UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Siegmund Günther

Eigenreferate im
Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik

Band 1 und 2, 1877 – 1879

Leipzig : Teubner

zusammengestellt von Gabriele Dörflinger,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2012

Repertorium

der literarischen Arbeiten

aus dem Gebiete der

reinen und angewandten

Mathematik

„Originalberichte der Verfasser“

gesammelt und herausgegeben

von

Dr. **Leo Koenigsberger,**
Prof. d. Mathematik d. Univ. z. Wien

und

Dr. **Gustav Zeuner,**
Prof. d. Mechanik a.d. Polytechn. z. Dresden

Leipzig. Teubner.

Erster Band. 1877.
Zweiter Band. 1879.

Beiträge von Siegmund Günther

Erster Band

Ein stereometrisches Problem [4] — Auflösung eines besonderen Systems linearer Gleichungen [4] — Das independente Bildungsgesetz der Kettenbrüche [5] — Lehrbuch der Determinantentheorie [6] — Ueber aufsteigende Kettenbrüche [7] — Vermischte Untersuchungen der mathematischen Wissenschaften [8] — Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche [20] — Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten [21] — Zur Geschichte der deutschen Mathematik im 15. Jahrhundert [23] — Adolph Zeisig als Mathematiker [25] — Note sur Jean-André Segner, premier fondateur de la météorologie mathématique [26] — Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes [26] — Note sur la résolution de l'equation indéterminée $y^2 - bx^2 = az$ en nombres entiers [29] — Kritik der Raumtheorien von Helmholtz und Schmidt-Dumont [30] — Neue Methode der directen Summation periodischer Kettenbrüche [31]

Zweiter Band

Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie [33] — Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom, historisch und kritisch erörtert [36] — Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie [37] — Ueber die Reduction elementarer astronomischer Probleme auf planimetrische Betrachtungen [38] — Ueber näherungsweise Kreistheilung [38] — Die Anschauungen des Thomas von Aquin über die Grundsätze der mechanischen Physik [39] — Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik [39] — Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. IV. Heft; V. Heft; VI. (Schluss-)Heft [41] — Von der expliciten Darstellung regulärer Determinanten aus Binomialcoëfficienten [43] — Eine Relation zwischen Determinanten und Potenzen [44] — Einfache Methode der Berechnung der regulären Körper [44] — Beitrag zur Theorie der congruenten Zahlen [45] — Anwendung schiefwinkliger Coordinaten auf ein Problem der Potentialtheorie [45] — Das mathematische Grundgesetz im Bau des Pflanzenkörpers [45] — Die mathematische Sammlung des germanischen Museums zu Nürnberg [46]

S. Günther: Ein stereometrisches Problem. (Archiv der Mathem. und Physik, Band 57.)

Im 56. Bande der gleichen Zeitschrift hatte Bender die Frage discutirt, wie viel congruente Kugeln mit einer Kugel des nämlichen Radius zur Berührung gebracht werden können. Sein Resultat, welches die Maximalzahl 12 ergab, war richtig, allein die Begründung erschien nicht streng genug. In der vorliegenden Arbeit ward demzufolge erstlich durch directe Berechnung gezeigt, dass es in der That nicht mehr als 12 solche Kugeln geben könne, dann aber auch ein Weg angegeben, welcher die betreffende Anzahl direct finden lehrt.

München. S. Günther.

S. Günther: Auflösung eines besonderen Systemes linearer Gleichungen. (Archiv der Mathem. und Physik, Bd. 57.)

In seiner bekannten Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles war Lagrange auf ein gewisses System trigonometrischer Gleichungen geführt worden, mit dessen Auflösung sich später Crelle und Unferdinger eingehend beschäftigt haben. Das betreffende System stellt sich dar als specieller Fall des nachstehenden allgemeineren:

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n + a_{1,n}x_{n+1} + \cdots + a_{1,2}x_{2n-1} \\
&\qquad\qquad + a_{1,1}x_{2n} = A_1, \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n - a_{2,n}x_{n+1} - \cdots - a_{2,2}x_{2n-1} \\
&\qquad\qquad - a_{2,1}x_{2n} = A_2, \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{2n-1,1}x_1 + a_{2n-1,2}x_2 + \cdots + a_{2n-1,n}x_n + a_{2n-1,n}x_{n+1} + \cdots \\
&\qquad\qquad + a_{2n-1,2}x_{2n-1} + a_{2n-1,1}x_{2n} = A_{2n-1}, \\
&a_{2n,1}x_1 + a_{2n,2}x_2 + \cdots + a_{2n,n}x_n - a_{2n,n}x_{n+1} - \cdots \\
&\qquad\qquad - a_{2n,2}x_{2n-1} - a_{2n,1}x_{2n} = A_{2n}.
\end{aligned}$$

Lässt sich auch keine explicite Auflösung dieses Systemes erbringen, so gelingt es doch, die resultirenden Determinanten erheblich zu vereinfachen, und indentificirt man die erhaltenen Relationen mit den von Lagrange erhaltenen Werthen, so ergeben sich gewisse interessante Relationen für Determinanten, deren Elemente gewisse goniometrische Ausdrücke darstellen.

München. S. Günther.

S. Günther: Das independente Bildungsgesetz der Kettenbrüche. (Denkschriften der math.-phys. Klasse der k. k. Academie der Wissenschaften zu Wien. Oct. 1875.)

In der geschichtlichen Einleitung zu diesem Aufsatze werden die Bemühungen aufgezählt, das independente Bildungsgesetz der Näherungs-Zähler und Näherungs-Nenner eines Kettenbruches auszumitteln. Dieselben zerfallen in drei Kategorieen, je nachdem man nämlich direct auf combinatorischem Wege oder aber, wie dies Binet und Zehfuss thaten, durch Auflösung einer trinomischen linearen Differenzengleichung zum Ziele zu gelangen suchte; an dritter Stelle endlich erscheint die eigentliche Determinanten-Darstellung. Da jedoch auch diese keinen Einblick in die Bildungsweise der betreffenden Ausdrücke verstattet, so wird sie hier lediglich zur Basis für eine weitere Entwicklung genommen. Sobald man, was sehr einfach geschehen kann, den Kettenbruch auf die reducirte Form (vom durchgehenden Partialzähler 1) gebracht hat, handelt es sich offenbar noch darum, die allgemeinere symmetrale (gauche) Determinante von voller Diagonale

$$\begin{vmatrix} z & -\alpha_1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & z & -\alpha_2 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & z \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots z & -\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_{n-1} & z & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \alpha_n & z \end{vmatrix}$$

in eine nach Potenzen von z fortlaufende Reihe zu entwickeln, so zwar, dass der Coefficient jeder einzelnen Potenz in geschlossener Summenform sich darstelle. Mit Hülfe eines neuen Lehrsatzes wird diese independente Darstellung erbracht und auf dieselbe dann ein Schema zur praktischen Berechnung gegründet. Dass dasselbe mit den anderen bekannten Verfahrungsweisen in Ansehung der praktischen Verwendbarkeit zum mindesten concurriren könne, wird an einem complicirteren Beispiele direct nachgewiesen.

München. S. Günther.

S. Günther: Lehrbuch der Determinantentheorie für Studirende.
(Erlangen 1875. Verlag von Eduard Besold.)

Dieses Buch ist bestimmt, zwischen den zahlreichen guten Elementardarstellungen, welche unsere Literatur besitzt, und dem grossen Handbuch von Baltzer ein Mittelglied zu bilden, auf welches hauptsächlich der akademische Unterricht des ersten Jahres sich stützen kann. Dasselbe zerfällt in 9. Kapitel. Das erste sucht von der historischen Entwickelung des Determinantencalculs in dem durch die Namen Leibnitz und Cauchy fixirten Zeitraume Rechenschaft zu geben, und zwar werden hiebei einige bisher unbekannte Leistungen der Hindenburg'schen Schule ihrem wahren Werthe nach gewürdigt. Das zweite Kapitel enthält eine ausführliche Darstellung der eigentlichen Elemente; das dritte unter dem Titel „Determinanten von besondrer Form" die Lehre vom Differenzenproduct, den adjungirten, symmetrischen und symmetralen Determinanten, wobei auf die Behandlung der sogenannten orthosymmetrischen Determinanten ein besonderes Gewicht gelegt wird. Das vierte Kapitel bietet einen kurzen Abriss der Theorie der Determinanten vom dritten und höheren „Rang" in einer gegen die bahnbrechenden Arbeiten italienischer Mathematiker der Bezeichnung nach verbesserten Form. An fünfter Stelle wird die Lehre von der Elimination im weitesten Sinne mit Anwendungen auf die Fürstenau'sche Methode, die independente Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, recurrirende Reihen, Discriminanten etc., vorgetragen. Das sechste Kapitel enthält eine umfassende Theorie der Kettenbruchdeterminanten, das siebente eine Anzahl geometrischer Beispiele: Dreiecksinhalt, Tetraëdervolumen, Hauptaxenproblem. Dann folgt die Theorie der Functionaldeterminanten, welche nach Begründung der Hauptsätze die Transformation der bestimmten Integrale, das Krümmungsmass und die Lehre von der Hesse'schen Determinante erledigt. Das neunte Kapitel endlich behandelt „lineare Substitutionen" und schliesst mit der Darstellung der Untersuchungen von Weierstrass über bilineare Functionen.

München. S. Günther.

S. Günther: Ueber aufsteigende Kettenbrüche. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 21. Band. S. 178—191.)

Nach einer kurzen historischen Einleitung wird zunächst für den Zähler des aufsteigenden Kettenbruches

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}$$

das bestimmende System binomischer recurrirender Gleichungen aufgestellt; so findet sich

$$p_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \dots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \dots 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ b_{n-1} & 0 & 0 \dots a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 \dots 0 & a_n \end{vmatrix}, \quad q_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n .$$

Mit Hülfe dieser Formeln wird alsdann die Umwandlung eines aufsteigenden Kettenbruches in einen absteigenden gelehrt, und von der resultirenden Formel ein mehrfacher Gebrauch gemacht, indem erstens eine alternirende Reihe in einen Kettenbruch und ein solcher von bestimmter Form in ein Aggregat umgesetzt wird. Hierauf wird ein von F. Lucas ohne Beweis aufgestellter Satz verificirt und mit Hülfe desselben eine ganze Zahl durch einen Kettenbruch von beliebiger Gliederzahl dargestellt. Weiterhin wird der aufsteigende und im Anschluss an ihn auch der absteigende Kettenbruch von eingliedriger Periode summirt und ein Theorem von Siacci bewiesen. Der letzte Paragraph verallgemeinert den von Seidel eingeführten Begriff der Aequivalenz unendlicher Gebilde; dieser Begriff gestattet die Umformung einer convergirenden Potenzreihe in einen aufsteigenden und dann sofort wieder in einen absteigenden ebenfalls convergirenden Kettenbruch; als Beispiele sind die hypergeometrische und die Sinusreihe gewählt, für welch' letztere nahezu ohne alle Zwischenrechnung die elegante Beziehung

$$\sin x = x \mid 1! \div (1!)^2 x^2 \mid (3! + 1! x^2) - (3!)^2 x^2 \mid (5! + 3! x^2) - \cdots$$

sich ergibt. Endlich wird noch eine Erweiterung des Aequivalenzbegriffes angedeutet und durch das Beispiel zweier unendlich fortlaufender Entwicklungen von der Beschaffenheit belegt, dass der $n$te Näherungswerth der einen dem 2^{n-1}ten der anderen jeweilig gleich ist.

München. S. Günther.

S. Günther: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. (Leipzig 1876. Verlag v. B. G. Teubner.)

Da die sieben Kapitel, in welche dieses Werk zerfällt, sachlich nicht zusammenhängen, so geben wir ihre Analyse gesondert:

Kap. I. *Die geschichtliche Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyëdern in der Neuzeit.* Es wird zunächst des Zusammenhanges wegen ein kurzes Resumé über diejenigen Resultate geliefert, welche sich dem Verf. bei einer (im 6. Jahrg. des Bulletino Boncompagni abgedruckten) Untersuchung über die Entwickelung des nämlichen Gegenstandes im Alterthum und Mittelalter ergeben hatten; diese Resultate lassen sich (S. 4) in folgende beide Sätze zusammendrängen: 1. „Man kannte um 1500 von Sternfiguren das sternförmige Fünfeck, die beiden Siebenecke, das Achteck und Neuneck, während zugleich unrichtigerweise auch ein Sternsechseck aufgezählt wurde, dem jedoch, aus zwei getrennten gleichseitigen Dreiecken bestehend, gerade die charakteristische Eigenschaft der Sternpolygone, sich in einem Zuge beschreiben zu lassen, abging“. 2. „Man hatte angefangen, allgemeine Untersuchungen über die Winkelsumme der Sternpolygone anzustellen, und besass eine inductive Kenntniss der wichtigen Thatsache, dass in jedem Sternpolygon der höchsten Art diese Summe den constanten Werth 180° behauptet, ungerade Eckenzahl vorausgesetzt.“ Im Anschluss hieran werden die noch ziemlich unvollkommenen Darstellungen des Gegenstandes bei Lucas de Burgo, Bouvelles, Reysch, Barbaro, Peletier und Clavius besprochen, bis dann bei Petrus Ramus erstmalig die Auffassung des Pentagramms als eines Sternvielecks hervortritt. Nachdem in einem Schaltparagraph die mystischen Spielereien eines Paracelsus, Alsted und Kircher kurz berührt sind, lernen wir in Albert Girard einen genialen Geometer kennen, der zuerst zur Concipirung des allgemeinen Vielecksbegriffes durchgedrungen ist, während auf der anderen Seite Broscius noch in den antiken Anschauungen sich befangen zeigt, dabei aber doch die metrischen Relationen der Theorie beträchtlich erweitert. Die nächsten 5 Paragraphen beschäftigen sich ausschliesslich mit Kepler. Nachdem auf eine bislang in dieser Hinsicht unbeachtet gebliebene Stelle im „Mysterium cosmographicum“ aufmerksam gemacht worden, beschäftigt sich die Darstellung ausführlich mit Kepler's schönen Arbeiten über Winkeltheilung, welche ihn zu einer eingehenden analytischen und geometrischen

Discussion aller Sternvielecke der ersten 15 Ordnungen veranlassten. Auch die eigenthümliche astrologische Deutung, welche der grosse Mann diesen Gebilden unterlegte, findet hier ihre Stelle; alsdann wird gezeigt, dass zwei Sternpolyëder — nach der Wiener'schen Terminologie das zwölfeckige und zwanzigeckige Sternzwölfflach — von Kepler aufgefunden und in ihrer wahren Natur erkannt worden sind; ein anderes, das sterneckige Zwölfflach, hatte schon ein Jahrhundert früher der Künstler Jamnitzer bemerkt. — Von Kepler springt die Erzählung mit Uebergehung eines Zeitraumes von 100 Jahren zu der schönen Abhandlung Meister's über, in welcher sich zuerst eine geschlossene auf kinematischer Basis aufgebaute Theorie der irregulären Vielecke im allgemeinsten Sinne des Wortes vorgetragen findet; an seine Neuerung knüpfen gewisse Bemerkungen von L'huilier, Gauss und Möbius an. Um alsdann den durch Poinsot eingeleiteten gewaltigen Fortschritt richtig zu würdigen, wird eine kurze Uebersicht über die Entwickelung der Stereometrie eingeschaltet, die natürlich durch zwei Marksteine, das durch Maurolycus zuerst erkannte und von Meister fortgebildete duale Princip und den Descartes-Euler'schen Satz, charakterisirt ist. Es folgt Poinsot, dessen zahlentheoretischer Erfindungsgang genau gekennzeichnet wird, während bei der Bildung der vier regelmässigen Polyëder von Sternform auch geometrische Betrachtungen nicht entbehrt werden konnten. Die Frage, ob ausser den vier von ihm entdeckten noch andere reguläre Sternvielflache existirten, ward von Poinsot unbeantwortet gelassen, von Cauchy aber aufs Einfachste im verneinenden Sinne erledigt. Eine isolirte Stellung nehmen die im Folgenden charakterisirten Leistungen dreier deutscher Mathematiker ein: Krause entwickelt eine kurze phoronomische Theorie der Sternpolygone als Theil seines geometrischen Hauptwerkes, E. Schröder sucht, gestützt auf das später sogenannte „Gesetz der Permanenz", die Lehre von den Sternvielecken in wesentlich neuer Art zu formuliren, und Jacobi gibt seine elegante Vorschrift zur Inhaltsbestimmung solcher Gebilde, die später von Hermes vervollkommnet wird. Während dann Bertrand den erwähnten Cauchy'schen Beweis durch einen übersichtlicheren ersetzt und Cayley die von Poinsot angedeutete Ausdehnung des Euler'schen Theoremes rectificirt, erscheint 1864 das zusammenfassende Werk Wiener's „Ueber Vielecke und Vielflache". Im Hinblick auf den durch diese Schrift markirten vorläufigen Abschluss fasst sich die fernere Darstellung kurz. Die Regeln von

Möbius zur Inhaltsbestimmung wie immer gestalteter Polygone und Polyëder werden ausführlich die planimetrischen Untersuchungen von Heinen, Druckenmüller, Unferdinger, Steinhauser, Muir und Pagni nur kurz erörtert; der letzte Paragraph beschäftigt sich mit den vielversprechenden Aussichten, welche durch die neuesten Arbeiten von Hessel und Hess über gleicheckige und gleichkantige Polygone, gleicheckige und gleichflächige Polyëder der allgemeinen Theorie der sternförmigen Gebilde eröffnet zu werden scheinen.

Dem Kapitel sind 6 Noten angehängt. Die erste gibt eine kurze Biographie des wackeren und viel zu wenig bekannten polnischen Geometers Brocki (Broscius), die zweite registrirt einige Fälle, in denen Sternvielflache „unbewusst" schon früher auftraten, die dritte handelt von einigen unvollkommenen älteren Methoden zur Inhaltsbestimmung der Sternvielecke. Während dann in der vierten und fünften bezüglich eine Anwendung dieser Gebilde in der „natürlichen Magie" und in der theoretischen Mechanik geschildert wird, finden in der letzten Gauss' pentagramma mysticum und die schöne Auflösungsmethode einer cubischen Gleichung ihren Platz, welche Clebsch im 4. Bande der „Mathem. Annalen" auf das gewöhnliche Pentalpha gegründet hat.

Kap. II. *Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung.* Ein historischer Abriss des Auftretens der Reihe

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{b_i}{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i} \quad (n = 1, 2 \ldots \infty).$$

Das erste Auftreten dieser analytischen Form wird bei den Hebräern und Griechen, in gewissem Sinne auch schon bei den Aegyptern, signalisirt, indem nämlich all diesen Völkerschaften das Bestreben gemeinsam ist, complicirtere Brüche durch Zerlegung in Einheitsbrüche zu vermeiden. Nicht minder lässt sich die Minutienrechnung der Römer als Rechnung mit aufsteigenden Kettenbrüchen betrachten; aus Julius Frontinus und Victorius, welch letzterer

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}}{}}{}$$

setzt, werden einige charakteristische Beispiele angeführt. Hierauf tritt die Darstellung in die Discussion des speciellen Falles eines constanten a ein, indem die beiden geschichtlichen Werthe $a = 60$ und $a = 10$ gesondert gefolgt werden. Es wird gezeigt, wie die aller Wahrscheinlichkeit nach von den Chaldäern stammenden sechzigtheiligen Brüche die Grundlage des astronomischen Calculs der Griechen bildeten, wobei der hierauf bezüglichen Arbeiten von Theon, Barlaam und Maximus Planudes ausführlich gedacht wird. Der allgemeinste Fall der aufsteigenden Kettenbrüche tritt uns in der „Denominationsmethode" des Arabers Al Kalsadî und bereits in einem hohen Grade der Ausbildung bei Leonardo Fibonacci entgegen, um dann freilich für 5 Jahrhunderte fast ganz zu verschwinden. Es wendet sich desshalb die Darstellung nunmehr zur Entstehungsgeschichte der Decimalbrüche, welche zuerst bei Johannes Hispalensis auftreten und durch den Einfluss des Dioskurenpaares Peurbach-Regiomontan wenigstens auf trigonometrischem Gebiete die Alleinherrschaft erringen. Auf algebraischem gelangen sie zuerst bei Cardan zum Durchbruch, an dem sich dann Buckley, Stevin und Recorde anschliessen. Mit der durch Kepler zum wissenschaftlichen Gemeingute erhobenen abgekürzten Multiplication und Division verlässt die Schilderung dieses Specialkapitel, um sich nach einer kurzen Erwähnung der sogenannten „wälschen Praktik" den bahnbrechenden Arbeiten von Lagrange und Lambert zuzuwenden. Dieselben scheinen bislang dem mathematischen Publikum gänzlich unbekannt geblieben zu sein, obschon sie das höchste Intereses zu erregen geeignet scheinen. Lagrange entwickelt nämlich eine vollständige Theorie der aufsteigenden Kettenbrüche, in der sich u. a. bereits die Umwandlung solcher Formen in gewöhnliche Kettenbrüche, wenn schon noch nicht in expliciter Gestalt, vorfindet, Lambert dagegen fasst den Gegenstand mehr von der praktischen Seite auf, bemerkt aber dabei doch den theoretisch wichtigen Umstand, dass ein Bruch nur auf *eine* Weise in einen absteigenden Kettenbruch von reducirter Form, wohl aber auf unendlich viele Arten in solche aufsteigende Kettenbrüche transformirt werden kann. Besprochen werden weiter die Leistungen von Druckenmüller, Heiss, Matthiessen; als geschlossenen Wissenszweig behandeln unser Thema Kunze und Lemkes; den von Lagrange angedeuteten Fundamentalsatz stellt Schlömilch in entwickelter Gestalt hin. Das Kapitel schliesst mit der independenten Determinanten-Darstellung der Näherungswerthe eines aufsteigenden Kettenbruches.

Note 1 handelt von Leonardo's Verfahren, Brüche in Aggregate von Stammbrüchen umzusetzen, Note 2 von einer sonderbaren Bezeichnungsweise Michael Stifel's, Note 3 von dem Abriss der römischen Bruchrechnung, welchen der Augsburger Arzt und Mathematiker Henisch noch im Jahre 1606 zu liefern für nöthig fand. In Note 4 wird die im Texte vorgetragene Thatsache, der zufolge Praetorius der eigentliche Erfinder der abgekürzten Decimalbruchrechnung gewesen sein soll, dahin corrigirt, dass mit Hinweis auf neuere erst während des Druckes bekannt gewordene Forschungen Rudolph Wolf's die Priorität für Bürgi in Anspruch genommen wird. Note 5 endlich gibt einige genauere Nachweisungen betreffs der wälschen Praktik und Note 6 eine gedrängte Analyse des für die Zahlentheorie hochwichtigen Werkes von Druckenmüller über „Kettenreihen".

Kap. III. *Das Newton'sche Parallelogramm und die Cramer-Puiseux'sche Regel. Ein Beitrag zur Geschichte der Functionstheorie.* Das kräftige mechanische Hülfsmittel, welches Newton in seinem „Methodus fluxionum et serierum infinitarum' zur Reihenentwickelung impliciter Functionen angegeben hatte, war erst durch eine gelegentliche Bemerkung von Clebsch aus langer Vergessenheit hervorgezogen worden. Hier wird nun zuerst an einer Reihe von Beispielen gezeigt, wie Newton aus einer gegebenen algebraischen Gleichung zwischen x und y die eine unbekannte nach (ganzen oder gebrochenen) Potenzen der andern entwickeln lehrte. Sein Verfahren ward von Colson, S'Gravesande und Stirling aufgenommen, jedoch nicht eben wesentlich gefördert; in Deutschland fand es zuerst geringen Anklang. Erst Kästner brachte dasselbe durch seine sehr ausführliche Behandlung in Aufnahme; ihm zufolge schreibt man die verschiedenen in der Gleichung $f(x, y) = 0$ auftretenden Potenzen der Unbekannten in der hier angedeuteten Weise

$$\begin{array}{rllll} x^3 & x^3y^1 & x^3y^2 & x^3y^3 & \ldots \\ x^2 & x^2y^1 & x^2y^2 & x^2y^3 & \ldots \\ x^1 & x^1y^1 & x^1y^2 & x^1y^3 & \ldots \\ x^0 = y^0 & y^1 & y^2 & y^3 & \ldots \end{array}$$

und verfährt dann weiter nach einem Satze, welchem wir (S. 147) nachstehende Fassung ertheilt haben: „Man wähle den auf der Ordinatenaxe dem Anfangspunkte zunächst liegenden Punkt zum Drehpunkte eines Lineales. Dann bewege man das Lineal so lange der Richtung des Uhrzeigers entgegen, bis er einen (oder mehrere) markirte Punkte trifft. Den entferntesten derselben mache man zum neuen Drehpunkt und fahre mit dieser Operation so lange fort, bis man den am weitesten von der Ordinatenaxe entfernten Punkt trifft. Alle so erreichten Zahlenwerthe setze man einander gleich; jede der Gleichungen liefert einen brauchbaren Werth von $m - y$ provisorisch gleich ax^m gesetzt —, wofern die Reihe aufsteigen soll. Für absteigende Reihen verfahre man ebenso, indem nur der Drehsinn der entgegengesetzte wird; der Schlusspunkt der Drehung muss mit dem vorigen zusammenfallen, und es erscheinen so sämmtliche markirte Punkte durch ein geschlossenes Polygon von den übrigen abgeschieden.“ Bei der weiteren Erörterung werden auch die Commentare von Pfeiffer und Holland sowie auch im Anschluss an das Compendium von Hausen die Lehre von der allgemeinen Reihen-Reversion beigezogen. Zu derselben Zeit resp. etwas früher beschäftigten sich auch de Gua und Cramer mit diesen Fragen; aus dem grossen Werke des letzteren wird ein ausführlicher Auszug gegeben. Cramer wendet anstatt des Rechteckes ein dreieckiges Schema, das „triangle arithmétique“ an und schreibt also:

$$\begin{array}{ccccccc} y^3 & & xy^2 & & x^2y & & x^3 \\ & y^2 & & xy & & x^2 & \\ & & y & & x & & \\ & & & 1. & & & \end{array}$$

Dabei erreicht er ersichtlich den Vortheil, dass sämmtliche Glieder ein und derselben Horizontalen die gleiche Dimension besitzen. Im steten Anschluss an das Original wird nun gezeigt, wie Cramer mit Hülfe seines instrumentalen Verfahrens zwei der wichtigsten Probleme der Curvenlehre auflöst: Die Entscheidung des Charakters (ob parabolisch oder hyperbolisch etc.) der verschiedenen Curvenzweige einer- und die Feststellung von Kriterien für die merkwürdigen Curvenpunkte andererseits. Diese Methode Cramer's nahm genau ein Jahrhundert später Puiseux aus einem anscheinend ganz verschiedenen Gesichtspunkte wieder auf, indem er eine wichtige Frage der Functionenlehre behandelte. Die Gleichung $f(u, z) = 0$ führt er durch eine Substitution auf die Form

$$f(b + \beta, u + \alpha) \equiv A\beta^p + \Sigma B\beta^q\alpha^r = 0$$

über und sucht nun in dieser Gleichung die Glieder niedrigster Dimension zu separiren, was denn auch mit Hülfe des Newton-Cramer'schen Verfahrens leicht gelingt. Nachdem noch kurz von der ablehnenden Haltung Lagrange's gegen jene Methode die Rede gewesen, wird mit weniger Worten des in neuester Zeit sich anbahnenden Verschmelzungsprocesses zwischen Curventheorie und

Functionenlehre im Riemann'schen Sinne Erwähnung gethan. Ein Schlussparagraph gibt von den nur in sehr geringer Anzahl vorhandenen literarischen Hülfsmitteln Rechenschaft, welche bei Ausarbeitung des Kapitels zur Disposition standen.

In zwei sich anschliessenden Noten wird zuerst der höchst originellen Anwendung gedacht, welche in Taylor's „Methodus incrementorum" von der Newton'schen Regel auf die Behandlung totaler Differenzialgleichungen gemacht wird; an zweiter Stelle findet man eine Ehrenrettung Kästner's gegen die nicht immer gerechtfertigten Angriffe neuerer Mathematiker, — voran Hermann Hankel's.

Kap. IV. *Historische Studien über die magischen Quadrate.* Diese Studien beginnen mit der durch La Loubère's Vermittelung, dem Occidente zugekommenen indischen Methode zur Bildung der magischen Quadrate von ungerader Zellenzahl, deren angebliches hohes Alter allerdings durch keine triftigen Gründe bekräftigt wird. Die Methode wird beschrieben und ein Beweis dazu gegeben. Alsdann folgen die Araber, über deren desfallsige Bemühungen uns Ibn Khaldoun und die Schriften der „lauteren Brüder" einige freilich dem Mathematiker wenig genügende Nachweisungen aufbewahrt haben. In ein eigentlich wissenschaftliches Geleise tritt diese Disciplin erst mit der Specialabhandlung des — vermuthlich dem Beginne des 15. Säculums angehörigen — Byzantiners Manuel Moschopulos; diese Abhandlung wird wörtlich abgedruckt. In derselben finden sich zwei Vorschriften für die Quadrate von $(2n+1)^2$ und zwei andere für diejenigen von $(4n)^2$ Zellen; diese 4 Regeln werden discutirt und mit Beweisen versehen, welche auch zur Constatirung einiger nicht uninteressanter algebraischer Relationen führen. Im Abendland lässt sich ein — noch dazu ganz unvollständiges — Zauberquadrat erst 1515 in einem venetianischen Rechenbuche nachweisen, wenn man nicht das wahrscheinlich noch um ein Jahr früher enstandene Quadrat von 16 Zellen auf Dürer's bekanntem Stiche „die Melancholie" ausnimmt. Als astrologische Spielerei fassen diese Zahlenschemate Paracelsus und Agrippa v. Nettesheim, als arithmetisches Problem dagegen Adam Riese auf. Eine durchweg neue Bearbeitung fand hingegen unser Problem bei dem auch sonst hochberühmten Arithmetiker Michael Stifel, der den allmälichen Aufbau der magischen Quadrate von aussen her (durch sogenannte Umläufe) lehrte; da derselbe nach der Weise seiner Zeit die gegebenen Vorschriften weder allgemein fasst, noch auch beweist, so musste ein eingehender Excurs über die Richtigkeit derselben wie auch über ihren eventuellen Ursprung, eingeschoben werden. Ebenso findet sich bei Stifel zuerst eine Ausdehnung, insofern nämlich Quadrate gebildet werden, bei welchen alle derselben Reihe angehörigen Zahlen ein constantes Product ergeben. Die an Stifel sich anschliessenden Namen, Spinola, Henisch, Lochner, Faulhaber, Remmelin sind mit Ausnahme des letztgenannten, dessen Träger die magischen Quadrate mit den Polygonalzahlen in Verbindung gesetzt zu haben scheint, ziemlich bedeutungslos. Dagegen tritt uns jetzt eine Reihe französischer Mathematiker entgegen, von denen jeder einzelne die in Rede stehende Lehre, sei es nach Form oder Inhalt, beträchtlich gefördert hat. Bachet de Méziriac verwandelt eine Regel des Moschopulos in die (in einem der vorstehenden Referate geschilderte) Terrassenmethode, Frénicle zieht den jener Methode zu Grunde liegenden weit allgemeineren Grundsatz ans Licht — dass man es nämlich nicht sowohl mit einem magischen Quadrate als vielmehr eigentlich mit einer magischen Kugel zu thun habe — und entwickelt neue elegante Regeln für geradzellige Quadrate, De la Hire und Sauveur lehren jedes Zauberquadrat allgemein bilden. Um nämlich ein Quadrat von n^2 Zellen zu erhalten, construiren sie zwei Quadrate der Art, dass in keiner Reihe jedes einzelnen die nämliche Zahl mehr als einmal vorkommt, in das erstere dagegen nur die Zahlen 0 bis n; in das zweite blos die Zahlen $1 . n$, $2 . n, \ldots n . n$ eingehen; haben dann homologe Zellen resp. die Zahlen p und q, so hat die entsprechende Zelle des Hauptquadrates durch die Zahl $(p + q)$ ausgefüllt zu werden. Auch berichtigt De la Hire einen Irrthum Poignard's. Es folgt weiter d'Ons-en-Bray, der aus einem vorliegenden magischen Quadrate durch „Ränderung" ein neues herstellen lehrt, und Rallier des Ourmes, der in ausführlicher und höchst eleganter Weise ein Resumé über alle bis zu seiner Zeit bekannt gewordenen Leistungen gibt. — Diesen Koryphäen Frankreichs stehen in Deutschland nur Kochanski's „Erfindung" sogenannter Subtractionsquadrate und die gelegentlichen Bemerkungen v. Claussberg's gleichzeitig gegenüber; in den sechziger Jahren erscheint dann freilich Leonhard Euler's grosse — leider geradezu unbekannt gebliebene — Abhandlung, welche allerdings über ihren eigentlichen Vorwurf sehr bald hinausgeht und desshalb hier verhältnissmässig kurz bedacht werden musste. Nachdem weiter von Franclin's Construction $(4n)^2$-zelliger Quadrate und seinen magischen Kreisen wie von den flüchtigen Andeutungen Vieth's und Lorenz's die Rede gewesen, findet die Erzählung in Mollweide's compendiöser „Dissertatio de quadratis magicis“ ihren Uebergangspunkt zur neuesten Zeit. Der praktischen Bücher von Hohndell und Zuckermandel wird nur kurz, der grösseren Schrift von Hugel und der Aufsätze von Drach, Horner und Thomschon ausführlicher gedacht, obgleich diese letzteren eigentlich nur Fortführungen des Sauveur'schen Grundgedankens darbieten. Eine Analyse des interessanten Programms von v. Pessl, in welchem zur Vermeidung naheliegender Inconsequenzen dem magischen Quadrate der magische Cylinder substituirt wird, beschliesst das Kapitel, welchem sich 6 Noten anreihen.

Note 1 bespricht eine vermuthlich auf magische Quadrate hindeutende Schachaufgabe aus einem arabischen Autor, Note 2 sucht die Lebenszeit des Moschopulos zu fixiren, Note 3 gibt die kritischen Nachweisungen zu dem in der Arbeit abgedruckten Texte jenes Schriftstellers, Note 4 erwähnt einiger magischer und numismatischer Anwendungen der Zauberquadrate, Note 5 weist die von Einzelnen hervorgehobene Aehnlichkeit zwischen dem den magischen Quadraten zu Grunde liegenden algebraischen Probleme und den Euler'schen Sätzen über die 9 Richtungscosinus als nicht bestehend zurück. Note 6 endlich bespricht die mit Erfolg gekrönten Bemühungen von Wenzelides, magische und zugleich symmetrische Rösselsprünge anzufertigen, und erörtert die Frage, ob und wie man eventuell rein theoretisch diese Aufgabe in Angriff nehmen könne.

Kap. V. *Skizzen aus der Logarithmotechnie des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts.* Es wird hier zunächst Klage darüber erhoben, dass die unrichtige Behauptung von einer Identität der Napier'schen und der sogenannten natürlichen Logarithmen selbst bei Leuten, wo man dergleichen nicht erwarten sollte, wie Montucla, Morgan, Hoefer sich vorfindet und überhaupt immer wieder auftaucht. So hat z. B. ganz kürzlich Dubois einer die Sache ganz correct behandelnden Untersuchung Wackerbarth's den ungerechtfertigsten Widerspruch gegenüber gestellt. Hier wird nun gezeigt, wie schon lange Zeit vor Wackerbarth jene Frage zum Austrag kam; Kästner und Karsten disputirten über dieselbe, Gehler schrieb eine eigene Schrift darüber, Biot, an den sich Bernhard anschloss, stellte den Streitpunkt ausser allen Zweifel. — Weiterhin wird die schöne Methode besprochen, welche der Berliner Astronom Jean Bernoulli zur Bestimmung der sogenannten Proportionaltheile in Vorschlag brachte, und welche auf einer für jene Epoche höchst bemerkenswerthen Ausnützung der Kettenbrüche beruhte. — Drittens: Eine kurze Geschichte derjenigen Versuche, welche schon vor Gauss den schwachen Punkt der logarithmischen Rechnung — Unanwendbarkeit bei Additionen und Subtraktionen — zu beseitigen bestimmt waren. Nachdem von den desfallsigen Bemühungen Leonelli's und A. v. Humboldt's gesprochen ist, verweilt die Darstellung ausführlicher bei den anscheinend ganz in Vergessenheit gerathenen goniometrischen Methoden von Muschelius v. Moschau, Christian Wolf und Delambre, deren Werth sowohl gegenseitig als auch in ihrem Verhältniss zu der Neuerung der Gauss'schen Logarithmen abgewogen wird.

Note 1 behandelt die Manier Biots, durch Reihenentwicklung zu Napier's Endformel zu gelangen, Note 2 bespricht Ludlam's Verwendung der Euler'schen Kettenbruch-Algorithmen zu optischen Zwecken, Note 3 einige geometrische Versuche des obengenannten schlesischen Mathematikers Muschel, Note 4 erwähnt eines Versuches des Erlanger Professors Poezinger, aus den Logarithmen von $(x+1)$ denjenigen von x selbst zu finden.

Kap. VI. *Zur Geschichte der jüdischen Astronomie im Mittelalter.* Vorliegendes Kapitel ist im wesentlichen eine Widerlegung eines Ausspruches von C. v. Littrow. Derselbe hatte nämlich in seinem Schriftchen „Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften" von einer „Formel" gesprochen, welche der jüdische Polyhistor Maimonides für das den Monatsanfang rituell bedingende Erscheinen der Mondessichel vorgetragen haben soll — ein Factum, das, wenn richtig, für die Geschichte der mittelalterlichen Mathematik selbstverständlich von der höchsten Bedeutung sein würde. Um einen Einblick in die Verhältnisse zu erhalten, bedarf es natürlich genauer Kenntniss der hebräischen Chronologie, welche denn auch in der That durch eine unlängst erschienene Monographie von Schwarz in bequemer Weise vermittelt wird. Ehe jedoch die fernere Darstellung auf diese sich stützen darf, müssen einige von bedeutenden Fachmännern — Slonimski und Steinschneider — gegen dieselbe geltend gemachte Bedenken gewürdigt werden. Obgleich an eine sachgemässe Kritik solch' penibler Detailfragen nicht gedacht werden kann, ergibt sich doch die Gewissheit, dass zu dem hier angestrebten Zwecke unbedenklich auf das Schwarz'sche Werk zurückgegriffen werden dürfe. An der Hand desselben wie auch anderer Quellen wird dann jene Meinung Littrow's als eine völlig haltlose erkannt; es liegt derselben eine Verwechselung zweier den jüdischen Astronomen eigenthümlicher unter sich aber total verschiedener Verfahrungsweisen zu Grunde.

Eine Note beschäftigt sich mit einem neuen Angriffe gegen Schwarz, der jedoch viel zu wenig sachlich erscheint, um ernsthaftere Erwägung nothwendig zu machen.

Kap. VII. *Quellenmässige Darstellung der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr bis auf Huyghens.* So oft auch schon die Frage nach dem eigentlichen Erfinder dieses hochwichtigen Instrumentes ventilirt worden, so hat man es doch durchweg versäumt, eine unendlich fleissige Quellenarbeit des bekannten holländischen Mathematikers van Swinden gebührend zu berücksichtigen. Dies wird hier, natürlich unter steter Beiziehung neuerer Untersuchungen, nachgeholt. Es zeigt sich, dass von den Prioritätsansprüchen der Engländer Harris und Hooke wie auch des Italieners Sanctorius nicht wohl im Ernste gesprochen werden kann, dass vielmehr ausser Huyghens nur folgende drei Candidaten in Frage kommen können: Galilei, Jobst Bürgi, Johann Hevelius. Mit Bezugnahme auf den Briefwechsel des Ersteren wird nun gezeigt, dass er allerdings ein — noch heutzutage in Florenz befindliches — Modell angefertigt habe oder, was wahrscheinlicher ist, durch seinen Sohn Vincenz habe anfertigen lassen, bei dem jedoch nur die Uebertragung der Bewegung auf ein Zeigerwerk von der Maschine selbst besorgt wurde, während das Pendel durch menschliche Beihülfe in Bewegung erhalten werden musste. Dass Galilei trotz allen Nachsinnens mit einer Beseitigung dieses letztgenannten Uebelstandes nicht mehr zu Stande gekommen sei, erscheint sicher. — Von Bürgi hatte es in letzter Zeit R. Wolf sehr wahrscheinlich gemacht, dass ihm die Verfertigung einer wirklichen Pendeluhr gelungen sei, wobei er sich auf ein der Wiener Schatzkammer angehöriges und muthmasslich von dem Hofmechaniker Rudolph's II. herrührendes Exemplar eines solchen Zeitmessers berufen konnte. Allein die von van Swinden diplomatisch erhärtete Thatsache, dass man am Ende des siebzehnten Jahrhunderts mit Vorliebe aus älteren Uhren die Unruhe entfernt und ohne sonst etwas zu verändern statt ihrer ein Pendel eingehängt habe, macht Wolf's an sich höchst plausibel erscheinende Deduction illusorisch. — Was schliesslich Hevel anlangt, so unterliegt es kaum einem Zweifel, dass er die von allen praktischen Astronomen seiner Zeit geübte primitive Methode der Zeitbestimmung durch eine automatisch arbeitende Pendeluhr zu verbessern sich bestrebte und zu der Zeit, als Huyghens ihm den glücklichen Erfolg seiner Mühe brieflich mittheilte, bereits zu einer partiellen Realisirung seiner Idee durchgedrungen war. Eine eigentliche Pendeluhr hat aber auch er nicht erfunden, und es bleibt so Huyghens der hohe Ruhm seiner genialen Neuerung ohne jede Einschränkung erhalten.

Note 1 bespricht die Beziehung der Pendeluhren zu dem sogenannten „Uhrengleichniss", Note 2 gibt eine Bemerkung Nelli's über Sanctorius. In der dritten Note wird nach den Aufklärungen von Reusch gezeigt, wie nicht sowohl Gründe wissenschaftlicher Natur als vielmehr die verdächtige Haltung des Vatikans dem Briefwechsel Galilei's mit Holland so rasch eine Grenze setzten. Note 4 handelt von den oben namhaft gemachten Pendelbeobachtungen der Astronomen, Note 5 gibt einen Auszug aus einer jüngst publicirten und für die Geschichte der Pendeluhr bedeutsamen Studie von Studnička über den böhmischen Mechaniker Marek. In Note 6 endlich wird nachgewiesen, dass die Hypothese Veladini's, wie Galilei doch noch an seinem Modell eine Hemmungsvorrichtung angebracht habe, an sich zwar sehr geistreich sei, dem geschichtlichen Sachverhalte aber keineswegs entspreche.

München. S. Günther.

Rudolf Wolf: Astronomische Mittheilungen Nr. 1—40. (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856—1876.)

Beim Abschlusse der vierten Decade meiner „Astronomischen Mittheilungen" dürfte es eine gewisse Berechtigung haben, einen kurzen Rückblick auf Entstehung und Inhalt derselben zu werfen. — Die erste Veranlassung zu dieser, nunmehr bald volle 100 Octavbogen füllenden Publication war folgende: Als ich 1852 in den Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Bern die Abhandlung „Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung" veröffentlicht, und darin den Nachweis geleistet hatte, dass die von Schwabe aus seinen Beobachtungen wahrscheinlich gemachte Periodicität in der Häufigkeit der Sonnenflecken wirklich bestehe, ja sich rückwärts bis auf die Zeit der Entdeckung der Sonnenflecken verfolgen lasse, — dass die Sonnenfleckencurve jederzeit mit der Curve der magnetischen Declinations-Variationen parallel gelaufen sei, — dass die gemeinschaftliche mitt-

S. Günther: Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. Complemento alla geometria assoluta di Bolyai. Traduzione dal Tedesco di Alfonso Sparagna. (Giornale di Matematiche diretto dal Prof. G. Battaglini, Vol. XI. p. 1—11.)

Man weiss, dass in der Pangeometrie von Lobatschewsky und Bolyai an die Stelle der Ebene die „Grenzfläche", an diejenige der Geraden die „Grenzlinie" tritt, und dass ein aus drei Grenzlinien gebildetes Dreieck die Winkelsumme 180° besitzt. Der Unterschied zwischen Ebene und Grenzfläche liegt, wie nicht minder bekannt, in dem Umstande, dass erstere „umkehrbar ist", letztere dagegen nicht. Es wird nun hier direkt der Nachweis zu führen gesucht, dass mit Zugrundelegung der Definition „die Grenzfläche ist eine Kugelfläche von unendlich grossem Radius" unmittelbar jene Eigenschaft eines Grenzliniendreiecks, aber zugleich im nämlichen Augenblicke die Umkehrbarkeit der Grenzfläche, d. h. ihre Identität mit der Ebene, erhalten werde.

Nach Voraussendung einer historischen Einleitung, welche besonders an einen in ganz ähnlichem Sinne gehaltenen Beweis von Baltzer (Grunert's Archiv, Bd. XVI. S. 129) erinnert, wird auf einer Kugelfläche ein gleichseitiges Dreieck abgesteckt, was ohne alle Voraussetzungen möglich ist. Durch diese drei Punkte lassen sich unendlich viele Kugeln hindurchlegen, und die Mittelpunkte all dieser Kugeln liegen auf einer Curve; dass dies eine Gerade, kommt nicht einmal in Betracht, sondern lediglich der Umstand, dass, wenn von einem beliebigen Punkte der Curve nach entgegengesetzten Richtungen fortgegangen wird, die Vereinigung in dem Einen unendlich entfernten Punkt der Linie erfolgen muss. Indem dann noch der Begriff des Winkels und seines Drehsinnes in einer den speciellen Verhältnissen der Aufgabe angepassten Weise definirt ist, lässt sich zeigen: Der ursprünglich positive Winkel des gleichseitigen Kugeldreiecks wird immer kleiner, je weiter das Kugelcentrum auf der vorhin erwähnten Curve hinausrückt, erscheint aber das Centrum auf der der Anfangsrichtung entgegengesetzten Seite, so ist nunmehr der Winkel negativ. Da nun im sphärischen Dreieck die Winkelsumme $= 180^0 + \varepsilon$, so ist im Dreieck von drei gleichen Seiten und Winkeln ein Winkel $= 60^0 + \frac{\varepsilon}{3}$; dieser Excess ε ist auf der einen Seite abnehmend positiv, auf der anderen zunehmend negativ, muss also durch Null hindurchgehen. In dem Momente aber, wo dies geschieht, liegt das variable Centrum im Unendlichen, die Kugelfläche verwandelt sich in die Grenzfläche, deren zwei Seiten aber bei der Congruenz des positiv und negativ unendlich entfernten Punktes ebenfalls congruiren müssen, die drei Seitenkreise* gehen über in Grenzlinien, und es ist somit der Beweis geführt, dass der Grenzfläche der nichteuclidischen und der Ebene der euclidischen Geometrie die nämliche Fundamentaleigenschaft zukommt. Was für ein einziges Individuum gilt, ist aber nach den Ergebnissen Legendre's für jedes willkürliche Dreieck richtig.

Benützt wurde bei der oben angedeuteten Entwicklung einzig und allein eine Formel der sphärischen Trigonometrie; man weiss, dass sämmtliche Relationen dieser Disciplin von dem Parallelen-Axiom vollkommen unabhängig sind.

Amberg. S. Günther.

S. Günther: Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten. (Arch. d. Math. u. Phys. Th. 59. S. 130—146.)

Die bekannten Zerlegungssätze von Laplace und Jacobi werden hier in elementarerer und umfassenderer Weise abgeleitet, als dies gewöhnlich geschieht. Handelt es sich zunächst darum, die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ in ein Aggregat von zweigliedrigen Produkten zu zerfällen, so dass der eine Faktor eine Unterdeterminante vom $p$ten, der andere eine solche vom $(n-p)$ten Grade ist, so müssen zwei arbiträre Bedingungen aufgestellt werden. Hält man daran fest, dass die erste Colonne $a_{1,1} a_{2,1} \ldots a_{n,1}$ diesen ihren Platz auch in der ersten Faktor-Determinante jedes Einzelproduktes behaupten und dass als erstes Glied der Zerlegung, wie es üblich ist, $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{p,p} \times \Sigma \pm a_{p+1,\,p+1} a_{p+2,\,p+2} \ldots a_{n,n}$ angesehen werden soll, so gelangt man zu einem anscheinenden neuen Satze, welcher sich in Form nachstehender Identität aussprechen lässt:

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$$
$$= \underset{(s_l = l+1,\; l+2 \ldots n-p+1)}{\Sigma} (-1)^{\left[\frac{2+3p-p^2}{2} + \sum\limits_{i=1}^{i=p-1} s_i\right]} \times$$
$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,s_1} \ldots a_{p,s_{p-1}} \times \Sigma \pm a_{p+1,\,2}\, a_{p+2,\,3} \ldots a_{n,n}$$

$$+\Sigma(-1)^{\left[\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{k=n-p-1} s_k\right]}\times$$
$$\Sigma\pm a_{p+1,1}\,a_{p+2,t_1}\ldots a_{n,t_{n-p-1}}\times\Sigma\pm a_{1,2}\,a_{2,3}\ldots a_{p,n}.$$

Die hier noch gebliebene Beschränkung betreffs der constanten ersten Vertikalreihe lässt sich leicht fortheben, indem man nur die Determinante, deren Vorzeichen bestimmt werden soll, mit einer in der Normalform $\Sigma\pm a_{I,I}\,a_{II,II}\ldots a_{N,N}$ vorgelegten Hülfsdeterminante vergleicht. Zum Schluss wird noch gezeigt, wie man sich bei der allgemeinen Zerlegung einer Determinante in eine Summe aus Produkten von beliebig vielen Unterdeterminanten zu verhalten habe, und dass die hiebei zur Anwendung kommende combinatorische Methode die richtige sei, erhellt u. a. auch daraus, dass die daraus resultirenden Formeln für die Anzahl der bei der Zerlegung auftretenden Aggregatglieder mit den von Jacobi zum gleichen Zwecke gegebenen übereinstimmen.

Amberg. S. Günther.

L. Koenigsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot.

Die mir von Frau Geheimräthin Richelot übertragene Durchsicht der Papiere des verstorbenen ausgezeichneten Mathematikers F. Richelot hat mich erkennen lassen, dass es den vielen Schülern und Verehrern jenes um die Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Deutschland so hochverdienten Mannes gewiss nicht unerwünscht und für den Fortschritt der Mathematik durch Anregung zu weiteren Untersuchungen sicher zweckmässig sein würde, von der grossen Anzahl einzelner von Richelot angestellter Untersuchungen, die meistens bei der Lectüre der Arbeiten anderer Mathematiker entstanden oder zum Zwecke der Vorlesungen ausgearbeitet worden, fortlaufende Referate mit genauer Angabe der benutzten Methoden und gefundenen Resultate in dieser Zeitschrift zu veröffentlichen, während ich möglicher Weise, wenn es meine Zeit gestatten wird, später durch Unterstützung von Seiten jüngerer Kräfte in der Lage sein werde, grössere Veröffentlichungen von Vorlesungen, die in vielfachen und verschiedenartigen Ausarbeitungen vorliegen, als Lehrbücher der analytischen Mechanik, Variationsrechnung etc. zu bewerkstelligen.

S. Günther: Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert. (Zeitschrift für Mathematik und Physik. 20. Jahrgang.)

Die an mathematischen Antiquitäten reiche Stadtbibliothek zu Nürnberg bewahrt auch eine interessante geometrische Incunabel, die „Geometria deutsch“, ein Büchlein von nur 8 Blättern, ohne irgendwelche Angabe über Entstehungszeit, Verfasser, Druckort etc. Aus äusseren und inneren Gründen erschien es angezeigt, anzunehmen, dass das Schriftchen in den letzten Jahren des angegebenen Jahrhunderts in einer oberdeutschen Stadt gedruckt worden sei; der Inhalt bezieht sich auf einige geometrische Aufgaben einfachster Natur: Verzeichnung einer Senkrechten, Theilung eines Winkels in zwei gleiche Theile etc. Für π findet sich der Werth $3\frac{1}{7}$, das reguläre Achteck wird richtig mit Hülfe eines geometrischen Satzes verzeichnet, auf dessen Genesis durch die neuesten Untersuchungen M. Cantor's ein unerwartet helles Licht gefallen ist, für das Siebeneck gilt die bekannte Näherung, dass seine Seite der halben Dreiecksseite gleich sei, das Fünfeck wird in der später durch den Namen Albrecht Dürer's bekannter gewordenen Weise gebildet. Zum Schluss wird dem Zeitgeist durch Verfertigung des Risses für einen Wappenschild und einen Turnierhelm Rechnung getragen.

In der angeführten Arbeit wird der Originaltext vollständig wiedergegeben und mit Anmerkungen begleitet. Im Anschluss an die Thatsache, dass jene Verzeichnung des regelmässigen Fünfecks mit Hülfe nur einer einzigen Zirkelöffnung geleistet wird, schliesst sich eine kurze geschichtliche Entwickelung der früher in hohem Ansehen stehenden Geometrie Einer Zirkelöffnung an, welche der Namen Abul-Wasa, Cardanus, Tartaglia, Benedictus etc. Erwähnung zu thun hat und mit Steiner's berühmtem Werke ihren natürlichen Abschluss findet. Bei Gelegenheit der erwähnten Siebeneckseonstruktion wird ferner gezeigt, wie sich dieselbe aus einem von Weihrauch für das reguläre Vierzehneck aufgestellten Theoreme naturgemäss herleiten lässt.

München. S. Günther.

M. Curtze: Bemerkungen zu dem Aufsatze Günther's: „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert." (Schlömilch, Zeitschrift, XX., 3, Hist. Lit. Abth. 57—60.)

Zum Theil Berichtigungen, zum Theil weitere Ausführungen der Arbeit Günther's. Nachweis, dass das Buch „*Geometria deutsch*" den Bibliographen wohl bekannt, dass es handschriftlich noch ältere in deutscher Sprache verfasste Geometrieen giebt, und Darlegung des Weges, durch welchen Egen zur Kenntniss der Thatsache kam, dass Cardan durch Tartaglia zu den Problemen, die Aufgaben der Geometrie mit nur einer Zirkelöffnung auszuführen, angereizt wurde. Nebenbei wird die Erfindungsgeschichte der Auflösung der Gleichungen 3. Grades dem Werke von Hankel gegenüber richtig gestellt.

Thorn. M. Curtze.

M. Curtze: Reliquiae Copernicanae. Nach den Originalen in der Universitäts-Bibliothek zu Upsala herausgegeben. Mit einem Holzschnitt und einer lithographirten Tafel. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1875. IV. 67 S. gr. 8. Preis 1,60 ℳ.

Bei Gelegenheit der von dem Herausgeber besorgten Säcularausgabe der Revolutiones von Copernicus waren demselben die dem grossen Astronomen einst gehörenden, jetzt in Upsala aufbewahrten Bücher auf hohe Verwendung des Fürsten Reichskanzlers zur Disposition gestellt. Obschon nun in denselben eine ziemliche Anzahl von Notizen sich finden, die für die oben erwähnte Ausgabe mit Nutzen hätten gebraucht werden können, so liessen die Umstände die Benutzung damals nicht zu. Deshalb hat der Verfasser in diesem Büchlein, das ein Separatabdruck aus Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik ist, nachträglich die betreffenden Notizen herausgegeben und mit ausführlichen historischen und sachlichen Bemerkungen versehen. Das Buch zerfällt in 5 Capitel nach den verschiedenen Büchern, denen die handschriftlichen Notizen des Copernicus entnommen sind. Das erste betrachtet die Randbemerkungen in dem *Λεξικὸν κατὰ στοιχείων* des Johannes Crastonus (Mutine 1499), soweit dieselben nicht rein philologischen Werth haben; d. h. vorzugsweise Bemerkungen über den altgriechischen Kalender. Das

Kräfte gegebene Ausdruck $ii'dw$ dagegen ist nur dann das negative Differential des magnetischen Potentials, wenn die Stromintensitäten constant sind, oder wenigstens ein constantes Product haben.

Bonn. R. Clausius.

S. Günther: Adolph Zeising als Mathematiker. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 21. Jahrgang.)

Kurze Schilderung der Verdienste, welche der genannte Gelehrte um die Begründung der mathematischen Aesthetik sich erworben. Es werden mit kurzen Worten die wichtigsten Abhandlungen Zeising's angeführt, in welchen er für sein Princip, das Gesetz des goldenen Schnittes regle das ganze weite Gebiet des Schönen, Propaganda zu machen suchte. Manche seiner Aufstellungen werden geradezu verworfen, andere, wie die auf architektonische Verhältnisse und die mathematische Theorie der Blattstellung bezüglichen, vollkommen anerkannt. Zum Schluss folgt dann noch eine gedrängte Analyse derjenigen Arbeiten, welche ein allgemeineres Studium der geometrischen Formenlehre — ohne specielle Rücksicht auf die Theilung nach äusserem und mittlerem Verhältniss — zum Gegenstande haben.

Es möge an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass, wie uns von competenter Seite mitgetheilt wird, dem Zeising'schen Theorem eine allgemeinere rein psychologische Bedeutung innewohne, dass aber der Urheber darin fehlte, nur immer nach Bestätigungen der Norm zu suchen, Ausnahmen aber gänzlich ausser Acht zu lassen. Ferner sei eines dem Grundgedanken nach verwandten Versuches des Franzosen Lagout gedacht, auf welchen uns Professor Favaro in Padua aufmerksam machte; dessen „esthétique nombrée, application de l'équation du beau à l'analyse“ (Paris 1863) vermag sich jedoch trotz manches geistreichen Raisonnements mit der consequent durchgeführten Systematik des deutschen Forschers nicht zu messen.

Ansbach. S. Günther.

L. Königsberger: Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen. (Mathematische Annalen Band XI.)

Die fundamentalen Untersuchungen von Clebsch haben gelehrt, dass, wenn y mit x durch eine algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung

S. Günther: Note sur Jean-André Segner, premier fondateur de la météorologie mathématique. (Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Aprilheft 1876.)

Die Idee, meteorologische Veränderungen auf die durch Mond und Sonne bedingte Ebbe und Fluth der Atmosphäre zurückzuführen, findet sich nahezu bei allen Fachschriftstellern aus der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts, allein es scheint bisher allgemeine Unkenntniss darüber geherrscht zu haben, wer als der Erste die bezüglichen Verhältnisse mathematisch untersucht habe. Vorliegende Abhandlung vindicirt dies Verdienst dem tüchtigen Pressburger Andreas Segner, der folgeweise mathematische Professuren zu Jena, Halle und Göttingen bekleidete. In einem einführenden Paragraphen werden kurz die nicht unbeträchtlichen Leistungen, welche dieser produktive Gelehrte besonders im Fache der Mechanik und Optik bethätigte, skizzirt; alsdann wird das Jenaische Universitätsprogramm, welches die durch kosmische Einflüsse bedingten Oscillationen des Barometerstandes rechnerisch behandeln lehrt, wörtlich abgedruckt. Als positiv interessant wird an demselben die mathematische Einkleidung des physikalischen Problems und die Einführung der Nebenbedingungen in die aufgelöste Differentialgleichung hervorgehoben; als Mängel sind zu verzeichnen die Ignorirung des Mariotte'schen Gesetzes, Vernachlässigung mehrerer integrirender Nebenumstände und irrthümliche Auffassung der Halley'schen Erklärung der Passatwinde. Da natürlich auch das numerische Resultat ein viel zu erhebliches ist werden zur Vergleichung die von Laplace für den nämlichen Zweck aufgestellten complicirten Formeln sowie deren Ausrechnung durch Bouvard reproducirt. Als Anhang folgt die Bemerkung, dass noch vor Letzterem ein deutscher Astronom, Namens Stark, bei Beantwortung einer von der kurbayrischen Akademie gestellten Preisfrage zu analogen Ergebnissen gelangt ist.

Ansbach. S. Günther.

S. Günther: Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes. (Denkschriften der naturforschenden Gesellschaft zu Nürnberg. 6. Band.)

Diese Arbeit, welche eine Menge da und dort verstreuter Einzelbemerkungen zu sammeln und durch neu aufgefundene Materialien zu verbinden bestimmt ist, zerfällt naturgemäss in drei Theile: Alterthum, Mittelalter, Neuzeit bis zum Jahre 1636. Was den ersten anlangt, so galt es eigentlich einzig und allein kritisch zu untersuchen, ob die mannigfachen Fakta, welche eine bewusste oder unbewusste Anwendung des Coordinatenprincipes bei den Griechen zu involviren schienen, wirklich in diesem Sinne gedeutet werden dürfen. Diese Untersuchung lehrte, dass bei den allein in Frage kommenden Vertretern der reinen Mathematik, Archimedes und Apollonius, hievon gar keine Rede sein kann, und auch im Gebiete der angewandten Mathematik nur in sehr beschränktem Masse. Erst bei Eratosthenes und Hipparch tritt die Bestimmung eines Ortes der Sphäre durch zwei Bögen grösster Kreise bestimmt hervor; die Idee einer Ortsbestimmung durch Punktcoordinaten in der Ebene dagegen dürfte sich einzig und allein in der Geodaesie des Alexandriners Hero (100 v. Chr.) finden. — Was nun das Mittelalter anbelangt, so ist es dem Verf. gelungen, das Verbindungsglied zwischen jenen ersten Anfängen und der bereits ziemlich fortgeschrittenen Auffassung Nicole Oresme's aufzufinden. Ein lateinischer Münchener Codex (Nr. 14436) des ehemaligen Emeram-Klosters zu Regensburg enthält nämlich als Zugabe zum Somnium Scipionis des Macrobius einen Auszug aus Plinius, welcher die Bahnen der Planeten im Thierkreis behandelt und — was bis jetzt nicht nachweisbar gewesen sein dürfte — graphisch durch Abscisse und Ordinate darstellt. Würde man einen beliebigen Meridanschnitt durch die Zodiakalzone führen und von diesem aus die Gürtelfläche wie den Mantel eines abgestumpften Kegels nach der Tangentialebene des Aequatorpunktes abrollen, so bekäme man etwa jene Zeichnung, und zwar würde die Aufschlitzungslinie die Ordinatenaxe, der Parallelkreis von 66°30′ Südpol-Distanz die Abscissenaxe vorstellen. Der astronomischen Entstehung gemäss werden x und y beziehungsweise als latitudo und longitudo bezeichnet, und es erscheint so nicht unmöglich, dass jene allgemeinere Terminologie des Oresme — latitudines - Coordinaten — unmittelbar auf jenen Vorläufer im zehnten Jahrhundert zurückleitet. — Dass der genannte französische Geometer um die Mitte des vierzehnten Säculums den Coordinatenbegriff soweit ausgebildet hatte, als die Beschränkung auf den ersten Quadranten zuliess, war bereits seit längerer Zeit durch die umfassenden Forschungen Curtze's bekannt, und so musste sich an dieser Stelle die Darstellung darauf beschränken, von jenen Arbeiten Bericht zu erstatten, einzelne ferner liegende

Gesichtspunkte hervorzuheben und zumal auf Beziehungen jener alten Lehre von den „latitudines" zu neueren Doktrinen hinzuweisen. — In der sogenannten Neuzeit ragt besonders Fermat's Name hervor; er operirte, wie dies zuerst von Baltzer nachgewiesen wurde, mit den Coordinaten ganz in unserem Sinne und wandte dieselben vielfach bei seinen Untersuchungen über algebraische Curven an; wie viel Gewicht seine Zeitgenossen auf diese Versuche legten, geht u. a. aus der hier ausführlicher erörterten Thatsache hervor, dass der bekannte Compendienschreiber Herigone selbst nach dem Jahre 1636 die Coordinaten nicht mit Descartes', sondern lediglich mit Fermat's Namen in Verbindung bringt. In jenem Jahre erschien des Erstgenannten „Geometria", und damit endet die Vorgeschichte des Coordinatenprincipes, um in dessen Geschichte überzugehen. Damit endet denn auch naturgemäss unsere Erzählung, aus der jedenfalls so viel hervorgeht, dass die Coordinatengeometrie keine „proles sine matre creata" genannt werden dürfe, wie dies von Chasles und im Anschluss an ihn auch von Anderen geschehen ist.

Ansbach. S. Günther.

A. Toepler: Bemerkung zur Fourier'schen Reihe. (Notiz in No. XXVI u. XXVII des Anzeigers der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien vom 7. Dec. 1876.)

Ich habe darauf aufmerksam gemacht, dass durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme der Coefficient der Fourier-schen Reihe bei endlicher Gliederzahl bestimmt ist, bevor überhaupt die Darstellbarkeit von Functionen durch die Reihe mit unendlicher Gliederzahl bewiesen ist.

Es sollen die Coefficienten a und b der nach ganzen Vielfachen von $\frac{\pi x}{A}$ fortschreitenden Reihe:

$$Y_1 = \sum_{k=o}^{k=m} a_k \sin\frac{k\pi x}{A} + \sum_{k=o}^{k=n} b_k \cos\frac{k\pi x}{A},$$

welche sich auf beliebige, endliche Gliederzahl (m und n) erstreckt, so bestimmt werden, dass die Reihe für alle Werthe des x innerhalb des Intervalles von $-A$ bis $+A$ eine gegebene Function $Y_2 = F(x)$ mit möglichst grosser Annäherung darstellt. Dies erfordert, dass das Integral:

Die Polyeder der *zweiten Classe* haben, wie erörtert, die Eigenschaft, dass die *Oberfläche* und der *körperliche Inhalt gleich Null* wird. Jede der gleichen Grenzflächen setzt sich nämlich aus einer Anzahl *positiver* Zellen (mit dem gemeinsamen Coefficienten + 1) und einer ebenso grossen Anzahl von *negativen* Zellen (mit dem Coefficienten — 1) zusammen, welche bezüglich den ersteren *entgegengesetzt gleich* sind, so dass hiernach der *Inhalt jeder Grenzfläche Null* wird. Für sämmtliche hierhergehörige Polyeder erhält der *innerste Kern* d. h. die innerste körperliche Zelle, so wie auch diesem anliegende Zellen den Coefficienten Null, dieselben bilden also *Löcher* des Polyeders.

Als solche *nicht convexe* Polyeder der zweiten Classe werden aus der Gruppe der gleichflächigen Polyeder mit *Hauptaxe zwei Gruppen* von Körpern erhalten, für welche der Verfasser mit Rücksicht auf ihre kronenförmige Gestalt den Namen *Stephanoide* vorschlägt.

Aus der Gruppe des $(6 + 8 + 12)$eckigen (2×24) Flachs ergeben sich ferner *zwei* nicht convexe Polyeder der 2. Classe, welche sich polar entsprechen und zu den beiden ersten, oben erwähnten der 1. Classe in naher Beziehung stehen.

Endlich liefert die Gruppe des $(12 + 20 + 30)$ eckigen (2×60) Flachs noch 5 solcher Polyeder, von denen sich je zwei polar entsprechen, während der 5. sich selbst entspricht.

Auf die nähere Beschaffenheit der abgeleiteten Polyeder kann hier nicht eingegangen werden; es möge daher nur noch erwähnt werden, dass die inneren Kerne und äusseren Hüllen derselben in vielen Fällen durch die *archimedeischen*, in einzelnen Fällen sogar durch die regulären *(platonischen)* Varietäten von gleichflächigen, bezw. gleicheckigen Polyedern gebildet sind.

Aus der Beschaffenheit dieser inneren Kerne und äusseren Hüllen ergibt sich auch die am Schlusse erwähnte Darstellung dieser Polyeder durch Papp- oder Fadenmodelle.

Marburg. E. Hess.

S. Günther: Note sur la résolution de l'équation indéterminée $y^2 - bx^2 = az$ en nombres entiers. (Journal de mathém. pures et appliquées, Octobre 1876.)

Das Bestreben, auch nicht homogene Gleichungen zweiten Grades in's Bereich der Betrachtung zu ziehen, liess die vorstehend genannte Gleichung bald als eine leicht lösbare erkennen. Setzt man den eingliedrig-periodischen Kettenbruch

$$\cfrac{b}{a-\cfrac{b}{a-\ldots-\cfrac{b}{a_{(n)}}}} = \frac{P_n}{Q_n},$$

so besteht die Relation

$$Q_{2n} = Q_n^2 - bQ_{n-1}^2,$$

welche an diesem Orte auf zwiefache Weise, durch Determinanten, wie durch direkte algebraische Umformung, hergeleitet wird. Da, wie hieraus ersichtlich, der constante Partialzähler ein für allemal gegeben ist, so handelt es sich weiterhin blos darum, die Grösse a aus der Gleichung

$$Q_{2n} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n+1}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} = \dot{a}$$

zu bestimmen, wo $\dot{a}$ nach Crelle allgemein eine durch a ohne Rest theilbare Zahl vorstellt.

Es wird gezeigt, wie sich diese Aufgabe stets auf die Lösung der fundamentalen Gauss'schen Congruenz $u^2 \equiv av \pmod{b}$ zurückführen lässt, ferner werden die Fälle ausgeschieden, in welchen eine Lösung überhaupt nicht möglich ist, und zuletzt wird jeder mögliche Fall durch ein vollständiges Zahlenbeispiel erläutert. — Angehängt ist eine algebraische Notiz von Prof. Mansion in Gent.

S. Günther: Kritik der Raumtheorieen von Helmholtz und Schmitz-Dumont. (Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 1. Jahrg. 6. u. 7. Hft.)

Dieser Aufsatz soll eine vergleichende Kritik zweier modernen Raumtheorieen liefern, wie solche einerseits von Seite der empiristischen, andererseits von derjenigen der idealistischen Schule aufgestellt wurden; die beiden Arbeiten von Helmholtz (in dessen bekannten populären Vorträgen, 3. Heft) und von Schmitz-Dumont (Zeit und Raum, Leipzig 1876) können mit Fug als für jede dieser beiden verschiedenen Auffassungsweisen des Raumes charakteristisch gelten.

Es wird der Nachweis zu führen gesucht, dass der Begriff der ortsverschiedenen Identität (Congruenz) auch von solchen Organismen durch logische Schlüsse erreicht werden könne und müsse, welche durch ihre subjectiven Zustände an der anschauenden Erkenntniss jenes Begriffes gehindert sind, im Uebrigen aber denselben Denkgesetzen gehorchen, wie wir Menschen. Wäre es gelungen darzuthun, dass jene Geometrie, welche die von Helmholtz supponirten „Flächenwesen" auf ihre specielle wie immer gestaltete Wohnfläche begründen sollen, principiell von der unsrigen sich nicht unterscheide, so würde hieraus auch mit Nothwendigkeit folgen, dass, einen „unebenen" Raum in Riemann's Sinne als existirend vorausgesetzt, die darin lebenden Individuen gleichwohl in das Wesen eines krümmungslosen *(euclidischen)* Raumes mit unbeschränkter Transponibilität der Körper sich hineinzudenken im Stande wären.

Indem die zweitgenannte Untersuchung die Existenz eines dreidimensionalen ebenen Raumes als aprioristische Denknothwendigkeit zu begründen unternimmt, tritt sie gegen die Helmholtz'sche Lehre in Opposition. Es gelingt ihr, bei manchen dem ersten Versuche noch anhaftenden Mängeln, beachtenswerthe Gründe für jene Behauptung beizubringen; jedoch soll und kann nicht geleugnet werden, dass die Anschauung der Raumverhältnisse bei solchen Organisationen eine total verschiedene sein könne, welche mit durchaus abweichenden Perceptions- und Denkorganen operiren müssen.

S. Günther: Neue Methode der directen Summation periodischer Kettenbrüche. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 22. Jahrg. 1. Hft.)

Die einzige bislang bekannte Methode, jenes Problem in völlig expliciten Formeln zu lösen, rührt von Oettinger her; dieselbe leidet aber an dem Uebelstand, die bekannte Summenformel für den eingliedrig-periodischen Kettenbruch zu verwenden und somit also einen Specialfall der erst zu erledigenden Aufgabe als bereits bekannt vorauszusetzen. Diese neue Behandlung geht aus von der Identitat eines aufsteigenden und absteigenden Kettenbruches; es ist:

$$\frac{\beta_1 + \frac{\beta_2 + \cdots + \frac{\beta_n + \frac{\beta_1 + \cdots + \frac{\beta_1 \cdots + \frac{\beta_n + \cdots + \frac{\beta_q}{\alpha_q}}{\alpha_{n(p)}}}{\alpha_1}}{\alpha_1}}{\alpha_n}}{\alpha_2}}{\alpha_1} = \frac{\beta_1 \beta_n}{\alpha_1 \beta_n - \frac{\alpha_1 \beta_2 \beta_n}{\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 - \frac{\alpha_2 \beta_1 \beta_3}{\alpha_3 \beta_2 + \beta_3 - \cdots - \frac{\alpha_1 \beta_n \beta_2}{\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 - \cdot}}}}$$

Der linkssteigende aufsteigende Kettenbruch ist rein periodisch und besitzt nebst p vollkommenen Perioden noch eine unvollständige von q Theilbrüchen; der rechtsstehende gewöhnliche Kettenbruch ist unrein periodisch, doch umfasst auch seine Periode je n Glieder, und nach p Perioden folgen noch $(q-1)$ Theilbrüche. Der Ausdruck zur rechten Hand ist leicht in independente Form zu bringen; um alsdann den absteigenden Kettenbruch auf die Normalform

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \dots - \cfrac{b_n}{a_n - \cfrac{b_1}{a_1 - \dots}}}$$

zu bringen, hat man nur das Gleichungssystem der $2n$ Unlbekannten α, β

$$\alpha_i \beta_{i-1} \beta_{i+1} = b_i,\ \alpha_{i+1} \beta_i + \beta_{i+1} = a_i\ (n+i=i)$$

zu lösen. Nachdem α und β allgemein durch Determinanten dargestellt und in die Summenformel eingesetzt sind, ist der angestrebte Zweck völlig erreicht. — Aus diesem Resultat fliesst dann ohne Weiteres ein Satz für zweigliedrig-periodische Kettenbrüche, der von Kahl und dem Referenten früher mit Hilfe verwickelterer Betrachtungsweisen bewiesen worden war.

Ansbach. S. Günther.

A. Favaro: Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità (A. 600 a. C. — A. 400 d. C.)

(Padova, premiata tipografia Francesco Sacchetto, 1875.)

Il presente lavoruccio, steso per celebrare una festa di famiglia, non era certamente destinato dall' autore al pubblico scientifico, eppure successivamente se ne occuparono il Cantor nella *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (XX. Jahrg. Hist. Lit. Abth. S. 20), il Günther nell' *Archiv der Mathematik und Physik* (LVIII. Theil, Lit. Ber. CCXXX, S. 14—17) ed il Curtze nel *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (VII. Bd., Jahrg. 1875, S. 1—2): alcuni appunti mossi dal primo e dall' ultimo di questi scrittori decisero autore ad esprimere i suoi intendimenti intorno a questo saggio, cosa, dalla quale si sarebbe astenuto se le sue intenzioni fossero state più giustamente interpretate.

Per quanto consta all' autore, prima di lui non si era peranco pensato ad applicare i metodi grafici agli studi cronologici, chè certaso kann man das neue Uebertragungsprincip folgendermassen aussprechen:

Man denke sich aus den drei Gleichungen

$$D(\lambda_1) = 0 \quad D(\lambda_2) = 0 \quad f(x, y, z) = 0$$

die Coordinaten eines veränderlichen Punktes x, y, z auf der Fläche (1) als Functionen von λ_1 und λ_2 dargestellt. Alsdann ist es erlaubt, in der durch (2) und (2a) näher definirten orthogonalen Substitution, sowie in allen aus ihr folgenden Gleichungen an Stelle der Grössen:

$$\xi, \eta, \zeta; \quad X, Y, Z$$

beziehungsweise zu setzen:

$$dx, dy, dz; \quad 0, \quad d\lambda_1 \cdot (2\lambda_1 \mu' \nu)^{-1}, \quad d\lambda_2 \cdot (2\lambda_2 \mu'' \nu)^{-1}.$$

Wenn $\Sigma \pm (a_{00} a_{11} a_{22} a_{33})$, also auch eine Wurzel der quadratischen Gleichung $D(\lambda) = 0$ — etwa λ_2 — verschwindet, so ist in dieser Fassung des Uebertragungsprincips an Stelle von $(2\lambda_2 \mu'' \nu)^{-1} d\lambda_2$ zu substituiren: $\nu (2\lambda_1 \mu')^{-1} dB$,

$$4B = \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right](a_{00} + a_{11} + a_{22})$$

angenommen. Die Beweise, sowie mehrere Anwendungen sind in der Abhandlung ausführlich mitgetheilt.

Tübingen. S. Gundelfinger.

S. Günther: Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. Halle, Nebert.

1. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Occidentalen 1877.
2. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Arabern und Hebräern 1877.
3. Heft. Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunktes durch Wassermassen 1878.

Die beiden ersten Hefte bilden ein geschlossenes Ganze, welches sich möglichst an die analogen Untersuchungen von Ukert und Schiaparelli anzuschliessen bestimmt ist. Es wird demzufolge zuerst des trüben Zustandes des geographischen Wissens in der patristischen Periode gedacht, alsdann die Reform des Virgilius von Salzburg und Adam von Bremen geschildert und der endliche Durchbruch richtiger Anschauungen in seinen verschiedenen literarischen Aeusserungen (Omons, Sacrobosco) wie auch in den Erzeugnissen damaliger Kartographie verfolgt. Einzelne Spuren der Kenntniss von der Bewegung der Erde finden sich allerdings bereits bei den Scholastikern, wogegen Dante, dessen Kosmographie hier eingehend besprochen wird, sich noch durchaus conservativ verhält, obwohl er die Lehre des Philolaus kennt. Eine wirkliche Axendrehung der Erde lehrte Nicolaus Cusanus, dessen freisinnig kosmologischer Standpunkt hier zum ersten Male seinem wahren Werthe nach gewürdigt wird. Regiomontan und Domenica Maria können blos indirect unter den Vorläufern des Copernicus genannt werden, ebenso Fracastor, dessen Theorie homocentrischer Sphären auf Eudoxus zurücklenkt. Hingegen ist Lionardo da Vinci selbstständig auf die Bewegung der Erde gekommen, die er in mathematisch interessanter Weise behandelt. Als unmittetbare Vorcopernicaner erscheinen Widmannstadt und Celio Calcagnini. — Der zweite Abschnitt beginnt mit einer ausführlichen Besprechung der ersten arabischen Gradmessungen, beschäftigt sich weiter mit den Schriften jener Mathematiker, welche die Kugelgestalt der Erde wissenschaftlich behandelten, erörtert die graphischen Erddarstellungen jener Periode und zieht auch die besonders aus dem Compendium des Kazwîni zu entnehmenden unwissenschaftlichen Hypothesen orientalischer Schriftsteller bei. Die Drehung der Erde lehrte Ibn el Wardi, und Katibi setzt die für und gegen eine solche sprechenden Gründe ausführlich auseinander, ohne sich jedoch zu ihren Gunsten zu entscheiden. Hierauf wird ein Ueberblick über die entsprechenden Neuerungen auf theoretisch-astronomischem Gebiete gegeben; die sogenannte Trepidationstheorie, die Sphärenlehre des Alpetragius und die weniger energischen Angriffe des Arzachel und Geber gegen Ptolemaeus finden hier ihre Stelle. Den Schluss des Abschnittes bilden der bisher fast gar nicht bekannt gewordene Ibn Badja, der Excenter und Epicyklen verwarf, und König Alfons XII, in dessen „Libros del saber“ dem Planeten Mercur eine elliptische Umlaufsbahn zugewiesen wird. — Die Hebräer waren, wie aus den verschiedenen „Baraitha's“ hervorgeht, im achten Jahrhundert unserer Zeitrechnung gewiss vollkommen mit der wahren Gestalt des Erdkörpers bekannt. Im elften Jahrhundert schrieb Abraham ben Chija eine verdienstliche mathematische Geographie, deren Beweismethoden zum Theile heute noch von Werth sind, der Umfang der Erde war bekannt, und Schriften wie diejenigen des Esthori und

Isaak ben Joseph verrathen eine respectable Bekanntschaft mit geographischer Ortsbestimmung und Parallaxenrechnung. Andererseits freilich herrschten im Talmud und anderen religionsphilosophischen Schriften auch gar viele abenteuerliche Hypothesen, welche im Anschluss an den „Augenspiegel“ Asarja de Rossi's aus Mantua durchmustert werden. Anspielungen auf die Erdrotation finden sich bei Schemtob und im kabbalistischen Buch Sohar. Die Planetentheorie der älteren Juden endlich wird nach dem „Wegweiser der Irrenden“ von Maimonides dargestellt. Zu den beiden letzten Abschnitten hat Moritz Steinschneider in der von ihm redigirten „hebräischen Bibliographie“ einige Correctionen mitgetheilt, welche vielleicht bei späterer Gelegenheit passende Verwendung finden.

Das dritte Heft knüpft an eine im ersten gelegentlich besprochene mittelalterliche Hypothese an, welcher zufolge die Erde und die zu ihr gehörigen Wassermassen zwei excentrisch in einander geschobene Sphären darstellen sollten. Die ersten Keime dieser Irrlehre gehen bis ins Alterthum zurück, wo Strabo die Ansicht, als hätte das Meer nicht überall das gleiche Niveau, bekämpfen zu müssen glaubte. Seneca liess durch eine plötzliche Aenderung dieser Art seine Weltkatastrophen entstehen. Was die Scholastiker anlangt, so huldigten sie durchweg der richtigen Anschauung, dass das flüssige Element in Form einer concentrischen Kugelschale das feste umschliesse, erst Vincenz von Beauvais geht theilweise von ihr ab. Dazu kam, dass arabische Naturforscher eine Anziehung der Erdgewässer nach dem Südpol hin unter dem anziehenden Einfluss der in excentrischer Bahn die Erde umlaufenden Sonne postulirten. Auch Reiseberichte sprachen für eine centrale Anschwellung der Erdfeste in Hochasien, und so bildete sich die Meinung aus, unter dem reichgestirnten Nordhimmel strebe die feste Erde, unter dem sternarmen Südhimmel ein Wasserberg empor. Hiefür erklärten sich besonders Brunetto Latini und Ristoro von Arezzo, wogegen Dante die Ausschreitungen der Lehre energisch bekämpft und bei diesem Bestreben ansehnliche Kenntnisse in Physik und Mechanik an den Tag legt. Einzelne Gelehrte, wie Paulus Burgensis und Capuanus de Manfredonia sprechen sich noch im Sinne dieser Excentricitätshypothese aus, und der Naturphilosoph Patritius hat sich ein selbstständiges von derselben wenigstens nicht weit abweichendes System gebildet, ja Columbus glaubte am Orinoko jene locale Wasseranschwellung wirklich gefunden zu haben.

Gesund und von mathematischer Schärfe sind hier wie allenthalben die Ansichten Copernic's und Lionardo da Vinci's. Weiter wird auseinandergesetzt, wie im vergangenen Jahrhundert durch Lacaille die Vermuthung aufkam, dass die nördliche und südliche Erdhalbkugel sich nicht symmetrisch zu einander verhielten, wie diese Vermuthung in den Hypothesen Wrede's und Lamarck's einen Widerhall fand, welch letztere auf einem Auseinanderliegen des geometrischen und physischen Mittelpunktes beruhte. Endlich werden noch die bekannten zur Erklärung der Eiszeiten ausgesonnenen Theorien Adhémar's und Schmick's einer gedrängten Darlegung und Kritik unterzogen und besonders hervorgehoben, dass eine mathematische Prüfung der letzteren wesentlich den Punkt im Auge zu behalten hat, ob die durch die Attraction der nächsten Himmelskörper beeinflusste flüssige Hülle der Erde eine den Bedingungen der Niveaufläche genügende Oberfläche besitze, oder nicht.

Ansbach. S. Günther.

Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom, historisch und kritisch erörtert. (Ansbacher Gymnasialprogramm für 1876/77.)

Thibaut hatte in seinem genetischen Lehrbuche der Elementarmathematik zuerst den Satz von der Winkelsumme des Dreiecks dadurch bewiesen, dass er einen Strahl successive die drei Aussenwinkel durchlaufen und schliesslich nach einer Drehung von 360^0 in seine Anfangslage zurückkommen liess. Hier wird gezeigt, dass auf dieses Verfahren sowohl in einer selbstständigen Abhandlung von Germar, als auch in den Unterrichtswerken von Kunze und Fischer-Schröder die Parallelentheorie zu begründen versucht worden ist, und dass ihrerseits auch die „Ausdehnungslehre“ Grassmann's von einem ganz ähnlichen Verfahren Gebrauch macht. Zum theoretischen Theile seines Planes übergehend weist der Aufsatz nach, dass der fragliche Beweis von einer bekannten die Vertauschung von Rotation und Translation betreffenden Wahrheit der Kinematik abhängig ist, welche selbst nur wieder mit Hülfe gewisser Eigenschaften des Parallelogramms bewiesen werden kann. Es empfiehlt sich deshalb, jenen Satz in axiomatischer Form an die Spitze des planimetrischen Unterrichtes zu stellen, denn derselbe hat gewiss in hohem Grade die Eigenschaft der Leichtverständlichkeit, aber eine natürliche Consequenz der Anschauung unseres Raumes als einer in sich congruenten dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, wie von gewisser Seite behauptet werden wollte, ist er nicht. Dies wird durch ausführliche Erörterung der Bewegungsverhältnisse auf der Fläche von constanter negativer Krümmung dargethan. Man gelangt so von einer wesentlich anderen Seite her zu der freilich längst anderweit gewonnenen Ueberzeugung, dass die Forderung, durch ebene Constructionen die Parallelenlehre causal zu begründen, einen Widerspruch in sich schliesst.

Ansbach. S. Günther.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie. (München, Ackermann.)

Obwohl speciell auf Wunsch bayerischer Collegen und für die Gymnasialverhältnisse des engeren Vaterlandes bearbeitet, sucht sich diese Schrift doch auch dadurch ein grösseres Publicum, dass sie den gewiss einzig correcten didactischen Gedanken, den historischen Entwickelungsgang der Astronomie auch beim Unterrichte zur Geltung zu bringen, consequenter durchführt, als dies in vielen Schriften von ähnlicher Tendenz geschieht. Sämmtliche Probleme werden stets dann behandelt, wenn die sämmtlichen empirischen Hülfsmittel zu ihrer Lösung bereit vorliegen. So tritt naturgemäss die sphärische Astronomie in den Vordergrund. Topographische Astronomie und Astrophysik, Chronologie und Kartenprojection werden mehr nur anhangsweise behandelt; überall tritt die mathematische Seite des Gegenstandes soweit hervor, als es die angenommenen Vorkenntnisse, darunter natürlich auch sphärische Trigonometrie, nur irgend gestatten. Verf. hat genau nach dem in diesem Buche eingehaltenen Lehrgang mehrfach akademische Vorlesungen gehalten und hält denselben in Folge dessen für vollkommen geeignet, auch diesem erweiterten Zwecke als erste Grundlage zu dienen.

Ansbach. S. Günther.

Ueber die Reduction elementarer astronomischer Probleme auf planimetrische Betrachtungen. (Erscheint in der „Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht“.)

Bei der Ausarbeitung des vorstehend erwähnten Leitfadens drängte sich vielfach die Ueberzeugung auf, dass sehr häufig den meist etwas mechanischen Operationen der Raumtrigonometrie mit grossem Vortheil eine planimetrische substituirt werden könne. Die Note stellt fest, dass dies speciell bei solchen Aufgaben aus pädagogischen Gründen zu geschehen habe, in welchen Bögen kleiner Kugelkreise als integrirende Bestandtheile auftreten. Um einen Anhaltspunkt zu haben, wird eine ziemlich umfassende Aufgabe dieser Art (zur Zeit t nach dem Aufgang eines Gestirnes soll dessen Azimuth und Höhe gefunden werden) einerseits descriptiv, andererseits mit Hülfe der ebenen Trigonometrie behandelt und die Lösung mit der durch sphärische Trigonometrie erzielten in Parallele gesetzt.

Ansbach. S. Günther.

Ueber näherungsweise Kreistheilung. (Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 3. Band.)

Eine eingehende Discussion der zur approximativen Einschreibung regulärer Vielecke einzig bekannten Generalregeln von Renaldin und von Herzog Bernhard von Sachsen-Weimar. Nachgewiesen wird, dass manche andere Methoden, welche anscheinend einen selbstständigen Charakter tragen, mit der erstgenannten identisch seien, so diejenige, welche Steczkowski im 25. Bande von Grunert's Archiv und diejenige, welche V. Schlegel im 22. Bande von Schömilch's Zeitschrift untersucht haben.*) Die Fehlercurven beider Verfahrungsweisen werden construirt und erklärt; beide bieten merkwürdige Erscheinungen.

Ansbach. S. Günther.

*) Als ein immerhin bemerkenswerther historischer Fund möge die bei diesem Anlass constatirte Thatsache bezeichnet werden, dass die Unrichtigkeit der Renaldin'schen Vorschrift nicht, wie man bisher allgemein annahm, zuerst von Jacob Bernoulli, sondern mehrere Jahre früher in einer Königsberger Dissertation bewiesen ward.

Die Anschauungen des Thomas von Aquin über die Grundsätze der mechanischen Physik. (Kosmos, 1. Jahrg. 3. Heft.)

Dass auch der in der Geschichte der Naturwissenschaften verhältnissmässig wenig genannte Schüler des Albertus Magnus, Thomas Aquinas, über gewisse Hauptfragen in einer überraschend richtigen Weise geurtheilt habe, diess zu zeigen ist der Endzweck dieser Note. Nachdem in kurzen Zügen das Wesen der aristotelischen Physik gekennzeichnet worden, wird Thomas' Stellung zu der Frage vom Perpetuum mobile als eine durchaus negative geschildert, hierauf wird nach den betreffenden Quellen erhärtet, dass er das Erwärmtwerden schnell bewegter Körper durchaus richtig „ex vehementia motus" ableitet und überhaupt die Wärme, die er als vom Lichte unzertrennlich betrachtet, als eine oscillatorische Bewegung definirt, eine Erklärungsweise, welche er der angeblich von Demokrit verfochtenen Emanationstheorie ausdrücklich gegenüberstellt.

Ansbach. S. Günther.

Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik. (Abhandlungen d. kgl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften, 6. Folge, 9. Band.)

Diese Studie ist der weiteren Ausführung einer in der ersten Sektion der Münchener Naturforscherversammlung gegebenen und in deren Berichten enthaltenen Notiz gewidmet. Obschon auf historischem Boden beruhend ist sie gleichwohl selbst zunächst nicht geschichtlicher Natur, sondern sie soll lediglich ersehen lassen, wie die bei alten Mathematikern vorkommenden Näherungswerthe heutzutage auf möglichst kurzem und elegantem Wege eruirt werden können. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Sarosperiode der Babylonier und der altaegyptischen Verhältnisszahl $\pi = \frac{256}{81}$, der zweite mit den chronologischen Reformen des Cleostratus und Meton nnd besonders ausführlich mit den Quadratwurzeln des Heron Alexandrinus. Alsdann kommen die archimedischen Irrationalzahlen und diejenigen neueren Versuche an die Reihe, welche die Entstehung jener divinatorisch zu begründen bestimmt waren; dieselben rühren von Lagny, Hauber und Buzengeiger her und kommen sämmtlich in einer mehr oder minder versteckt liegenden

Kettenbruchentwickelung überein. Die sechzigtheilige Berechnung der Quadratwurzel, welche von Theon angegeben worden, wird, was bis jetzt noch niemals versucht worden zu sein scheint, in algebraische Formeln gekleidet. Zum Schlusse wird ein in den mathematischen Sammlungen des Pappus gelehrtes Constructionsverfahren zur Auflösung des delischen Problemes, resp. zur Extraction von Cubikwurzeln, analytisch untersucht und als ein consequent mit sehr rascher Convergenz fortschreitender Algorithmus erkannt.

Ansbach. S. Günther.

Ferrini: Fisica tecnologica — Elettricità e magnetismo. (Di Rinaldo Ferrini, prof. nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. Milano, Hoepli 1878.)

Questo libro contiene l'esposizione delle principali applicazioni dell' elettricità e del magnetismo fondata sulla teoria dei potenziali che vi è premessa. L'autore ha cercato di mettersi a livello dello stato attuale della scienza e delle applicazioni, estendendosi particolarmente sui metodi di misurazione che offrono tanta importanza sia dal lato teorico che da quello pratico. Parecchie questioni sono trattate ex-novo.

Sulla resistenza delle eliche degli elettromagneti telegrafici. (Nota del prof. R. Ferrini letta al R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere il 31 Gennajo 1878.)

Lo scopo di questa Nota è di mostrare che le divergenze tra i dettami della esperienza e quelli della teoria intorno la piú utile resistenza delle eliche degli elettromagneti telegrafici sono di pura apparenza e derivano dal modo improprio di calcolare la resistenza delle linee telegrafiche.

Mailand. Ferrini.

E. Bertini: Una nuova proprietà delle curve di ordine n con un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$. (Transunti della R. Accad. dei Lincei, Vol. I, Serie III.)

La proprietà è la seguente: — Data una curva Γ d'ordine n $(\geq 2t)$ con un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$ O, esiste un sistema $\Sigma^{(2t)}$ (lineare achten will, die Modulargleichung in der oben mitgetheilten Form ein specieller Fall dieses Problems: derjenige, in welchem f insbesondere den Werth Null hat. Die Frage ist also nur noch, wie man das allgemeine Problem der λ, μ, ν auf dieses specielle zurückführt? Dies geschieht mit Hülfe einer Gleichung vierten Grades, die sich, wie man aus den Eigenschaften der Curve $f=0$ zeigen kann, nicht vermeiden lässt. Es seien nämlich λ', μ', ν' die Unbekannten des „speciellen" Problems; f', ∇' etc. seien die Werthe, welche f, $\nabla, \cdot\cdot$ annehmen, wenn man λ', μ', ν' in sie einträgt. So schreibe man folgende Gleichungen:

$$f'=0,$$
$$\lambda'\lambda+\mu'\mu+\nu'\nu=0,$$
$$\frac{-C'^3}{1728\,\nabla'^7}=J.$$

Dann giebt die Elimination von $\lambda':\mu':\nu'$ für J eine Gleichung vierten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen von f, ∇, C, K d. h. von bekannten Grössen sind, die man also a priori aufstellen kann. Eine Wurzel dieser Hülfsgleichung vierten Grades hat man zu bestimmen; sie heisse J_1. Dann hat man die Modulargleichung:

$$f'=0, \qquad \frac{-C'^3}{1728\,\nabla'^7}=J_1,$$

und berechnet, wenn man sie gelöst hat, die λ, μ, ν des ursprünglichen Problems und also die $x_0, x_1, \cdots x_6$ der vorgelegten Gleichung siebenten Grades auf rationalem Wege.

München. F. Klein.

Siegm. Günther: Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. (Halle, Verlag von Louis Nebert.) IV. Heft. **Analyse einiger kosmographischer Codices der Münchener Hof- und Staatsbibliothek. 1878.** V. Heft. **Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur Geschichte der mathematischen und physischen Erdkunde. 1878.** VI. (Schluss-) Heft. **Geschichte der loxodromischen Curve. 1879.**

Das 4. Heft der Sammlung beschäftigt sich mit drei mittelalterlichen Handschriften. Aus der ersten derselben werden mehrere meteorologische und astronomische Daten — insbesondere über die Eintheilung der Windrose, die Grössenverhältnisse der Planetensphären u. a. — mitgetheilt, welche für die Geschichte dieser Wissenschaften Interesse bieten. Der zweite Codex enthält eine detaillirte Anweisung zur Verzeichniss solcher Plattkarten, wie sie das Mittelalter fast ausschliesslich anwandte. Wir finden hier ein Verzeichniss geographischer Ortsbestimmungen, eine Eintheilung des Grades in Centesimaltheile und eine Regel zur Messung der Entfernung d zweier durch Breite β_1, β_2 und Länge λ_1, λ_2 fixirten Erdorte, welche mit der bekannten Formel der Coordinatengeometrie

$$d = \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

identisch ist. An dritter Stelle wird ein Bruchstück aus einer theologischen Abhandlung Johann's von Gmünden mitgetheilt und besprochen, welches einen gedrängten Ueberblick über die kosmographischen Anschauungen des beginnenden fünfzehnten Jahrhunderts bietet.

Der Nürnberger Mathematiker Werner (1470—1530) hat in seiner Bearbeitung des ersten Buches von Ptolemaeus' Geographie mit vielen Fragen fördernd sich beschäftigt, deren Stellung in der Geschichte bislang nicht gehörig gewürdigt schien. Werner ist es, der die Bestimmung der Polhöhe durch Beobachtung der beiden Culminationen eines Circumpolarsternes lehrte, der für die Bestimmung der Breite ein neues handlicheres Instrument angab und dessen Fehler zu berichtigen versuchte, der endlich eine Reihe neuer, scharfsinniger Projektionsmethoden erfand, von denen eine mit dem Charakter der Aequivalenz ausgestattet ist. In seinen Anhängen zur mathematischen Geographie des Amiruccius hat Werner die Fundamentalprobleme der sphärischen Trigonometrie in durchaus origineller Weise behandelt. Schliesslich ward auf das richtiger Gedanken keineswegs baare astrometeorologische System des eifrigen Witterungsbeobachters näher eingegangen. Hingegen blieb die bekannte Monographie über die Eigenbewegung der achten Sphäre und das gegen diese gerichtete Sendschreiben Coppernic's an Wapowski absichtlich ausser Acht, da diese Gegenstände dem Gebiete der reinen Astronomie zu nahe liegen.

Die Loxodrome galt bis zur Mitte des sechszehnten Säkulums ganz allgemein und noch zwei Jahrhunderte länger beim grossen Haufen der Praktiker als gerade Linie, resp. als Stück eines grössten Kreises. Raymundus Lullus und der anonyme Verfasser des für die Geschichte der Mathematik hochwichtigen „Martologio" behandeln sonach die loxodromische Curve als Spezialfall der gewöhnlichen Trigonometrie. Pedro Nunez erkannte die Eigenart der Schifffahrtscurve, Stevin behandelte dieselbe zuerst mathematisch, in Snellius' „Tiphys Batavus" ward die Theorie der nunmehr als „Loxodrome" bezeichneten Linie systematisch dargestellt, und durch Mercator-Wright kam die hohe Bedeutung derselben für die cylindrische Projection zur Geltung. Indess krankten noch sämmtliche theoretische Betrachtungen an dem Uebelstand, das zwei charakteristische Curvendreiecke ohne Rücksicht auf deren Lage als congruent angenommen wurden, während sie doch thatsächlich nur einander ähnlich sind. Leibnitz und Jakob Bernoulli halfen diesem Mangel ab und wandten auf das ihnen sehr willkommene Objekt die neue Differentialrechnung an. Die Ausdehnung der loxodromischen Aufgabe auf beliebige Rotationsflächen bahnte Walz an, während Halley den Satz auffand, dass das stereographische Abbild der Kugel-Loxodrome eine logarithmische Spirale ist. Den Fall des Sphäroides, als den für die Praxis interessantesten, studirten eingehend Maclaurin, Simpson, Maupertuis und Schubert. Kästner stellte das bis zu seiner Zeit Geleistete für den Gebrauch des Mathematikers zusammen, Bouguer, Kaschub und Robertson thaten ein Gleiches zum Besten der Schifffahrt. Im neunzehnten Jahrhundert endlich war es besonders Grunert, dessen Arbeiten einen wichtigen Fortschritt charakterisiren; eine neue Perspektive eröffnet der loxodromischen Theorie deren neueste Verallgemeinerung durch Biehringer. — Referent bedauert lebhaft, die zweite Auflage der bekannten Breusing'schen Monographie über Mercator nicht mehr haben benützen zu können, welche mehrfach neues Material für seine Zwecke beibringt, und auf welche, als Ergänzung, demnach hier ausdrücklich hingewiesen werden möge.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Von der expliciten Darstellung regulärer Determinanten aus Binomialcoëfficienten. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 24. Jahrgang, 2. Heft.)

„Regulär" wird hier eine Determinante von folgender Struktur genannt:

$$\begin{vmatrix} \binom{m_1}{n_1} & \binom{m_1}{n_2} & \binom{m_1}{n_3} & \cdots & \binom{m_1}{n_p} \\ \binom{m_2}{n_1} & \binom{m_2}{n_2} & \binom{m_2}{n_3} & \cdots & \binom{m_2}{n_p} \\ \binom{m_3}{n_1} & \binom{m_3}{n_2} & \binom{m_3}{n_3} & \cdots & \binom{m_3}{n_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m_p}{n_1} & \binom{m_p}{n_2} & \binom{m_p}{n_3} & \cdots & \binom{m_p}{n_p} \end{vmatrix}$$

Es wird gezeigt, dass und wie eine solche Determinante auf eine bekannte und von Naegelsbach eingehend erörterte Funktion zurückgeführt werden kann. Auf Aggregate solcher Determinanten reduciren sich aber auch die Bernoulli'schen Zahlen.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Eine Relation zwischen Determinanten und Potenzen. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 24. Jahrgang, 4. Heft.)

Eliminirt man x aus der Function

$$f_{(x)} \equiv x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$$

und deren erster Ableitung

$$f'_{(x)} = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$$

im Sinne der dialytischen Methode, so hat die resultirende Determinante den Werth

$$(2+n)^n.$$

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Einfache Methode der Berechnung der regulären Körper. (Zeitschr. f. d. Realschulwesen. 4. Jahrgang, 1. Heft.)

Im Gegensatz zu allen bisherigen Verfahrungsweisen stereometrischer Natur wird hier von der Eintheilung der Sphäre in congruente Figuren ausgegangen. Fast ohne Rechnung gelingt es, die allgemeinen Ausdrücke für die Radien der einbeschriebenen, umbeschriebenen und kantenberührenden Kugeln hinzuschreiben. Die sphärische Trigonomotrie participirt dabei lediglich mit der einfachen Aufgabe: Aus den Winkeln eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks dessen Basis zu berechnen.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Beitrag zur Theorie der congruenten Zahlen. (Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften, November 1878.)

„Congruent“ wird nach Woepcke's Vorgang eine ganze Zahl a dann genannt, wenn das System zweier simultanen Gleichungen

$$x^2 + a = y^2, \quad x^2 - a = z^2$$

rationale Auflösungen zulässt. Es wird dargethan, dass die Lösung dieses Systemes, sowie die Untersuchung des Charakters von a auf eine Generalisirung des Pell'schen Problemes, resp. auf die Diskussion des Wurzelausdruckes

$$\sqrt{\frac{a}{m - m^3}}$$

hinausläuft. Zahlreiche Beispiele sprechen für die bequeme Verwendbarkeit dieser Formel.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Anwendung schiefwinkliger Coordinaten auf ein Problem der Potentialtheorie. (Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften, Januar 1879.)

Nach einer geschichtlichen Einleitung über die frühere Verwendung schiefwinkliger Coordinatensysteme wird das Potential eines homogenen Tetraëders für einen seiner Endpunkte aufgestellt und nachgewiesen, dass das bezügliche dreifache Integral elementar ausgewerthet werden kann. Hierauf wird ein anscheinend neuer Lehrsatz bewiesen, aus welchem die Anziehung des Tetraëders — und damit auch eines willkürlichen Polyëders — ohne jede weitere Integration abgeleitet werden kann, sobald sie für einen der Eckpunkte gefunden ist.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Das mathematische Grundgesetz im Bau des Pflanzenkörpers. (Kosmos. 4. Band.)

In der historischen Entwickelung der bekannten Theorie, welcher zufolge die Anordnung der Blattstiele an Pflanzenstengeln, der Schuppen an Nadelholzzapfen u. s. w. nach bestimmten mathematischen Gesetzen sich richtet, werden drei verschiedene Stadien unterschieden. Schimper und Braun fixirten die von Bonnet blos geahnte Idee mit Hülfe der Kettenbrüche, resp. der Lamé'schen Reihen, Zeising brachte diese Erfahrungsthatsache in allerdings noch sehr phantastischer Weise mit dem goldenen Schnitt in Verbindung, Schwendener endlich deckte die mechanischen Fundamentalbeziehungen zwischen der einen und anderen Auffassung auf. Zumal auf die arithmetischen Eigenschaften der Blattstellung wird in der Abhandlung im Detail eingegangen.

Ansbach. S. Günther.

Siegm. Günther: Die mathematische Sammlung des germanischen Museums zu Nürnberg. (Leopoldina 1878.)

Bericht über diese vom Referenten neu geordnete Sammlung. Von interessanteren Stücken derselben werden ein geodätisches Universalinstrument, die Planetenuhr des bekannten Pfarrers Hahn und eine von dem Nürnberger Astronomen Wurzelbauer herrührende Collektion grösserer Instrumente (zum Theil mit Tycho'schen Circulartransversalen) hervorgehoben.

Ansbach. S. Günther.

Sophus Lie: Neue Integrationsmethode der Monge-Ampère'schen Gleichung. (Archiv for Math. og Naturvidenskab, Bd. 2, p. 1—9. Christiania 1876—1877.)

Eine partielle Differentialgleichung 2. O. der Form

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0 \tag{1}$$

mit zwei distincten und allgemeinen intermediären Integralen

$$u_1 - f(v_1) = 0, \qquad u_2 - \varphi(v_2) = 0$$

erhält durch eine zweckmässige Berührungstransformation die Form

$$s = 0.$$

Wünscht man eine solche Gleichung (1) zu integriren, so bildet man nach Bour die beiden vollständigen Systeme, deren Lösungen bez. $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$ sind. Gelingt es, zu jedem Systeme *eine* Lösung zu finden, so verlangt die Integration von (1) nur eine Anzahl Quadraturen.

Sophus Lie: Theorie des Pfaff'schen Problems. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 2, p. 338—379. Christiania 1876—1877.)

Die Reductibilität eines Pfaff'schen Ausdrucks

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n$$