod reperitur in corpore non est nisi punctum seu similitudo ipsius unius“, l. c. — ²⁾ „Unum seu monas est simplicius puncto“, l. c. — ³⁾ „Esto igitur, quod unum sit ut indivisibilis et incommunicabilis veritas, quae se vult ostendere et communicare per suam similitudinem, et unum se signat seu figurat, et oritur punctum“, l. c. — ⁴⁾ Vgl.: „... ut ad minima respiciamus, quando maxima inquirimus“, l. c.

an vierter Stelle zu besprechen gewesen. Anstatt dessen aber bricht der Verfasser vorzeitig ab und schreibt über den Gegenstand, vermuthlich wegen seiner Wichtigkeit, eine eigene Schrift, eben unsere „mathematische Vollendung“

Darnach also folgte diese zeitlich auf jene. Das gerade Gegentheil dieses Satzes indessen dürften die meisten anzunehmen geneigt sein, wenn sie jetzt erfahren, dass auf den „Abschluss der Mathematik“ bereits in dem „Beryll“ hingewiesen wird. Neben Materie und Form, heisst es daselbst, gebe Aristoteles als drittes Princip den Mangel an; unser Beryll dagegen lasse uns schärfer sehen, so zwar, dass wir die Gegensätze in dem verbindenden Principe vor ihrer Spaltung sehen, d. h. bevor sie zwei einander entgegengesetzte Dinge bilden¹⁾; so etwa, wenn wir die geringsten Grade der Gegensätze zusammenfallen sähen, z. B. die geringste Wärme und die geringste Kälte, die geringste Säumniss und die geringste Schnelligkeit und dergleichen, so dass diese ein einziges Princip vor der Spaltung in die zwei Gegenstücke bilden²⁾, wie beispielsweise in dem Büchlein über „Die mathematische Vollendung“ von dem kleinsten Bogen und der kleinsten Sehne ausgesagt sei, dass sie zusammenfallen.³⁾ Ohne auf dieses lehrreiche Beispiel irgendwie näher einzugehen, greift der „Beryll“ sofort auf die Linie als Princip der Winkel, wovon bereits früher die Rede war, zurück, indem er also fortfährt: Wie daher der mindestspitze und der mindeststumpfe Winkel einfacher rechter ist, in welchem die kleinsten Winkelgegensätze zusammenfallen, bevor sie als spitzer und stumpfer zwei Winkel bilden: genau ebenso verhält es sich mit dem Princip Verbindung, in welchem schlechthin die kleinsten Gegensätze zusammenfallen. Der somit nicht zu leugnende Mangel eines näheren Eingehens auf jenes Beispiel zunächst ist es, der einen auf den Gedanken bringt, es könne der fragliche Hinweis auch ganz gut in späterer Zeit eingeschoben sein. In diesem Gedanken bestärkt einen dann noch das irrealen „sähen“, statt dessen man, wäre der Hinweis auf „Die mathematische Vollendung“ ursprünglich vorhanden gewesen, ein reales „sehen“ erwartet, und endlich die Stellung

¹⁾ „Beryllus noster acutius videre facit, ut videamus opposita in principio connexivo ante dualitatem, scilicet antequam sint duo contraria“, cap. 25. —

²⁾ „... sicut si minima contrariorum videremus coincidere, puta minimum calorem et minimum frigus, minimam tarditatem et minimam velocitatem et ita de omnibus, ut haec sint unum principium ante dualitatem utriusque contrarii“, l. c. — ³⁾ „... quemadmodum in libello de mathematica perfectione de minimo arcu et minima chorda quoniam coincidunt dixi“, l. c.

des Hinweises, der, wäre er ursprünglich, wohl näher an das Zeitwort „Zusammenfallen“ gerückt worden wäre.

Vielleicht hält der eine oder andere die soeben geltend gemachten Bedenken für gesucht und sieht darin keinen genügenden Anlass zum Zweifeln an der Ursprünglichkeit jenes Hinweises. Wer dies jedoch thut, muss zugleich eine alsdann unerklärliche Zeitangabe, an deren Echtheit sich nicht zweifeln lässt, mit in den Kauf nehmen. In der früher schon erwähnten Handschrift *E*₃ nämlich schrieb gelegentlich der Autor eigenhändig neben den Anfang der „mathematischen Ergänzungen“ auf den Rand die folgenden, bisher gar nicht beachteten Worte: „Nach dem Tode des Papstes Nikolaus und Calixtus im Beginne der Regierung des Papstes Pius schrieb ich das Büchlein »Ueber die mathematische Vollendung«.“¹⁾ Nun starb Calixtus III. am 6. und am 19. August 1458 folgte ihm Pius II.; folglich kann das Büchlein nicht vor dem 18. dieses Monats, dem Tage, an welchem bekanntlich der „Beryll“ vollendet ward, niedergeschrieben sein. Immerhin wäre es nun denkbar, dass dies bald nach diesem Tage, dass es noch in dem letzten Drittel des August geschah.

Indessen bleibt hier weiterhin folgendes zu beachten. Auf die Nachricht vom Tode des Papstes Calixtus begab sich der Cardinal, welcher am 18. August, wie bekannt, noch auf Schloss Andraz in Tyrol weilte, unverzüglich zur Papstwahl nach Rom und dürfte daselbst gegen Ende des Monates angekommen sein. Da die Papstwahl schier vierzehn Tage vorüber, und somit für die Fragen des Alltäglichen wieder Raum war, so mag in einer der ersten Unterredungen, welche er mit Antonio, dem Cardinal von S. Chrysogono, hatte, die Frage auf wissenschaftliche Dinge gekommen sein. Eben dieser nämlich, ein hervorragender Kenner der hl. Theologie, ein eifriger Förderer der Philosophie, ein Freund endlich weiland des gelehrten Nikolaus V.²⁾, ebenso wie unser Autor, muss diesen um die angegebene Zeit nach neuen wissenschaftlichen Arbeiten gefragt haben und, als er darauf den „Beryll“ erhielt, verlangte er von ihm dringend sonst etwas Neues.³⁾ Demzufolge setzte sich der so dringend Ersuchte,

¹⁾ „Post mortem papae Nicolai (dem eben, wie bekannt, die gerade vor Augen liegenden „mathematischen Ergänzungen“ gewidmet sind) et Calixti (der ihm zunächst folgt) in principio papatus papae Pii scripsi libellum de mathematica perfectione . . .“, Cod. *E*₃ a. a. O. — ²⁾ „Raynaldus: . . . natione Maioricensem, quem sibi philosophiae studiis et arcanorum sacrae theologiae cognitione ex omnibus parem elegerat (sc. Nicolaus V.) . . .“, ad a. 1455 n. 14. — ³⁾ Vgl.: „Sollicita est nobilis mens vestra, pater reverendissime, . . . et a me alias

als ihn wegen Fernbleibens vom päpstlichen Hofe ein kranker Fuss entschuldigte, zwei Tage zu Hause hin und schrieb „Die mathematische Vollendung“ nieder.¹⁾ Ueber dem allem dürfte es September geworden sein; noch weiter aber die Frist zu erstrecken verbietet uns die früher erwähnte authentische Zeitangabe. Als der Urheber dieselbe in späteren Jahren gelegentlich machte, wusste er zwar noch die denkwürdigen näheren Umstände, aber nicht mehr genau den Tag, und so müssen auch wir uns mit der Angabe bescheiden, dass „Die mathematische Vollendung“ im September 1458 zu Rom entstand.²⁾

Sofort ward dieselbe demjenigen, welchem sie den nächsten Anstoss verdankt, mit einer sehr verbindlichen Widmung übersandt.³⁾ Das Büchlein, heisst es hier, solle zeigen, wieweit man das so vorzügliche Zusammentreffen der Gegensätze durch die Erfahrung bisheran nicht bekannter Dinge in theologischen Untersuchungen empfehlen könnte.⁴⁾ Alles mathematische Wissen nämlich gewinne man eben aus ihm, wie die weiter unten folgenden Belege zeigten, gerade in den dunklen Fragen, denen zwar stets sehr eifrig nachgeforscht, die aber keinem bis dahin klar geworden.⁵⁾ Die Art und Weise aber, wie die Mathematik uns zu den vollends absolut göttlichen und ewigen Dinge führe, kenne der so gelehrte Cardinal, der Grösste unter den Theologen, besser als der Schreiber selbst.⁶⁾ Uebrigens eine kleine Schrift eigenen Nachsinnens über Spiegel und Gleichniss habe er bereits abgesandt.⁷⁾

novi aliquid deposcebat“, Anfang der Abhandlung „de mathem. perfectione“; das Umstandswort „alias“ ist für uns nicht mehr wie für den ersten Leser, den Cardinal Antonio, sofort verständlich, sondern wird dies erst durch obige Zergliederung. Diese aber stützt sich auf Andeutungen, welche weiter unten folgen, und stützt ihrerseits die bereits früher anderweitig begründete Annahme über die Reihenfolge der in Rede stehenden Schriften.

¹⁾ „Et quoniam me a palatio pes morbidus excusavit, biduo domi sedens mathematicam perfectionem . . . conscripsi“, l. c. fol. 101a. — ²⁾ Bislang setzte man den „Beryll“ in das Jahr 1454 und die darin erwähnte „mathematische Vollendung“ unbestimmt in die Jahre 1460–1464. — ³⁾ „ . . . quam mitto conscripsi“, l. c. — ⁴⁾ „ . . . conscripsi, quatenus virtutem coincidentiarum experimento ignotorum hactenus in theologicis inquisitionibus commendarem“, nach cod. *Ez* zu Cues; statt „ignotorum“ steht in den Drucken „ignotarum“, eine winzige Aenderung, welche, an sich zwar nicht gerade widersinnig, aber doch den Sinn der Stelle völlig verändert und den Zusammenhang mit dem Folgenden gänzlich aufhebt. — ⁵⁾ „Omne enim scibile mathematicum ex ipsa, uti exempla quae subiungo declarant, attingitur in his obscuris semper perquam avide quaesitis, quae nulli hactenus patuerunt“, l. c. — ⁶⁾ „Quomodo autem mathematica nos ducant ad penitus absoluta divina et aeterna, melius me novit doctissima paternitas vestra, qui estis theologorum vertex“, l. c. — ⁷⁾ „Quandam etiam meae considerationis

Wenn jener dabei ein bisschen zu verweilen sich herablasse, so werde er alsbald sehen, ob er selber den Blick des Geistes richtig auf das Princip der Dinge gerichtet.¹⁾ Dergleichen Dinge, welche sogar die grössten Gelehrten aufzuzeichnen sich fürchteten, weil man sie nicht ebenso zutreffend darlege als überlege, habe er sich nicht gescheut dem zu übersenden, dessen Einsicht sie allseitig zurecht legen möge²⁾; denn der Absender weiss, dass er nicht einem Fremdling, sondern einem liebevollen väterlichen Freunde die verborgenen Dinge mittheilt, welche ihm selber vielleicht kostbarer erscheinen, als sie es wirklich sind³⁾, und ist willens, sich in der Werthschätzung zu richten nach dem Ausspruche des Freundes, welchen dieser, wie er inständig bitte, den besagten Büchlein beifügen möge.⁴⁾

Das Ziel, welches sich das zweite derselben setzt, ist dies: von dem Zusammenfallen der Gegensätze aus die mathematische Vollendung zu suchen.⁵⁾ Weil nun diese vorzugsweise darin besteht, eine gerade und krumme Grösse wechselseitig gleich zu machen, so nimmt sich dasselbe vor, das Verhältniss zweier gerader Linien zu erforschen, welche sich wie eine Sehne zu ihrem Bogen verhalten. Sobald man dieses einmal hat, besitzt man zugleich das Mittel, die krumme Grösse der geraden gleich zu machen.

Um aber die zwei geraden Linien zu finden, muss ich vorerst das Verhältniss einer Sehne zu ihrem Bogen kennen.⁶⁾ Doch wie ist es möglich, das Verhältniss einer gegebenen Sehne zu ihrem Bogen *circa speculum et aenigma parvam ablegavi scripturam*“, eine Stelle, welche offenbar auf den kurz vorher vollendeten „Beryll“ zu beziehen ist; man vergleiche nur die Worte: „Unde ut clare legenti conceptum deprimam, speculum et aenigma subiiciam“, *De beryllo cap. 1*, und jeder Zweifel in dieser Hinsicht schwindet.

¹⁾ „Ubi si rev. paternitas vestra modicum versari dignabitur, subito videbit, si visum mentis recte (in den Drucken steht „rectae“) in rerum conieci principium“, l. c.; den zweiten Nebensatz mit dem Bindewort „si“ schliessen die Drucke in Klammern ein und verbinden das Prädicat des Hauptsatzes unmittelbar mit dem, was weiter folgt. — ²⁾ „Haec talia, quae etiam a doctissimis scribi timebantur, quoniam minus apte panduntur quam contemplentur, non erubui paternitati vestrae mittere, cuius iudicio dirigi opto . . .“, l. c. — ³⁾ „ . . . sciens me non alieno sed patri qui me amat communicare secreta, quae mihi pretiosiora fortassis videntur quam existant“, l. c. — ⁴⁾ „ . . . correcturus aestimationem secundum vestram sententiam, quam istis libellis (d. i. offenbar dem „Beryll“ und der „mathematischen Vollendung“) supplex adscribi depono“, l. c. — ⁵⁾ „Intentio est ex oppositorum coincidentia mathematicam venari perfectionem“, l. c. — ⁶⁾ Vgl.: „Et quoniam ad has inveniendas necesse est me alicuius chordae ad arcum habitudinem scire . . .“, l. c.

zu kennen, da zwischen diesen Grössen, welche so sehr verschieden, ein Verhältniss, das sich berechnen liesse, vielleicht gar nicht besteht? ¹⁾ Demnach werde ich auf die geistige Anschauung zurückgehen müssen, welche erkennt, dass die kleinste Sehne, die sich aber nicht zeichnen lässt, mit dem kleinsten Bogen zusammenfällt. ²⁾ Der gleichen hält die Vernunft sehr wohl für nothwendig, obgleich sie weiss, dass weder ein Bogen noch eine Sehne als Grössen wirklich schlechthin die kleinsten sind, dies auch gar nicht können, weil sich das Stetige immerfort theilen lässt. ³⁾ Aber um die Kenntniss ihres gegenseitigen Verhältnisses zu gewinnen, berücksichtige ich das geistige Schauen und behaupte zu sehen, wo die Gleichheit der Sehne und des Bogens vorhanden, nämlich in dem schlechthin Kleinsten beider.

Ist diese Gleichheit einmal erkannt, so gehe ich, um zu meinem Ziel zu gelangen, weiter unter Bezugnahme auf ein rechtwinkliches Dreieck und einen Satz, der also lautet: Die grösste Seite, welche es an dem Dreiecke gibt, sehe man für die erste Linie, den Radius des zugehörigen Kreises, die kleinste Seite an demselben, für die zweite Linie, und die Halbsehne, die noch übrige Seite, für die dritte Linie an ⁴⁾; dann wird sich ebenso wie der halbe Bogen zur halben Sehne verhalten die Summe dreier erster Linien zur Summe zweier erster nebst der dritten ⁵⁾; und dieser Satz, der wegen seiner Wichtigkeit eingehend erläutert und auf mancherlei Art zu beweisen gesucht wird ⁶⁾, ist die Grundlage des fraglichen Wissens ⁷⁾.

Vielerlei Dinge werden einem hier offenkundig ⁸⁾; man sieht nämlich, wie ein Satz, der vom Grössten und Kleinsten, auch von den Zwischengliedern gilt; und wer da das Grösste mit dem Kleinsten zusammenfallen sieht, weil eben das Grösste zugleich auch das Kleinste, der sieht hierin eins und alles. Auch besitzt man die

¹⁾ „Sed quomodo est possibile me cuiusquam datae chordae ad arcum habitudinem scire, cum inter illas quantitates adeo contrarias forte non cadat numerabilis habitudo?“, l. c. — ²⁾ „Necesse erit igitur me recurrere ad visum intellectualem, qui videt minimam sed non assignabilem chordam cum minimo arcu coincidere“, l. c. — ³⁾ „Hoc probe videt intellectus necessarium, licet sciat, nec arcum nec chordam, cum sint quantitates, esse simpliciter minimas in actu et posse, cum continuum sit semper divisibile“, l. c. — ⁴⁾ „Si orthogonii latus, quo non est maius, ponatur linea prima et semidiameter circuli et latus, quo non est minus, secunda linea et semichorda et reliquum latus tertia linea . . .“, fol. 101^b. — ⁵⁾ „... quae erit semiarcus ad semichordam habitudo, illa erit lineae aequalis tribus primis lineis ad lineam aequalem duabus primis cum tertia“, l. c. — ⁶⁾ Fol. 101^b bezw. 101^b–102^b. — ⁷⁾ „Et haec est radix huius scientiae“, fol. 101^b. — ⁸⁾ „Multa hic propalantur“, fol. 102^b.

Handhabe, um zu dem Wissen zu gelangen, wie man gegensätzliche Gebilde, welche für immer ungleich zu bleiben scheinen, gleich macht.¹⁾ Derlei Aufschlüsse erscheinen ihrem Urheber hoch bedeutsam und früher unberührt geblieben zu sein.²⁾

Aus dem fruchtbaren Satze aber wird er jetzt selbst einige Folgerungen ziehen, damit man, wenn diese einmal angegeben sind, nach gleichem Verfahren zahllose andere zu entwickeln vermöge³⁾; und diese Folgerungen betreffen an erster Stelle Linien⁴⁾, an zweiter ganz kurz Kreis- und Kugelflächen, Kugel und Würfel.⁵⁾

Auf ähnliche Art solle man, so schliesst die bedeutsame Abhandlung, bei anderen krummen Flächen auf die kleinsten Grössen acht haben und deren Verhältnisse ermitteln⁶⁾; was immer ein Mensch in mathematischen Dingen wissen könne, mache er auf diesem Wege ausfindig.⁷⁾

Schlusswort.

Neun Schriften nach der bisher gültigen Annahme waren zu untersuchen. Die nähere Untersuchung ergab zunächst, dass zwei davon nicht echt, dass den verbleibenden sieben eine achte anzugliedern sei. Ueber das gegenseitige Verhältniss derselben, in erster Reihe über die Zeit der Abfassung herrschte bisher grosse Ungewissheit, sogar mannigfacher Irrthum. Nicht zwei Jahrzehnten, sondern einem einzigen, den neun Jahren 1450—58 gehören dieselben an. Innerhalb dieses Zeitraumes wiederum war mancherlei Umstellung vorzunehmen, beispielsweise die Abhandlung, welche bislang an vierter Stelle stand, an die erste hinaufzurücken.

¹⁾ „Et praxim habes venandi scientiam commensurationis (in den Drucken: „incommensurationis“) contrariorum, quae incommensurabilia videntur“, l. c. Die beiden stammverwandten Wörter dieser Stelle glaubte ich auch hier nicht in dem heute üblichen, sondern in dem früher (oben S. 146 Anm. 6) angegebenen Sinne deuten zu müssen. — ²⁾ „Haec mihi magna et prius intacta videntur.“ Zum Beweise für den letzten Theil der Behauptung wird an Archimedes erinnert, „qui per helicam voluit rectam circumferentiae circuli commensurare“ (vgl. 8. Bd. S. 407 Anm. 7), und demnach „nihil de arte tetigit“, l. c. — ³⁾ „... ex fecunditate propositionis aliqua eliciamus correlaria, ut pari modo innumerabilia his datis queant explicari“, l. c. — ⁴⁾ Fol. 106a. — ⁵⁾ Fol. 112a. — ⁶⁾ „Simili modo in aliis curvis superficiebus ad minima respiciendo habitudines elice“, fol. 112a. — ⁷⁾ „... et quicquid scibile est humanitus in mathematicis, mea sententia hac via requiritur“, l. c.

Psychologisch erschien es weiterhin geboten, die acht echten Schriften in kleineren Gruppen zu vereinigen. Dazu bedurfte es der Feststellung innerer sachlicher Verwandtschaft unter ihnen; bei näherem Zusehen ergaben sich drei Gruppen zu zweimal drei und einmal zwei Schriften. Eine passende Bezeichnung für diese Gruppen lieferte jedesmal die Aufschrift, welche jeweilig die Hauptschrift trägt: Verwandlungen, Ergänzungen bzw. Vollendung, von denen die erste Gruppe 1450, die zweite 1453—57 und die dritte 1458 anzusetzen ist. Den so gefundenen Gruppen entsprechen naturgemäss in der Darstellung ebensoviele Abschnitte, nur ist ihnen noch ein solcher über die Vorstudien vorausgeschickt.

Die so begründete genetische Darstellung gewährt uns einen tieferen Einblick in eine nie rastende geistige Regsamkeit. Für Mathematik augenscheinlich reich beanlagt, findet der Studirende der Rechte um 1420 auf der Universität einen für jene so eigentliche Wissenschaft gleich begeisterten Mediciner. Als bald jedoch nehmen den Doctor der Rechte die Angelegenheiten des öffentlichen Lebens sozusagen vollständig für sich in Anspruch; nur ein ganz bescheidenes Plätzchen verbleibt jener, insofern sie 1436 sich in den Dienst der Kalenderreformvorschläge stellen liess. Als dann aber 1440 dem Rahmen des „gelehrten Nichtwissens“ eine gewisse Füllung zu geben war, musste sie dazu den Stoff liefern: Die unendliche Linie, das unendliche Dreieck, den unendlichen Kreis, die unendliche Kugel, sämtlich Gebilde, welche, weil unendlich, im Grunde genommen eins sind, darum in eins zusammentreffen.

Derlei freilich ist keine eigentliche Mathematik; in ihr ist das Zusammentreffen der Gegensätze durchaus zu vermeiden; allein das ausführlich darzulegen und so die Euklid'sche Geometrie auszugestalten bleibt ihm für den Augenblick keine Zeit. Erst 1450 kommt die gelegene Zeit; Gespräche mit Sachverständigen thun das übrige. Aber etwas ganz anderes, als er sich 1440 gedacht, geschieht. Die geplante Ausgestaltung wird zu einer Umgestaltung. Gerade auf das 1440 abgewiesene Zusammentreffen der Gegensätze stützt sich dieselbe; freilich nicht in dem unendlich Grossen, sondern statt dessen in der kleinsten Figur, dem Dreiecke, suchen „Die Verwandlungen“ das Zusammentreffen der Geraden und der Curve. Das gleiche Ziel erstreben auf mancherlei Art „Die Ergänzungen“, welche sich, da sie ihren Urheber nie lange zu befriedigen vermögen, um die Mitte des Jahrzehntes (1453—57) schier überstürzen. Einen ganz neuen Versuch

sieht das Jahr 1458 machen. An die Stelle des Dreieckes, der kleinsten Figur, ist das unendlich Kleine, das Gegenstück zu dem unendlich Grossen, getreten.

Diese beiden Begriffe bilden die Punkte, wo sich das philosophische und das specifisch mathematische Forschen des Cusanus berühren; 1440 nämlich muss sich behufs passender Symbole für die Gotteslehre die Mathematik gewissermaassen eine Metamorphose in's unendliche gefallen lassen, 1458 dagegen bequemt sich zu dem gleichen Behufe die Gotteslehre den Grundbegriffen der Mathematik: Körper, Fläche, Linie, Punkt, Monade, an. In beiden Fällen dient die Mathematik der Gotteslehre; gleichsam zum Lohne dafür empfängt sie 1450 von ihr das so wichtige Princip vom Zusammentreffen der Gegensätze, und dieses führt, richtig verwendet, 1458 von der kleinsten Figur zu dem Kleinsten überhaupt oder, wie es gewöhnlich heisst, zu dem unendlich Kleinen. Diese Wechselbeziehung und zugleich die reinliche Scheidung zwischen Mathematik und Philosophie im Denken des Cusanus einmal deutlich und klar zu durchschauen, dürfte Philosophen und Mathematiker gleichmässig interessiren.

Jenes unendlich Kleine aber hat, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, im Verlaufe der Zeiten eine ganz verschiedene Behandlung erleben müssen; einst das Aschenbrödel, das man glaubte unbeachtet lassen zu dürfen, ist es heutzutage zum allbeherrschenden Princip erhoben, welches die Functionen erzeugt. Als solches aber erscheint es zuerst bei Nikolaus Cusanus. Darnach möge der Leser selbst entscheiden, ob man ihn mit Cantor¹⁾ einen genialen Kopf nennen darf.

¹⁾ Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. II. (1892) S 194.