Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

— Rezensionen —

Autor:	**Riemann, Bernhard**
Titel:	**Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass**
erschienen:	Leipzig, 1876
Rezensent:	**Weber, Heinrich** (1842–1913)
Rez.-Quelle:	Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. Band 1 (1877). Seite 145 – 154.

Heinrich Weber, der Herausgeber der gesammelten Werke Bernhard Riemanns, berichtet insbesondere von der Publikation des handschriftlichen Nachlasses.

förmige Körper, kann, wenn von aussen Wärme weder zugeführt noch entzogen wird, sowohl durch genügende Compression als durch genügende Expansion in den gesättigten Zustand und zur Condensation gebracht werden.

Stuttgart. J. Weyrauch.

H. Weber: Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. (Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig 1876, Teubner.)

Die jetzt zum ersten Mal erscheinende Gesammtausgabe von Riemann's Werken enthält in drei Abtheilungen zunächst die von Riemann selbst publicirten Abhandlungen, ferner die nach seinem Tode in verschiedenen Zeitschriften bereits abgedruckten nachgelassenen Arbeiten und endlich in der dritten Abtheilung alles was aus dem handschriftlichen Nachlass irgend zur Veröffentlichung geeignet schien.

Ueber den Inhalt der beiden ersten Abtheilungen, der seit längerer oder kürzerer Zeit Gemeingut der Mathematiker ist, ausführlicher zu reden ist wohl hier nicht erforderlich. Diese Abhandlungen sind in unveränderter Form zum Abdruck gekommen; nur einzelne kleine Ungenauigkeiten sind, sofern dieselben zur Kenntniss der Herausgeber kamen und für unzweifelhaft gehalten werden konnten, verbessert worden. Einzelne Zusätze, die sich auf handschriftliche Bemerkungen Riemann's gründen, und nothwendige Erläuterungen sind in Schlussnoten beigefügt. Von diesen Zusätzen und Erläuterungen hebe ich die zu der Dissertation (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse) und zu der Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" hervor. Die einzige Abhandlung, welche etwas umfassendere Aenderungen erfahren hat, ist die „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung", für welche ein ausgeführtes Manuscript von Riemann nicht vorliegt, und welche der Herausgeber K. Hattendorff einer neuen Bearbeitung unterworfen hat.

Von erheblicherem Interesse für die Leser dieses Blattes dürfte ein kurzer Bericht über den Inhalt der hier zum ersten Male veröffentlichten Abhandlungen aus dem Nachlass sein, welche die dritte Abtheilung des Werkes bilden. Es ist bekannt, dass die zusammenhängende schriftliche Darstellung seiner Untersuchungen Riemann stets grosse Mühe machte, und dass seine Forschungen der Darstellung immer weit voraus waren; ferner dass er in den letzten Jahren seines Lebens durch seinen Gesundheitszustand sehr häufig an zusammenhängendem Arbeiten gehindert war. Hieraus erklärt sich die Beschaffenheit des grössten Theils des Nachlasses, der ausser den Formeln für die Herstellung des Zusammenhangs ausserordentlich wenige Anhaltspunkte bietet. So musste Vieles, was in sehr fragmentarischer Gestalt vorlag, in die Sammlung mit aufgenommen und der Gedankengang so gut als möglich hergestellt werden, und Manches mag in den Papieren noch verborgen sein, dessen Entzifferung noch nicht gelungen ist.

Hiernach gehen wir zur Besprechung der einzelnen Abhandlungen der dritten Abtheilung über.

Die erste derselben „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation“ ist eine Erstlingsarbeit aus Riemann's Studienzeit und geht von Anschauungen aus, die schwerlich auf Zustimmung rechnen dürfen, die auch der Verfasser selbst ohne Zweifel sehr bald fallen gelassen hat. Es schien daher anfangs zweifelhaft, ob es billig sei, diese Arbeit, die zu einer Veröffentlichung jedenfalls nicht bestimmt war, mit zum Abdruck zu bringen. Beim genaueren Studium derselben überzeugte ich mich aber doch, dass sowohl die Methoden als die Resultate ein hinlängliches Interesse bieten, um einen Abdruck mit einem Vorbehalt zu rechtfertigen, und dass die Untersuchung jedenfalls für Riemann's Entwicklungsgang charakteristisch ist. Er bedient sich, um zu einer allgemeinen Definition der derivirten Functionen zu gelangen, der Entwicklung einer Function in eine nach vorwärts und rückwärts nach gebrochenen Potenzen der Variabeln fortlaufenden Reihe, eine Entwicklung, welche nach der einen Seite hin stets divergirt, und welchen gleichwohl eine selbständige Bedeutung zugesprochen wird. Werden diese Entwicklungen aber nur in formeller Hinsicht zur Anwendung gebracht, so wird gegen dieselbe und gegen die daraus gezogenen Resultate wohl kaum Etwas einzuwenden sein, wenn auch eine grosse Fruchtbarkeit derselben nicht mehr zu erwarten ist. Die Definition der νten Ableitung einer Function z nach der Variabeln x, auf welche diese Betrachtungen führen, ist folgende:

$$\partial_x^\nu z = \int_k^x (x-t)^{-\nu-1} z_{(t)}\, dt + \sum_{n=\infty}^{n=1} k_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-n-\nu)}$$

worin k und k_n willkürliche Constanten sind. Diese Definition gilt zunächst für negative ν. Für die Ableitungen mit positiver oder verschwindender Ordnungszahl erhält man den Ausdruck aus dem Satze

$$\frac{d^m \partial_x^\nu z}{d x^m} = \partial_x^{\nu+m} z,$$

welche für jedes positive ganzzahlige m gilt.

Diese Definition hat die Eigenschaft, dass sie für ein ganzzahliges positives, verschwindendes oder negatives ν den νten Differenzialquotienten, die Function z selbst oder deren $-\nu$faches Integral liefert. Die Anzahl der willkürlichen Constanten ist unendlich, ausser wenn ν ganzzahlig ist. Für ein negatives ganzzahliges ν ist diese Anzahl endlich $(= -\nu)$; für ein positives ganzzahliges oder verschwindendes ν fallen diese Constanten sämmtlich weg. Ueberdies gelten die fundamentalen Sätze über die Ableitungen mit ganzzahligem Index auch für diese allgemeinen derivirten Functionen.

Die folgende Abhandlung „Neue Theorie des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten“ enthält eine weitere Ausführung und Anwendung der Gedanken, welche Riemann schon in seinem Vortrag bei der Göttinger Naturforscherversammlung skizzirt hatte (Nr. II. der ersten Abtheilung). Diese Abhandlung war bereits im Jahre 1854 zu einer Publication in Poggendorff's Annalen bestimmt, die aber nicht zur Ausführung kam, vermuthlich weil Riemann nicht auf eine ihm vorgeschlagene Veränderung eingehen wollte. Der Grundgedanke, von dem Riemann in der Theorie der in Rede stehenden Erscheinungen ausgeht, steht in genauem Zusammenhang mit seinen naturphilosophischen Ideen, welche für ihn, wie aus einem Briefe hervorgeht, geradezu den Ausgangspunkt seiner Betrachtungen bildeten. Es wird dabei ausser den gewöhnlichen electrischen Anziehungs- und Abstossungskräften, die dem Coulomb'schen Gesetz gemäss wirken, noch eine andere (antelectrische) Kraft angenommen, mit welcher sich die ponderable Materie dem electrisch Sein widersetzt, eine Kraft, welche bei den guten Leitern sehr klein, bei den sogenannten Nichtleitern sehr gross ist, und welche sich als ein Widerstreben des Körpers gegen das Eindringen von Spannungselectricität äussert. Die Componenten dieses Theils der electromotorischen Kraft sind proportional den partiellen

Ableitungen der electrischen Dichtigkeiten, genommen nach den Coordinaten. Es ergibt sich aus diesen Annahmen ein System von zwei lineären partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der electrischen Spannung und Dichtigkeit, mit dessen Integration in einigen der einfachsten Fälle sich der Rest der Abhandlung beschäftigt. Die Ergebnisse der Theorie stehen, soweit eine Vergleichung möglich ist, mit den Thatsachen in gutem Einklang.

Von der dritten Abhandlung dieses Abschnittes „Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differenzialgleichungen mit algebraischen Coefficienten" liegt ein im ersten Theil vollständig ausgeführtes Manuscript vor, welches aus dem Jahre 1857 stammt, also aus demselben Jahre, in dem die Abhandlung über Abel'sche Functionen veröffentlicht wurde. Es scheint auch ein innerer Zusammenhang zwischen beiden Untersuchungen zu bestehen, worüber jedoch leider nur ungenügende Andeutungen vorliegen. Die Abhandlung enthält eine Verallgemeinerung der Untersuchungen, welche der Verfasser früher (IV. Abhandlung der ersten Abtheilung) auf die Gauss'sche F-Function angewandt hat. Es wird hier ein System von n Functionen einer unabhängigen Veränderlichen definirt durch eine beliebige Anzahl gegebener Verzweigungspunkte und durch sein Verhalten in der Umgebung derselben, ferner durch die Bedingung dass durch einen Umlauf um einen Verzweigungspunkt die Functionen des Systems in lineare Combinationen ihrer selbst übergehen. Ferner wird gezeigt, dass, wenn die Verzweigungspunkte, die Unstetigkeitsexponenten und die Substitutionen, vermittelst deren die einzelnen Zweige des Functionensystems um die Verzweigungspunkte herum mit einander zusammenhängen, mit gewissen, durch die Natur der Aufgabe geforderten Beschränkungen beliebig gegeben sind, die n Functionen des Systems als particulare Lösungen einer linearen Differenzialgleichung $n$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten angesehen werden können, falls die Summe der Unstetigkeitsexponenten, welche eine ganze Zahl sein muss, nicht grösser als $n-1$ ist. Ist diese Summe kleiner als $n-1$, so bleibt eine entsprechende Anzahl von Constanten in der Differenzialgleichung unbestimmt, und es lässt sich dieser Fall ohne Integration auf den zurückführen, wo die erwähnte Summe ihren Grenzwerth $n-1$ erreicht, wovon ein Beispiel sich in der Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" findet. Obwohl die linearen Differenzialgleichungen mit rationalen Coefficienten in neuerer Zeit mehrfach Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen sind, ist diese schöne Verallgemeinerung der Theorie der hypergeometrischen Reihe meines Wissens bis jetzt nirgends aufgestellt worden.

Die nächste, in lateinischer Sprache geschriebene Abhandlung enthält die Beantwortung einer von der Pariser Akademie gestellten Preisfrage, welche von Riemann im Jahre 1861 eingereicht wurde. Durch die Güte des beständigen Sekretärs der Akademie konnte bei der Herausgabe das Originalmanuscript zu Grunde gelegt werden. Es handelt sich um die Aufgabe, alle Fälle zu ermitteln, in denen in einem unbegrenzten homogenen Medium die Temperatur als Function der Zeit und nur zweier Variabeln dargestellt werden kann, so dass ein System isothermer Curven während der ganzen Dauer der Wärmebewegung die Eigenschaft der Isothermen behält. Riemann behandelt die Aufgabe in der Weise, dass er zunächst ganz allgemein die Eigenschaften eines auch nicht homogenen Mediums und des Anfangszustandes aufsucht, welche der gestellten Forderung genügen und dann diejenigen Fälle aussondert, in denen das Medium homogen wird.

Durch die erste Untersuchung ergeben sich gewisse Formen einer linearen partiellen Differenzialgleichung mit veränderlichen Coefficienten und es handelt sich dann weiter darum, die Fälle zu ermitteln, in welchen diese Differenzialgleichung sich durch Einführung neuer Variabeln so transformiren lässt, dass sie constante Coefficienten erhält, resp. in die Form übergeht

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Diese Aufgabe lässt sich reduciren auf die Frage, in welchen Fällen ein homogener Differenzialausdruck zweiter Ordnung mit variabeln Coefficienten $\sum_{\iota,\iota'} h_{\iota,\iota'}\, ds_\iota ds_{\iota'}$ sich in die Form $\sum_\iota dx_\iota^2$ bringen lässt, und damit ist die Untersuchung auf eine Bahn gebracht, welche sich Riemann durch seine Untersuchungen über die Hypothesen der Geometrie (Abhandlung XIII. der zweiten Abtheilung) schon geebnet hatte. Sie ist angeknüpft an die Theorie des Krümmungsmasses von allgemeinen Mannigfaltigkeiten, für welche die Grundlagen in der erwähnten Abhandlung enthalten sind. Leider sind diese Wege nur angedeutet und aus den wenigen noch vorhandenen Manuscriptblättern ist es bis jetzt nur theilweise gelungen, die noch erforderlichen sehr verwickelten Rechnungen herzustellen, welche zu dem Endresultat führen. Die Anmerkungen zu dieser Abhandlung enthalten theils Erläuterungen zu den angewandten allgemeinen Sätzen über das Krümmungsmass, theils, soweit sie gelungen ist, die Ausführung der erwähnten Rechnungen.

Das Fragment „Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua“ ist von H. A. Schwarz in Göttingen bearbeitet. Nur für den Anfang liegt ein in italienischer Sprache geschriebenes ausgeführtes Manuscript vor. Der Rest musste aus einigen Formeln und Zeichnungen ergänzt werden. Riemann untersucht darin mit seinen Methoden die Convergenz der von Gauss aufgestellten Entwicklung des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen in einen unendlichen Kettenbruch, und gelangt zu dem Resultat, dass diese Convergenz immer stattfindet mit Ausschluss derjenigen Argumentwerthe welche reell und grösser als 1 sind; ein Resultat, welches auf anderem Wege von L. W. Thomé gefunden ist (Borchardt's Journal Bd. 67).

Der kleine Aufsatz „Ueber das Potential eines Ringes“ beschäftigt sich mit der Aufgabe der Integration der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

unter der Voraussetzung, dass die Function V an der Oberfläche eines durch Rotation eines Kreises um eine die Peripherie nicht schneidende Axe entstandenen Ringes gegeben ist. Nachdem einige allgemeine Gesichtspunkte über die bei der Integration dieser Differenzialgleichung auftretenden Reihen gegeben sind, werden zunächst für den vorliegenden Fall die geeigneten Variablen eingeführt, welche eine Separation ermöglichen, und hierauf wird die Integration durch eine besondere Klasse von hypergeometrischen Reihen, welche sich durch ganze elliptische Integrale darstellen lassen, ausgeführt. Dieselbe Aufgabe ist bekanntlich Gegenstand einer von Riemann unabhängigen eingehenden Untersuchung von C. Neumann.

Dem folgenden Aufsatz „Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen“ liegen einige Notizen zu Grunde, welche, wie es scheint, als Vorbereitung zu einer Vorlesung dienten. Derselbe ist namentlich desshalb von Interesse, weil darin die sinnreiche Methode zu erkennen ist, deren Riemann sich bei der Lösung von Abbildungsaufgaben bediente, die immer anwendbar ist, wenn das abzubildende Gebiet von geradlinigen Strecken und von Kreisbogen begrenzt ist, mag dasselbe nun einfach oder mehrfach zusammenhängend sein. Es wird namentlich auch das Verständniss der Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung“ durch dieses kleine Fragment wesentlich gefördert.

Zu der zuletzt erwähnten Abhandlung über die Fläche vom kleinsten Inhalt liessen sich aus einigen im Nachlass gefundenen Andeutungen noch zwei schöne Beispiele herstellen, von denen das erste die Minimalfläche betrifft, welche von drei geraden Linien begrenzt ist, von denen eine die beiden anderen schneidet, das zweite die (zweifach zusammenhängende) Minimalfläche, welche begrenzt ist von zwei in parallelen Ebenen gelegenen geradlinigen Polygonen. In dem letzteren Fall lässt sich die Aufgabe allgemein auf Quadraturen zurückführen und erfordert nicht die Integration von linearen Differenzialgleichungen.

In der folgenden Nummer sind zwei Fragmente zusammengestellt, welche sich mit der Frage beschäftigen, was aus den von Jacobi aufgestellten Reihen aus der Theorie der elliptischen Functionen wird, wenn der Modul der von Jacobi mit q bezeichneten Grösse gegen 1 convergirt. Im ersten dieser Fragmente werden die in § 40 der Fundamenta aufgestellten Reihen von diesem Gesichtspunkt aus untersucht, und da diese Reihen im Grenzfall zum grössten Theil nicht mehr convergiren, so werden sie zunächst einer Integration unterworfen. Geht man in den so gebildeten Reihen zur Grenze über, so entstehen Functionen, welche in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich viele Unterbrechungen der Stetigkeit haben. Es scheint, dass der hauptsächlichste Zweck dieser Untersuchung der war, Beispiele solcher Functionen für die Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“ (Abhandlung XII. des zweiten Abschnitts) zu finden. Im zweiten Fragment werden die Reihen für $\log k$, $\log k'$ $\log \frac{2K}{\pi}$ selbst, ohne vorhergegangene Integration vom gleichen Gesichtspunkt aus untersucht. Es zeigt sich dabei, dass, wenn das Periodenverhältniss der elliptischen Functionen sich einem reellen rationalen Werth annähert, die imaginären Theile dieser Reihen sich bestimmten endlichen Grenzwerthen nähern, während die reellen Theile zum Theil verschwinden, zum Theil in bestimmter Weise unendlich werden. Diese Untersuchung findet sich im Nachlass auf einem kaum leserlichen Blatte, dessen Bedeutung erst kurz vor dem Abdruck erkannt wurde. Es blieb daher keine Zeit übrig, die Correctheit der Formeln in den reellen Theilen genau zu prüfen.

Ein Commentar zu diesem Fragment von R. Dedekind behandelt die Frage nach einer andern strengen Methode und liefert die Endformeln in einer von der Riemann'schen verschiedenen Form. Es scheint, dass die Formeln von Riemann in den reellen (unendlich werdenden) Bestandtheilen nicht alle ganz richtig sind, während es die imaginären Theile unzweifelhaft sind. Der erwähnte Commentar enthält ausserdem noch eine interessante Anwendung der von Riemann benutzten Methode auf die Theorie der unendlich vielen Formen der Theta-Function.

Das folgende kurze Fragment aus der Analysis Situs enthält leider nur einige Begriffsbestimmungen und wenige Andeutungen über diese tiefsinnigen und wichtigen Untersuchungen, welche auf eine Verallgemeinerung der Theorie des Zusammenhangs hinzielen, die Riemann zum Ausgangspunkt seiner functionentheoretischen Betrachtungen gemacht hat. Nur ein Theil der hier aufgestellten Begriffe und Sätze gestattet noch eine Anschauung im Raume von drei Dimensionen, während die übrigen ganz abstrackt gefasst werden müssen. Bezüglich der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten wird eine Definition aufgestellt, welche bei begrenzten Räumen noch anschaulich ist:

„*Wenn im Innern einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit Hülfe von m festen für sich nicht begrenzenden n-Streckstücken jedes unbegrenzte n-Streck begrenzend ist, so hat diese Mannigfaltigkeit einen m + 1-fachen Zusammenhang nter Dimension. Eine stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeit heisst einfach zusammenhängend, wenn der Zusammenhang jeder Dimension einfach ist*“.

Weiterhin wird diese Definition noch etwas anders gefasst und einige Folgerungen bezüglich der Zerlegung von Mannigfaltigkeiten durch Querschnitte daran geknüpft. So ist z. B. der Raum einer Kugel einfach zusammenhängend, der Raum einer Hohlkugel einfach zusammenhängend in der ersten, zweifach zusammenhängend in der zweiten Dimension, weil jede im Innern der Hohlkugel geschlossene Linie die Begrenzung einer im Innern verlaufenden Fläche bildet, während erst mit Zuziehung einer bestimmten im Innern geschlossenen Fläche jede andere solche Fläche die vollständige Begrenzung eines inneren Raumtheiles bildet. Umgekehrt ist der von einer Ringfläche begrenzte Raum einfach zusammenhängend in der zweiten, zweifach zusammenhängend in der ersten Dimension. Die Hohlkugel wird durch einen Querschnitt von einer Dimension, der ringförmige Raum durch einen von zwei Dimensionen in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandelt. Ein Querschnitt von einer Dimension verwandelt den ringförmigen Raum in einen in der ersten Dimension dreifach zusammenhängenden Raum. Dies zur Erläuterung des allgemeinen Satzes.

„Der Zusammenhang eines n-Strecks wird durch jeden einfach zusammenhängenden n-m-streckigen Querschnitt entweder in der mten Dimension um 1 erniedrigt oder in der m — 1ten Dimension um 1 erhöht."

Die beiden folgenden Aufsätze sind einer Vorlesung über Abel'sche Functionen entnommen, welche Riemann in den Jahren 1861 und 1862 gehalten hat; der Bearbeitung liegt ein Heft von G. Roch zu Grunde. Der erste derselben enthält einen sehr eleganten Beweis der Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihen auf Grund eines allgemeinen Satzes, durch den die Untersuchung der Convergenz einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern zurückgeführt wird auf die Untersuchung der Convergenz eines bestimmten Integrals.

Der zweite dieser Aufsätze behandelt diejenigen Functionen, welche Riemann unter dem Namen *„Abel'sche Functionen"* ausgezeichnet hat, für den Fall $p = 3$. Es sind das die Quadratwurzeln aus solchen Functionen φ (vergl. Theorie der Abel'schen Functionen, VI. Abhandlung der ersten Abtheilung), welche in $p - 1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden, welche im Allgemeinen in endlicher Zahl existiren. Im Falle $p = 3$ beträgt diese Zahl 28, entsprechend den 28 ungeraden Theta-Functionen (und, geometrisch, entsprechend den 28 Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung). Die Bestimmung dieser Functionen hängt von einer Gleichung des 28. Grades ab. Nimmt man aber 6 derselben als bekannt an, so lassen sich die übrigen mittelst einer Gleichung vierten Grades bestimmen. Für die Theorie der Umkehrung der algebraischen Integrale ist die Zuordnung dieser Functionen zu den ungeraden Theta-Functionen von besonderer Wichtigkeit und diese Aufgabe ist der Hauptgegenstand des vorliegenden Aufsatzes.

In einem Anhang sind endlich die Fragmente zusammengestellt, die sich auf Riemanns philosophische Spekulationen beziehen. Diese Forschungen haben Riemann während eines grossen Theils seines Lebens begleitet und haben einen erheblichen Theil seiner Gedankenarbeit in Anspruch genommen. Auf das Nähere dieser eigenthümlichen und tiefsinnigen Weltanschauung einzugehen, dürfte hier um so weniger am Platze sein, als die ohnehin schon äusserst knappe und lückenhafte Darstellung kaum einen verkürzenden Auszug gestattet, der nicht der Gefahr eines entstellenden Missverständnisses ausgesetzt wäre. Nur das Eine mag angeführt sein, dass in den naturphilosophischen Untersuchungen Riemanns Hauptziel das ist, die Vorstellung von einer Fernewirkung zu beseitigen, und zu ersetzen durch eine andere, nach welcher die Materie nur auf ihre unmittelbare Umgebung einwirkt. Dieser Zweck wird erreicht durch die Annahme eines den Raum stetig erfüllenden Stoffes, welcher Träger der Gravitationskraft, der Licht- und Wärmebewegung und der electrischen Wirkungen ist, der aber wesentlich verschieden ist von der ponderablen Materie. Die Körperatome sind nach Riemanns Auffassung Punkte, in welche dieser hypothetische Stoff fortwährend einströmt und aus der Erscheinungswelt verschwindet. Die Ursache der Einwirkung der Körperatome auf einander wird in dem Widerstand gesucht, mit dem sich dieser Stoff einer Formänderung entgegensetzt.

Den Schluss des ganzen Werkes bildet eine von Dedekind verfasste Schilderung von Riemanns Lebenslauf. Diese biographische Skizze, welche sich hauptsächlich auf Briefe und andere Mittheilungen der Familie gründet, hat nicht den Zweck, die wissenschaftliche Stellung und Bedeutung Riemanns zu beleuchten; sie soll seinen Verehrern und Freunden ein Bild geben von dem Lebensgang und der Persönlichkeit des in jeder Hinsicht ausgezeichneten, leider so früh dahingegangenen Mannes. Es ist das Bild eines stillen, einfachen Gelehrtenlebens, mannigfach bedrückt und beengt durch die Ungunst der Verhältnisse, aber wunderbar ausgerüstet von der Natur zum Eindringen in die Tiefen der Wissenschaft und erfüllt vom reinsten und ernstesten Streben nach der Erkenntniss der Wahrheit.

Königsberg. H. Weber.